Matematica, Cultura e Società

Rivista dell'Unione Matematica Italiana

Riccardo Rosso

Pascal e la nascita del calcolo delle probabilità

Matematica, Cultura e Società. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **8** (2023), n.1, p. 43–56.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=RUMI_2023_1_8_1_43_0>

Matematica, Cultura e Società. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2023.

Matematica, Cultura e Società – Rivista dell'Unione Matematica Italiana
Serie I, Vol. 8, N. 1, aprile 2023, 43-56

Pascal e la nascita del calcolo delle probabilità

Riccardo Rosso
Università degli Studi di Pavia
E-mail: riccardo.rosso@unipv.it

Sommario: *La corrispondenza che Fermal e Pascal tennero nel 1654 su problemi relativi a giochi d'azzardo è presa come atto di nascita dello studio matematico della probabilità. In questa nota esamino il contenuto della corrispondenza ed i passi del* Traité du Triangle Arithmétique *nei quali Pascal risolse in forma chiusa il problema della ripartizione della posta tra due giocatori. Infine, accennerò al problema della rovina del giocatore ed alla "scommessa", presentata nei* Pensieri.

Abstract: *The 1654 correspondence between Fermal and Pascal on problems concerning game of chances is usually assumed as the beginning of the mathematical theory of probability. In this note I examine the contents of the correspondence and the points of the* Traité du Triangle Arithmétique *where Pascal provided a closed solution of the problems of points between two players. Finally, I will mention the ruin problem and the "wager" that Pascal discussed in his* Pensées.

1. – Introduzione

La nascita del calcolo delle probabilità è tradizionalmente legata alla corrispondenza intercorsa tra Blaise Pascal e Pierre de Fermat durante il 1654 su alcuni problemi relativi al gioco d'azzardo. Buona parte della corrispondenza, pervenutaci comunque in forma incompleta, fu pubblicata nel 1679 nella prima edizione delle Opere di Fermat (*Varia Opera Mathematica*) ma Christiaan Huygens ne era venuto a conoscenza durante un soggiorno a Parigi, nel 1655: lo studio dei problemi affrontati da Fermat e Pascal lo metterà in grado di redigere il *De Ratiociniis in Ludo Aleae* che, pubblicato nel 1657, divenne il primo testo a stampa sulla probabilità.

Ogni storia ha però una preistoria e quella del calcolo delle probabilità non fa eccezione. Il problema principale trattato da Fermat e Pascal, quello della ripartizione della posta, era già stato affrontato più volte e con alterne fortune. Dopo aver illustrato rapidamente alcuni dei tentativi di soluzione, tratteggerò il contesto che fa da sfondo alla corrispondenza prima di esaminarne i passi principali e di analizzare alcune sezioni del *Traité du Triangle Arithmétique*, publicato postumo nel 1665. Infine, tratterò brevemente del problema della rovina del giocatore e della celebre *scommessa*.

2. – La suddivisione della posta prima di Pascal

Nella forma più semplice, il problema della suddivisione della posta o problema delle parti o, ancora, problema dei punti, può essere espresso in questi termini: due giocatori G_1 e G_2 scommettono uguali cifre di denaro che costituiranno il montepremi di un gioco che prevede lo svolgimento di più partite, ciascuna delle quali assegna un punto al vincitore e nessuno al perdente. L'intero montepremi sarà assegnato a chi per primo raggiungerà n punti. Il gioco è però interrotto quando G_1 ha ottenuto α punti e G_2 β punti, con α e β entrambi inferiori ad n. Si

Accettato: il 6 aprile 2023.

domanda come occorra ripartire la posta in questa circostanza.

La storia di questo problema è stata in parte riscritta grazie al ritrovamento di due manoscritti anonimi risalenti alla fine del XIV e all'inizio del XV secolo nei quali esso era stato affrontato con successo [Toti Rigatelli, 1985, Franci, 2002, Meusnier, 2007]. Il primo manoscritto, le *Regole del'Alzibra*, riguarda il caso con due giocatori coinvolti mentre il secondo manoscritto è di interesse particolare perché l'autore mostra di essere in possesso di un metodo ricorsivo *generale* per risolvere il caso difficile in cui vi siano tre giocatori e che non differisce in sostanza dai metodi corretti che saranno proposti molto tempo dopo. In matematica, come nella scienza in generale, non sempre il progresso evolve in modo uniforme nel tempo e così tutte le soluzioni proposte in seguito, tra gli altri, da Filippo Calandri – un maestro d'abaco senese attivo nella seconda metà del XV secolo – Luca Pacioli, Niccolò Fontana (Tartaglia) e Lorenzo Forestani – autore di una *Pratica d'Arithmetica e Geometria* – sono scorrette e tradiscono la difficoltà a fornire una risposta precisa ad un problema che coinvolge un evento aleatorio. Per esempio, Calandri osservò [Bottazzini, Freguglia, Toti Rigatelli, 1992, p. 349]:

> ma perché e gl'è giuoco di fortuna non si risponde assolutamente che questo sia la verità apunto.

Tartaglia [Fontana, 1556, Libro XVI, Sez. 206] dimostrò anche un certo fastidio per un problema la cui soluzione

> è più presto giudiciale, che per ragione, tal che in qual si voglia modo la sarà risolta vi si trovarà da litigare.

La risoluzione proposta da Gerolamo Cardano nella *Practica Arithmeticae et Mensurandi Singularis*, pubblicata nel 1539, pur essendo errata contiene delle osservazioni interessanti su quali dovessero essere i principii da seguire per una corretta divisione della posta. Anzitutto egli sottolineò con forza che tutto dipende dal numero dei punti *mancanti* al conseguimento del successo. Inoltre Cardano trasformò la regola di suddivisione della posta in una regola per una nuova scommessa da effettuare per riprendere il gioco dopo l'interruzione, senza che i punteggi siano azzerati [Coumet, 1965]: per garantire l'equità del gioco dopo la sospensione occorre che un giocatore punti una somma tanto più alta quanto più è vicino a totalizzare i punti necessari per aggiudicarsi il montepremi. La traduzione quantitativa che Cardano offrì di questo precetto non si basava però su una precisa stima del rischio e pertanto non fornisce i risultati che si otterrebbero da una corretta analisi dei casi possibili.

3. – Il contesto della corrispondenza tra Fermat e Pascal

Il 1654 fu un anno cruciale nella vita di Pascal, culminato con la decisione di ritirarsi presso l'abbazia di Port-Royal des Champs dove si trovava già da un paio d'anni Jacqueline, una delle tre sorelle. È l'anno dunque del congedo dalla vita mondana ma non dalla ricerca scientifica, come testimoniato anche dagli scritti sulla cicloide del 1658, pubblicati con lo pseudonimo di Amos Dettonville, a sua volta un anagramma di Louis de Montalte, (1) nome con cui Pascal aveva celato la propria identità nelle *Lettere Provinciali* [Adamson, 1995, p. 11]. Nella prima metà del 1654 Pascal indirizzò alla *Celeberrima Accademia Parigina delle Matematiche* uno scritto dove elencava una serie di temi a cui aveva lavorato dopo il 1651, l'anno nel quale, in seguito alla morte del padre Étienne, egli si era allontanato da Parigi per far ritorno nella città natale di Clermont.

L'identità di questa accademia è stata oggetto di diverse ipotesi. Ancora ragazzo, nel 1639 Pascal era stato introdotto dal padre alle riunioni scientifiche che si tenevano a Parigi sotto la guida di Marin Mersenne e che costituirono il primo nucleo di quella che diverrà, nel 1666, l'Académie des Sciences. Qui Pascal aveva potuto conoscere, tra gli altri, Desargues, Gassendi e Roberval. Dopo la morte di Mersenne nel 1648 l'organizzazione delle riunioni scientifiche fu gestita da Jacques Le Pailleur che pure aveva fatto parte dell'"Accademia Mersenne" [Mesnard, 1963]. Tra i problemi illustrati a questo

(1) u=v.

manipolo di studiosi (2) Pascal [2020, p. 347] diede rilievo ad

> uno studio del tutto nuovo che verte su una materia completamente inesplorata, cioè, sulle combinazioni del caso nei giochi soggetti a esso, ciò che si chiama nella nostra lingua francese *faire les partis des jeux*.

Il problema cui allude Pascal è proprio il problema delle parti e nello scritto all'accademia parigina egli procede con toni enfatici che tradiscono la soddisfazione per i risultati ottenuti [PASCAL 2020, p. 347]:

> la cosa è rimasta incerta fino a oggi; ma ora questa questione del caso, che non si assoggettava alla sperimentazione, non si è potuta sottrarre al dominio della ragione. Infatti, l'abbiamo ridotta in arte grazie alla geometria in modo così sicuro che, resa partecipe della certezza di questa, l'arte progredisce ormai con audacia; e unendo così le dimostrazioni delle matematiche all'incertezza del caso, e conciliando ciò che sembra contrario, acquisendo la sua denominazione da entrambi, si arroga a buon diritto questo titolo stupefacente: *Geometria del Caso* (*geometria aleae*).

Pascal non usa l'espressione "calcolo delle probabilità" ma "geometria del caso" e non si tratta di una scelta casuale. Il termine probabilità aveva una connotazione diversa da quella odierna ed anche Huygens non se ne servì nel *De Ratiociniis*. Tra i significati che il termine "probabile" aveva all'epoca, vi era quello di "degno di approvazione" ovvero "che ha ricevuto l'approvazione di una qualche autorità". (3) Per restare in campo matematico, troviamo un esempio di quest'uso in un breve lavoro pubblicato nel 1629 da Albert Girard in coda all'*Invention Nouvelle en l'Algèbre*: il *De la mesure de la superfice des triangles & polygones sphericques, nouvellement inventée*, dove trovò la relazione tra l'eccesso angolare di un triangolo sferico e la sua superficie. Al termine della dimostrazione, Girard [1629] scrisse:

> La verità del teorema è evidente e probabile. (4)

La verità del teorema è appunto *probabile* perché la conclusione è degna di *approvazione*.

Nel caso di Pascal c'era un ulteriore motivo per evitare la parola probabilità. Egli fu infatti nemico acerrimo del *probabilismo* che, in mano ad alcuni teologi gesuiti – contro i quali scrisse le *Lettere Provinciali* – era divenuto il puntello di una morale lassista. Sulla scorta del probabilismo, di fronte ad una scelta che portava a condotte di comportamento diverse e sulla quale i teologi morali avevano dato pareri difformi, seguire l'opinione meno probabile – perché sostenuta da un minor numero di autorità – non era sbagliato.

D'altra parte, nella *Logica sive Ars Cogitandi*, pubblicata anonima nel 1662 ed attribuita ad Antoine Arnauld e Pierre Nicole, esponenti di spicco del giansenismo (5) di Port-Royal, compare il termine probabilità anche nel senso vicino a quello attuale. Parlando del timore di morire folgorati, nel Capitolo XV della IV parte della *Logica*, dedicato al modo di giudicare circa gli eventi futuri contingenti, leggiamo [ARNAULD, NICOLE, 1694, pp. 382-383]: (6)

> Sarebbe forse esagerato dire che una persona su due milioni è morta per folgorazione; tra le morti violente, questa è una delle meno comuni. La paura di subire un danno dovrebbe essere proporzionale non soltanto alla sua gravità, ma anche alla probabilità che esso si verifichi effettivamente; perciò, visto che

(2) Il nome "Accademia" non deve fare pensare ad una struttura con norme codificate. Si trattava di incontri informali tra studiosi che, dopo Mersenne, non sempre furono tenuti con regolarità, anche per il clima venutosi a creare in seguito alla fronda parlamentare contro il Cardinal Mazzarino [MARONNE, 2021].

(3) Non è possibile intraprendere qui uno studio sull'etimologia della parola "probabile" che ci condurrebbe almeno al greco antico dove vi erano due parole dal significato *potenzialmente* probabilistico [FRANKLIN, 2015, p. 103]: *pithanon* che si può rendere con plausibile o persuasivo; *eikos* che significa letteralmente "come" ma che era spesso usato nella stessa accezione della parola inglese *likely*. In epoca Romana, Cicerone utilizzò la parola *probabile* in un senso vicino a quello di *pithanon*, per esempio quando nel *De Partitione Oratoria* definì l'argomentazione come *probabile inventum ad faciendam fidem*. Rimando al testo di Franklin per una discussione approfondita.

(4) La verité du Theoreme est manifeste et probable.

(5) Il giansenismo fu un movimento religioso che si rifaceva alle idee del teologo cattolico olandese Cornelis Jansen ed improntato ad una visione negativa dell'uomo, incapace di compiere il bene se non con l'aiuto della grazia divina che predestina alcuni alla salvezza ed altri alla dannazione eterna.

(6) Traggo la citazione, presente anche nel saggio di Hacking [1987], dalla quinta edizione della *Logica*, pubblicata nel 1694.

> quasi non esiste morte più rara di quella per folgorazione, questa dovrebbe provocare meno paura di ogni altra.

Una parola con un ampio spettro di significati non si prestava dunque a tradurre una nuova idea matematica in modo chiaro e distinto.

Al di là di questo, resta il fatto che Pascal mostra piena consapevolezza di avere annesso al ferreo controllo della matematica i capricci del caso, colmando un solco tracciato da Aristotele nella *Metafisica* [ARISTOTELE, 1974, p. 481]:

> Che nessuna delle scienze che ci sono state trasmesse tratti dell'accidente è chiaro (...). Che la scienza non possa avere per oggetto l'accidente , risulterà evidente a coloro che tenteranno di vedere che cos'è mai l'accidente. (...) L'accidente è ciò che avviene, ma non sempre né di necessità né per lo più. (...) Ogni scienza è di ciò che è sempre o per lo più, mentre l'accidente non è in nessuna di queste due specie di essere.

4. – La corrispondenza tra Fermat e Pascal

Siméon-Denis Poisson [1837, p. 1] ha cristallizzato la nascita del calcolo delle probabilità in una frase divenuta famosa:

> Un problema relativo ai giochi d'azzardo che un uomo di mondo propose ad un austero giansenista è stato l'origine del calcolo delle probabilità.

L'austero giansenista è Pascal mentre l'uomo di mondo è Antoine Gombaud, cavaliere de Méré, che condivideva con Pascal l'amicizia con Artus Gouffier, duca di Roannez, animatore di un vivace circolo culturale parigino e dotato di una spiccata inclinazione verso la matematica.

Scrivendo a Fermat il 29 luglio 1654, Pascal si espresse in questi termini: [PASCAL, 2020, p. 301] ([7])

> Non ho il tempo di inviarvi la dimostrazione di un difficile problema che stupiva molto M[éré]..., perché egli ha una mente molto brillante, ma non è un geometra. Ciò, come sapete, è un grande difetto. (...) Se si prova a fare un sei con un dado, c'è la possibilità favorevole di ottenerlo in 4 tiri, come da 671 a 625. Se si prova a ottenere un doppio sei con due dadi, c'è la possibilità sfavorevole di ottenerlo in 24 tiri.

Problemi di questo tipo non erano nuovi: Cardano ne aveva risolto uno simile oltre un secolo prima nel *Liber de Ludo Aleae* che sarà pubblicato però solo nel 1663, nel primo volume delle opere dell'eclettico scienziato pavese. ([8]) Anche il problema delle parti fu proposto da de Méré. Nella lettera del 29 luglio Pascal espose una soluzione che è diversa da quella – basata sull'elencazione di tutti i casi che possono presentarsi – proposta da Fermat. Fermat aveva comunicato il suo *metodo delle combinazioni* in una lettera andata perduta ma Pascal, dopo averlo elogiato, qualifica il proprio metodo come *più breve e più chiaro* (*plus courte et plus nette*). Si tratta di un metodo ricorsivo che Pascal illustrò nel caso di due giocatori che si affrontano al meglio dei tre punti, scommettendo ciascuno 32 pistole. ([9]) Pascal studiò il problema delle parti quando uno dei giocatori – G_1 – ha conquistato due punti e l'altro – G_2 – uno. Egli esaminò gli esiti possibili della partita successiva: se G_1 vincesse, si aggiudicherebbe l'intera posta di 64

([7]) Questa lettera è la prima, tra quelle pervenuteci, ad essere datata. Pascal ricevette una lettera, senza data, da cui emerge un po' di incertezza sui principii da seguire nel risolvere i problemi sul gioco d'azzardo. Sulla paternità di questa lettera, attribuita dai più a Fermat, Meusnier [2009] ha avanzato qualche riserva. In ogni caso, la corrispondenza tra Fermat e Pascal sui giochi d'azzardo iniziò prima del 29 luglio.

([8]) Il valore 671:625 si ottiene osservando che, preso $\frac{1}{6}$ come misura della probabilità di ottenere 6 lanciando un dado, la probabilità di non ottenere mai 6 in quattro lanci è

$$\left(1-\frac{1}{6}\right)^4=\left(\frac{5}{6}\right)^4=\frac{625}{1296}$$

per cui la probabilità di ottenere almeno un 6 in quattro lanci è $1-\frac{625}{1296}=\frac{671}{1296}>\frac{1}{2}$ e si ha dunque vantaggio a scommettere di riuscire ad ottenere almeno un 6 in quattro lanci, nel rapporto 671 a 625. Il secondo problema ha una risoluzione analoga. Poggiando sul concetto di probabilità, non è plausibile che Fermat e Pascal abbiano utilizzato questo ragionamento. Una possibile ricostruzione si trova in [ABOUT, BOY, 1983, pp. 25-27].

([9]) Il termine *pistola*, derivato da *piastola*, piccola piastra, era usato per indicare una moneta d'oro coniata per la prima volta in Spagna verso la metà del XVI secolo. La parola fu poi impiegata in senso estensivo per indicare anche altre monete d'oro europee, di valore simile a quella spagnola. Equivaleva a due escudi e per questo era detta anche *doblone*.

pistole; se vincesse G_2 ci sarebbe parità e dunque ciascuno dovrebbe riprendersi le 32 pistole scommesse all'inizio. Qualunque cosa succeda, G_1 si è garantito 32 pistole ma, poiché Pascal ipotizzò che i due giocatori avessero le stesse possibilità di vincere, a G_1 spetterà anche la metà delle 32 pistole rimaste e dunque potrà esigere 48 pistole [cfr. PASCAL, 2020, p. 295]: ([10])

> Ecco pressappoco come faccio a conoscere il valore di ciascuna delle quote, quando due giocatori giocano, per esempio, in tre partite, e ciascuno ha puntato 32 pistole. Supponiamo che il primo ne abbia vinte due e l'altro una. Essi giocano ora una partita, il cui esito è tale che, se il primo la vince, vince tutti i soldi messi in gioco, cioè 64 pistole; se la vince l'altro, essi sono pari, e di conseguenza, se essi vogliono separarsi, occorre che ritirino ciascuno la loro puntata, cioè ciascuno 32 pistole. Considerate dunque, Signore, che se vince il primo, gli toccano 64 pistole; se invece perde, gli spettano 32 pistole. Dunque se essi non vogliono mettere a repentaglio quella partita e intendono separarsi senza giocarla, il primo deve dire: "Io sono certo di avere 32 pistole, anche se perdo la partita; ma per le altre 32 pistole, le avrò forse io, o forse le avrete voi, il caso è equivalente; pertanto dividiamo a metà queste 32 pistole e datemi, oltre a ciò, le mie 32 che mi spettano". Egli avrà dunque 48 pistole, mentre l'altro ne avrà 16.

Formalmente, Pascal calcolò la media aritmetica delle somme che spetterebbero a G_1 nel caso di vittoria o di sconfitta della partita che si decide di non effettuare. Nel *Traité* scriverà [PASCAL, 2020, p. 475]:

> E pertanto, se in caso di perdita gli spetta A, e in caso di vincita $A + B$, la quota parte è che egli prenda $A + \frac{1}{2}B$.

Se la partita è sospesa quando G_1 ha due punti e G_2 zero: G_1 potrebbe aggiudicarsi tutte le 64 pistole, vincendo la partita ma, se perdesse, il punteggio sarebbe di due punti contro uno a suo favore e dunque, per quanto appena visto, gli spetterebbero 48 pistole. La regola di Pascal porta ad assegnare 56 pistole a G_1. Similmente, se la sospensione del gioco avvenisse quando G_1 ha un punto e G_2 nessuno, G_1 avrebbe diritto a 44 pistole.

La lettera del 29 luglio si chiude con alcune considerazioni circa il valore da attribuire alla prima e all'ultima partita. Il nocciolo della questione è che ogni partita ha un valore che dipende dal momento in cui è giocata, da quanto è lontana la vittoria per i contendenti. Dietro al problema c'è l'idea, già presente in altri autori, che nel momento in cui i contendenti accettano di giocare, le quote versate non appartengono più a loro ma fanno parte del montepremi e ad ogni successo parziale il vincitore erode virtualmente parte della quota versata da chi è in svantaggio. Nel *Traité du Triangle Arithmétique* Pascal specificò la natura del contratto che i giocatori stipulano accettando di sfidarsi [PASCAL, 2020, p. 473]:

> Per comprendere le regole delle quote parti, la prima cosa che bisogna considerare è che il denaro che i giocatori hanno puntato non appartiene più a loro, perché se ne sono privati; ma in compenso essi hanno ricevuto il diritto di attendere ciò che il caso può donare loro, secondo gli accordi presi in precedenza.

L'impossibilità a dichiarare come propria la quota versata dopo l'inizio del gioco mette in luce la somiglianza del problema delle parti con le *regole di compagnia* con le quali si stabiliva come ripartire tra più soci gli utili derivanti da un'attività commerciale intrapresa versando delle quote di capitale. L'affinità era già stata notata da Pacioli ma il modo con cui l'aveva applicata ad un contratto aleatorio, come quello che caratterizza i giochi d'azzardo, era scorretto. È questo quadro di riferimento che permette di comprendere quanto scritto da Pascal [2020, p. 297]:

Ora, in questo modo, voi vedete che, con delle semplici sottrazioni, per la prima partita vi toccano sul denaro dell'altro 12 pistole; per la seconda, altre 12; e per l'ultima, 8.

I numeri che Pascal menziona sono gli incrementi del numero di pistole in possesso di chi sta vincendo per 1 a 0, per 2 a 0 o per 3 a 0, dal momento che

$$12 = 44 - 32 \qquad 12 = 56 - 44 \qquad 8 = 64 - 56$$

([10]) Avverto una sola differenza apportata alla traduzione proposta in [PASCAL, 2020]: invece di tradurre la frase *le hasard est égale* con "le probabilità sono uguali" ho scelto "il caso è equivalente" sacrificando la scorrevolezza del testo per riflettere la circostanza che la parola probabilità non compare nell'originale, per i motivi illustrati.

rappresentano le virtuali erosioni della quota dell'avversario fino alla conquista di tutte le sue 32 pistole. Pascal allegò alla lettera delle "vecchie tabelle" contenenti i valori delle singole partite. Egli affermò che il valore dell'ultima partita si dimezza quando il numero di punti necessari per vincere l'intero montepremi passa da n ad $n+1$. Spiegò inoltre come trovare il valore della prima partita sviluppando in dettaglio un esempio particolare che lascia però trasparire l'esistenza di una regola generale. Pascal espresse il risultato nel linguaggio delle combinazioni caro a Fermat ma, pur avendo detto che la soluzione *non è facile da trovare*, poiché è *ottenuta con molta fatica* per questa strada, non sentì il dovere di dimostrare i risultati ottenuti limitandosi ad affermare [PASCAL, 2020, p. 299]:

> Voi vedrete indubbiamente tutto ciò se vi ci dedicate, poiché non è difficile. Ragion per cui ritengo inutile trattenervi ancora a lungo.

Ritroveremo questi risultati nel *Traité* dove Pascal fornirà anche le dimostrazioni complete, servendosi del triangolo aritmetico al quale non fa riferimento nella lettera a Fermat. Questi rispose il 9 agosto 1654 con una lettera indirizzata a Pierre de Carcavi cui Pascal replicò il 24 agosto, affermando come il metodo delle combinazioni fosse sicuro solo in presenza di due giocatori mentre forniva risposte ambigue quando i giocatori coinvolti erano tre. Questa lettera è preziosa perché Pascal espone la propria versione degli argomenti di Fermat, anche se non è chiaro se quest'ultimo si limitasse ad una mera enumerazione dei casi o se avesse un metodo abbreviato di calcolo. Si parte ancora da un caso particolare, quello in cui a G_1 mancano due punti per vincere e a G_2 ne mancano 3. Il numero massimo di partite per decidere della vittoria di uno dei contendenti è 4. Pascal – o, meglio, Fermat – considerò i $16 = 2^4$ esiti possibili, ottenuti enumerando tutte le ipotetiche successioni di quattro partite. Indicando con a e b rispettivamente un successo di G_1 o G_2 in una singola partita, i 16 schemi sono:

$$\begin{array}{cccccccccccccccc}
a & a & a & a & a & a & a & a & b & b & b & b & b & b & b & b \\
a & a & a & a & b & b & b & b & a & a & a & a & b & b & b & b \\
a & a & b & b & a & a & b & b & a & a & b & b & a & a & b & b \\
a & b & a & b & a & b & a & b & a & b & a & b & a & b & a & b \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 2 & 2 & 2
\end{array}$$

dove i numeri 1 e 2 indicano che il successo finale spetta a G_1 o a G_2, rispettivamente. Poiché 11 schemi sono favorevoli a G_1 e 5 a G_2, bisogna ripartire la posta in palio nel rapporto di $11 : 5$. Pascal espose il metodo di Fermat a Gilles Personne de Roberval, forse durante una riunione dell'accademia di Le Pailleur. Roberval contestò l'uso di un numero costante di partite fittizie – 4 nel caso considerato – per determinare la ripartizione della posta. Egli osservò che non era possibile presupporre una uguale durata per tutte le partite dal momento che, ad esempio, nei primi quattro schemi partendo da sinistra, ci si arresta dopo due sole partite. Pascal, oltre a notare che l'obiezione riguardava solo il metodo di Fermat, rispose mostrando come l'artificio di introdurre delle partite fittizie non alterasse affatto l'esito della suddivisione della posta [PASCAL, 2020, pp. 309-311].

> Comunicai ai nostri Signori il vostro metodo, su cui il signor Roberval mi fece quest'obiezione:
>
> È sbagliato adottare il metodo di fissare la quota sulla supposizione che si giochi in quattro partite, visto che, quando mancano due partite all'uno e tre all'altro, non è necessario che si giochino quattro partite, potendo accadere che se ne giocheranno due o tre, o a dire il vero forse quattro. Come pure egli [Roberval] non vedeva perché si pretendesse di calcolare la giusta quota su una condizione falsa, che è quella di giocare quattro partite, visto che la condizione naturale del gioco è che non si tireranno più dadi se uno dei due giocatori avrà vinto, e che, se ciò non era falso, per lo meno non era dimostrato. Di modo che aveva qualche sospetto che noi avessimo creato un paralogismo. Io gli risposi che non mi basavo tanto su questo metodo delle combinazioni, che a dire il vero non è appropriato in questo caso, quanto piuttosto sull'altro mio metodo universale, a cui non sfugge nulla e che porta in sé la sua dimostrazione, che trova la stessa quota proprio come quella delle combinazioni; e inoltre gli dimostrai in questo modo l'esattezza del calcolo della quota tra due giocatori mediante le combinazioni: Non è forse vero che, se due giocatori, trovandosi nell'ipotesi che mancano due partite all'uno e tre all'altro, stabiliscono ora in via amichevole che si giochino quattro partite complete, cioè che si tirino i quattro dadi a due facce tutti in una volta; non è forse vero, dico io, che se essi hanno deciso di giocare le quattro partite, il calcolo della quota dev'essere tale come noi abbiamo detto,

> secondo l'insieme delle combinazioni favorevoli a ciascuno? Egli fu d'accordo; infatti, ciò è dimostrativo. Ma negava che la stessa cosa sussistesse nel caso in cui non accettassero di giocare le quattro partite. Io gli dissi dunque così: Non è forse chiaro che gli stessi giocatori – non essendo costretti a giocare quattro partite, ma volendo lasciare il gioco dal momento che l'uno avrà raggiunto il suo numero – possono, senza danno né vantaggio, astenersi dal giocare le quattro partite intere, e che quest'accordo non cambia in alcun modo la loro condizione?

Ho riportato questo lungo passaggio perché costituisce un notevole resoconto di una discussione scientifica su un tema di ricerca avanzato nel quale gli interlocutori si muovono in terra incognita, con tutte le incertezze del caso.

Pascal mise poi in evidenza gli aspetti critici del metodo delle combinazioni, di cui peraltro sembrò fare solo una difesa d'ufficio di fronte a Roberval, esaminando il caso particolare in cui tre giocatori – G_1, G_2, G_3 – smettono di giocare quando mancano loro, rispettivamente, 1, 2 e 2 punti. La partita sarebbe decisa in al più tre turni di gioco ma lo schema dei $27 = 3^3$ risultati possibili richiede qualche cautela. Qui, a, b, c stanno per una vittoria di G_1, G_2, G_3 in un turno mentre 1, 2 e 3 indicano la vittoria finale per G_1, G_2 oppure G_3.

a	a	a	a	a	a	a	a	a	b	b	b	b	b	b	b	b	b	c	c	c	c	c	c	c	c	c
a	a	a	b	b	b	c	c	c	a	a	a	b	b	b	c	c	c	a	a	a	b	b	b	c	c	c
a	b	c	a	b	c	a	b	c	a	b	c	a	b	c	a	b	c	a	b	c	a	b	c	a	b	c
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1			1			1	1	1	1			1		
				2						2		2	2	2		2						2				
								3									3			3			3	3	3	3

Se alcuni schemi forniscono un unico vincitore, in altri casi i risultati delle partite fittizie mostrano che *due* giocatori raggiungono l'obiettivo dei tre punti. Si potrebbero, osserva Pascal, prospettare due vie per uscire dall'ambiguità: attribuire uno schema dubbio metà a ciascuno dei vincitori ipotetici oppure attribuirlo tutto al giocatore che raggiunge per primo i tre punti. Nel primo caso, ad esempio, G_1 si aggiudica 13 dei 27 schemi mentre in altri 6 schemi è vincitore con uno degli altri giocatori e negli 8 schemi restanti è certamente perdente. Seguendo la prima proposta di Pascal gli schemi attribuiti a G_1 sono

$$1 \cdot 13 + \frac{1}{2} \cdot 6 + 0 \cdot 8 = 16$$

e la frazione di posta che gli spetta è $\frac{16}{27}$. Ragionando similmente, ad ognuno dei giocatori G_2 e G_3 bisognerebbe assegnare la frazione $\frac{11}{54}$ della posta. Pascal [2020, p. 315] è però insoddisfatto dell'esito:

> Ecco, mi sembra, il modo in cui si dovrebbe suddividere la posta tramite le combinazioni secondo il vostro metodo, a meno che voi non abbiate qualcos'altro su questo argomento che io ignoro. Se non mi sbaglio, questa suddivisione è scorretta. Il motivo è che si suppone il falso sostenendo che si giocheranno sicuramente tre partite, mentre la condizione naturale del gioco è che si prosegue a giocare finché uno dei giocatori non abbia ottenuto il numero di punti che gli mancano, nel qual caso il gioco cessa.

L'obiezione di Roberval è ora più calzante e l'analisi di Pascal mostra che l'utilizzo del metodo delle combinazioni richiede in questo caso uno studio dell'*ordine* con cui si susseguono le vittorie per decidere come ripartire la posta. Il gioco fittizio (*feinte*) che impone di disputare sempre il numero massimo di partite, non si accorda con quello vero (*véritable*) che nel caso di due giocatori. Fermat, rispondendo a Pascal il 25 settembre, chiarì che solo la seconda interpretazione di Pascal era corretta: il primo giocatore si aggiudica $\frac{1}{3}$ degli schemi giocando una sola partita; $\frac{2}{9}$ degli schemi giocandone due e $\frac{2}{27}$ giocandone effettivamente tre: il ricorso alle partite fittizie non aveva altro scopo che di considerare solo frazioni con lo stesso denominatore.

Le considerazioni di Fermat sono corrette ma come tradurle in una formula chiusa? La risposta sarà data da Abraham de Moivre nella *Miscellanea Analytica*, pubblicata nel 1730.

La corrispondenza diretta tra Fermat e Pascal volge al termine ([11]) ed il 27 ottobre Pascal scrisse una breve lettera dove espresse ammirazione per il metodo delle combinazioni, ora che con la spiegazione di Fermat lo aveva compreso appieno. Pascal riconobbe inoltre che il metodo raggiungeva facilmente gli stessi risultati di quello che egli aveva proposto: un commento un po' sorprendente, se si pensa alle critiche avanzate nelle lettere precedenti e che si riferisce al caso dei tre giocatori che egli non poté risolvere col triangolo aritmetico.

5. – La divisione della posta nel *Traité* di Pascal

La corrispondenza con Fermat non mette in evidenza il metodo con cui Pascal risolse in forma chiusa il problema delle parti tra due giocatori che fu invece esposto nel *Traité du Triangle Arithmétique*. ([12]) Di quest'opera esistono due versioni: la prima, in latino, risale al più tardi ai primi mesi del 1654; la seconda, redatta per la maggior parte in francese, fu scritta nel 1654 ed è la sola a contenere riferimenti al problema delle parti [Kyriacopoulos, 2000], [Descotes, 2020]. I numeri nel triangolo aritmetico (Figura 1) sono assegnati a delle *celle*, attraversate da diagonali: le celle che sono attraversate da una stessa diagonale formano una *base* del triangolo. Pascal pose l'unità in alto a sinistra come elemento *generatore* del triangolo il cui elemento ([13]) $a_{n,k}$ all'incrocio tra la n-esima riga e la k-esima colonna è definito nella versione in francese dalla relazione

$$a_{n,k} = a_{n-1,k} + a_{n,k-1} \tag{1}$$

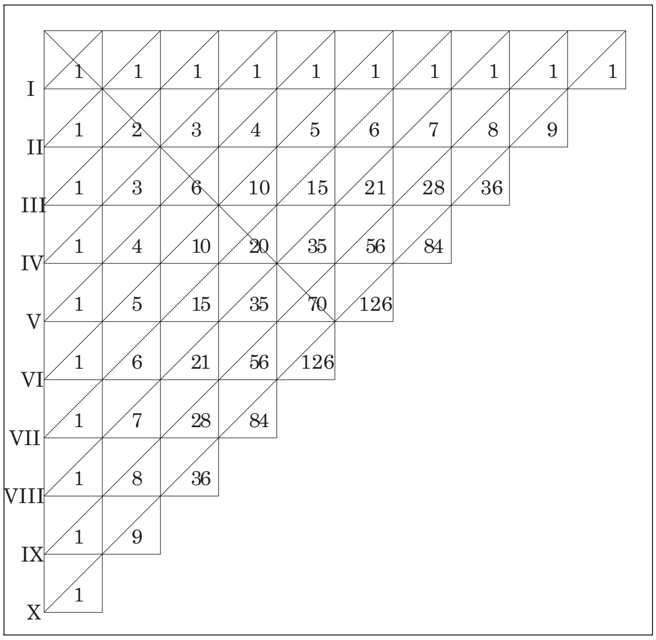

Figura 1 – Disposizione dei numeri del triangolo aritmetico simile a quella adoperata da Pascal. I quadrati costituiscono le *celle* e quelle attraversate da una stessa retta inclinata formano una *base* del triangolo. Le basi sono numerate dall'alto verso il basso in numeri romani: la prima base è formata dal numero 1, la seconda dai numeri 1 ed 1 e così via. Sulla base n^{ma} figurano i coefficienti dello sviluppo di $(a+b)^{n-1}$. Il segmento ortogonale alle basi è la *dividante* e mette in evidenza la simmetria del triangolo.

con la convenzione che $a_{n,0} = a_{0,k} = 0$. Le proprietà principali del triangolo aritmetico sono *conseguenze* della costruzione stessa e sono dimostrate con un massiccio ricorso al principio di induzione. ([14]) Per quanto ci riguarda, dobbiamo soffermarci sulle Conseguenze VII e X. La Conseguenza VII afferma che [Pascal, 2020, p. 449]

> In ogni triangolo aritmetico, la somma delle celle di ogni base è il doppio di quelle della base precedente.

Questa conseguenza è dedotta dalla proprietà di simmetria (Conseguenza V)

$$a_{n,k} = a_{k,n}$$

che Pascal ottenne per induzione sulle basi del triangolo: infatti $a_{1,2} = a_{2,1}$ per costruzione; invo-

([11]) Due lettere del 1660, quando la salute di Pascal era già deteriorata, non aggiungono nulla la nostro argomento.

([12]) Pascal non fu il primo ad utilizzare il triangolo aritmetico. In particolare, Mersenne lo aveva studiato negli *Harmonicorum Libri XII*, pubblicati nel 1636 e contenenti una descrizione dettagliata di combinazioni e permutazioni. [Edwards, 2003].

([13]) Avverto che Pascal non utilizzò mai una notazione con indici. Me ne servo per rendere più chiara la lettura degli originali.

([14]) Per uno studio sull'impiego del metodo di induzione in Pascal, si veda [Hara, 1962].

cando la (1) e supponendo valida la proprietà di simmetria per le basi precedenti, si ha

$$a_{n,k} = a_{n-1,k} + a_{n,k-1} = a_{k,n-1} + a_{k-1,n} = a_{k,n}$$

che è appunto la tesi. La Conseguenza VII si ottiene osservando che

$$a_{n,1} = a_{n-1,1} \qquad a_{1,n} = a_{1,n-1}$$

e che, muovendosi lungo una base, grazie alla (1) tutti gli elementi della base $(n-1)^{\mathrm{ma}}$ compaiono due volte nella somma degli elementi della base n^{ma}. Poiché la somma degli elementi sulla seconda base è 2, quella degli elementi della base $(n+1)^{\mathrm{ma}}$ è 2^n.

La Conseguenza X è di grande importanza per la soluzione del problema delle parti [Pascal, 2020, p. 451]:

In ogni triangolo aritmetico, la somma di tante celle continue della sua base quante se ne desiderano, a cominciare da un'estremità, è uguale ad altrettante celle della base precedente, più ancora altrettante eccetto una.

Per semplicità, d'ora in poi indicheremo con $d_{n,h}$ l'elemento h^{mo} della n^{ma} base, contato a partire dal lato verticale del triangolo artimetico. Allora la somma di un certo numero h di elementi della base n^{ma} si può scrivere come

$$\sum_{k=1}^{h} d_{n,k}$$

ed è sufficiente riflettere sulla (1) per concludere che *tutti* i primi h termini della base precedente compaiono due volte fuorché $d_{n,h}$, che compare una volta sola. Per simmetria, la proprietà vale anche partendo dall'altro estremo della base.

Nella parte del *Traité* dedicata alla soluzione del problema delle parti, Pascal mise anche in chiaro i principii seguiti e già utilizzati nella corrispondenza con Fermat:

a) ciò che spetta ad un giocatore, *qualunque* sarebbe l'esito della partita non disputata, *deve* essergli garantito;

b) ad ogni giocatore bisogna garantire la *metà* della differenza tra quanto otterrebbe vincendo e quanto otterrebbe perdendo la partita successiva all'arresto del gioco, cioè la "somma esposta al rischio". Il coefficiente $\frac{1}{2}$ è dovuto al fatto che Pascal suppose uguali tra loro le possibilità di successo dei contendenti. Questa regola, che Pascal sottolinea applicarsi a giochi di *puro azzardo* (*pur hazard*), garantisce l'equità della ripartizione.

Passiamo alla parte più originale del *Traité*, dove il triangolo aritmetico dispiega tutta la sua utilità. Siano $P_1(a,b)$ e $P_2(a,b)$ le poste che spettano ai giocatori G_1 e G_2 in funzione del numero di punti a e b che mancano loro per conseguire la vittoria. Pascal considerò la base $(a+b)^{\mathrm{ma}}$ del triangolo aritmetico. A partire dall'elemento posto sulla prima colonna e procedendo lungo la base, si sommino i primi a numeri: sia S_1 il risultato. Si considerino i b numeri restanti e sia S_2 la loro somma; Pascal dimostrò che

$$P_1(a,b) = \frac{S_2}{S_1+S_2} \qquad \text{e} \qquad P_2(a,b) = \frac{S_1}{S_1+S_2}$$

cosicché [Pascal, 2020, p. 483]:

> Queste somme stanno l'una all'altra come i vantaggi dei giocatori reciprocamente

cioè $\dfrac{P_1(a,b)}{P_2(a,b)} = \dfrac{S_2}{S_1}$. Osserviamo che $S_1 + S_2$ rappresenta la somma di tutti i termini che formano la base $(a+b)^{\mathrm{ma}}$. La dimostrazione è condotta per induzione sulle basi del triangolo. La seconda ([15]) base contiene il numero 1 ripetuto due volte per cui la regola di Pascal fornisce i risultati corretti in tutti gli scenari possibili. Pascal suppose poi che la base n^{ma} del triangolo contenesse le corrette ripartizioni della posta tra due giocatori cui manchino in tutto n punti per vincere e si propose di dimostrare che la base $(n+1)^{\mathrm{ma}}$ ha stessa proprietà. Per questo egli si chiese quanto otterrebbe G_1 se, essendo $a+b=n+1$, giocasse un'altra partita. Sia che G_1 vinca o perda la nuova partita, dopo averla disputata ai due contendenti mancheranno n punti in tutto. Per l'ipotesi di induzione, vinta la partita G_1 avrebbe diritto alla frazione

$$P_1(a-1,b) = \frac{d_{n,1} + d_{n,2} + \cdots + d_{n,b}}{\Sigma_n}, \tag{2}$$

([15]) La prima base rappresenta certamente la divisione della posta quando ad un giocatore manchi un punto e all'altro nessuno: tutta la posta spetta a chi ha già vinto.

dove Σ_n è la somma di tutti gli elementi della diagonale n^{ma}. Se invece vincesse G_2, a G_1 spetterebbe la frazione

$$(3) \quad P_1(a, b-1) = \frac{d_{n,1} + d_{n,2} + \cdots + d_{n,b-2} + d_{n,b-1}}{\Sigma_n}$$

della posta. In base alle regole per stabilire la ripartizione, a G_1 spetterà la frazione della posta pari a

$$\frac{d_{n,1} + d_{n,2} + \cdots + d_{n,b-1}}{\Sigma_n} + \frac{1}{2}\frac{d_{n,b}}{\Sigma_n} = \\ = \frac{2(d_{n,1} + d_{n,2} + \cdots + d_{n,b-1}) + d_{n,b}}{2\Sigma_n}.$$

Ora, per la Conseguenza VII si ha $\Sigma_{n+1} = 2\Sigma_n$ mentre, per la Conseguenza X,

$$2(d_{n,1} + d_{n,2} + \cdots + d_{n,b-1}) + d_{n,b} = d_{n+1,1} + \\ + d_{n+1,2} + \cdots + d_{n+1,b}.$$

La somma che spetta a G_1 è allora

$$P_1(a, b) = \frac{d_{n+1,1} + d_{n+1,2} + \cdots + d_{n+1,b}}{\Sigma_{n+1}},$$

che completa il passo induttivo e dimostra l'asserto di Pascal. In sostanza, Pascal ha risolto l'equazione

$$P(a, b) = \frac{1}{2}P(a-1, b) + \frac{1}{2}P(a, b-1),$$

con $P(0, b) = 1$, $P(a, a) = \dfrac{1}{2}$, che si può vedere come un'equazione alle differenze per l'aspettazione di G_1 [Hald, 1988, p. 57]. ([16]) In mancanza della notazione indiciale, Pascal considerò una base particolare, corrispondente ad $a = 2$ e $b = 3$, dimostrando che la regola di ripartizione, se vale quando $a + b = 4$, vale anche se $a + b = 5$. A questo punto osservò che la dimostrazione regge per tutte le basi perché poggia solamente sulle Conseguenze VII e X che hanno una validità generale.

([16]) Il principio adottato da Pascal si può vedere come espressione di un'aspettazione in termini di aspettazioni condizionate al realizzarsi di un evento, la vittoria di uno dei contendenti nella partita successiva. Su questo punto si può consultare l'interessante lavoro [Barbut, 2000].

Con la disposizione adottata da Pascal per il triangolo aritmetico, la base $(a+b)^{\text{ma}}$ contiene i coefficienti del tipo

$$\binom{a+b-1}{h} \qquad h = 0, 1, \ldots, a+b-1$$

e la soluzione del problema delle parti è allora chiara dal punto di vista combinatorio perché, se a G_1 mancano a punti e a G_2 b punti per vincere, attribuire le frazioni

$$\frac{1}{2^{a+b-1}}\sum_{h=0}^{b-1}\binom{a+b-1}{h} \quad \text{e} \quad \frac{1}{2^{a+b-1}}\sum_{h=b}^{a+b-1}\binom{a+b-1}{h}$$

a G_1 e a G_2 significa isolare, tra i 2^{a+b-1} risultati possibili delle partite, quelli che permettono a G_1 o a G_2, rispettivamente, di prevalere. Rilassando l'ipotesi che i giocatori abbiano uguali possibilità di vittoria, ma che G_1 abbia p possibilità di prevalere e G_2 ne abbia q, la formula precedente può essere modificata con l'intervento delle probabilità di successo ad ogni turno

$$p_1 := \frac{p}{p+q} \qquad \text{e} \qquad p_2 := \frac{q}{p+q}:$$

le frazioni di posta da attribuire a G_1 e G_2 sono, posto $n := a + b - 1$,

$$\sum_{h=0}^{b-1}\binom{n}{h}p_1^h q_1^{n-h} \quad \text{e} \sum_{h=b}^{n}\binom{n}{h}p_1^h q_1^{n-h}:$$

questa generalizzazione fu pubblicata da Pierre Rémond de Montmort [1713, pp. 244-248].

Risolto il problema delle parti, Pascal [2020, p. 487] ritornò alle questioni sollevate nella lettera a Fermat del 29 luglio 1654:

> Dati due giocatori, che giocano ciascuno la medesima somma in un certo numero stabilito di partite, trovare nel triangolo aritmetico il valore dell'ultima partita sul denaro del perdente.

Pascal ha in mente lo scenario in cui, ad esempio G_1 ha $n-1$ punti, G_2 zero punti e l'incontro si aggiudica raggiungendo n punti. Il valore dell'ultima partita rappresenta dunque la frazione della posta che G_1 non ha ancora conquistato e si ottiene dalla soluzione generale del problema delle parti, ponendovi $a = 1$, $b = n$. Siccome l'ultimo termine di una base è 1, l'ultima partita permette di conquistare la frazione

$$\frac{1}{2^n}$$

del montepremi ovvero $\frac{1}{2^{n-1}}$ della quota di G_2. Il problema successivo riguarda il valore della prima partita [PASCAL 2020, p. 487]:

> Dati due giocatori, che giocano ciascuno una medesima somma in un certo numero stabilito di partite, trovare col triangolo aritmetico il valore della prima partita sulla posta del perdente.

Pascal considerò un'ipotetica sospensione del gioco sul punteggio di 1 a 0 per G_1, ad esempio, quando la vittoria si assegna raggiungendo n punti. Siccome $a = n - 1$ e $b = n$ occorre considerare la $(2n-1)^{\text{ma}}$ base. La frazione di posta che G_1 ha virtualmente strappato a G_2 è

$$P_1(n-1, n) - P_2(n-1, n) = \frac{d_{2n-1,n}}{2^{2(n-1)}}$$

dove il numeratore è il termine della base che si trova sulla *dividante* e si è fatto uso della simmetria del triangolo aritmetico.

L'ultimo problema riguarda il valore della seconda partita e si risolve come quelli ora visti.

Possiamo ora interpretare le tabelle inviate a Fermat da Pascal per il caso in cui ciascuno dei contendenti avesse scommesso 256 pistole.

Supponiamo che G_2 sia sempre a punteggio nullo anche se ciò non è necessario perché ciò che conta sono i punti che i giocatori debbono ancora racimolare per raggiungere la vittoria. Ad esempio, dire che G_1 ha conquistato 96 delle 256 pistole di G_2 dopo il successo nella prima partita quando si vince raggiungendo 3 punti vale sul punteggio di 1 a 0 ma anche sul punteggio di 2 a 1 per G_1, quando la vittoria si ottiene collezionando 4 punti: in entrambi i casi, il numero di punti a e b che mancano ai contendenti per vincere è sempre $a = 2$, $b = 3$. Detto questo, prendiamo ad esempio la colonna relativa ai 4 punti. Se il gioco si interrompesse sul punteggio di 1 a 0, i punti mancanti sarebbero $a = 3$, $b = 4$. Applicando la regola di ripartizione della posta e considerando la base VII ($a + b = 7$) del triangolo aritmetico, a G_1 spettano i $\frac{42}{64} = \frac{21}{32}$ dell'intera posta di 512 pistole,

	6	5	4	3	2	1
1	63	70	80	96	128	256
2	126	140	160	192	256	
3	182	200	224	256		
4	224	240	256			
5	248	256				
6	256					

FIGURA 2 – Riproduzione di una delle tabelle che Pascal inviò a Fermat con la lettera del 29 luglio 1654. Procedendo da sinistra verso destra, le colonne sono etichettate con i numeri da 6 ad 1 che indicano il punteggio da raggiungere per vincere. Le righe sono etichettate dall'alto verso il basso con i numeri da 1 a 6 che indicano il punteggio parziale raggiunto da un giocatore – G_1 – mentre l'altro – G_2 – ha 0 punti. Dunque, il numero che si trova all'incrocio della colonna etichettata da k con la riga etichettata da h rappresenta quante pistole G_1 ha conquistato delle 256 appartenenti inizialmente a G_2 quando si trova sul punteggio di h punti a 0 e la vittoria si ottiene raggiungendo k punti.

cioè a dire 336. In questo momento G_1 ha sottratto a G_2 $336 - 256 = 80$ pistole. Sul 2 a 0 avremmo $a = 2$, $b = 4$ e, muovendosi lungo la base VI, segue che a G_1 spettano i $\frac{26}{32} = \frac{13}{16}$ dell'intera posta, equivalenti a 416 pistole. G_1 ha sottratto altre $80 (= 416 - 336)$ pistole a G_2 aggiudicandosene in tutto $160 = 80 + 80$. Sul 3 a 0, si ha $a = 1$ e $b = 4$ e, sospendendo il gioco a questo punto a G_1 spetterebbero $\frac{15}{16}$ della posta, ovvero 480 pistole: G_1 ha sottratto a G_2 ancora 64 pistole e gli sottrarrà le ultime 32 conquistando l'ultimo punto. Dunque la tabella in Figura 2 riassume le varie tappe del gioco puntando l'accento sulla dinamica della progressiva conquista della quota dell'avversario. La tabella in Figura 3 specifica quante pistole G_1 conquista a G_2 in una *singola* partita.

Riassumendo, possiamo dire che Pascal risolse gradualmente il problema delle parti servendosi di diverse tecniche matematiche: l'analisi ricorsiva, già

	6	5	4	3	2	1
1	63	70	80	96	128	256
2	63	70	80	96	128	
3	56	60	64	64		
4	42	40	32			
5	24	16				
6	8					

FIGURA 3 – L’altra tabella che Pascal inviò a Fermat. Le colonne e le righe sono etichettate con lo stesso criterio della tabella precedente. Il numero che qui trova all’incrocio della colonna etichettata da k con la riga etichettata da h indica quante pistole G_1 ha conquistato delle 256 appartenenti inizialmente a G_2 nella partita che gli permette di portarsi sul punteggio di h punti a 0, quando la vittoria si ottiene raggiungendo k punti.

usata dall’anonimo autore del XV secolo; il calcolo combinatorio che fu il metodo preferito da Fermat; il triangolo aritmetico che consente di risolvere rapidamente il problema per due giocatori ma che non può essere esportato al caso di più giocatori.

6. – La rovina del giocatore e l’*infini-rien*

Come abbiamo detto, Huygens si interessò subito al contenuto della corrispondenza tra Fermat e Pascal che lo guidò nella redazione del *De Ratiociniis*, a conclusione del quale propose cinque problemi, indicandone le soluzioni ma non il metodo per ottenerle. Egli li aveva comunicati a Fermat e a Pascal tramite Carcavi per avere conferma dei risultati ottenuti. L’ultimo è il problema della rovina del giocatore:

> A e B, avendo preso ciascuno 12 gettoni, giocano con tre dadi usando queste regole: se il punteggio totale è 11, A dà un gettone a B mentre B darà un gettone ad A quando il punteggio totale è 14. Il vincitore sarà colui che per primo otterrà tutti i gettoni. Si trova in questo caso che le possibilità di A stanno a quelle di B come 244140625 sta a 282429536481.

La risposta è corretta ed il metodo utilizzato da Huygens emerse solo con la pubblicazione delle sue opere complete, inclusa la corrispondenza scientifica, a partire dalla fine del XIX secolo.

Questo problema era stato in effetti proposto da Pascal a Fermat ed Huygens ne aveva avuto notizia tramite una lettera inviatagli il 28 settembre 1656 da Carcavi secondo il quale Pascal dubitava che Fermat sarebbe riuscito a venirne a capo. ([17]) Si è congetturato [EDWARDS, 1987] che Pascal volesse con questo problema evidenziare la debolezza del metodo delle combinazioni di Fermat: se così è stato, egli rimase deluso perché Fermat non tardò a risolvere il problema. ([18]) Nessuno dei metodi di soluzione ci è pervenuto e l’unica scarna annotazione è il parere di Carcavi che, chiudendo la lettera ad Huygens, riteneva plausibile che essi si fossero serviti di metodi differenti. ([19])

Infine, diamo un cenno al celebre argomento della scommessa (*infini-rien*) che Pascal inserì dei *Pensieri* e sul quale sono stati versati fiumi di inchiostro. Lasciando da parte l’intento apologetico che animò Pascal, la scommessa è un argomento per dimostrare non tanto l’esistenza di Dio quanto la ragionevolezza a comportarsi *veluti si Deus daretur*. L’argomento è stato analizzato da Hacking [1972] che ha visto per questo in Pascal l’iniziatore della teoria della decisione e ritiene l’argomento della scommessa come il suo contributo più profondo alla teoria della probabilità perché ha aperto la strada all’*ars conjectandi* dove la probabilità è l’ausilio principale per prendere decisioni in condizioni di incertezza. ([20])

([17]) “La question parut si difficile à M. Pascal qu’il douta si Monsieur de Fermat en viendroit à bout”. [ABOUT, BOY, 1983, p. 73]. Anche tutto ciò conferma che la “conversione” di Pascal del novembre 1654 non mise fine al suo interesse per la matematica.

([18]) “Il m’envoya incontinant cette solution”, notò Carcavi [ABOUT, BOY, 1983, p. 73].

([19]) Edwards [1987, pp. 157-166] ha proposto una ricostruzione degli argomenti che Pascal e Fermat potrebbero avere utilizzato.

([20]) Si veda [ELSTER, 2003] anche per un accostamento degli argomenti di Pascal a quelli adoperati nella casuistica gesuita.

Vediamo come il linguaggio probabilistico costituisca la trama dei ragionamenti di Pascal che si rivolge a chi non è convinto dagli argomenti a favore dell'esistenza di Dio né da quelli contrari [PASCAL, 2020, p. 2633]:

> Dio esiste o non esiste. Ma verso quale parte propenderemo? La ragione qui non può stabilire nulla. Un abisso infinito ci separa. All'estremità di quest'infinita distanza si gioca una partita dove capiterà testa o croce: su cosa punterete?

Pascal non contempla l'astensionismo: *Bisogna scommettere.* Per prendere una decisione, occorre esaminare costi e benefici di ciascuna scelta [PASCAL, 2020, p. 2634]:

> Soppesiamo la vincita e la perdita, qualora voi sceglieste croce che Dio esiste. Valutiamo questi due casi: se vincete, vincete tutto; se perdete, non perdete nulla. Scommettete dunque che esiste, senza esitare!

Di fronte alle incertezze dell'interlocutore – *Sì, bisogna scommettere; ma forse scommetto troppo* – Pascal si sbilancia dicendo che già sarebbe sensato scommettere se i casi (*hazards*) a favore della vittoria e quelli contrari fossero uguali e ci venissero offerte due vite contro una messa in palio: quanto più bisogna scommettere in questa situazione, quando il premio in caso di successo è infinito. È sufficiente che la possibilità di successo non sia nulla, cosa su cui Pascal non ha dubbio, per convincere della ragionevolezza ad affrontare la scommessa.

Pascal si rese dunque conto che i giochi di puro azzardo studiati con Fermat costituivano un *modello* [THIROUIN, 2011] che si può esportare in contesti disparati. Non a caso, nei *Pensieri* egli scrisse ([21]) [PASCAL, 2020, p. 2533]

> si deve lavorare per l'incerto, secondo la regola delle poste in gioco, la quale è dimostrata.

([21]) Huygens farà lo stesso qualche anno più tardi risolvendo, nella corrispondenza con il fratello Lodewijk, alcuni problemi in cui occorreva determinare la durata attesa della vita di due persone, incognita importante per fissare ad esempio il prezzo a cui vendere una rendita vitalizia. Huygens trasformò il problema in una lotteria equivalente portando il punto di vista dello scommettitore (*gageur*) come chiave per la risoluzione.

BIBLIOGRAFIA

[ABOUT, BOY, 1983] P.-J. ABOUT, M. BOY: La correspondance de Blaise Pascal et Pierre de Fermat. La Géométrie du hasard ou le début du calcul des probabilités. *Cahiers de Fontenay*, **32**, 1-89.

[ADAMSON, 1995] D. ADAMSON: *Blaise Pascal. Mathematician, Physicist, and Thinker about God.* Macmillan, London

[ARISTOTELE, 1974] ARISTOTELE: *Metafisica.* A cura di C.A. Viano. U.T.E.T., Torino.

[ARNAULD, NICOLE, 1694] A. ARNAULD, P. NICOLE: *Logica sive Ars Cogitandi*. Editio Quinta. Du Vivil, Lugduni Batavorum (Leida).

[BARBUT, 2000] M. BARBUT: Une application de l'algèbre linéaire: le calcul des probabilités. *Mathématiques et Sciences Humaines*, **150**, 81-98.

[BOTTAZZINI, FREGUGLIA, TOTI RIGATELLI, 1992] U. BOTTAZZINI, P. FREGUGLIA, L. TOTI RIGATELLI: *Fonti per la Storia della Matematica*. Sansoni, Firenze.

[COUMET, 1965] E. COUMET: Le problème des partis avant Pascal. *Archives Internationelles d'Histoire des Sciences*, **18**, 245-272.

[DESCOTES, 2020] D. DESCOTES: Sur la genèse du *Traité du Triangle Arithmétique*. *Courrier Blaise Pascal*, **41-42**, 155-180.

[EDWARDS, 1987] A.W.F. EDWARDS: *Pascal's Arithmetical Triangle*. The Johns Hopkins University Press, Baltimore and London.

[EDWARDS, 2003] A.W.F. EDWARDS: Pascal's work on probability. In: N. Hammond (Ed.): *The Cambridge Companion to Pascal.* Cambridge University Press, Cambridge (U.K.), pp. 40-52.

[ELSTER, 2003] J. ELSTER: Pascal and decision theory. In: N. Hammond (Ed.): *The Cambridge Companion to Pascal.* Cambridge University Press, Cambridge (U.K.), pp. 53-74.

[FONTANA, 1556] N. FONTANA (Tartaglia): *General Trattato de' numeri et misure.* Curtio Troiano dei Navò, Venezia.

[FRANCI, 2002] R. FRANCI: Una soluzione esatta del problema delle parti in un manoscritto della prima metà del Quattrocento. *Bollettino della Società di Storia delle Scienze Matematiche*, **XXII**, 253-266.

[FRANKLIN, 2015] J. FRANKLIN: *The Science of Conjecture. Evidence and Probability before Pascal.* 3rd Edition. The Johns Hopkins University Press, Baltimore.

[GIRARD, 1629] A. GIRARD: *L'Invention Nouvelle en l'Algèbre*. Blaeuw, Amsterdam.

[HACKING, 1972] I. HACKING: The logic of Pascal's wager. *American Philosophical Quarterly*, **9**, 186-192.

[HACKING, 1987] I. HACKING: *L'Emergenza della Probabilità*, Mondadori, Milano. Traduzione italiana di: *The Emergence of Probability*. Cambridge University Press, Cambridge, U.K., (1975).

[HALD, 1988] A. HALD: *History of probability and Statistics and their applications before 1750*. Wiley-Interscience, Hokoben, New-Jersey, U.S.A.

[HARA, 1962] K. HARA: Pascal et l'induction mathématique. *Revue d'Histoire des Sciences et leurs Applications*, **15**, 287-302.

[KYRIACOPOULOS, 2000] L. KYRIACOPOULOS: Peut-on tout de même parler d'un 'Triangle de Pascal'?, *Revue d'Histoire des Mathématiques*, **6**, 167-217.

[Maronne, 2021] S. Maronne: D'une Académie l'autre. Mersenne, Roberval et quelques autres. *XVII^e Siècle*. Les Académies avant l'Académie. L'essor des sociétés savantes en France avant la fondation de l'Académie des Sciences. **292**, 11-30.

[Mesnard, 1963] J. Mesnard: Pascal à l'Académie Le Pailleur. *Revue d'Histoire des Sciences et de leurs Applications*, **16**, 1-10.

[Meusnier, 2007] N. Meusnier: Le problème des partis bouge... de plus en plus. *Journ@l Electronique d'Histoire des Probabilités et de la Statistique*, **3**, pp. 1-33.

[Meusnier, 2009] N. Meusnier: Fermat et les primices du'une mathématisation du hasard. *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, **18** (Numéro Special), 87-118.

[Pascal, 2020] B. Pascal: *Opere Complete*. A cura di M.V. Romeo. Bompiani, Firenze-Milano.

[Poisson, 1837] S.-D. Poisson: *Recherches sur la Probabilité des Jugements en Matière Criminelle et en Matière Civile*. Bachelier, Paris.

[Rémond de Montmort, 1713] P. Rémond de Montmort: *Essay d'Analyse sur les Jeux d'Hazard*. II édition. Quillau, Paris.

[Thirouin, 2011] L. Thirouin: *Le hasard et les règles. Le modèle du jeu dans la pensée de Pascal*. Deuxième édition augmentée. Vrin, Paris.

[Toti Rigatelli, 1985] L. Toti Rigatelli: Il "problema delle parti" in manoscritti del XIV e XV secolo. In: M. Folkerts, U. Lindgren (eds.) *Mathemata. Festschrift für Helmuth Gericke*, Franz Steiner Verlag, Stuttgart, pp. 229-236.

Riccardo Rosso

Riccardo Rosso è professore associato di Matematiche Complementari presso il Dipartimento di Matematica ''F. Casorati'' dell'Università di Pavia dove insegna, tra l'altro, Storia della Matematica. Dal 2021 tiene per contratto il corso di Storia della Matematica 1 presso l'Università di Milano. La sua attività di ricerca riguarda soprattutto la storia della matematica del XIX secolo.