Matematica, Cultura e Società

Rivista dell'Unione Matematica Italiana

Andrea Del Centina

Dall'Essay pour les coniques al Conicorum opus completum, un omaggio a Blaise Pascal nel quadricentenario della nascita

Matematica, Cultura e Società. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **8** (2023), n.1, p. 17–41.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=RUMI_2023_1_8_1_17_0>

Matematica, Cultura e Società. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2023.

Matematica, Cultura e Società – Rivista dell'Unione Matematica Italiana
Serie I, Vol. 8, N. 1, aprile 2023, 17-41

Dall'*Essay pour les coniques* al *Conicorum opus completum*, un omaggio a Blaise Pascal nel quadricentenario della nascita

ANDREA DEL CENTINA
Università di Ferrara
E-mail: cen@unife.it

Sommario: *In questo articolo ci proponiamo di illustrare l'opera geometrica di Pascal con particolare riferimento al* Conicorum opus completum, *il suo trattato sulle sezioni coniche mai pubblicato e il cui manoscritto è andato perduto. A questo fine commentiamo il sommario che Pascal presentò a l'*Academiae Parisiensi *nel 1654, la descrizione che Leibniz fece del contenuto del manoscritto pascaliano e le note che egli prese nel 1676 leggendo il manoscritto medesimo. L'analisi di questi documenti permette anche di comprendere la reale estensione di ciò che Pascal stesso chiamò "hexagrammum mysticum", del quale il famoso teorema dell'esagono è solo una parte.*

Abstract: *In this article we aim to illustrate the geometrical work of Pascal, paying special attention to the* Conicorum opus completum, *his never published treatise on conic sections and whose manuscript has been lost. To this end we comment the summary that Pascal presented to the* Academiae Parisiensi *in 1654, the description that Leibniz made of the content of the manuscript and the notes he took in 1676 while reading it. The analysis of these documents also allows to understand the real extension of what Pascal himself called "hexagrammun mysticum", of which the famous hexagon theorem is only a part.*

1. – Introduzione

La teoria delle sezioni coniche ha avuto un ruolo importante nell'opera scientifica di Blaise Pascal, ma molto poco rimane dei suoi scritti al riguardo: l'*Essay pour les coniques* (Pascal 1640), il saggio che scrisse appena sedicenne, e qualche estratto dal *Conicorum opus completum*, il trattato sulle coniche mai pubblicato e il cui manoscritto andò disperso pochi decenni dopo la sua morte. Tuttavia, dell'importanza di quest'opera si ha un'idea attraverso la brevissima descrizione che Pascal fece nel 1654 presentando un resoconto delle sue ricerche matematiche alla "*Celeberrimae Matheseos Academiae Parisiensi*".

L'*Essay*, il sommario presentato all'Accademia parigina, e la lettera che Leibniz inviò agli eredi di Pascal nel 1676, restituendo il manoscritto del trattato pascaliano che gli era stato dato in visione, furono pubblicati nelle *Oeuvres complètes de Pascal* edite da Charles Bossut (Pascal 1779, IV, 1-7, 408-411). Ciò consentì dopo oltre un secolo di oblio di avere una prima idea dell'opera geometrica di Pascal, anche se il suo più famoso teorema, noto come "Teorema dell'esagono" (v. Fig. 1), fu riportato pienamente in luce solo all'inizio dell'Ottocento da Charles Julien Brianchon (1806, 1810).

Maggiori informazioni si ricavano da alcuni documenti scoperti attorno al 1890 da Carl Immanuel Gerhardt nell'archivio di Leibniz: [1] brevi appunti e note che Leibniz prese durante la lettura del mano-

Accettato: il 17 febbraio 2023.

[1] Questi documenti sono attualmente conservati presso la G.W. Leibniz Bibliothek Niedersächsische Landesbibliothek, Hannover, *Leibniz Handschriften* XXXV, XV, I.

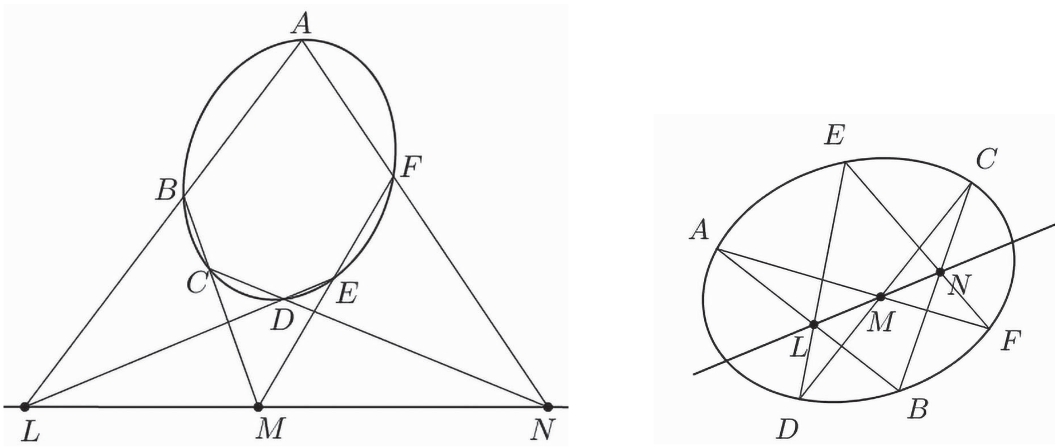


FIGURA 1 – È qui illustrato, in due esempi, il Teorema dell'esagono: *I lati opposti di un esagono ABCDEF inscritto in una conica si intersecano in tre punti allineati L, M, N*.

scritto, la minuta della suddetta lettera indirizzata agli eredi di Pascal, e una copia della prima parte del manoscritto pascaliano, intitolata *Generatio conisectionum*. Gerhardt pubblicò quest'ultimo documento, e qualche estratto dalle note di Leibniz (Gerhardt 1892).

Jean Mesnard e René Taton pubblicarono un'edizione critica della minuta della lettera di Leibniz (Mesnard e Taton 1963), nella quale essi tennero conto anche delle frasi non riportate poi nel testo finale pubblicato da Bossut.

Vari saggi sull'opera geometrica di Pascal sono apparsi nel secolo scorso, tra i quali citiamo (Taton 1955, 1962), (Costabel 1962), (Itard 1962), gli ultimi tre pubblicati in occasione del tricentenario della morte. Più recentemente, un'analisi approfondita delle note lasciate da Leibniz ha permesso di comprendere appieno il significato di ciò che Pascal intendeva per "hexagrammum mysticum" e, sulla base della documentazione esistente, di ricostruire il contenuto del trattato pascaliano. ([2])

Tale ricostruzione si basa, oltre che sulle note di Leibniz e i pochi scritti di Pascal rimasti sull'argomento, anche sui recenti studi di M. Anglade e J.-Y. Briend sul *Brouillon project* di Desargues, ([3]) che hanno messo bene in luce i teoremi ottenuti dal lionese (anche al riguardo della teoria della polarità), e su un'analisi dei metodi e dei risultati di quanti con successo seguirono Pascal nello studio delle coniche e questioni connesse; pensiamo qui a Newton, agli scozzesi C. Maclaurin, R. Simson e W. Braikenridge, a L. Carnot, ed in particolare a C.-J. Brianchon e J.V. Poncelet. ([4]) Metodi e risultati che a nostro avviso, anche per quanto annunciato da Pascal stesso alla Accademia di Mersenne, erano ampiamente alla sua portata.

Un cenno biografico e i "tempi" del trattato pascaliano

Blaise Pascal nacque a Clermont-Ferrand il 19 giugno del 1623, ([5]) terzogenito del nobiluomo Étienne Pascal, giudice e buon matematico dilettante. Rimasto vedovo, nel 1631 Étienne Pascal si trasferì con i figli a Parigi. Blaise manifestò presto una spiccata attitudine per la matematica e nella biblioteca paterna trovò modo di alimentare la sua passione. All'età di quattordici anni Blaise iniziò a seguire il padre alle settimanali riunioni dell'Accademia Parigina, la società di scienziati fondata da padre Marin Mersenne nel 1635, ([6]) alle quali prendevano parte, tra altri, Girard Desargues, Claude Mydorge, Gilles Personne

([2]) Si veda (Del Centina 2020); articolo del quale si fa qui un'ampia sintesi.

([3]) Si vedano gli articoli (Anglade, Briend 2017, 2018, 2019, 2020).

([4]) A questo proposito si veda (Del Centina 2022a)

([5]) Per maggiori dettagli sulla vita di Pascal si vedano (Périer 1684), e (Adamson 1995).

([6]) Da non confondere con l'Accademia delle Scienze di Parigi fondata nel 1666.

de Roberval, Claude Hardy, Jean de Beaugrand. Gli incontri avvenivano nel Convento dell'Annunciazione ubicato nei pressi di Place Royale, oggi Place des Vosges. L'Accademia contava anche numerosi corrispondenti francesi e stranieri, tra i quali René Descartes e Pierre de Fermat. Dopo la morte di Mersenne, nel 1648, le riunioni ripresero presso l'abitazione di Jean Le Pailleur (Mesnard 1963).

La conoscenza di Desargues fu senza dubbio di grande stimolo per la mente brillante del giovane Pascal, come egli stesso riconosce nell'*Essay*:

> [Desargues] è uno dei più grandi spiriti di questi tempi, e dei più versati in matematica, e nelle sezioni coniche in particolare, come i suoi scritti sull'argomento, sebbene in numero esiguo, hanno dimostrato a coloro che hanno voluto farli propri, e confesso che quel poco che io ho trovato su ciò lo devo ai suoi scritti, che ho cercato di imitare per quanto ho potuto.

Pascal si riferisce al *Brouillon project d'une atteinte aux evenements des rencontres du Cone avec un Plane* pubblicato da Desargues nel 1639; anno in cui la famiglia Pascal si trasferì a Rouen, essendo stato il padre nominato Collettore delle tasse reali per l'Alta Normandia. Pascal padroneggiò rapidamente il contenuto del *Brouillon project*, forse grazie anche alle conversazioni avute con l'autore. Nell'*Essay* Pascal delineò un programma per dare vita a un completo trattato sulle sezioni coniche come si apprende dalle parole con le quali termina il suo breve saggio:

> Abbiamo diversi altri problemi, teoremi e corollari che discendono da queste proposizioni, ma la poca fiducia che ho in me, per mancanza di esperienza ed abilità, non mi permette di andare oltre prima che queste siano esaminate da esperti, e se saranno giudicate degne, ci impegneremo a proseguirle fin dove Dio ci darà la forza di farlo.

(a) (b)

FIGURA 2 – (a) Ritratto di Blaise Pascal, da un'incisione di E. Gérard. (b) Frontespizio del quarto volume delle *Opere* di Pascal edite da C. Bossut, contenente gli scritti matematici.

Ritornando col padre di tanto in tanto a Parigi, Pascal aveva occasione di presentare e di discutere con i membri dell'Accademia i risultati raggiunti.

Nel 1642, Desargues si dichiarò ansioso di vedere la dimostrazione di un importante teorema, che chiama "la Pascale", per mezzo del quale "I quattro libri di Apollonio sono una immediata conseguenza" (Curabelle 1644, 70-71). Due anni dopo Mersenne, nella prefazione al suo *Cogitata physico-mathematica* (1644), attrasse l'attenzione del lettore su "un'unica generalissima proposizione di Pascal dalla quale in quattrocento corollari segue l'intero trattato di Apollonio". Desargues e Mersenne si riferivano certamente a ciò che Pascal stesso, come vedremo, chiamò "Exagrammum mysticum".

Nel 1648, ancora Mersenne annunciò a Constantijn Huygens che Pascal aveva finito di scrivere un importante trattato sulle sezioni coniche: ([7])

> Se il Vostro Archimede verrà con voi, ([8]) gli mostreremo uno dei più eccellenti trattati geometrici mai visti, che è stato completato dal giovane Pascal. In esso è risolto il luogo delle 3 e 4 rette di Pappo, che qui si dice non sia stato risolto da Descartes nella sua generalità. Occorrono linee rosse, verdi e nere per distinguere la varietà di considerazioni.

Ricordiamo che nel 1637, Descartes aveva pubblicato il famoso *Descours de la méthode*, contenente *La Géométrie* nella quale egli promosse l'uso dell'algebra in geometria attraverso l'introduzione delle coordinate (poi dette "cartesiane"), e ne mostrò la potenza presentando una soluzione del famoso problema "delle tre e quattro rette". Questo problema, risalente a Euclide e ricordato da Pappo nella *Collezione* (1588), riguarda la determinazione del luogo dei punti le cui distanze d_1, d_2, d_3, d_4 (ciascuna presa in una certa fissata direzione) da tre o quattro rette date (in posizione generica) in un piano, soddisfano la condizione $d_1\, d_2 = kd_3^2$ o $d_1\, d_2 = kd_3 d_4$, dove k è una costante. Un problema che Apollonio solo in parte aveva apertamente affrontato nelle *Coniche.*

([7]) Lettera del 17 Marzo cfr. (Huygens 1888), citata anche in (Taton 1962, 226).

([8]) Mersenne si riferisce a Christiaan Huygens, figlio di Constantijn.

Dunque, nel 1648, Pascal aveva terminato una prima stesura del suo trattato, o almeno composto un ampio riassunto contenente i risultati principali da poter mostrare agli amici del circolo di Mersenne. Probabilmente Pascal continuò a lavorare alla sua opera ancora negli anni seguenti e nel 1654, ritenuto concluso il suo lavoro ne diede notizia all'Accademia.

Nel 1659 Pascal si ammalò gravemente. Dopo la morte nel 1661 della sorella più giovane Jacqueline, alla quale era profondamente legato, il suo stile di vita divenne di giorno in giorno sempre più ascetico, convinto di trovare nella sofferenza e nella malattia la via alla vera Cristianità. La sera del 18 agosto 1662 Pascal ebbe un tracollo, e il mattino seguente morì.

2. – L'*Essay pour les coniques*

Il saggio di Pascal apparve in forma di foglio volante, di dimensione 35×43 cm (Fig. 3), stampato in cinquanta copie distribuite tra i membri dell'Accademia e qualche corrispondente di Mersenne. Di esso sono

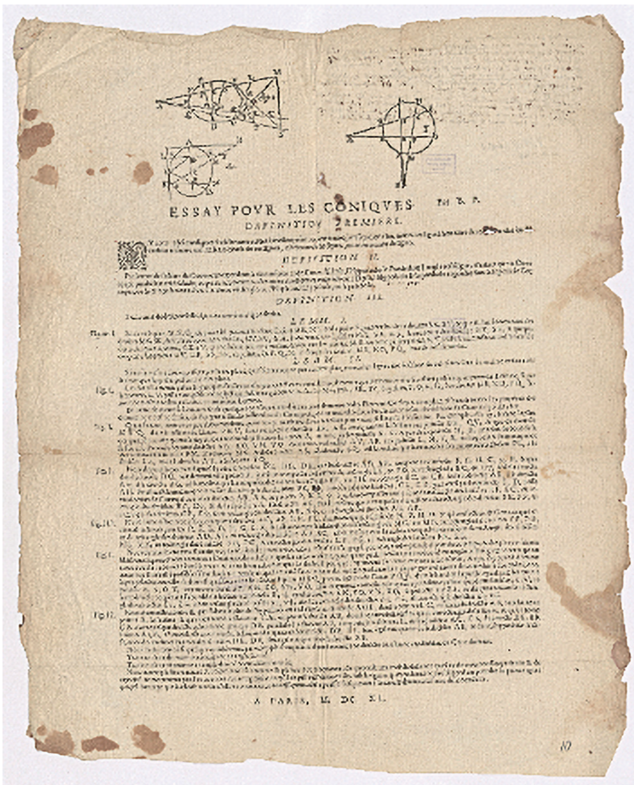


FIGURA 3 – *Essay pour les coniques*, Ms. LH XXXV, XV, I, Bl. 10r, G.W. Leibniz Bibliothek –Niedersächsische Landesbibliothek, Hannover.

oggi noti due esemplari, uno conservato presso la Bibliothèque Nationale di Parigi, l'altro presso la G.W. Leibniz Bibliothek – Niedersächsische Landesbibliothek, di Hannover.

L'*Essay* contiene tre definizioni, gli enunciati di tre lemmi e di cinque proposizioni, il tutto illustrato da tre figure.

La prima definizione è quella di *ordine* ("ordre") di rette, ossia un qualunque insieme di rette aventi un punto a comune (a distanza finita o no), equivalente al concetto di "ordinanza" introdotto da Desargues in (1639). Con la seconda Pascal descrive la formazione dei vari tipi di coniche come sezioni di un cono circolare secondo la posizione del piano secante rispetto alle generatrici del cono, seguendo sostanzialmente quanto scritto da Desargues nel *Brouillon project*. Nella terza precisa semplicemente che userà il termine "retta" per ciò che è comunemente detto "linea retta".

Per dare un'idea dello stile di Pascal, enunciamo il primo lemma cercando di mantenerci il più possibile fedeli al testo originale: *Se nel piano M, S, Q, due rette MK, MV dipartono dal punto M, due rette SK, SV dipartono da S, e K è il punto di intersezione delle rette MK, SK, e V è il punto di intersezione delle rette MV, SV, e A è il punto di intersezione delle rette MK, SV, e* μ *è il punto di intersezione delle rette MV, SK, e per due dei 4 punti AK*μ*V non giacenti su una stessa retta con i punti M, S, com'è per K e V, passa un cerchio intersecante le MV, MK, SV, SK, nei punti O,P,Q,N, dico che le rette MS, NO, PQ appartengono allo stesso ordine*. Pascal rinvia alla sua Figura I, qui riprodotta in Fig. 4, dove il cerchio è rappresentato da un'ellisse.

Osserviamo che questo lemma è equivalente al teorema dell'esagono nel caso particolare in cui la conica è un cerchio; infatti, si può enunciare come segue: *Se in un piano si congiungono i punti M, S ad altri due punti K, V su un cerchio nel piano non passante per alcuno dei punti M, S, e il cerchio interseca le rette MV, MK, SV, SK, rispettivamente nei punti O, P, Q, N, le due rette NO, PQ si incontrano sulla retta MS*. Ciò significa: (**P1**) *I lati opposti dell'esagono KPQVONK (inscritto nel cerchio) si intersecano nei tre punti allineati M, S, e il punto all'infinito della retta MS*. È bene tuttavia sottolineare che nel suo saggio Pascal non fa mai riferimento ad alcun "esagono inscritto".

Il secondo lemma, di chiara impronta proiettiva, può essere riassunto come segue: *Se più piani passanti per una stessa retta, come asse, sono tagliati da un piano non passante per l'asse, allora le rette nella sezione appartengono ad uno stesso ordine con l'asse, ossia incontrano l'asse nello stesso punto a distanza finita o infinita.*

Pascal enuncia poi il terzo lemma che dichiara facile conseguenza dei primi due (Fig. 4): *Sia data una configurazione di rette come nel primo lemma, se una sezione conica passante per i due punti K, V taglia le rette MK, MV, SV, SK, rispettivamente nei punti P, O, N, Q, le rette MS, NO, PQ, appartengono allo stesso ordine*.

Ciò detto, Pascal afferma che dai lemmi precedenti, e alcuni corollari da essi facilmente ottenibili, si potevano dedurre tutti gli elementi delle sezioni coniche, ossia, come si intendeva allora, l'intero corpus dei primi quattro libri delle *Coniche* di Apollonio.

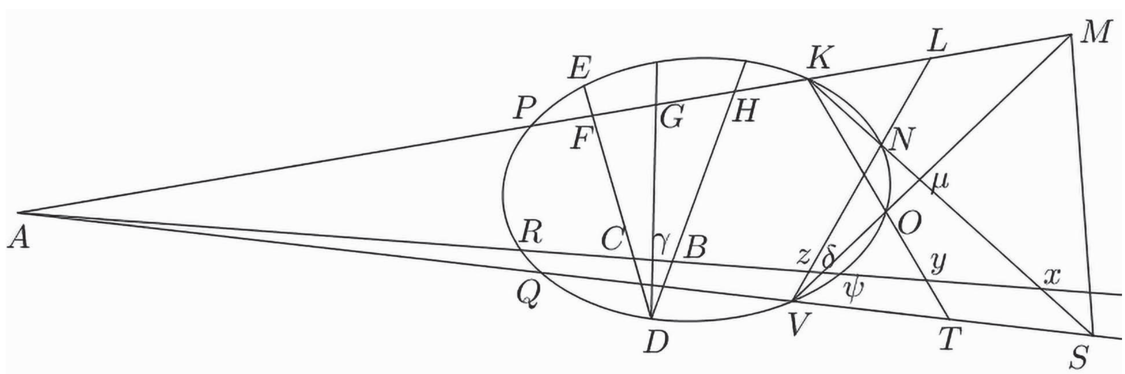


FIGURA 4 – Questo diagramma riproduce la Figura 1 dell'*Essay*, con la sola eccezione della lettera "R" al posto di "r", lettera quest'ultima che non trova riscontro nel testo di Pascal.

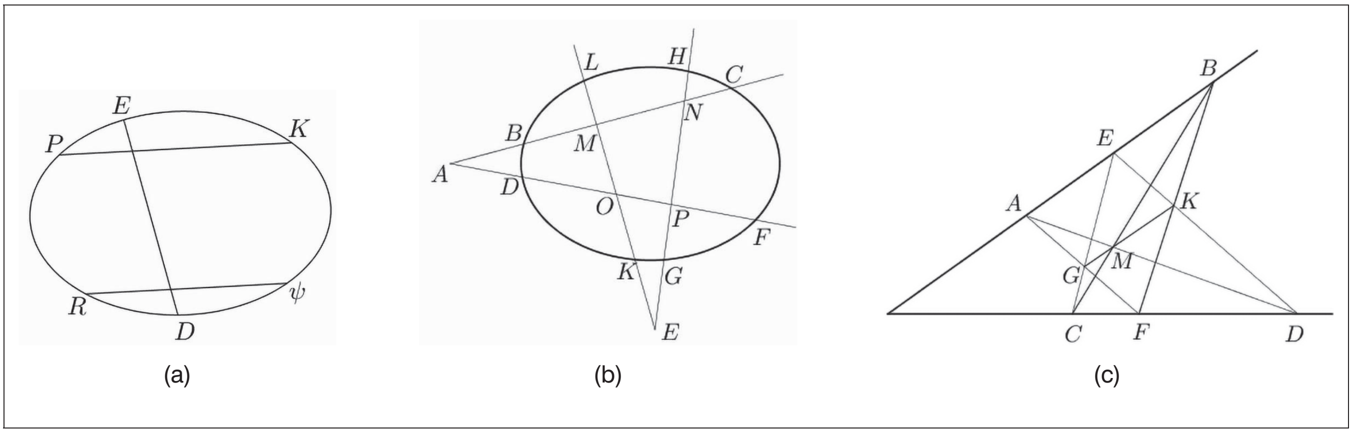


FIGURA 5 – (a) Illustra il teorema “delle corde” per le sezioni coniche. (b) Questo diagramma riproduce la Figura III in (Pascal 1640). (c) Diagramma per il Lemma 13 del Libro VII in (Pappo 1588).

Dopodiché Pascal passa alla prima proposizione, che enunciamo mantenendoci fedeli all’originale formulazione (Fig. 4): *Se nel piano MSQ di una sezione conica PKV, sono date le rette AK e AV intersecanti la conica nei P, K e Q, V rispettivamente, se per due di questi quattro punti non allineati con A, come per esempio K e V, e per due N, O sulla conica si tracciano quattro rette KN, KO, VN, VO che tagliano le rette AV, AP nei punti S, T, L, M, la composizione dei rapporti di PM a MA e di AS a SQ, è uguale alla composizione dei rapporti di PL a LA e di AT to TQ.*

In altri termini ciò significa

$$\frac{PM}{MA}\times\frac{AS}{SQ}=\frac{PL}{LA}\times\frac{AT}{TQ} \tag{1}$$

Formuliamo le altre proposizioni direttamente in termini moderni.

Seconda proposizione (Fig. 4): *Se tre rette complanari DE, DG, DH sono tagliate dalle rette AP e AR nei punti F, G, H, e C, γ, B, rispettivamente, e sulla retta DC è fissato un punto E, allora*

$$\frac{EF\times FG}{EC\times C\gamma}\times\frac{A\gamma}{AG}=\frac{EF\times FH}{EC\times CB}\times\frac{AB}{AH}=\frac{EF\times FD}{EC\times CD} \tag{2}$$

Inoltre, se una sezione conica passante per i punti E, D interseca le rette AH e AB, nei punti P, K e R, ψ, rispettivamente, si ha

$$\frac{EF\times FG}{EC\times C\gamma}\times\frac{A\gamma}{AG}=\frac{FK\times FP}{CR\times C\psi}\times\frac{AR\times A\psi}{AK\times AP} \tag{3}$$

Per capire la portata di questa proposizione osserviamo che la (3) conduce al noto teorema di Lazare Carnot sulla relazione che intercorre tra i segmenti intercettati da una conica sui lati di un triangolo. ([9]) Inoltre se il punto A è all’infinito, da (2) e (3) segue che

$$\frac{EF\times FD}{EC\times CD}=\frac{FK\times FP}{CR\times C\psi}$$

che esprime il teorema “delle corde”, racchiuso nelle Proposizioni 16-23 del terzo libro delle *Coniche*, riguardante i segmenti intercettati da una trasversale su due corde parallele di una conica (Fig. 5a). ([10])

L’enunciato della terza proposizione può essere posto nella forma seguente (Fig. 5b): *Se le quattro rette AC, AF, EH, EL, si intersecano nei punti N, P, M, O, e una conica interseca le stesse rette nei punti C, B; F, D; H, G; L, K rispettivamente, allora*

$$\frac{MC\times MB}{PF\times PD}\times\frac{AD\times AF}{AB\times AC}=\frac{ML\times MK}{PH\times PG}\times\frac{EH\times EG}{EK\times EL}$$

Questa proposizione è un caso particolare del teorema in (Carnot 1806, No. 379).

La quarta proposizione, che Pascal chiama “propriété merveilleuse” e per la quale rinvia ancora alla sua Figura I (Fig. 4), è il cosiddetto “teorema di involuzione” di Desargues (1639): *Se una conica PQV è data nel piano MSQ, e quattro punti K, N, O, V sono assegnati su essa, tracciate le rette KN, KO, VN, VO in modo tale che per ognuno dei quattro punti passi una sola di esse, e un’altra retta inter-*

([9]) Cfr. (Carnot 1806, No. 378).

([10]) Cfr. anche (Pappo 1588, VIII, Prop. 13). Per la storia di questo teorema si veda (Del Centina, Fiocca 2021).

seca la conica nei punti R, ψ, e le quattro rette nei punti x, y, Z, δ, rispettivamente, allora:

$$\frac{ZR \times yR}{Z\psi \times y\psi} = \frac{\delta R \times xR}{\delta\psi \times x\psi}$$

Infine, la quinta proposizione riguarda una proprietà delle coniche a centro già presente in (Desargues 1639), sulla quale per brevità non ci soffermiamo.

Pascal termina l'*Essay* affermando che dalle proposizioni esposte egli può dedurre anche altri risultati, probabilmente alludendo a questioni non comprese nei primi quattro libri delle *Coniche*. A questo riguardo pensiamo che egli avesse in mente la costruzione della conica per 5 punti, problema affrontato anche in (Mydorge 1639) mediante il teorema delle corde, e più in generale la costruzione delle coniche soggette a passare per n punti ed essere tangenti a $5 - n$ rette ($n = 5, \ldots, 0$), come Pascal accenna nella sua comunicazione all'Accademia di Mersenne alla voce "*Tactiones etiam conicae*" (v. Sect. 4). (11)

3. – Il teorema dell'esagono, ispirazione e dimostrazione

Secondo Taton (1962, 209), Pascal fu ispirato dal noto teorema di Pappo corrispondente al Lemma 13 del settimo libro del *Collezione* (Fig. 5c): *Se A, E, B sono tre punti su una retta e C, F, D sono altri tre punti su un'altra retta, allora i punti di intersezione, G, M, K, delle coppie di rette AF e EC, AD e BC, ED e BF sono allineati*. È probabile però che questo teorema sia valso più come una conferma che come ispirazione, e che le cose siano andate diversamente.

Certamente influenzato da Desargues, Pascal si convince che la teoria delle sezioni coniche può essere fondata sul fatto che cinque punti (in posizione generale) determinano un'unica conica e che la condizione per un sesto punto di appartenere ad essa esprime una "equazione" che può essere usata per rappresentare tutte le sezioni coniche indipendentemente dal tipo. (12) Questo è quanto accadeva nel *Brouillon project* per mezzo del concetto di "involuzione di sei punti", invariante per proiezione centrale, e del relativo "teorema di involuzione", che però si esprimeva tramite una condizione difficile da applicare. Ma vediamo un po' più in dettaglio cosa Desargues lasciò in "eredità" a Pascal.

Il teorema di Menelao. (13) Di esso Desargues fa ampio uso nel *Brouillon project* attribuendolo a Claudio Tolomeo, (14) probabilmente perché conosciuto tramite l'*Almagesto*. Questo teorema, che appare nelle *Sferiche* di Menelao, afferma che (Fig. 6a): *Se AB, AG sono due segmenti e BE, GD sono altri due segmenti che si intersecano in F ed intersecano AG in E e AB in D rispettivamente, allora*

$$\frac{GE}{EA} = \frac{GF}{DF} \times \frac{BD}{BA}.$$

Relazioni simili valgono scambiando E con A e F con D, o A con D, e E con F. Osserviamo inoltre che reciprocamente l'equazione

$$\frac{AE}{EG} \times \frac{GF}{FD} \times \frac{DB}{BA} = 1$$

esprime una condizione affinché tre punti come E, F e B siano allineati.

Il metodo di proiezione. Per dimostrare certe proprietà delle sezioni coniche Desargues le prova per il cerchio di base del cono e poi le trasporta alle sezioni medesime per proiezione dal vertice del cono, mediante semplici considerazioni di geometria dello spazio. Lo spazio è "ampliato" mediante l'adozione degli elementi "all'infinito".

Il teorema dei triangoli in prospettiva. Questo teorema afferma che (Fig. 6c): *Dati in un piano due triangoli ABC e DEF, se le rette AD, BE e CF si incontrano in un medesimo punto O (ossia i due triangoli sono in prospettiva rispetto ad O), allora i prolungamenti dei lati corrispondenti si incontrano in tre punti L, M, N che giacciono su una medesima retta*. Desargues pubblicò questo teorema soltanto nel 1648, (15) anche se riteniamo che egli lo

(11) Pascal scrive: "ubi ex quinque puntis et quinque rectis datis, quinque quibuslibet, etc...." (Pascal 1779, IV, 409). Si veda a questo proposito (Taton 1955, 13, nota 5), e (Taton 1962, 231).

(12) Ricordiamo che gli antichi avevano introdotto il "latus rectum", o parametro, e ad una "equazione" per ciascun tipo di conica.

(13) Matematico di Alessandria d'Egitto vissuto tra il 70 e il 140 dopo Cristo.

(14) Matematico e astronomo Alessandrino (100-168).

(15) Cfr. (Bosse 1648).

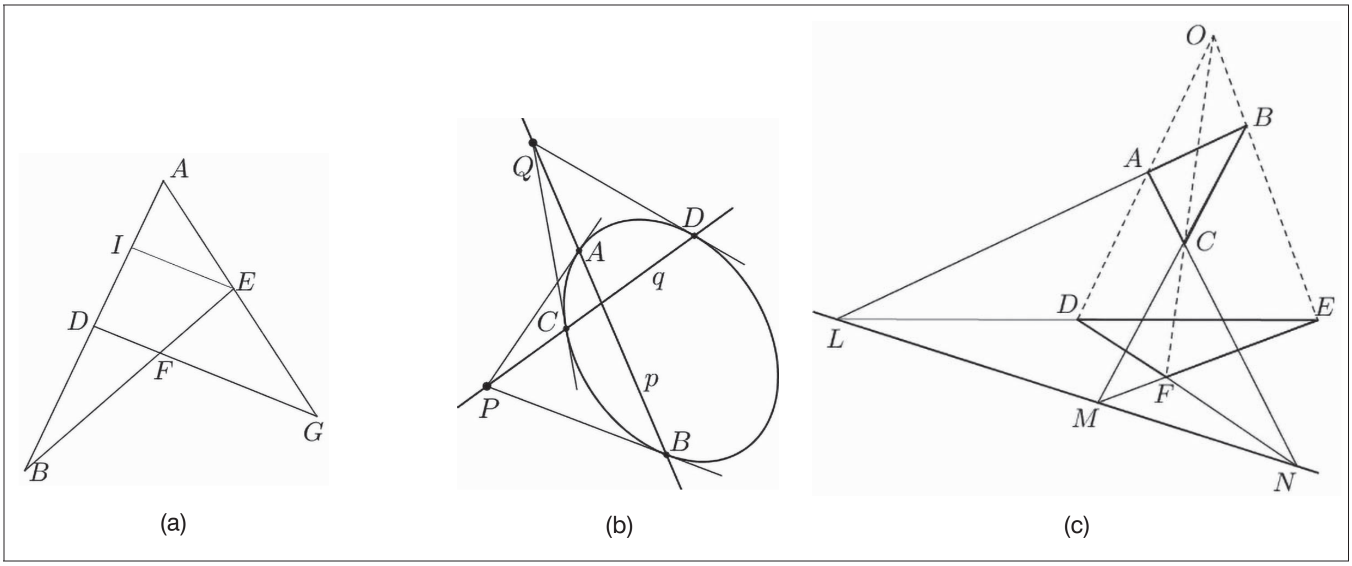


FIGURA 6 – (a) Questo diagramma, che illustra il teorema di Menelao, riproduce una figura da una edizione dell'*Almagesto*. (b) La polare di P rispetto alla conica è la retta p congiungente i punti di contatto delle tangenti condotte da P alla conica; la polare q del punto Q su p passa per P. (c) Illustra il teorema dei due triangoli in prospettiva, i prolungamenti dei lati corrispondenti si intersecano su una medesima retta.

conoscesse da molto tempo poiché legato ai suoi studi di prospettiva.

Il teorema di involuzione. Già ricordato sopra, inserito da Pascal nell'*Essay*.

La reciprocità polare. Nel *Brouillon project* Desargues aveva introdotto, tramite i concetti di "ordinanza di rette" (fascio di rette di centro proprio o improprio) e di "trasversale", l'analogo dei concetti di "polo" e di "polare" rispetto ad una conica. ([16]) Il centro del fascio è il polo, la trasversale è la polare (v. Fig. 6b). Desargues aveva dimostrato che le polari dei punti di una data retta passano per il polo di questa, e che i poli delle rette passanti per un dato punto appartengono tutti alla sua polare (reciprocità polare). ([17])

Forte dei risultati di Desargues e avendo in mente il metodo di proiezione, per esprimere che sei punti appartengono ad una medesima conica, Pascal cerca allora una condizione che si possa rappresentare graficamente a partire dal cerchio. È naturale pensare che studiò la disposizione di sei punti su un cerchio, prima come vertici di un esagono regolare (i cui lati opposti sono sempre paralleli tra loro), poi modificando la posizione dei punti arbitrariamente. Pascal sa che se un esagono inscritto in un cerchio ha due coppie di lati opposti paralleli tra loro anche i due rimanenti sono paralleli tra loro, e lavorando nel piano ampliato si rende conto che i prolungamenti dei lati opposti si incontrano in tre punti allineati perché giacenti sulla retta all'infinito. Osserviamo che Poncelet parti da queste considerazioni per provare il teorema dell'esagono nel suo *Traité des propriétés projective des figures* (1822). ([18]) Consapevole del fatto che l'allineamento è una condizione che si conserva per proiezione centrale, Pascal considerò esagoni qualsiasi, anche intrecciati (come suggeriscono le Fig. 13, 14), e c'è da aspettarsi che verificò sperimentalmente l'allineamento dei punti di intersezione dei lati opposti. Aveva trovato quanto cercava, si trattava ora di dimostrare che i lati opposti di un qualsiasi esagono iscritto in un cerchio si intersecano in tre punti allineati, e per far ciò Pascal ricorre al teorema di Menelao, tanto vantaggiosamente applicato dal suo maestro nel *Brouillon project*.

Vediamo come egli può aver ragionato.

([16]) Usiamo questi termini più familiari per comodità, essi non appartengono al vocabolario di Desargues.

([17]) Per un dettagliato studio di tutti questi aspetti cfr. (Anglade, Briend 2017, 2018, 2019, 2020) e (Del Centina 2022b).

([18]) Si veda a questo proposito la Sez. 6.3.

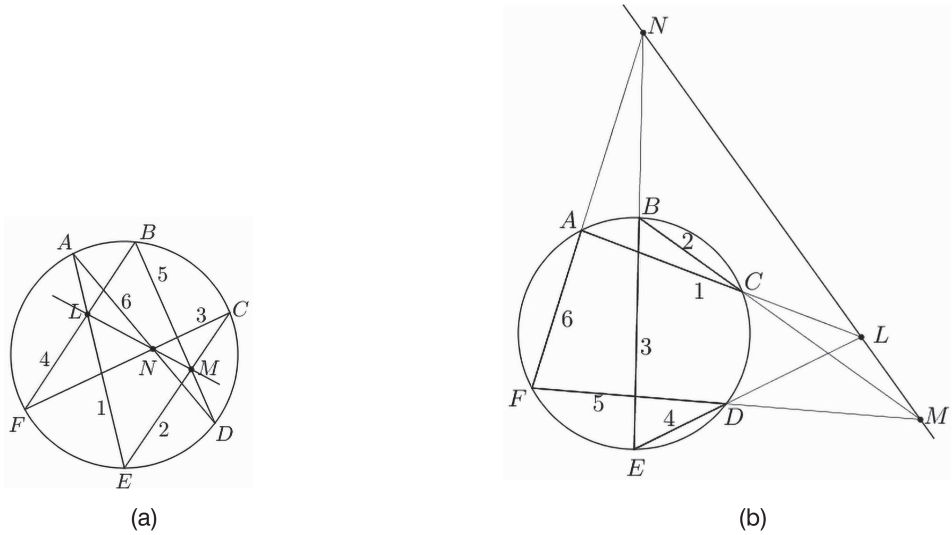


FIGURA 7 – (a) Il diagramma mostra un esagono intrecciato $AECFBD$ i cui lati opposti 1,4; 2,5, e 3,6 si intersecano in punti allineati L, M, N. (b) Questo diagramma mostra che unendo I sei punti in modo diverso si ottiene un esagono $ACBEDF$, i cui lati opposti 1,4; 2,5; 3,6 si intersecano ancora in tre punti allineati.

Sia dunque $ABCDEF$ un esagono inscritto in un cerchio (Fig. 8).

Per il teorema sopra citato applicato al triangolo LMN tagliato dalle trasversali ABR, FES, CDT, otteniamo rispettivamente

$$\frac{NA}{AM} \times \frac{MB}{BL} \times \frac{LR}{RN} = 1$$

$$\frac{NF}{FM} \times \frac{MS}{SL} \times \frac{LE}{EN} = 1$$

$$\frac{MC}{CL} \times \frac{LD}{DN} \times \frac{NT}{TM} = 1$$

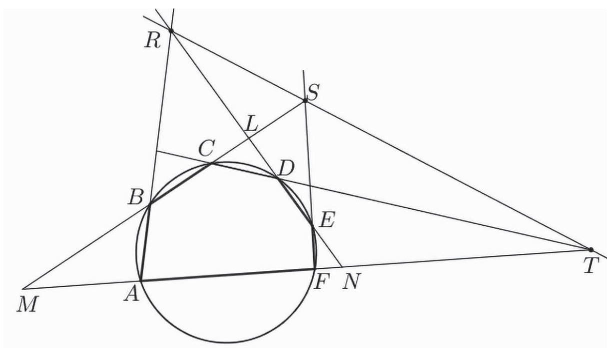


FIGURA 8 – Diagramma per la dimostrazione del teorema dell'esagono nel caso del cerchio.

moltiplicando le quali, e riordinando opportunamente, si ha

$$\frac{MS}{SL} \times \frac{LR}{RN} \times \frac{NT}{TM} \times$$

$$\times \left(\frac{NA}{AM} \times \frac{NF}{FM} \times \frac{MC}{CL} \times \frac{MB}{BL} \times \frac{LD}{DN} \times \frac{LE}{EN} \right) = 1$$

D'altra parte, per il teorema delle secanti, abbiamo anche

$$NA \times NF = ND \times NE,$$
$$MC \times MB = MA \times MF,$$
$$LD \times LE = LC \times LB$$

e quindi in definitiva si ha

$$\frac{MS}{SL} \times \frac{LR}{RN} \times \frac{NT}{TM} = 1$$

la quale, per il reciproco del teorema di Menelao, implica che i punti R, S, T sono allineati.

A questo punto Pascal fu in grado di estendere facilmente il teorema alle coniche mediante il metodo di proiezione. Possiamo immaginare che egli considerò un esagono inscritto in una sezione conica Γ (Fig. 9), proiettò dal vertice del cono sul piano di base i vertici e i lati dell'esagono ottenendo un esagono $ABCDEF$ inscritto nel cerchio di base, i

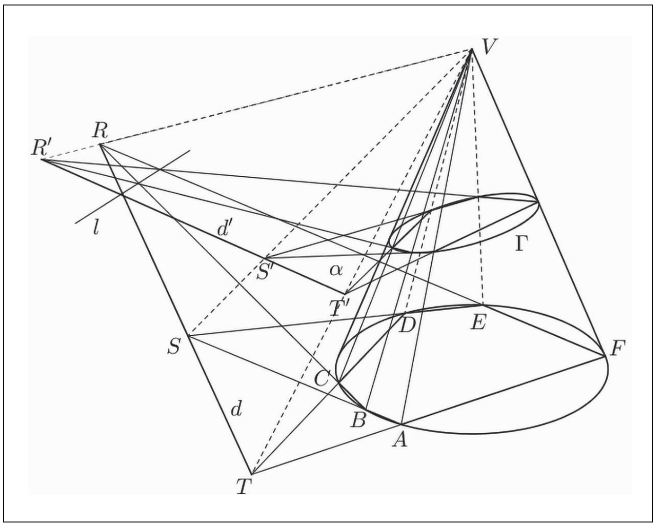
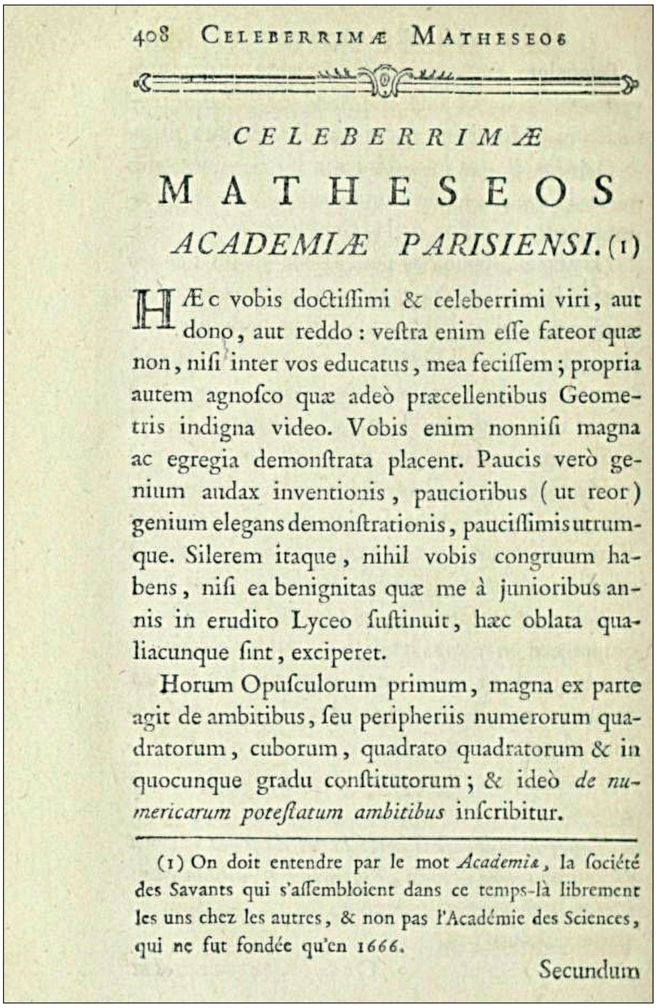


Figura 9 – Il diagramma illustra il metodo di proiezione col quale Pascal estende il teorema dell'esagono dal cerchio ad una sezione conica. La retta l e intersezione del piano di sezione α col piano di base.



408 CELEBERRIMÆ MATHESEOS

CELEBERRIMÆ

MATHESEOS

ACADEMIÆ PARISIENSI. (1)

HÆc vobis doctiſſimi & celeberrimi viri, aut dono, aut reddo : veſtra enim eſſe fateor quæ non, niſi inter vos educatus, mea feciſſem ; propria autem agnoſco quæ adeò præcellentibus Geometris indigna video. Vobis enim nonniſi magna ac egregia demonſtrata placent. Paucis verò genium audax inventionis, paucioribus (ut reor) genium elegans demonſtrationis, pauciſſimis utrumque. Silerem itaque, nihil vobis congruum habens, niſi ea benignitas quæ me à junioribus annis in erudito Lyceo ſuſtinuit, hæc oblata qualiacunque ſint, exciperet.

Horum Opuſculorum primum, magna ex parte agit de ambitibus, ſeu peripheriis numerorum quadratorum, cuborum, quadrato quadratorum & in quocunque gradu conſtitutorum ; & ideò *de numericarum poteſtatum ambitibus* inſcribitur.

(1) On doit entendre par le mot *Academia*, la ſociété des Savants qui s'aſſembloient dans ce temps-là librement les uns chez les autres, & non pas l'Académie des Sciences, qui ne fut fondée qu'en *1666*.

Secundum

Figura 10 – Prima pagina della comunicazione di Pascal all'Accademia di Parigi, pubblicata nel quarto volume delle opere (Pascal 1779).

cui lati opposti, per quanto visto sopra, si intersecano in tre punti R, S, T allineati su una retta d. Allora i punti R', S', T', intersezione dei lati opposti dell'esagono inscritto in Γ sono allineati, poiché appartengono alla retta d' intersezione del piano di sezione e del piano per d e il vertice V del cono.

Pascal si rese probabilmente conto che vale anche il reciproco, ossia: *Se i lati opposti di un esagono (o loro prolungamenti) si incontrano in tre punti allineati, i suoi vertici appartengono ad una conica.*

Molto probabilmente, per provare ciò Pascal ragiona per assurdo come segue. Supponiamo che i lati opposti AB e DE, BC e EF, CD e AF, dell'esagono $ABCDEF$ si incontrino in tre punti allineati L, M, N, ma che i sei vertici non appartengano ad una medesima conica, e dunque che F, ad esempio, non appartenga alla conica γ passante per i rimanenti punti. Allora, il punto F', intersezione di NA con γ, non può coincidere con F. D'altra parte, F' giace su ME, poiché $ABCDEF'$ è inscritto in γ; dunque F e F' essendo entrambi su NA e ME devono coincidere; una contraddizione e quindi F appartiene alla conica passante per i punti A, B, C, D, E.

4. – La comunicazione all'Academia Parigina

Come detto sopra, nel 1654, Pascal indirizzò all'Academia un rapporto (Fig. 10) sulle sue ricerche presenti e passate. ([19]) In esso, dopo una breve presentazione dei risultati ottenuti in ambito aritmetico, Pascal elenca, commentandole brevemente, una serie di ricerche geometriche che afferma aver completato.

Promotus Apollonius Gallus (Generalizzazione dell'Apollonio gallico). Pascal spiega che si tratta di uno studio sui contatti tra cerchi con il quale afferma di avere ampiamente generalizzato quanto fatto da François Viète (1540-1603) nell'*Apollonius Gallus* (1600) circa la determinazione dei cerchi tangenti a tre cerchi dati; problema posto da Apollonio nella

([19]) Cfr. (Pascal 1779, IV, 408-411). Una traduzione in francese si trova in (Pascal 1954), e un estratto è pubblicato in (Taton 1962, 211-212).

sua perduta opera sui *Contatti* ricordato nella *Collezione* di Pappo (1588).

Tactiones spherica (Contatti sferici). Qui Pascal studia questioni riguardanti il contatto tra sfere generalizzando opportunamente i risultati sui contatti circolari. A questo proposito Pascal osserva, senza ulteriori spiegazioni, che i metodi da lui utilizzati si fondano su “una notevole proprietà delle coniche, utile nella risoluzione di molti altri problemi, la cui dimostrazione sta in meno di mezza pagina”. Pascal si riferisce certamente al teorema dell’esagono.

Tactiones etiam conicae (Sui contatti conici). In esso Pascal affronta il problema della determinazione delle coniche passanti per n punti e tangenti a $5 - n$ rette, per $n = 5, \ldots, 0$.

Loci solidi (Luoghi solidi, ossia, seguendo la terminologia greca, riguardante la determinazione di luoghi geometrici connessi con le coniche). Pascal afferma che questo trattato conteneva “tutti i casi ed era completo sotto ogni aspetto”. Probabilmente si trattava del manoscritto fatto circolare fin dal 1648 tra i membri dell’Accademia, e ricordato nella lettera di Mersenne a Constatijn Huygens sopra citata, contenente tra l’altro la soluzione del problema di Pappo delle tre e quattro rette.

Loci plani (Luoghi piani, ossia, ancora secondo la terminologia greca, luoghi formati da sole rette e cerchi), già soggetto di un trattato di Apollonio andato perduto, ma il cui contenuto era stato ricordato da Pappo nella sua *Collezione*. Pascal semplicemente ricorda che a queste questioni si era applicato dominandole “il più famoso geometra dei nostri tempi”, certamente riferendosi a Fermat i cui risultati sull’argomento, ancorché pubblicati molti anni dopo, erano già noti in Francia e altrove. Possiamo ritenere che Pascal abbia affrontato qui alcune questioni rimaste aperte.

Conicorum opus completum (Opera completa sulle sezioni coniche). Pascal afferma che questo manoscritto comprendeva i quattro libri delle *Coniche*, ed una gran quantità di altri risultati dedotti da una sola proposizione, la quale, precisa, “ho trovato all’età di sedici anni e che ho successivamente perfezionato”. Evidentemente il teorema dell’esagono poi perfezionato nell’esagramma mistico.

Perspectiva methodus (Un metodo di prospettiva). Pascal scrive che in esso egli espone un metodo per il disegno di prospettive che definisce “il più breve e il più vantaggioso di quelli già noti e di quelli che possono essere inventati, perché dà i punti del disegno mediante il tracciamento di due sole rette”.

5. – Il *Conicorum opus completum*

Nel 1673, Henry Oldenburg, Segretario della Società reale di Londra, fu informato dal matematico John Collins dell’esistenza del trattato pascaliano. Desideroso di conoscere i progressi della geometria in Francia, Oldenburg scrisse a Leibniz, in quel tempo a Parigi, affinché recuperasse il manoscritto (Oldenburg 1973, 559). Leibniz si mise immediatamente in contatto con gli eredi di Pascal chiedendo loro di per poter visionare il manoscritto, che gli pervenne però solo verso la fine del 1675.

Leibniz lesse il manoscritto, e fece fare una copia della parte intitolata *Generatio conisectionum tangentium et secantium; seu projectio peripheriae, tangentium, et secantium circuli, in quibuscumque oculi, plani ac tabellae positionibus* (Generazione delle sezioni coniche, tangenti e secanti; cioè proiezione della periferia, delle tangenti e secanti del cerchio, in ogni posizione dell’occhio e del piano di sezione), forse la parte che più lo interessava. Nell’agosto del 1676, restituì il manoscritto a Florin Périer, marito della sorella maggiore di Pascal. Nella lettera di accompagnamento Leibniz scrive di aver esaminato il manoscritto, ma, che per le sue molteplici occupazioni, non aveva potuto dedicare ad esso tutta l’attenzione che avrebbe meritato. Egli aggiunge, tuttavia, che a suo giudizio il manoscritto era pronto per essere pubblicato e che si sarebbe dovuto provvedere al più presto affinché l’opera non perdesse “il suo carattere di novità”. Dopodiché, nella medesima lettera, Leibniz descrive brevemente le sei parti costituenti il manoscritto pascaliano, indicando anche come queste avrebbero dovuto susseguirsi nel volume a stampa.

5.1 – *Generatio conisectionum*

Secondo Leibniz il primo capitolo del trattato pascaliano doveva essere il *Generatio conisectionum*, a

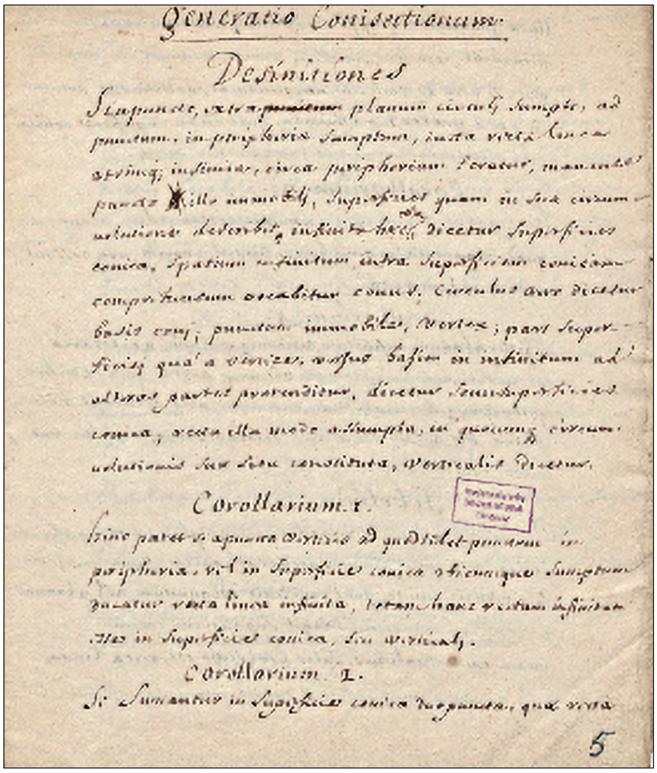

Generatio Conisectionum
Definitiones
Corollarium 1
Corollarium 2
5

FIGURA 11 – Prima pagina della copia del *Generatio conisectionum*, G.W. Leibniz Bibliothek – Niedersächsische Landesbibliothek, Hannover.

suo giudizio alla base dell'intera opera (Fig. 11). Leibniz sottolinea che le figure relative erano incluse in un foglio separato.

Come appare dall'edizione di Gerhardt, questo primo capitolo è dedicato da Pascal alle definizioni di superfice conica, o cono, a base circolare, del suo vertice, delle rette generatrici e delle due falde contrapposte. A queste definizioni, che ricalcano sostanzialmente quelle date da Desargues nel *Brouillon project*, Pascal fa seguire quattro corollari che possiamo così riassumere: 1) Ogni retta per il vertice e un altro punto del cono giace sul cono ed è quindi una retta generatrice; 2) Ogni retta congiungente due punti del cono o è una generatrice, e quindi passa per il vertice, o non contiene altri punti del cono; 3) Tre rette generatrici non possono appartenere allo stesso piano; 4) Ogni piano dello spazio interseca il cono.

Nel successivo scolio Pascal introduce sei tipi di sezione. Se il piano di sezione passa per il vertice la sezione può ridursi a un solo punto, il vertice, oppure essere una retta se il piano è tangente al cono, oppure ad una coppia di rette che si intersecano nel vertice, sezione che Pascal chiama "*angolus rectilineus*". Se il piano di sezione non passa per il vertice e il piano ad esso parallelo per il vertice non contiene alcuna generatrice del cono la sezione è detta *Antobola* o *Ellisse*; se contiene una sola generatrice (nel qual caso è tangente al cono) la sezione è detta *Parabola*; se tale piano contiene due generatrici la sezione è detta *Iperbole*. Pascal precisa poi che due rette nel piano hanno sempre un punto a comune, che può essere a distanza finita o no, nel qual caso le rette sono parallele. Inoltre chiama *mono-secanti* le rette che incontrano la sezione conica in un solo punto, e definisce *asintoto* di un'iperbole una retta parallela ad una mono-secante che interseca la curva solo a distanza infinita.

Pascal fa seguire vari corollari, in uno dei quali afferma che ogni sezione conica è la proiezione dal vertice V del cono nel piano di sezione del cerchio di base C.

Dopodiché Pascal chiama *punti senza immagine* i punti di C la cui immagine, nella proiezione dal vertice del cono nel piano di sezione, è a distanza infinita, e *punti mancanti* della sezione conica le proiezioni dei punti senza immagine. Pascal sottolinea che l'ellisse è una linea chiusa che circonda uno spazio finito; che la parabola, sebbene immagine di un cerchio, è una curva infinitamente estesa e circonda uno spazio infinito; che anche l'iperbole è infinitamente estesa e circonda uno spazio infinito, e che è composta di due parti, corrispondenti ai due archi in cui è diviso il cerchio di base dai punti senza immagine, ciascuna delle quali chiama *semiiperbole*

Successivamente Pascal enuncia tre corollari che possiamo riassumere nei seguenti tre punti: A) Se Γ è una ellisse, ogni secante s di C, ha per immagine una secante σ of Γ. B) Se Γ è una parabola, ogni secante s di C, ha la sua immagine σ nel piano di sezione π; se s non passa per il punto di C che non ha immagine σ è una secante di Γ, altrimenti σ è parallela a una generatrice e incontra Γ in un solo punto. C) Se Γ è una iperbole, ogni secante s di C che non passa per alcun punto senza immagine, ha per immagine una retta secante di Γ; se s passa per uno di questi punti, la sua immagine σ taglia l'iperbole in un solo punto (ossia è una mono-secante), se s passa per entrambi, la sua immagine σ non è a distanza finita nel piano della sezione.

Con altri tre corollari, Pascal esamina come sono trasformate le tangenti al cerchio di base per proiezione dal vertice nel piano di una sezione conica Γ: D) Nel caso di una ellisse, ogni tangente t a C ha immagine in una tangente τ di Γ. E) Nel caso di una parabola, ogni tangente t a C ha immagine in una tangente τ a Γ, eccetto quando t è tangente a C nel punto senza immagine. In un successivo scolio precisa "Nel caso della parabola c'è una retta, che pur non apparendo, gioca effettivamente il ruolo di una tangente, essendo infatti immagine di una tangente". ([20]) Dunque la retta all'infinito del piano di sezione su cui giace la parabola è "descritta" da Pascal come tangente alla curva nel suo punto all'infinito. F) Nel caso di un'iperbole, ogni tangente t a C ha per immagine una retta τ nel piano di sezione π, e se il punto di contatto non è un punto senza immagine τ è tangente a Γ in un punto a distanza finita, altrimenti τ non tocca l'iperbole a distanza finita, ed è parallela alla generatrice del cono a cui il piano di sezione è parallelo. Pascal conclude "gli asintoti giocano il ruolo di tangenti a distanza infinita e come tali devono essere considerati". Questa descrizione piacque molto a Leibniz, che prese nota (v. Sez. 6.1, Documento D).

Non c'è dubbio che l'approccio per così dire "proiettivo" di Pascal appare chiaramente dalle pagine del *Generatio conisectionum*.

5.2 – *Descrizione di Leibniz delle altre parti*

A giudizio di Leibniz la parte da considerarsi seconda era quella intitolata *De hexagrammo mystico et conico*, nella quale Pascal introduceva il suo esagramma e ne delineava le proprietà.

Leibniz ritiene poi la terza quella intestata "*De quatuor tangentibus, et rectis puncta tactuum jungentibus, unde rectarum harmonice sectarum et diametrorum proprietates oriuntur*", nella quale si dimostravano proprietà dei diametri e del centro delle sezioni coniche.

L'approfondita analisi della minuta della lettera inviata da Leibniz a Pèrier condotta da Mesnard e Taton, ha messo in luce che è in questa terza parte che Pascal studiò alcune configurazioni limite quando gli estremi di uno o più lati dell'esagono inscritto in una conica divengono infinitamente vicini, e i lati corrispondenti sono assimilati a rette tangenti alla conica. Come suggerisce Taton (1962, 244) è molto probabile che qui Pascal approfondisse le proprietà delle tangenti e trattasse la relazione "polo-polare" rispetto ad una conica. Infatti quando due lati opposti divengono infinitamente piccoli e assimilati a tangenti, il teorema dell'esagono conduce al seguente (v. Fig. 12): (Teorema del quadrilatero) *Le tangenti a una sezione conica nei vertici opposti di un quadrilatero ABCD ad essa inscritto, si incontrano sulla retta congiungente i punti di intersezione dei lati opposti*. Un enunciato in accordo col titolo della terza parte "Delle quattro tangenti e rette congiungenti i punti di contatto ecc".

Leibniz individua poi la quarta parte in quella denominata "*De propositionibus segmentorum secantium et tangentium*", dove, come lui scrive, si trattavano le ordinate rispetto ad un diametro e i rapporti tra segmenti intercettati da una conica su una o più rette. D'accordo con Taton (1962, 246-247) è qui che Pascal studiava le varie proprietà segmentarie enunciate da Apollonio, e sviluppava la seconda proposizione dell'*Essay* mettendo in luce il teorema delle corde, ricordato nella Sez. 2.

La parte intitolata "*De tactionibus conicis*" è secondo Leibniz la quinta. Questa, come egli spiega, era attinente ai contatti di una conica con rette assegnate, ed è facile dedurre che fosse dove Pascal determinava le coniche soggette a passare per punti

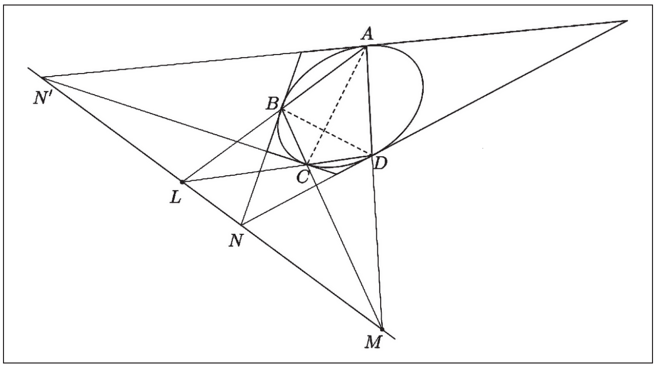


FIGURA 12 – Il diagramma illustra il teorema del quadrilatero, dal quale si possono dedurre le proprietà della relazione "polo-polare". Qui la retta ML è la polare del punto di intersezione delle due diagonali AC e BD.

([20]) "Est ergo in parabola recta deficiens, quae quidem vice fungitur tangentis, eum tangentis sit apparentia", (Gerhardt 1892, 201).

assegnati e/o ad essere tangenti a rette date; problema la cui soluzione era già stata annunciata nell'*Essay*.

Alla sesta parte, lasciata senza intestazione da Pascal, Leibniz assegna il titolo "*De loco solido*", precisando che qui veniva trattata una questione già affrontata da Descartes e Fermat. Questo riferimento conduce inequivocabilmente al problema delle tre e quattro rette di Pappo. Leibniz osserva che questa parte conteneva molte grandi figure a colori, e definizioni e risultati attinenti l'esagramma mistico.

Riassumendo, Leibniz sosteneva che le prime cinque parti costituissero il trattato vero e proprio, mentre la sesta era un compendio contenente i risultati principali esposti nelle altre parti. Molto probabilmente quest'ultima costituiva il trattato a cui Mersenne aveva fatto riferimento nella succitata lettera a Constantijn Huygens del 1648.

Come abbiamo detto sopra, Leibniz termina la lettera a Pèrier confermando che secondo lui il manoscritto era pronto per la stampa, e che non si dovesse tardare a procedere affinché il trattato non perdesse il suo carattere di novità. A questo proposito, dall'edizione critica della minuta della lettera (Mesnard, Taton 1963), si evince che Leibniz aveva in mente il *Nouvelle méthode en géométrie pour les sections des surfaces coniques et cylindriques*, pubblicato tre anni prima da Philippe de La Hire, nel quale veniva utilizzato il metodo di proiezione.

6. – L'Esagramma mistico

Come abbiamo detto nella Sez. 1, le note lasciate da Leibniz sono state di grande aiuto per comprendere il significato e la reale portata di quello che Pascal stesso chiamò "Exagrammum mysticum". Qui, interpretando quanto scritto da Leibniz nelle sue note, spiegheremo la natura dell'esagramma mistico, la probabile origine dell'aggettivo "mistico", e cosa è ragionevole pensare l'esagramma mistico stesso possa avere suggerito a Pascal.

6.1 – *Descrizione e interpretazione delle note di Leibniz*

Le note in latino prese da Leibniz durante la lettura del manoscritto pascaliano sono state pubblicate tradotte in francese da Pierre Costabel in (1962). Esse compaiono su quattro foglietti che Costabel, indica con le lettere A, B, C, D, notazione che qui seguiremo perché più comoda delle originali segnature.

Il documento A è un promemoria su come Leibniz intendeva organizzare le varie parti del manoscritto come descritto nella lettera a Périer.

Il documento B, intestato "*Conica pascaliana*", contiene tre distinte note. La prima riguarda la generazione delle coniche come descritta nel *Generatio conisectionum*. Nella seconda si legge:

> Ogni metodo di scoperta nella geometria di situazione, e quindi senza calcolo, riposa sulla simultanea considerazione di vari fatti...ciò accade per mezzo di figure che ne includono diverse altre, attraverso l'uso dello spazio, o per mezzo del movimento e della loro mutazione. In particolare tra i movimenti e mutazioni [trasformazioni] la mutazione dell'apparenza o trasformazione ottica [prospettiva] è [qui] applicata in maniera molto utile.

Questo commento di Leibniz dice che nello svolgere il suo trattato, Pascal usò efficacemente la prospettiva e una sorta di "principio di continuità" che permette di muovere elementi di una figura e considerare situazioni limite; un principio che, come sappiamo, fu poi posto da Jean-Victor Poncelet a fondamento del *Traité des propriétés projective des figures* (1822).

Nello stesso documento viene anche enunciato il problema delle quattro rette di Pappo, con la precisazione "Pascal riduce facilmente questo problema al suo esagramma e attraverso questo al cono". Torneremo su questo argomento più avanti.

Il documento C (Fig. 13)., a nostro avviso il più importante, è intestato "*Hexagrammum pascalianum*" e datato gennaio 1676. In esso sono tracciate quattro figure. Le due in alto rappresentano due esagrammi (v. anche Fig. 14a,b), i cui lati sono numerati da 1 a 6. Dalla nota relativa si evince che Pascal aveva denominato *contigui* i lati come 1 e 2, 2 e 3 ecc.; *accoppiati* i lati come 1 e 3, 2 e 4, ecc.; *opposti* i lati come 1 e 4, 2 e 5, ecc.

Sotto dell'intestazione si trova scritto "Mysticum ut vocat idemque semper conicum", ossia "Mistico come lui lo chiama, il quale è sempre conico", dunque, come già osservato, fu Pascal stesso ad attri-

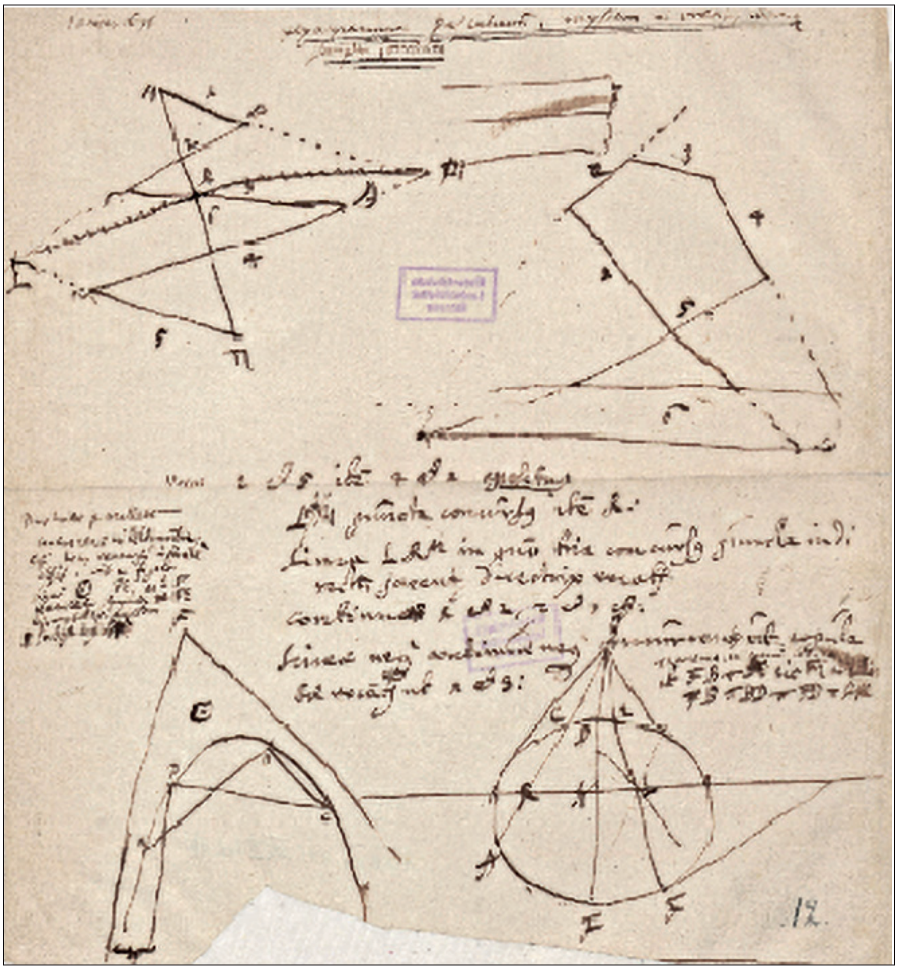
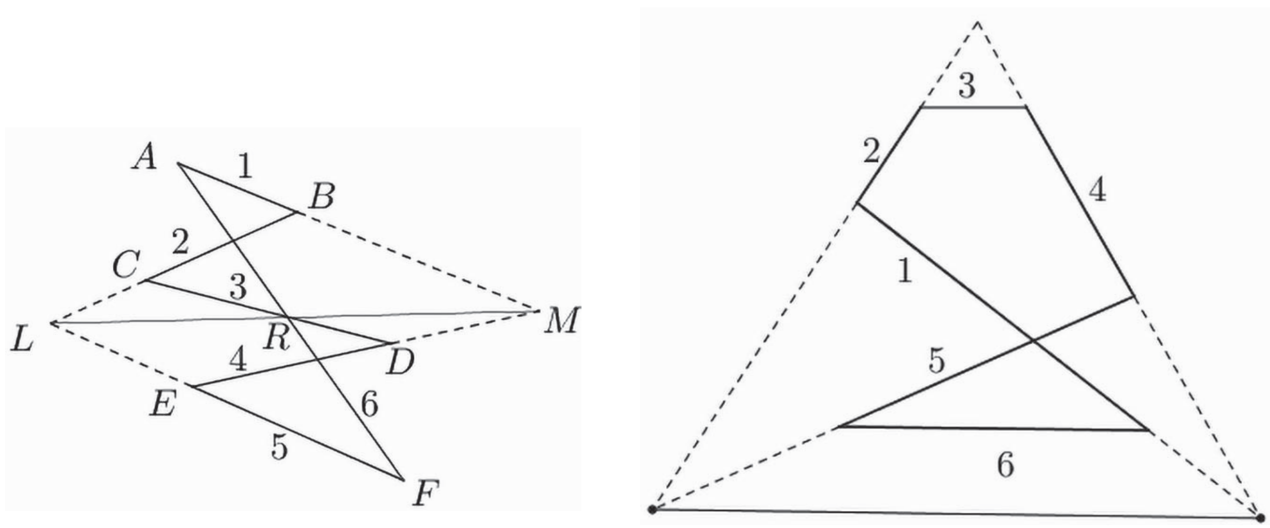


FIGURA 13 – Riproduce il Documento C, Ms. LH. XXXV, XV, I, Bl. 12r, G.W. Leibniz Bibliothek – Niedersächsische Landesbibliothek, Hannover.



(a) (b)

FIGURA 14 – Questi diagrammi riproducono le due figure poste nel Documento C. (a) Sono disegnati i prolungamenti dei lati e la retta su cui giacciono i loro punti di intersezione, la direttrice. (b) È qui illustrato il caso in cui due lati sono paralleli, la direttrice è allora parallela ad essi.

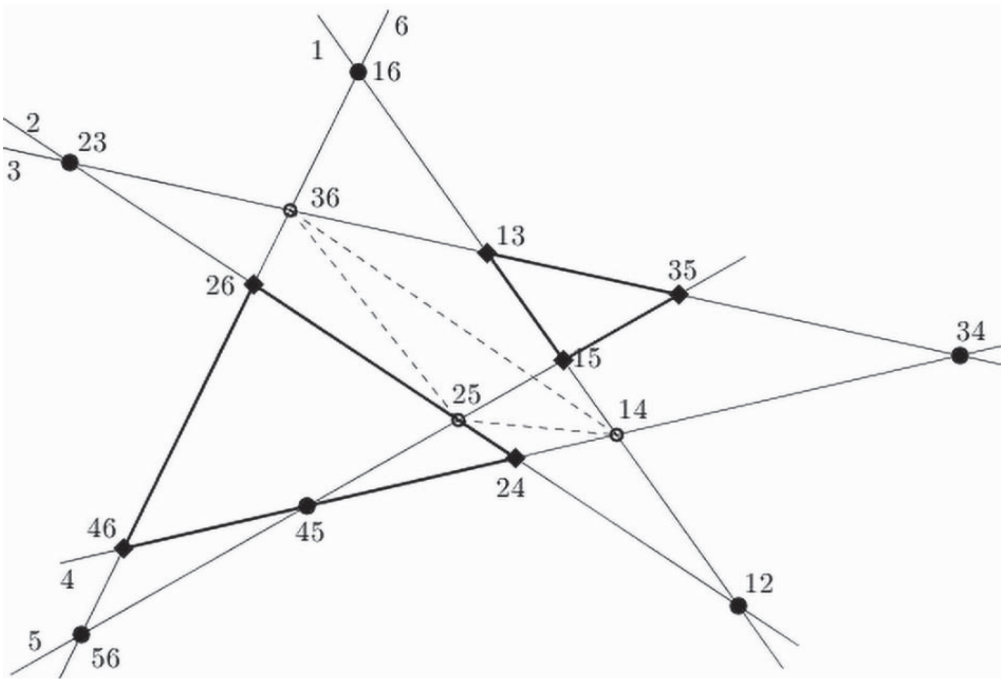


FIGURA 15 – Questo diagramma rappresenta un esagramma generale. I punti "•" denotano le intersezioni delle rette contigue, i punti "⬥" le intersezioni delle rette accoppiate, i punti "○" denotano le intersezioni delle rette opposte.

buirgli l'aggettivo "mistico". Interpretare queste poche indicazioni lasciate da Leibniz, è la chiave per comprendere il vero significato dell'*Exagrammum mysticum*.

Dalla nota di Leibniz sembra di capire che un esagramma (generale) è costituito da sei rette in un piano,(21) numerate da 1 a 6, e dai quindici punti di intersezione, che qui conveniamo di denotare ij, $1 \leq i < j \leq 6$, intendendo con ij il punto di intersezione delle due rette numerate i e j. Come si evince dalla Fig. 14b, un punto ij può essere all'infinito. Osserviamo poi che i quindici punti di intersezione possono essere raggruppati in modo naturale come segue (v. Fig. 15): i sei corrispondenti all'intersezione di rette contigue 12, 23, 34, 45, 56, 16; i sei intersezione di rette accoppiate 13, 24, 35, 46, 15, 26, vertici dei triangoli i cui lati sono le rette 1, 3, 5, e 2, 4, 6; i tre corrispondenti alle intersezioni delle rette opposte, ossia 14, 25, 36, i quali, in generale, non appartengono a una stessa retta.

(21) Si ritiene poste in posizione generale, cioè tali che mai tre di esse si intersecano in uno stesso punto.

Dalla frase sotto l'intestazione, avendo presente il Lemma 1 dell'*Essay*, si evince che i punti 14, 25, 36 sono allineati se i sei punti 12, 23, 34, 45, 56, 16 giacciono su una medesima conica (v. Fig. 16), nel qual caso l'esagramma è detto *mistico*. Pascal, per ragioni che vedremo più avanti, è consapevole che vale anche il reciproco,(22) e dunque in definitiva che vale il seguente teorema: (Esagramma mistico) *I sei punti 12, 23, 34, 45, 56, 16 giacciono su una medesima conica se e solo se i punti 14, 25, 36 sono allineati.*(23) In questo caso Pascal chiama *direttrice* la retta su cui giacciono punti intersezione delle rette opposte.

(22) Questo teorema è oggi noto come teorema di Braikenridge e Maclaurin, v. anche Sez. 7.1.

(23) Una immediata dimostrazione di questo fatto segue dal teorema di Cayley-Bacharach, v. (Eisenbud, Green, Harris 1996); infatti, le due triple di rette 1, 3, 5 e 2, 4, 6 formano due curve cubiche che si intersecano in nove punti e per detto teorema ogni altra cubica passante per otto qualunque di questi necessariamente passa anche per il nono. Dunque, se sei punti sono su una conica (anche degenere) gli altri tre devono giacere su una medesima retta, e viceversa.

Il Documento D, intestato "*A Pascalio*" è datato aprile 1676. Esso contiene una nota, accompagnata da un disegno, relativa alla generazione dei due rami dell'iperbole come proiezione dal vertice del cono sul piano di sezione dei due archi di cerchio i cui estremi sono i punti senza immagine. Compaiono anche altri disegni senza note illustrative e non interpretabili.

6.2 – *L'esagramma mistico e il teorema di Desargues sui triangoli*

In un esagramma, per come pensiamo lo intendesse Pascal, si riscontrano due strutture sottogiacenti: una associata ai punti 12, 23, 34, 45, 56, 16, e l'altra alle due triple di punti 13, 15, 35 e 24, 26, 46. È evidente che le sei rette che uniscono in punti consecutivi 12, 23, 34 ecc., o i sei lati (infinitamente prolungati) dei due triangoli di vertici 13, 15, 35 e 24, 26, 46, costituiscono il medesimo sistema di rette nel piano. Conveniamo di chiamare la prima *Configurazione di Pascal* e la seconda *Configurazione di Desargues.*

Nel caso di un esagramma mistico, cioè quando i punti 14, 25, 36 sono allineati, i prolungamenti dei lati dei due triangoli {13, 15, 35} e {24, 26, 46} risultano associati in modo tale che i loro prolungamenti si intersecano in tre punti allineati 14, 25, 36. Dunque, per il reciproco del teorema di Desargues sui triangoli, le rette che congiungono i vertici corrispondenti dei due triangoli concorrono in un medesimo punto h (v. Fig. 16), ossia i due triangoli sono in prospettiva rispetto a h. Viceversa, partendo da una configurazione di Desargues, ossia da due triangoli in prospettiva, i prolungamenti dei lati opposti dell'esalatero nella configurazione di Pascal

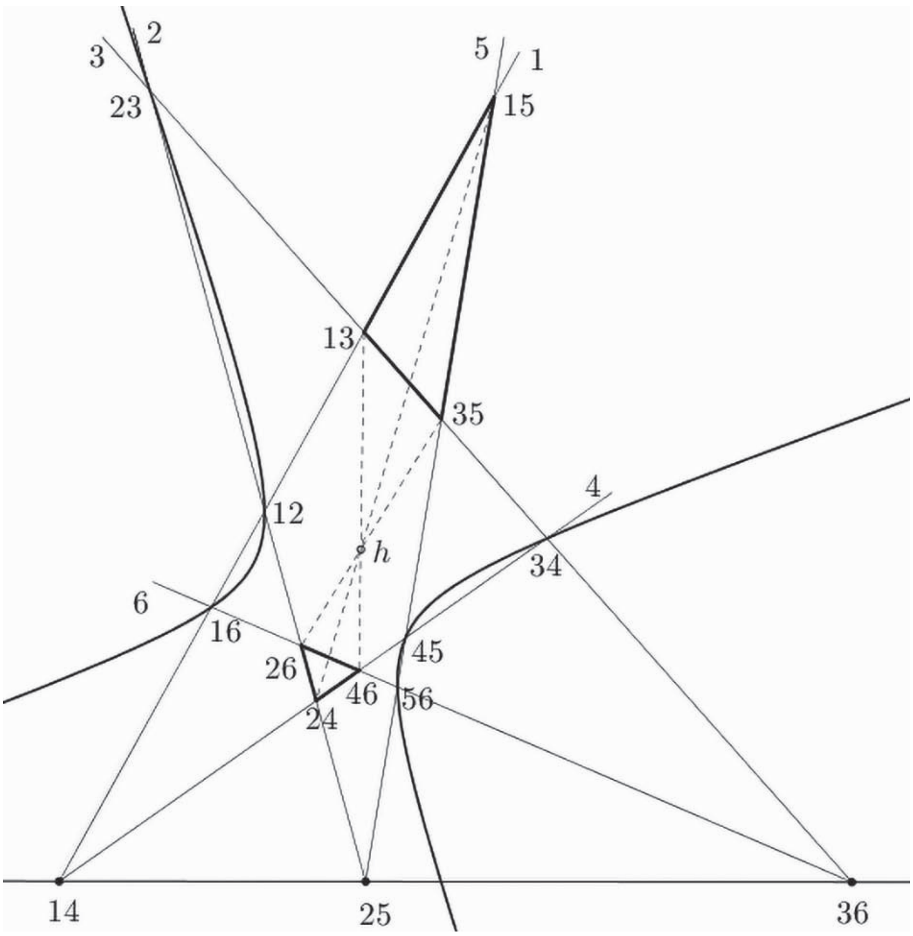


FIGURA 16 – Illustra un esagramma mistico. Sono disegnate la direttrice, e la conica (iperbole) per i sei punti 12, 23, 34, 45, 56, 16. Sono inoltre evidenziati i due triangoli di vertici 13, 15, 35, e 46, 24, 26, che risultano in prospettiva rispetto al punto h.

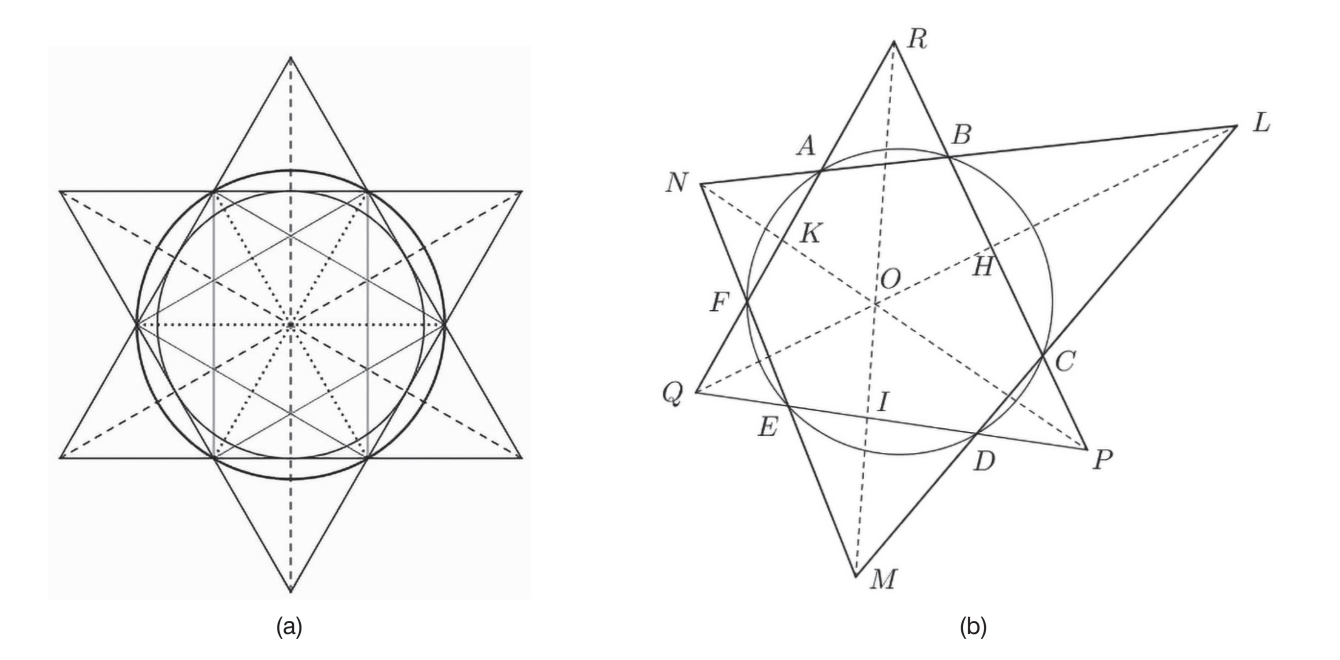


FIGURA 17 – (a) Un'immagine ispiratrice. (b) Diagramma per il teorema (PT).

associata si intersecano in tre punti allineati, e di conseguenza i punti 12, 23, 34, 45, 56, 16 stanno su una medesima conica.

Pensiamo dunque che Pascal fosse consapevole del fatto che il teorema di Desargues sui triangoli in prospettiva e il teorema dell'esagono si implicano a vicenda; questo completa il significato da dare all'esagramma mistico.

6.3 – *Perché "mistico"*

Secondo Gerhardt (1892, 195) questo aggettivo era un'allusione al "pentagramma mistico", o stella a cinque punte, della Kabala, ma Taton (1962, 241) non si dichiarò d'accordo con questa spiegazione. Ci avventuriamo allora in un'altra interpretazione.

La completa comprensione, e forse come abbiamo suggerito sopra la "divinazione" del teorema dell'esagono e quindi dell'esagramma mistico, richiede la conoscenza degli elementi all'infinito e delle loro proprietà, cioè la consapevolezza dell'esistenza di un "piano proiettivo".

A questo riguardo è utile vedere come Poncelet prova il teorema dell'esagono nel suo famoso *Traité sur le propriétés projective de figures* (1822, No. 201). Preso un qualsiasi esagono $ABCDEF$ inscritto in una conica e denotati rispettivamente L, K, I i punti di intersezione delle coppie di lati opposti $\{AB, DE\}$, $\{BC, EF\}$, $\{CD, AF\}$, applicando il suo "4° principio di proiezione" Poncelet proietta centralmente la figura su un nuovo piano in modo da trasformare la conica in un cerchio e la retta LK nella retta all'infinito del nuovo piano. In questo modo l'esagono inscritto nella conica è trasformato in un esagono iscritto nel cerchio avente due coppie di lati opposti paralleli tra loro, così che anche i lati della terza coppia risultano paralleli tra loro. Questa "costruzione", peraltro già utilizzata in (Brianchon 1810), crediamo fosse nota a Pascal.

Osserviamo inoltre che prolungando i lati di un esagono regolare si ottiene una "Stella di David", o stella a sei punte (Fig. 17a), e questa è per molti versi un'immagine ispiratrice per chi ha occhio proiettivo.

Guardando questa figura vediamo che i prolungamenti dei lati opposti si incontrano sulla retta all'infinito, che i due triangoli con cui la figura è formata risultano in prospettiva rispetto al centro del cerchio in cui è inscritto l'esagono, che per il centro passano le congiungenti dei vertici opposti dell'esagono, e che questo è circoscritto ad un altro cerchio concentrico col primo ed i punti di contatto coincidono con i punti di intersezione dei lati e le rette congiungenti i vertici accoppiati (nel senso di

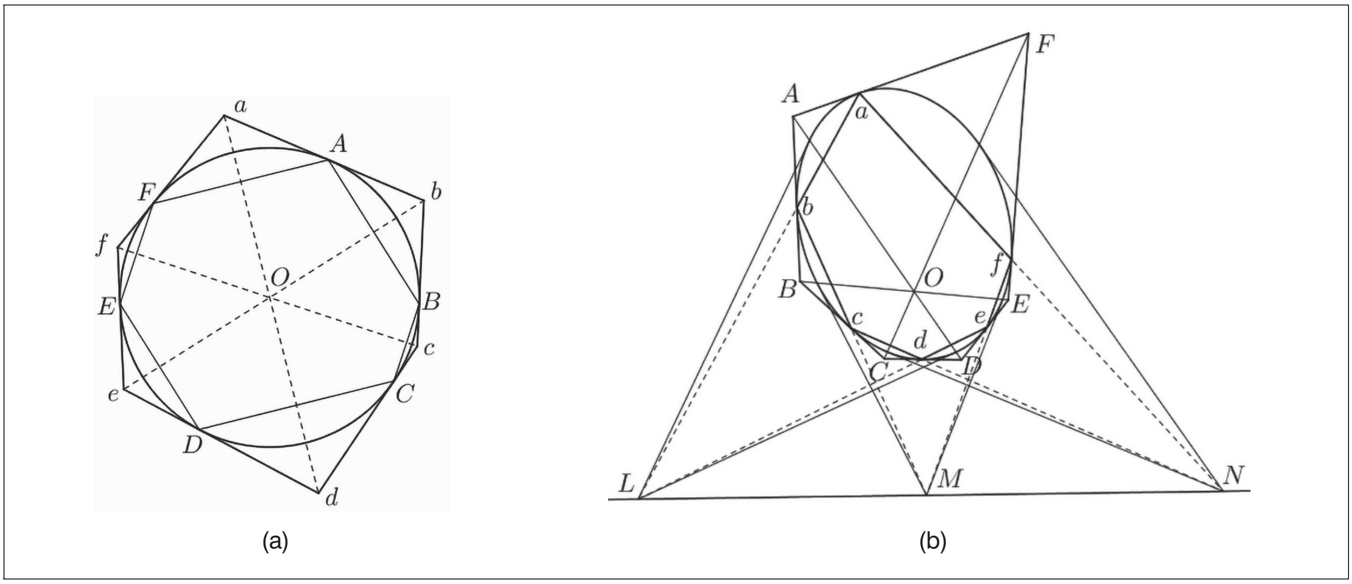


FIGURA 18 – (a) L'esagono *abcdef* è circoscritto ad un cerchio nei vertici dell'esagono inscritto *ABCDEF* i cui lati opposti sono paralleli tra loro. Allora le congiungenti i vertici opposti sono diametri. **(b)** Illustra la dimostrazione del teorema duale del teorema dell'esagono, ossia il teorema di Brianchon.

Pascal) dell'esagono stesso. Tutto questo può essere ripetuto infinite volte.

Fu questa figura la ragione per cui Pascal chiamò "mistico" il suo esagramma? Non possiamo dirlo, e dopotutto chiarire questo fatto non è così importante. Quel che importa è ciò che l'osservazione di questa figura pensiamo abbia suggerito a Pascal.

Precisamente (v. Fig. 17b): (PT) *Sia ABCDEF un qualunque esagono inscritto in un cerchio, si prolunghino i lati AB, CD, EF e chiamiamo L, M, N i loro punti di intersezione; lo stesso si faccia per BC, DE, FA, e chiamiamo P, Q, R i loro punti di intersezione. Allora le rette LQ, MR, NP si intersecano in un medesimo punto O.*

Osserviamo che per il teorema di Ceva, ([24]) se H, I, K, sono i punti dove LQ, MR, NP intersecano rispettivamente RP, PQ, QR, per mostrare che LQ, MR, NP concorrono in un punto è sufficiente provare che

$$\frac{KQ}{KR} \times \frac{HR}{HP} \times \frac{IP}{IQ} = 1$$

([24]) Questo teorema, sebbene pubblicato da Giovanni Ceva in *De lineis rectis* (Ceva 1678), era noto fino dal l'undicesimo secolo. Esso può essere dimostrato in vari modi, per esempio ricorrendo al teorema di Menelao (Irving 1902).

Ricordando la quarta parte del trattato pascaliano "*De propositionibus segmentorum secantium et tangentium*" nella quale Pascal dimostrava varie proprietà segmentarie, e come egli sapesse magistralmente applicare il teorema di Menelao, riteniamo che quanto sopra non fosse certo fuori della portata di Pascal.

È plausibile che Pascal abbia poi esteso questo teorema a una qualunque conica applicando il metodo di proiezione come visto nella Sez. 3.

6.4 – *Dall'esagono inscritto all'esagono circoscritto, un'idea di "dualità"*

Si consideri un esagono *ABCDEF* inscritto in una conica e l'esagono *abcdef* circoscritto alla medesima conica nei vertici del precedente. Come abbiamo detto sopra, proiettando simultaneamente la conica e la retta su cui si intersecano i lati opposti dell'esagono inscritto, in un cerchio e la retta all'infinito, otteniamo un esagono inscritto nel cerchio, che denoteremo ancora *ABCDEF*, i cui lati opposti risultano paralleli tra loro, e un esagono circoscritto *abcdef* (Fig. 18a). Le tre diagonali ad, be, cf si incontrano nel centro O del cerchio. Infatti, le polari di a e d sono rispettivamente AF e CD, e ad è la polare del loro punto di intersezione (all'infinito) dunque un diametro. ([25]) Da ciò segue che nella figura di partenza le congiungenti i vertici opposti dell'esagono circoscritto si intersecano in un medesimo punto.

È possibile che questo tipo di considerazioni abbia suggerito a Pascal l'idea di "scambiare rette e punti e viceversa", cioè un'idea di "dualità" legato anche alla reciprocità polare ereditata da Desargues. Invece di considerare sei rette, tre delle quali mai passano per uno stesso punto, prendere sei punti 1, 2, 3, 4, 5, 6, tre qualunque dei quali non sono mai allineati, e congiungerli due a due, distinguendoli analogamente al caso delle rette in contigui, accoppiati, e opposti. Si ottengono quindici rette, le sei congiungenti i punti contigui, le tre congiungenti i punti opposti, e le sei congiungenti i punti accoppiati. Poiché in generale le tre rette congiungenti i punti opposti non passano per uno stesso punto, Pascal può essersi domandato cosa accade se queste ultime sono concorrenti, e in particolare se la conica dell'esagramma mistico trovi una corrispondente in questa configurazione di rette.

Pascal aveva studiato le proprietà di un quadrilatero circoscritto ad una conica, qui ricordate nella Sez. 5.2, e, sapeva per quanto appreso dal *Brouillon project*, che per la reciprocità polare la polare p di un punto P appartenente ad una retta q passa necessariamente per il polo Q di q.

Sia $ABCDEF$ un esagono circoscritto a una conica nei punti a, b, c, d, e, f, l'esagono $abcdef$ è inscritto alla conica e dunque i suoi lati opposti si incontrano in tre punti allineati L, M, N (Fig. 18b). Poiché il polo di ab è A e il polo di de è D, il polo di AD è L; analogamente i poli di BE e CF sono rispettivamente M and N. Dunque il polo O della retta LMN appartiene alle tre rette AD, BE e CF.

Possiamo allora affermare che: *Le rette che congiungono i vertici opposti di un esagono circoscritto ad una conica passano per uno stesso punto*. Questo teorema è oggi noto come teorema di Brianchon (1810, Art. XV).

Riteniamo molto probabile che Pascal conoscesse questo risultato, un forte indizio deriva dall'annunciata soluzione del problema della determinazione della conica tangente a cinque rette assegnate, e da come Brianchon ottenne il medesimo risultato ed il teorema che porta il suo nome in (1810). ([26])

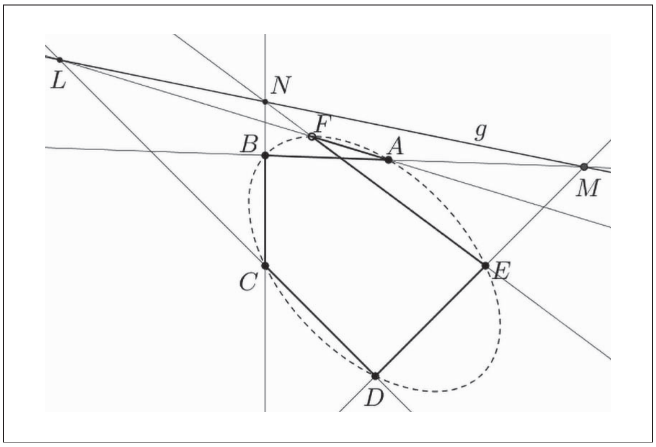


FIGURA 19 – Illustra la costruzione della conica per cinque punti per mezzo del teorema dell'esagono.

7. – Due applicazioni dell'Esagramma mistico

Come abbiamo già detto, Pascal applicò il suo esagramma per risolvere due importanti problemi: la determinazione delle coniche soggette a passare per $5 - n$ punti e tangenti a n rette date in posizione ($0 \leq n \leq 5$), e il problema di Pappo delle tre e quattro rette. Vediamo brevemente come Pascal abbia potuto risolvere questi problemi.

7.1 – *Costruzione delle coniche soggette a cinque condizioni*

I metodi utilizzati da Brianchon per risolvere questi problemi inducono a pensare che Pascal abbia seguito strade del tutto simili. ([27])

La conica per cinque punti. Dati i punti A, B, C, D, E, tre dei quali mai allineati (Fig. 19), si tracciano le rette AB, BC, CD, DE, e dal punto M, intersezione di AB e DE, si traccia una retta g che interseca CD e BC rispettivamente in L e N, poi si tracciano le rette LA e NE. Per il teorema dell'esagono il punto F,

([25]) Questo fatto è anche suscettibile di una dimostrazione elementare.

([26]) A questo proposito, e per maggiori dettagli, si veda (Del Centina 2022a).

([27]) Idem.

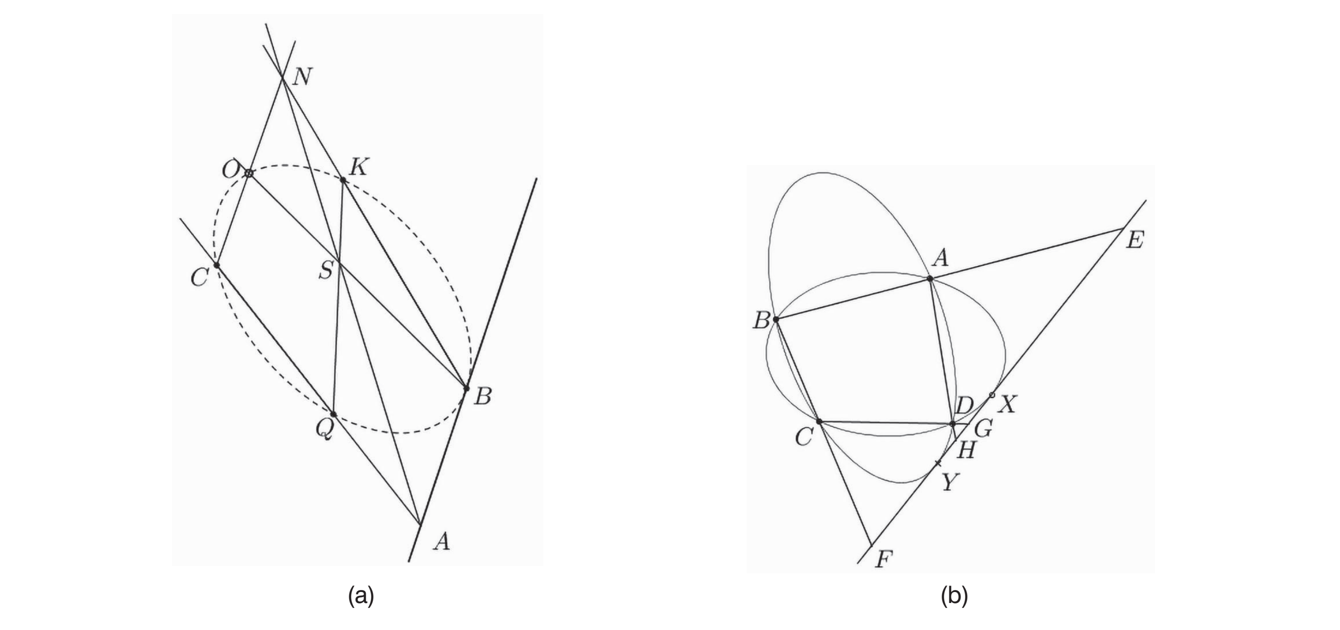


FIGURA 20 – (a) Diagramma per la costruzione della conica per tre punti e tangente ad una retta in un punto assegnato. (b) Illustra il caso delle coniche per quattro punti e tangenti ad una retta assegnati.

intersezione di LA e NE, appartiene all'unica conica per i punti dati. Se si fa ruotare g attorno a M, il punto F descrive la conica cercata.

William Braikenridge (1700-1762) e Colin Maclaurin (1698-1746) ottennero separatamente questa costruzione, ([28]) e per questo motivo è oggi nota come teorema di Braikenridge e Maclaurin. Vale ricordare che Maclaurin e Robert Simson (1687-1768) provarono entrambi il teorema dell'esagono; il primo in (Simson 1735), il secondo nel postumo trattato di algebra (Maclaurin 1748) dove, similmente a Pascal, provò il teorema prima per il cerchio e poi lo estese alle coniche mediante il metodo di proiezione.

Coniche per quattro punti e tangenti ad una retta. Siano K, C, Q, B i quattro punti (tre dei quali mai allineati) e supponiamo che B appartenga alla retta, cioè che la conica sia tangente alla retta in un punto assegnato. Per risolvere il problema Pascal sicuramente considerò la tangenza in B come il passaggio per due punti infinitamente vicini, ed applicò il teorema dell'esagono facendo degenerare un lato nella tangente in B. In questo caso (v. Fig. 20a) si prolunga CQ finché non interseca la retta data in A, poi si unisce K con Q, e da A si traccia la retta AN la quale intersecherà KQ in S e BK in N. Ora, le rette BS e CN si intersecano in un punto O necessariamente appartenente alla conica cercata. Ruotando la retta AN attorno ad A, il punto O descrive la conica cercata.

Se il quarto punto B non è sulla retta, per risolvere il problema non può essere usato utilizzando direttamente il teorema dell'esagono; in questo caso è possibile che Pascal abbia fatto ricorso al teorema di involuzione di Desargues. Se A, B, C, D sono i punti assegnati (Fig. 20b), si prolungano le rette AB, BC, CD e DA, fino ad intersecare la retta assegnata t rispettivamente nei punti E, F, G e H; il punto X dove una conica per A, B, C, D è tangente a t, è in involuzione con le due coppie di punti E, G e H, F, quindi per la quarta proposizione dell'*Essay* si deve avere:

$$\left(\frac{GX}{EX}\right)^2 = \frac{HG}{HE} \times \frac{GF}{EF}$$

Si hanno quindi due soluzioni al problema.

Si può immaginare che nel caso di tre punti e due rette, o di un punto e quattro rette, Pascal abbia seguito un'analoga strada.

([28]) Cfr. (Braikenridge 1733) e (Maclaurin 1720, 1735).

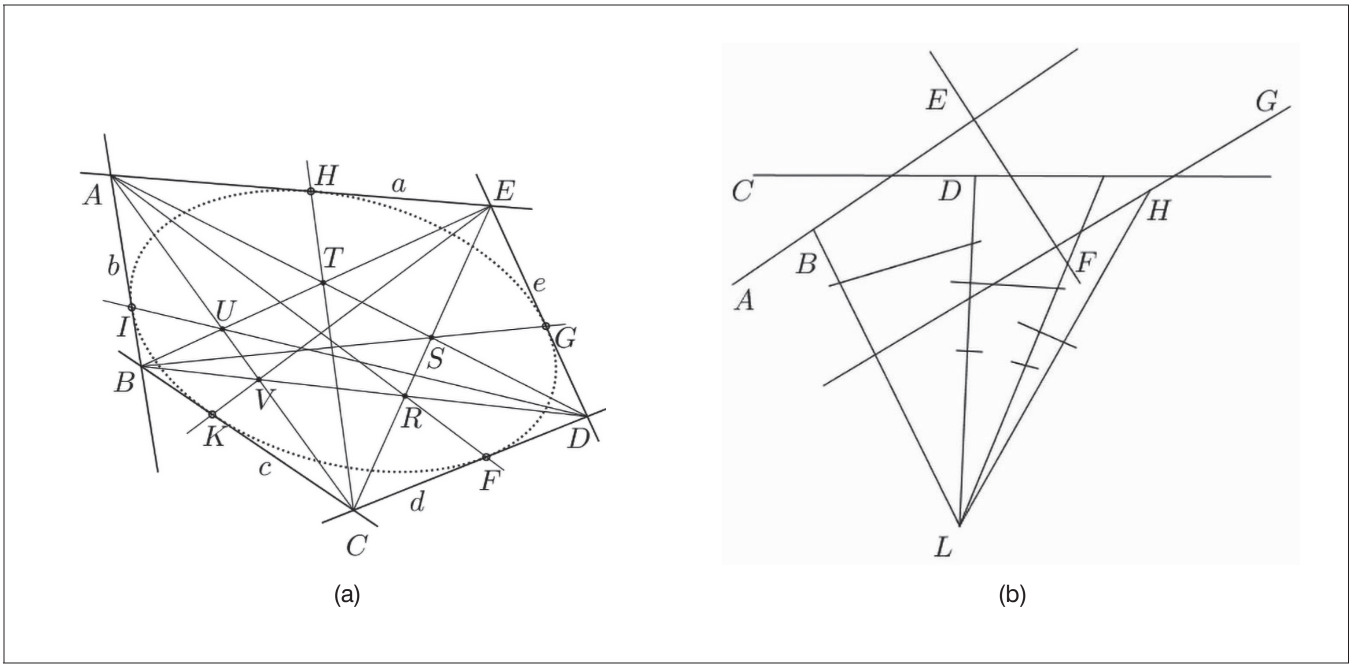


FIGURA 21 – (a) Illustra la costruzione della conica tangente a cinque rette date. (b) Questo diagramma riproduce la figura nel Documento B, attinente il problema delle quattro rette, eseguita da Leibniz.

La conica tangente a cinque rette date. È chiaro che è sufficiente determinate i punti di tangenza, e in questo caso è sicuro che Pascal ricorse al teorema dell'esagono circoscritto. Siano dunque a, b, c, d, e le rette date (Fig. 21a), per determinare il punto H di tangenza con a è sufficiente determinare il punto di intersezione T tra AD e BE, la retta CT intersecherà a nel punto cercato. Gli altri punti di tangenza si determinano in modo analogo.

7.2 – *Il problema delle quattro rette*

In una nota del Documento B, Leibniz riporta quanto segue: "Siano date in posizione 4 rette AB, CD, EF, GH, e da un punto L si conducano le rette LB, LD, LF, LH formanti angoli assegnati con le precedenti e tali che i rettangoli costruiti su LB, LD e su LF, LH siano in rapporto fissato. Determinare il punto L o il suo luogo che è una conica" (v. Fig. 21b). Ciò significa determinare il luogo dei punti L tali che

$$LB \times LD = kLF \times LH, \tag{4}$$

dove k è una costante assegnata. È evidente che il luogo cercato passa che i punti di intersezione di AB con EF, di AB con GH, di CD con EF, e di CD con GH; conviene denotare questi punti rispettivamente V, X, Y, Z.

Nelle sue note Leibniz non dà indicazioni sulla strategia seguita da Pascal per risolvere il problema se non le seguenti parole "Pascal facilmente riporta [la questione] al suo esagramma e attraverso di esso al cono". Questa frase suggerisce che Pascal usò il teorema dell'esagono, ma cosa Leibniz intendesse col riferimento al cono non è affatto chiaro, poiché la proiezione centrale non conserva il parallelismo. Allora per immaginare quale possa essere stata la strada seguita da Pascal possiamo dare uno sguardo a quella intrapresa da Newton nei *Principia* (1687, II, Sez. 5) dove, come noto, fornì una soluzione del problema.

Come detto sopra il luogo cercato passa per V, X, Y, Z. Se Γ è una qualunque conica per questi punti, le quattro rette date costituiscono un quadrilatero inscritto in Γ. Newton, applicando più volte il teorema delle corde, prova (Lemma 17) che per ogni punto L di questa conica vale la (4). Pascal può aver fatto la stessa cosa, applicando la seconda proposizione dell'*Essay*, che, come abbiamo visto, implica il teorema delle corde. Per inciso ricordiamo che Apollonio nelle *Coniche* aveva indicato il teorema delle corde (cioè le sue Proposizioni 16-23 del terzo libro) come la chiave per risolvere il

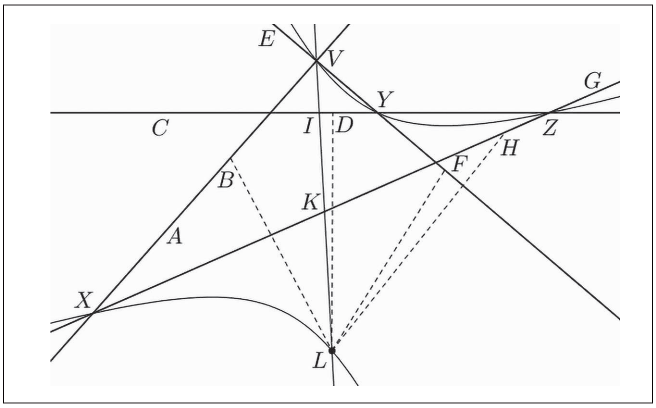


FIGURA 22 – Questo diagramma illustra il Lemma 19 di Newton.

problema. ([29]) Ricordiamo che questo teorema è una conseguenza immediata della Proposizione 2 nell' *Essay pour les coniques*, come si è visto nella Sez. 2.

Successivamente Newton suppone di conoscere oltre ai punti V, X, Y, Z un altro punto p appartenente al luogo, e considera la conica γ passante per questi cinque punti. Egli dimostra, procedendo per assurdo e utilizzando il risultato precedente (Lemma 17), che ogni altro punto L soddisfacente la (4) appartiene a Γ (Lemma 18). È probabile che Pascal abbia seguito la stessa strada.

Col passo successivo Newton determina un punto come p (Lemma 19) ragionando come segue. Poiché per il risultato precedente il luogo descritto da un punto L soggetto alla condizione (4) è una conica circoscritta al quadrilatero $VXYZ$, ogni retta per V, come VIK (v. Fig. 22), che interseca CG e FG deve intersecare la conica in un punto L. Poiché gli angoli della figura sono assegnati, i rapporti LB/LV e LV/LF sono noti, così anche il rapporto LB/LF lo è.

Allora dalla (4) segue che LD/LH è noto. Analogamente anche i rapporti LI/LD e LH/LK sono noti. Dunque LI/LK è noto, e da qui la posizione di L su AIK può essere determinata. Ciò conclude la dimostrazione del teorema di Pappo delle quattro rette. Si veda anche (Milne 1927).

Anche se non è certo, tuttavia molto probabile, che Pascal abbia seguito questa strada quel che possiamo affermare con sicurezza è che egli seppe collegare la soluzione del problema delle quattro rette al suo teorema principale, e che questo problema, che era servito a Descartes per dimostrare la superiorità dei suoi metodi algebrici, risultò completamente accessibile ai metodi geometrici. Una sorprendente dimostrazione della fertilità e della potenza delle scoperte di Pascal, che giustifica appieno le parole espresse da Mersenne nella lettera a Constantijn Huygens.

8. – Conclusione

Il manoscritto del *Conicorum opus completum*, o almeno quella sesta parte intitolata *De loco solido*, circolò tra gli amici di Pascal. Pierre de Carcavi matematico e buon amico di Pascal, fu tra quelli che poterono darci uno sguardo. In una lettera a Christiaan Huygens del 1656, lodando il contenuto del trattato, Carcavi afferma che Pascal "ha dato gli asintoti dell'ellisse". Dalla spiegazione allegata si evince che Pascal aveva definito la *conica supplementare* di una conica data, che nel caso di un'ellisse è una iperbole e i cui asintoti furono interpretati da Carcavi come asintoti dell'ellisse. ([30]) Questo è un argomento importante del trattato di Pascal che sembra sia sfuggito a Leibniz, ma che riapparirà nel trattato di Poncelet (1822) nell'ambito della definizione di *corda ideale* di una conica, cioè la "corda" che una retta non realmente intersecante la conica taglia su essa; un concetto mediante il quale Poncelet poté lavorare con gli elementi immaginari, ed in particolare di scoprire i punti ciclici, ma anche legato al 4º principio di proiezione ricordato sopra.

Come lui stesso ammette nella lettera a Périer, Leibniz non poté dedicare al manoscritto pascaliano tutta l'attenzione che meritava. A parte lo spiccato interesse che manifestò per la prima parte riguardante la generazione delle coniche, che copiò o fece copiare per intero, le sue note sembrano frettolose e c'è da chiedersi se avesse afferrato appieno tutte le novità contenute nel trattato di Pascal. Non c'è dubbio infatti che Pascal anticipò vari argomenti e concetti che Poncelet trattò circa due secoli dopo nel

([29]) Si veda quanto scrive Apollonio presentando la sua opera a Eudemo (Apollonio 1566).

([30]) Per maggiori dettagli si veda (Del Centina 2020).

suo celebre trattato, che segnò la nascita della geometria proiettiva.

Leibniz ritornò sull'argomento della pubblicazione del *Conicorum opus completum* in due lettere indirizzate allo studioso Gilles Filleau des Billets, nel 1692 e nel 1696. In entrambe Leibniz, reiterando il giudizio positivo sul trattato, si lamentava del fatto che ancora non fosse stato pubblicato perché "le idee di Pascal, già diffuse in giro, finiranno per essere pubblicate da altri". A questo proposito c'è da dire che E. Walter Tschirnhaus, che aveva letto il manoscritto pascaliano insieme a Leibniz, inviò ad Oldenburg una dettagliata relazione (Gerhardt 1892, 195), e sarebbe interessante accertare se qualche matematico inglese beneficiò di questo. Come abbiamo visto, fu nel mondo anglosassone prima che da ogni altra parte il teorema dell'esagono ricomparve.

Anche se il teorema dell'esagono ritornò definitivamente alla luce nei primi anni dell'Ottocento, ancora Poncelet e Michel Chasles non avevano un'idea precisa del contenuto del trattato di Pascal. Per esempio Poncelet, ricordando nell'introduzione storica del suo trattato che Maclaurin, Braikenridge, e Simson, avevano dato solo una risposta per $n = 5$, attribuì a Brianchon (1810) la determinazione delle coniche soggette a passare per n punti e tangenti a $5 - n$ rette, per $n = 5, \ldots, 0$, aggiungendo però, probabilmente indotto dai metodi usati in (Brianchon 1810), che Pascal forse aveva risolto il problema nella sua completezza (Poncelet 1822, xxviii).

Chasles (1837, 69-75) riconobbe appieno l'importanza del teorema dell'esagono, ed espresse la certezza, che con esso, "che esprime la condizione perché sei punti appartengano ad una conica", Pascal fosse stato capace di dedurre una grande quantità di teoremi riguardanti le sezioni coniche delle quali gli scrittori antichi non offrivano esempi. Osserviamo ancora che Chasles mostrò l'equivalenza tra il suo teorema sull'invarianza proiettiva del birapporto, e i teoremi di Desargues e di Pascal, e accennò a come essi possono essere usati per risolvere il problema di Pappo delle quattro rette (Chasles 1837, Nota XV).

Come noto l'opera innovativa di Desargues, anche per l'oggettiva difficoltà di lettura, non fu apprezzata dai contemporanei, eccetto Pascal, ed essa fu ricordata più per le aspre critiche J. de Beaugrand che per il suo contenuto. La Hire, nel suo *Sectiones conicae*, che vide la luce nel 1685, utilizzò ampiamente il metodo di proiezione ma si limitò ad impiegare le proprietà della divisione armonica, poco adatte per uno sviluppo in senso "proiettivo" della teoria, e sembrò più attento a perfezionare e ordinare i teoremi di Apollonio che a scoprirne di nuovi. Anche i contributi di Newton sulle coniche, ancorché importantissimi, rimasero vincolati ad una visione classica; così ci sembra fu anche per i suoi seguaci, Simson, Maclaurin e Braikenridge; i quali, come Newton, non fecero pieno uso del metodo di proiezione e non compresero la vasta portata del teorema dell'esagono che essi riscoprirono. Le nuove idee e i metodi così efficacemente impiegati da Pascal (intendiamo il metodo di proiezione, la teoria delle trasversali, il teorema dell'esagono, i teoremi di Desargues, e il "principio di continuità"), si riaffacciarono definitivamente sulla scena geometrica soltanto all'inizio de diciannovesimo secolo con Carnot, Servois e soprattutto Brianchon.

Siamo convinti che se il *Conicorum opus completum* fosse stato pubblicato durante la vita di Pascal, o almeno poco dopo il 1676 come si augurava Leibniz, ciò avrebbe cambiato il corso della geometria proiettiva probabilmente anticipando di circa due secoli la sua nascita.

BIBLIOGRAFIA

Adamson D. 1995, *Blaise Pascal; Mathematician. Physicist, and Thinker of God*, MacMillan.

Anglade M. and Briend J.-Y. 2017, La notion d'involution dans le *Brouillon Project* de Girard Desargues, *Arch. Hist. Exact Sci.*, 71, 543-588.

Anglade M. and Briend J.-Y. 2018, L'usage de la combinatoire chez Girad Desargues: le cas du théorème de Ménélaüs,

Anglade M. and Briend J.-Y. 2019, Le diamètre et la traversale: dans l'atelier de Girad Desargues, *Arch. Hist. Exact Sci.*, 73, 385-426.

Anglade M. and Briend J.-Y. 2022 Nombrils, bruslans, autrement foyez: la géométrie projective en action dans le *Brouillon Project* de Girad Desargues, to appear in *Arch. His. Exact Sci.* 76, 173-206.

Apollonio 1566, *Apollonii Pergaei Conicorum Libri Quattuor...*, A. Benatis. Federico Commandino: Bonomiae.

Bosse A., 1648, *Manière universelle de Mr Desargues pour pratiquer la perspective*, Paris, Imprimerie P. des-Hayes.

Braikenridge W. 1733, *Exercitatio geometrica de descriptione linearum curvarum*, Londini, Ric.Hett & Joh. Nourse.

Brianchon C.-J. 1806, Sur les surfaces courbes du second degré, *Journ. de l'École Polytechniques*, 6, 297-311.

Brianchon C.-J. 1810, Solution de plusieurs problèmes de géométrie, *J. de l'École Polytechnique*, 10, 1-15.

Carnot L. 1806, *Mémoire sur la relation qui existe entre les distances respective de cinq points quelconque pris dans l'espace; suivi d'un essai sur la théorie des transversales*, Paris, Curcier.

Ceva G. 1678, *De lineis rectis se invicem secantibus statica constructio*, L. Montiae.

Chasles M. 1837, *Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie, particulièrement de celles qui se rapportent à la géométrie moderne, suivi d'un mémoire de géométrie sur deux principes généraux de la science, la dualité et l'homographie*, Bruxelles, M. Hayez, Imprimeur de l'Académie royale.

Costabel J. 1962, Traduction française de notes de Leibniz sur les coniques de Pascal, *Revue d'Hist. des Sciences. et leurs Appl.*, 15 (3-4), 253-268.

Curabelle J. 1644, *Examen des Oeuvres de Sr. Desargues*, Paris, M. et J. Henault.

Del Centina A., 2020, Pascal's *mystic hexagram*, and a conjectural restoration of his lost treatise on conic sections, *Arch. For Hist. of Ex. Sc.*,74 (5) 469-521.

Del Centina A. and Fiocca A. 2021, The chord theorem recalled to life at the turn of the eighteenth century, *Historia Mathematica*, 56 (1), 6-39.

Del Centina A. 2022a, Carnot's theory of transversals and its applications by Servois and Brianchon: the awakening of synthetic geometry in France, *Arch. Hist. Exact Sci.*, 76, 45-128.

Del Centina A. 2022b, Desargues's concepts of involution and transversal, their origin and possible sources of inspiration, *Arch. For Hist. of Ex. Sc.*, 76 (6), 573-622

Desargues G. 1639, *Brouillon project d'une atteinte aux evenements des rencontres du Cone avec un Plane*, Paris.

Descartes R. 1637, *Discours de la Méthode pour bien conduire sa raison, et chercher la vérité dans les sciences, plus La Dioptrique, Les Meteores, et La Géométrie, qui sont des essais de cette Méthode*, Leyde, I. Maire.

Eisenbud D. and Harris J. 1996, Cayley-Bacharach theorem and conjectures, *Bull. Am. Math. Soc.*, (new series) 33, 295-324.

Gerhardt C.I. 1892, *Desargues und Pascal über die Kegelschsnitte*, Sitzungsberichte der königlich preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin.

Huygens C. 1888, *Oeuvres complètes de Christiaan Huygen*s, vol. 1, Correspondance (1638-1656), La Haye, M. Nijhoff.

Irving H. G. 1902, *Inductive plane geometry*, Boston DC, Heath and Co.

Itard J. 1962, Introduction à la géométrie de Pascal*, Revue d'Hist. des Sc. et leur Appl.*, 15 (3-4), 269-286.

La Hire P. 1673, *Nouvelle méthode en géométrie pour les sections des surfaces coniques et cylindriques*, Paris, chez l'Autheur [...] et T. Moette.

Maclaurin C. 1720, *Geometria Organica: Sive Descriptio Linearum Curvarum Universalis,* London, W. and J. Innys.

Maclaurin C. 1735, A letter from C. mac Laurin , Math. Prof. Edinburg. F.R.S. to Mr John Machin, Astr. Prof. Gresh. Et Secr. R. S. concerning the description of curve lines., Communicated to the Royal Society on Dicember 21, 1732, *Phil. Transactions of the R. S. of London*,

Maclaurin C. 1748, *A Treatise of Algebra in three Parts...to which is added an Appendix concerning the general properties of Geometrical Lines*, London, A- Millar and J. Nourse..

Mersenne M. 1644, *Cogitata physico-mathematica*, Parisiis, A. Bertier.

Mesnard J. 1963, Pascal et l'académie le Pailleur, *Revue d'Hist. des Sc. et leurs Appl.*, 16 (1), 1-10.

Mesnard J. and Taton R., 1963, Édition critique de la lettre de Leibniz à Périer du 30 août 1676, *Revue d'Hist. des Sc. et leurs Appl.*, 16, 11-22.

Milne J. J. 1927, Newton's contribution to the geometry of conics, in "Isaac Newton 1642-1727, A memorial Volume Edited for the Mathematical Association", W. J. Greenstreet Ed., 96-114, London, G. Bell.

Newton I. 1687, *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*. Typis Josephi Streater, Londini.

Oldenburg H. 1973, *The Correspondence of Henry Oldenburg*, A.R. Hall and M.B. Hall (Eds.), vol. IX, The University of Wisconsin Press.

Pappo 1588, *Mathematicae Collectiones a Federico Commandino Urbinatae in latinum conversae et commentariis illustratae*. Apud Franciscus de Franciscis Senensem, Venetiis.

Pascal B. 1640, *Essay pour les coniques*, Paris.

Pascal B. 1779, *Oeuvres complètes de Pascal*, Ch. Bossut Ed., La Haye.

Pascal B. 1954, *Oeuvres complètes de Blaise Pascal*, J. Chavalier Ed., Paris, Bibliothèque de la Pléiade.

Périer G. 1684, *La vie de M. Pascal escrite par Madame Périer sa soeur*, Amsterdam, A. Wolfgang.

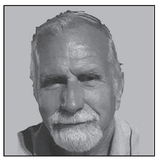
Poncelet J.-V. 1822, *Traité sur le propriétés projective de figures*, Paris, Bachelier.

Simson R. 1735, *Sectionum conicarum libri V*, Edinburgi, T. & W. Ruddimannos.

Taton R. 1955, L' "Essay pour les coniques" de Pascal, *Revue d'Hist. des Sc. et leurs Appl.*, 1-18.

Taton R. 1962, L'oeuvre de Pascal en géométrie projective, *Revue d'Hist. des Sc. et leurs Appl.*, 15 (3-4), 197-252.

Viète F. 1600, *Apollonius gallus, seu exsuscita Apollonii Pergaei* περί ἐπαφῶν *Geometria*, Parisiis. D. le Clerc.



Andrea Del Centina

Già professore ordinario di Geometria Superiore nell'Università di Ferrara, ha in precedenza insegnato nelle Università di Urbino e Firenze. Ha svolto ricerca in Geometria algebrica, in particolare: Varietà Jacobiane e razionalità di spazi di moduli di curve, Curve intersezione completa insiemistica, Teoria dell'aggiunzione. Dall'anno 2000 si è dedicato anche alla Storia della Matematica con rifermento alla vita e alle opere di N. H. Abel, S. Germain, G. Libri, e più recentemente a vari argomenti attinenti la storia della Geometria proiettiva.