Matematica, Cultura e Società

Rivista dell'Unione Matematica Italiana

Veronica Gavagna

Due protagonisti bolognesi dell'algebra rinascimentale: Ludovico Ferrari e Rafael Bombelli

Matematica, Cultura e Società. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **7** (2022), n.3, p. 249–265.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=RUMI_2022_1_7_3_249_0>

Matematica, Cultura e Società. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2022.

Matematica, Cultura e Società – Rivista dell'Unione Matematica Italiana
Serie I, Vol. 7, N. 3, dicembre 2022, 249-265

Due protagonisti bolognesi dell'algebra rinascimentale: Ludovico Ferrari e Rafael Bombelli

VERONICA GAVAGNA
Università degli Studi di Firenze
E-mail: veronica.gavagna@unifi.it

Sommario: *Nel 2022 ricorrono due importanti anniversari per la storia dell'algebra rinascimentale: si celebrano infatti 500 anni dalla nascita di Ludovico Ferrari e 450 anni dalla pubblicazione de* L'Algebra *di Rafael Bombelli. Allievo di Girolamo Cardano, Ludovico Ferrari fu protagonista con Niccolò Tartaglia di una delle sfide più famose della storia della matematica, nella quale difese il proprio maestro dall'accusa di aver tradito il patto di segretezza sulla procedura risolutiva dell'equazione di terzo grado pubblicandola nell'*Ars Magna *(1545). Quest'opera, che conteneva anche la risoluzione dell'equazione di quarto grado trovata da Ferrari, rappresentò una tappa cruciale per lo sviluppo dell'algebra, ma la sua diffusione fu ostacolata dal "dire oscuro" del suo autore. Profondo ammiratore dell'algebra – a suo dire prima tra le matematiche – il bolognese Rafael Bombelli si propose dunque di rendere accessibile e di "ridurre a perfetto ordine" la disciplina, anche alla luce dello studio dell'*Aritmetica *di Diofanto, che lo influenzò al punto di riscrivere parte della sua opera in corso di redazione. Ne* L'Algebra *Bombelli superò lo scoglio sul quale si erano arenati Cardano e Ferrari – la natura delle radici quadrate dei numeri negativi – inventando i nuovi segni "più di meno" e "meno di meno" e dando così significato alla formula risolutiva dell'equazione di terzo grado anche nell'ostico caso irriducibile.*

Abstract: *Two important anniversaries for the history of Renaissance algebra occur in 2022: 500 years since the birth of Ludovico Ferrari and 450 years since the publication of Rafael Bombelli's* L'Algebra*. Pupil of Girolamo Cardano, Ludovico Ferrari was the protagonist with Niccolò Tartaglia in one of the most famous challenges in the history of mathematics, in which he defended his master against the accusation that he had betrayed the pact of secrecy on the solving procedure of the third-degree equation by publishing it in* Ars Magna *(1545). This work, which also contained the resolution of the fourth-degree equation found by Ferrari, represented a crucial milestone in the development of algebra, but its dissemination was hampered by the "obscure saying" of its author. A profound admirer of algebra – which he said was first among mathematics – Rafael Bombelli of Bologna therefore set out to make the discipline accessible and "reduce it to perfect order," partly in light of his study of Diophantine's* Arithmetic*, which influenced him to the point of rewriting part of his work. In* L'Algebra *Bombelli overcame the stumbling block on which Cardano and Ferrari had run aground – the nature of the square roots of negative numbers – by inventing the new signs "piu di meno" and "meno di meno" and thus giving meaning to the solving formula of the third-degree equation even in the hostile irreducible case.*

1. – Da *creato* a protagonista della scena

Pertanto, io non solamente per difendere la verità, ma anchor perche questo tocca a me principalmente, che sono creato suo, essendo sua Eccellentia impedita dal grado che tiene, ho deliberato far pubblicamente conoscere, ò il vostro inganno, over (come piu tosto penso) la vostra malignità. [Cartelli 1974, p. 6]

Con queste parole, indirizzate a Niccolò Tartaglia il 10 febbraio 1547, Ludovico Ferrari uscì dal cono d'ombra del suo maestro Girolamo Cardano e diede

Accettato: il 14 dicembre 2022.

inizio a una delle dispute più accese e più famose della storia della matematica, che si concluse nell'agosto 1548 – dopo lo scambio di sei cartelli e di altrettante risposte – con una disfida pubblica dalla quale (probabilmente) uscì vincitore.

L'importanza dei *Cartelli* risiede anche nell'essere uno dei pochi documenti in cui la voce di Ferrari non viene mediata dalle parole di Cardano. È a quest'ultimo, infatti, che dobbiamo la *Vita Ludovici Ferrarii Bononiensis a Cardano descripta* [Cardano 1663a], l'oroscopo di Ludovico ([Cardano 1663b, p.283], [Cardano 1663c, pp.500-501]) e varie citazioni nelle sue opere [Masotti 1974, p.LII]: quasi le uniche fonti per tratteggiare la figura di questo acuto matematico.

Sappiamo dalla *Vita* che Ludovico Ferrari nacque a Bologna il 2 febbraio 1522: secondo l'astrologo Cardano, sotto una sfavorevole congiunzione astrale che spiega la sua vita difficile e breve, durata appena 43 anni. L'origine della famiglia era milanese, ma il nonno Bartolomeo era stato esiliato e si era trasferito a Bologna, dove erano poi nati i suoi figli Vincenzo e Alessandro, quest'ultimo padre di Ludovico. Date le ristrettezze economiche della famiglia, venne mandato a servizio a casa di Cardano a Milano, dove arrivò il 30 novembre 1536.

Di bassa statura, con un bel viso, un naso piccolo "ma non deforme", con una menomazione alla mano sinistra dovuta a profondi tagli che si procurò diciassettenne, ma alla quale egli non diede mai peso [Cardano 1993, pp.144-45], Ludovico Ferrari si distingueva per l'eloquio piacevole e il portamento elegante; aveva però un carattere molto iroso, che lo portava a violenti scoppi di collera, durante i quali nemmeno Cardano osava avvicinarlo.

Assunto dunque come servo quasi quindicenne e privo di istruzione, Ludovico mostrò subito una eccezionale capacità di apprendimento, imparando rapidamente il latino, il greco e le matematiche: venne dunque "promosso" ad amanuense con il compito di trascrivere i libri del *De rerum varietate* (pubblicato poi nel 1558).

Tra il maestro e il suo "creato" si stabilì in poco tempo un rapporto di stima e fiducia, al punto che nel testamento redatto il 15 febbraio 1539, Cardano nominò Ferrari erede di 60 codici e libri della sua biblioteca e di tutti i suoi manoscritti (con il compito di provvedere alla stampa); predispose inoltre una pensione della durata di 7 anni e l'obbligo di occuparsi dell'educazione del figlio Giovanni Battista [Belloni Speciale 1996]. Pochi giorni dopo, il 25 marzo 1539, Ferrari venne inoltre ammesso alla famosa conversazione tra il suo maestro e Tartaglia, nella quale il matematico bresciano rivelò come risolvere un'equazione cubica. Prima di parlare di questo momento topico della storia della matematica e della vita di Ferrari, tuttavia, occorre fare una breve digressione.

2. – Una "regola generale" per le equazioni cubiche

L'algebra di al-Khwārizmī aveva cominciato ad essere conosciuta nell'Occidente Latino a partire dal XII secolo, veicolata dalla traduzione latina di Gerardo da Cremona, ma soprattutto dal *Liber abbaci* di Leonardo Pisano. Redatto nel 1202 e rivisto forse nel 1228, (1) questo era un ponderoso trattato che partiva dalla descrizione del sistema di numerazione indoarabico e dei relativi algoritmi di calcolo delle operazioni elementari, per poi diventare una vera e propria enciclopedia della matematica mercantile, che si chiudeva con un capitolo dedicato alle equazioni di primo e secondo grado e presentava un caso di equazione di terzo grado.

La diffusione di questa "nuova matematica" avvenne principalmente attraverso le cosiddette botteghe o scuole d'abaco, che sono attestate in Toscana a partire dalla metà del XIII secolo e in seguito anche in altre aree della penisola. Della tradizione abachistica sono rimasti oggi circa trecento trattati, che contengono spesso una trascelta volgarizzata dei contenuti del *Liber abbaci*. In parte, o più raramente *in toto*, dedicati all'algebra, spesso testimoniano una buona e a volte ottima padronanza di tecniche algebriche – basti pensare ai raffinati *Fioretti* di Antonio de' Mazzinghi da Peretola [Mazzinghi 1967] – e talvolta uno spiccato interesse verso la ricerca di

(1) Mentre tutti i manoscritti esistenti del *Liber Abbaci* sono concordi a fissare nel 1202 la data di composizione, gli studi più recenti mostrano essere dubbia la data comunemente accettata del 1228 per la revisione [Giusti 2020 pp. XVII-XVIII].

una soluzione per radicali delle equazioni di grado superiore al secondo. Alcuni dei tentativi documentati sono ingenui, altri più ingegnosi e interessanti. Nel primo caso rientrano i tentativi di estendere alle equazioni di terzo grado ([2]) i procedimenti risolutivi validi per quelle di secondo: per esempio, nei *Ragionamenti d'algebra* l'abachista fiorentino Raffaello Canacci [Canacci 1983], vissuto nella seconda metà del XV secolo, a proposito della risoluzione dell'equazione $27x^3 = 7x + 18$ ("27 chubi sono eguali a 7 chose e 18 numero") che oggi generalizzeremmo in $ax^3 = bx + c$, scrisse: "Osserva la reghola coe chettu debbi partire ne chubi eppoi debbi dimezzare le chose e multiplichare p se e porre sopra il numero e radice di quello piu il dimezzamento delle chose varra la chosa" [Canacci 1983, p. 11] il che significa che il valore positivo dell'incognita (la "cosa") sarebbe pari a

$$\sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}} + \frac{b}{2a}$$

come effettivamente risulterebbe se ci fosse x^2 al posto di x^3.

Nel *Trattato d'abaco* scritto attorno al 1470 [Piero 1970], Piero della Francesca propose un lungo elenco di casi di equazioni, anche di grado superiore al secondo, corredate dei procedimenti per costruire il valore (o talvolta i valori, ma comunque rigorosamente positivi) dell'incognita: oltre alle indebite estensioni di cui si è parlato poc'anzi, in alcuni casi, e precisamente nei casi in cui l'equazione rappresentava un problema di interesse composto, il procedimento risolutivo risultava corretto – grazie alle peculiari relazioni tra i coefficienti dell'equazione – ma non generalizzabile, come invece il testo sottintendeva [Giusti 1991]. Questi e altri esempi avevano indotto Luca Pacioli a dover constatare la mancanza di una "regola generale" per la risoluzione delle equazioni cubiche; nella sua *Summa de arithmetica, geometria proportioni et proportionalita* (1494) sentenziava: "Ma de numero, cosa e cubo tra loro stando composti ... non se possuto finora troppo bene trovar regole generali ... se non ale volte a tastoni in qualche caso particulare ... larte ancora a tal caso non a dato modo si commo ancora non e dato modo al quadrare del cerchio" [Pacioli 1494, c.150r] Si noti che le riflessioni di Pacioli non riguardano le equazioni cubiche complete – menziona infatti il cubo, la cosa e il numero ma non il censo, ovvero il termine di secondo grado – perché già all'epoca era ben noto che un'equazione completa poteva essere ridotta a un'equazione priva del termine quadratico e che quindi il problema generale di risolvere un'equazione cubica si poteva circoscrivere a quest'ultimo caso.

Nel 1535, appena trasferito a Venezia, Tartaglia riuscì a trovare la "regola generale" del caso "cosa e cubo equal a numero" (e di lì a poco anche quelle dei casi rimanenti) grazie al pungolo delle vanterie di un allievo del bolognese Scipione del Ferro, Antonio Maria Fior, il quale andava dicendo che "gia trenta anni tal secreto gli era stato mostrato da un gran mathematico" [Tartaglia 1546, c.106v]. Pensando di cogliere una vittoria facile, Fior, che all'epoca insegnava nella città lagunare, sfidò Tartaglia ponendogli 30 quesiti che si riducevano tutti alla forma "cubo e cose uguale a numero", ma egli non ebbe difficoltà a risolverli nel giro di un paio d'ore, vincendo così trionfalmente la sfida.

Quattro anni dopo, quando Girolamo Cardano stava componendo la sua prima opera matematica, la *Practica arithmeticae et mensurandi singularis*, l'eco di quella vittoria non si era ancora spenta. La *Practica* era sostanzialmente un trattato d'abaco e quindi, trovandosi a dover fare i conti con un mercato librario in larga parte dominato dalla *Summa* e da pochissimi altri testi in volgare, Cardano decise di rivolgersi a un pubblico diverso da quello usuale, più colto e più internazionale. Scrisse dunque il proprio trattato in latino invece che nel vernacolo tipico della tradizione abachistica e, per suscitare interesse, non mancò di sottolineare, ogni qualvolta fosse possibile, gli errori presenti nella *Summa*, al punto di dedicarvi per intero l'ultimo capitolo della *Practica* (*De erroribus Fratris Lucae*) [Gavagna 1999]. Quando Cardano venne a sapere che un maestro d'abaco aveva vinto qualche tempo prima una pubblica di-

([2]) Poiché non erano ammessi coefficienti negativi, non esisteva "l'equazione di terzo grado" ma vari "casi" (all'epoca chiamati "capitoli") ovvero, nel caso dell'equazione priva di termine quadratico, "cubo e cose uguale a numero", "cubo uguale a cose e numero" e "cubo e numero uguale a cose" (rispettivamente $x^3 + px = q$, $x^3 = px + q$, $x^3 + q = px$ dove $p, q > 0$). Non era ammessa neanche l'equazione $x^3 + px + q = 0$ perché non aveva alcun significato eguagliare a zero una quantità.

sfida risolvendo in un batter d'occhio un lungo elenco di equazioni cubiche, gli balenò davanti agli occhi la possibilità di superare le affermazioni di Pacioli e di imporre la sua opera all'attenzione di tutta la comunità scientifica grazie alla soluzione generale dell'equazione cubica.

Non avendo ancora terminato la stesura della *Practica*, Cardano chiese all'amico veneziano "Zuannantonio libraro" di farsi rivelare da Tartaglia la formula risolutiva, in modo da poterla pubblicare – beninteso con il nome del legittimo autore – nel manuale che di lì a poco sarebbe andato sotto i torchi. Tartaglia rifiutò decisamente la proposta, avendo in animo di pubblicare i procedimenti risolutivi in un intero trattato a suo nome, che avrebbe scritto non appena terminate le opere a cui stava lavorando, ovvero la traduzione in volgare degli *Elementi* di Euclide e una silloge delle opere archimedee. Di fronte a tale diniego scese in campo direttamente Cardano, il quale, tra toni sprezzanti e altri ipocritamente lusinghieri, riuscì a convincere Tartaglia a recarsi a Milano per incontrare il Governatore, lasciandogli sperare che sarebbe potuto diventare per lui un mecenate in grado di metterlo al riparo dalle difficoltà economiche in cui si agitava perennemente.

3. – Una poesia rivelatrice

Il 25 marzo 1539 dunque, ospite nella casa di Cardano, in attesa del Governatore che era temporaneamente fuori Milano, di fronte alle pressioni del padrone di casa alla fine Tartaglia capitolò e rivelò a lui e al suo giovane allievo come risolvere le equazioni di terzo grado:

> *Quando chel cubo con le cose apresso / Se agguaglia à qualche numero discreto / Trovan dui altri differenti in esso / Dapoi terrai questo per consueto / Ch'el lor produtto sempre sia eguale / Al terzo cubo delle cose neto / El residuo poi suo generale / Delli lor lati cubi ben sottratti / Varra la tua cosa principale / In el secondo de cotesti atti / Quando chel cubo restasse lui solo / Tu osservarai quest'altri contratti / Del numer farai due tal part'à volo / Che luna in l'altra si produca schietto / El terzo cubo delle cose in stolo / Delle qual poi, per commun precetto / Torrai li lati cubi insieme gionti / Et cotal summa sara il tuo concetto / El terzo poi de questi nostri conti / Se solve col secondo se ben guardi / Che per natura son quasi congionti / Questi trovai, & non con passi tardi / Nel mille cinquecent'e quatro è trenta / Con fondamenti ben sald'è gagliardi / Nella citta dal mar intorno centa.* [Tartaglia 1546, cc.123r-v]

Dopo che Cardano ebbe giurato di non pubblicare la procedura, Tartaglia tornò a Venezia. La corrispondenza tra i due continuò ancora per qualche tempo con toni, se non proprio cordiali, almeno non esacerbati: Cardano chiese e ottenne una delucidazione sul significato di un verso della poesia, mandò una copia della *Practica* fresca di stampa e "ancora disligata" perché Tartaglia verificasse il mantenimento del giuramento (12 maggio) e infine chiese (4 agosto) lumi su quello che oggi è noto come "caso irriducibile" [Tartaglia 1546, cc. 121v-124r]. Nei casi $x^3 = px + q$ e $x^3 + q = px$ la "formula" di Tartaglia implicava infatti che il valore dell'incognita fosse espresso come differenza o somma di due radici cubiche i cui radicandi contenevano la radice quadrata

$$\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3}$$

che poteva avere radicando negativo: in quel caso, quindi, la soluzione non poteva essere ricondotta al calcolo di radicali ed era dunque "irriducibile". Anche nelle equazioni di secondo grado si verificavano casi in cui il discriminante risultava negativo, ma si poteva facilmente concludere che l'equazione non ammetteva soluzioni. In questo caso, invece, non era così semplice aggirare il problema delle radici quadrate di numeri negativi, perché le soluzioni dell'equazione cubica esistevano ed erano tutte e tre reali, ma la formula tartagliana non era in grado di esprimerle in maniera accettabile per le conoscenze dell'epoca. La questione dunque non si poteva più ignorare.

La risposta di Tartaglia (7 agosto) ai legittimi dubbi di Cardano fu molto piccata: il maestro bresciano affermò che il medico milanese non aveva "appresa la buona via per risolvere tal capitolo" e anzi che il "procedere è in tutto falso" e di fatto interruppe ogni relazione [Tartaglia 1546, cc.123r-124r]. Forse

Tartaglia si era reso perfettamente conto che Cardano e Ferrari stavano lavorando alle equazioni di terzo grado e, temendo una possibile nuova pubblicazione sul tema, aveva magari ritenuto opportuno astenersi dal collaborare a risolvere la spinosa questione.

Ma a cosa stavano lavorando precisamente Cardano e Ferrari? Certamente studiavano come venire a capo del caso irriducibile, ma stavano anche costruendo una cornice teorica per inquadrare la poesia-algoritmo in una trattazione organica delle equazioni, corredata di rigorose dimostrazioni geometriche. Nell'algebra retorica o sincopata dell'epoca, infatti, le equazioni avevano sempre e solo coefficienti numerici e le procedure si dovevano quindi necessariamente basare su "casi generici" non del tutto soddisfacenti: per poter garantire la generalità della procedura bisognava invece ricorrere a quella assicurata dalla geometria sintetica euclidea, in cui si manipolavano oggetti astratti, indipendenti da valori numerici.

Un episodio importante ci dà un indizio di quanto i due stessero procedendo proficuamente nei loro studi. Qualche mese dopo la pubblicazione della *Practica*, Cardano venne sfidato da Zuanne Tonini da Coi (o Colla) sul terreno delle equazioni perché ambiva ad ottenere la lettura presso le Scuole Piattine che il medico milanese teneva ormai da qualche anno. La sfida venne invece raccolta da Ferrari che la vinse brillantemente (e ottenne l'incarico), proponendo anche problemi che si risolvevano con equazioni di quarto grado, di cui egli aveva trovato la formula risolutiva, come ricorda Cardano nell'*Ars Magna*:

> *Esempio. Scomponi 10 in tre parti in proporzione continua,* (3) *tale che il prodotto della prima per la seconda sia 6. Questo proponeva Giovanni Colla e diceva che non si può risolvere, io veramente dicevo che si poteva risolvere anche se non sapevo in quale modo fino al momento in cui lo trovò Ferrari* (trad. mia). (4)

(3) Tre numeri a, b, c si dicono in proporzione continua se $a : b = b : c$.

(4) "Exemplum. Fac ex 10 tres partes in continua proportione, ex quarum ductu primae in secundam, producantur 6. Hanc proponebat Ioannes Colla, & dicebat solvi non posse, ego vero dicebam, eam posse solvi, modum tamen ignorabam, donec Ferrarius eum invenit" [Cardano 1545, c.73v].

Assumendo che i tre numeri in proporzione siano $\frac{6}{x}$, x, $\frac{x^3}{6}$ si ottiene infatti l'equazione $x^4 + 6x^2 + 36 = 60x$ della cui risoluzione parleremo più in dettaglio nel seguito.

Anche se la teoria si era arricchita di nuovi e importanti risultati, non poteva tuttavia dirsi completa senza aver sciolto la questione del caso irriducibile: è possibile che sia stato questo il motivo per cui Cardano e Ferrari, non avendo più contatti con Tartaglia, decisero di andare là dove Antonio Maria Fior aveva presumibilmente imparato a risolvere le equazioni di terzo grado: nella Bologna di Scipione del Ferro.

4. – Una gita a Bologna

Scipione del Ferro, lettore "ad arithmeticam et geometriam", aveva insegnato nello Studio bolognese per trent'anni, dal 1496 fino alla morte, avvenuta nel 1526. Fin dal Trecento i rotuli universitari bolognesi – elenchi pubblici degli insegnamenti e dei "lettori" annuali che erano stati approvati dagli organi universitari – documentano infatti l'istituzione di letture di matematica abachistica per preparare alla mercatura e in qualche periodo si arrivò ad avere fino a cinque lettori nello stesso anno, come nel 1496, quando comparve per la prima volta il nome di Scipione [Dallari 1888]. Figure professionali oltre che accademiche, i lettori "dell'abaco" erano tenuti sia ad adempiere ai doveri istituzionali, tra cui quello di sostenere regolari dispute pubbliche e di compilare regolarmente i registri delle lezioni, sia in qualche caso ad occuparsi gratuitamente della contabilità e della misurazione delle terre del Comune.

Alla morte di Scipione, la lettura passò all'allievo e genero Annibale della Nave, a cui venne rinnovato l'incarico di anno in anno fino al 1558. Dal 1554 venne affidata la lettura "ad praxim mathematicam" a un altro allievo, Pompeo Bolognetti, che ci ha lasciato uno dei pochi documenti conservati in cui è esplicitamente dichiarata l'attribuzione della scoperta della formula risolutiva a del Ferro: nel manoscritto che raccoglie le sue lezioni, infatti, la regola di risoluzione dell'equazione di terzo grado è preceduta dalla frase eloquente: "Dil Cavaliero Bolognetti, lui l'hebbe da messer Sipion dal Ferro, vecchio Bolognese" [Bortolotti 1947, p.43].

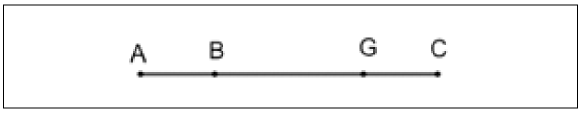
Se dunque c'era un luogo dove si poteva sperare di saperne di più sulle equazioni cubiche e sul caso irriducibile, non poteva che essere Bologna. Nel 1542 Cardano e Ferrari fecero visita ad Annibale della Nave e – a quanto racconta lo stesso Ferrari – poterono leggere un vecchio quadernetto di Scipione, oggi perduto: la prova che egli aveva trovato, molto prima di Tartaglia, il modo di risolvere i "capitoli di cose, cubo e numero".

La scoperta convinse Cardano a non sentirsi più vincolato dal giuramento di segretezza che aveva prestato davanti al suo allievo e a Tartaglia. Nonostante il problema del caso irriducibile fosse ancora aperto, nel 1545 Cardano pubblicò il decimo volume dell'*Opus Perfectum*, una sorta di enciclopedia del sapere matematico in quindici volumi, con il titolo di *Ars Magna sive de regulis algebraicis liber unus, qui & totius operis de Arithmetica quod Opus Perfectum inscripsit est in ordine Decimus*, e in esso il procedimento per risolvere le equazioni di terzo e quarto grado ([Gavagna 2012], [Tamborini 2003]).

5. – L'*Ars Magna* e i contributi di Ferrari

Nel primo capitolo Cardano riassume in poche righe lo sviluppo dell'algebra coi suoi protagonisti, per passare subito a "Scipio Ferreus Bononiensis" che aveva risolto "capitulum cubi & rerum numero aequalium", successivamente trovato anche dall'"amicus noster" Niccolò Tartaglia che glielo aveva rivelato dopo molte preghiere. Quella rivelazione, afferma Cardano, aveva avuto il merito di fargli superare le convinzioni sull'impossibilità di risolvere l'equazione di terzo grado indotte dalle affermazioni di Pacioli, e lo aveva convinto ad avventurarsi nello studio delle equazioni, che aveva condotto a nuove scoperte e aveva fornito solide dimostrazioni dei vecchi e nuovi risultati, in parte trovati da lui e in parte dall'allievo Ferrari [Cardano 1545, c.3v].

Nell'*Ars Magna* troviamo alcune attribuzioni puntuali a Ludovico Ferrari, le prime delle quali riguardano le trasformazioni di un'equazione cubica con il termine quadratico in una equivalente che ne è priva. Anche per constatare il divario tra il linguaggio moderno e quello cinquecentesco, proponiamo il passo (in traduzione), tratto dal Capitolo XVIII *De cubo & rebus aequalibus quadratis et numero,* in cui Cardano spiega la "demonstratio ... inventa à Ludovico Ferrario" [Cardano 1545, c.39v]:



Siano dunque un cubo e 100 cose uguali a 6 quadrati più 10 numeri. Si ponga AB uguale al valore della cosa, BC pari alla terza parte del numero dei quadrati; sia AG uguale a BC, quindi GB è la differenza tra AB e BC e il cubo di GB è la differenza tra il cubo di AB sommato al triplo di AB per il quadrato di BC e il cubo di BC sommato al triplo di BC per il quadrato di AB, per [*quanto detto* NdT] *nel sesto capitolo. In verità il cubo di AB sommato a 100 cose è uguale a 6 quadrati più 10; tuttavia, 6 quadrati di AB sono il triplo del prodotto di BC per il quadrato di AB, dunque il triplo del prodotto di BC per il quadrato di AB sommato al cubo di BC, che è 8, è inferiore di 2 al cubo di AB sommato a 100 cose; dico infatti inferiore di 2 poiché il cubo di BC sommato a 6 quadrati doveva essere 10 ed è solo 8. Ma il cubo di AB sommato a 100 cose eccede il cubo di AB sommato al triplo di AB moltiplicato per il quadrato di BC, che è 12 cose, di 88 cose; allora la differenza tra il cubo di BC sommato al triplo di BC moltiplicato per il quadrato di AB e il cubo di AB sommato al triplo di AB moltiplicato per il quadrato di BC è 88 AB meno 2. Questa differenza dunque è uguale al cubo di GB, come avevamo detto. Si ponga allora BG come cosa, sarà dunque GC, ovvero AB, 2 meno una cosa, la cui quantità presa 88 volte, come si è detto, è uguale al cubo di BG più 2; allora il cubo di BG più 2 più 88 delle sue cose è uguale a 176, per cui il cubo di BG più 88 sue cose è uguale a 174, per cui se sottrai questo valore di BG da BC, che è la terza parte del numero dei quadrati, cioè 2, avrai la quantità AB richiesta* (trad. mia). (5)

(5) Sit igitur cubus & 100 res aequalia 6 quadratis p: 10 numero. Et ponatur AB rei aestimatio, BC tertia pars numeri quadratorum; AG autem aequalis BC, quare GB est differentia AB & BC, cubus autem GB, est differentia cubi AB cum triplo AB, in quadratum BC, a cubo BC cum triplo BC in quadratum AB, ex sexto capitulo, cubus vero AB cum 100 rebus, aequatur 6 quadratis p:10, ex supposito, 6 quadrata autem AB, sunt triplum BC in quadratum AB, triplum igitur BC in quadratum AB, & cubus BC, qui est 8, sunt 2 m: quam cubus AB cum 100 rebus; dico autem 2 m:

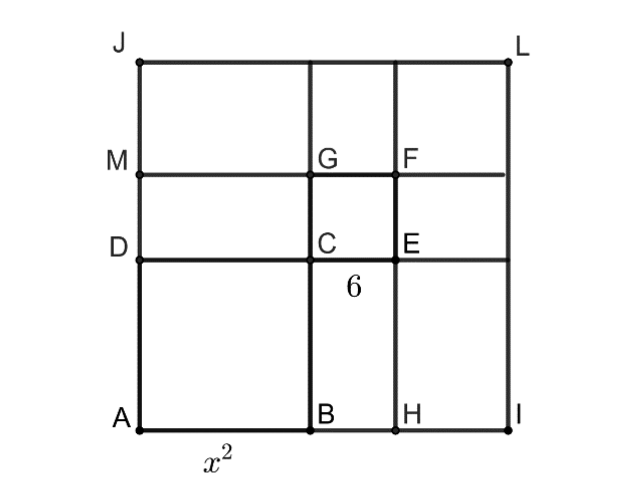
In questo passo Ferrari dimostra che l'equazione $x^3 + ax = bx^2 + c$ si trasforma mediante il cambio di variabile $x = \frac{b}{3} - y$ nell'equazione $y^3 + dy = f$. La dimostrazione parte da un caso generico, ovvero l'equazione $x^3 + 100x = 6x^2 + 10$, e arriva all'equazione trasformata $y^3 + 88y = 174$, ma per garantire la generalità del procedimento si appoggia, nel suo sviluppo, a una rappresentazione in segmenti, cioè a una rappresentazione geometrica del cambio di variabile che prescinda dal valore dei coefficienti numerici. ([6])

Anche nel Capitolo XV *De cubo & quadratis aequalibus numero* Cardano attribuisce a Ferrari il merito di aver trovato una trasformazione efficace, dimostrando che l'equazione $x^3 + bx^2 = c$ si riduce alla forma $y^3 = by + \sqrt{c}$ ponendo $x = y^2 - b$ [Cardano 1545, 34v-35r].

Il contributo più importante di Ferrari nell'*Ars Magna* è però la "regula nobilis" del Capitolo XXXIX *De regula qua pluribus positionibus invenimus ignotam quantitatem* per risolvere l'equazione, o meglio le equazioni, di quarto grado [Cardano 1545, cc.72v-75r]: l'elenco di Cardano, che presenta solo i casi principali, ne contempla ben 20.

Il primo passo del procedimento, in termini moderni, è la trasformazione dell'equazione in modo che scompaia, se esiste, il termine di terzo grado; una volta ridotta l'equazione in questa forma si può adottare la strategia del completamento del quadrato. Nell'esempio guida $x^4 + 6x^2 + 36 = 60x$, per prima cosa si aggiunge quindi $6x^2$ così che il primo membro sia il quadrato di un binomio

$$\left(x^2 + 6\right)^2 = 6x^2 + 60x$$



Dal punto di vista geometrico, se si assume che il quadrato ABCD abbia lato x^2 e il quadrato CEFG abbia lato 6, per completare il quadrato di lato $x^2 + 6$ si aggiungono due rettangoli di lati 6 e x^2. Se il secondo membro $6x^2 + 60x$ fosse un quadrato, potremmo fermarci e arrivare agevolmente alla soluzione; in caso contrario bisogna aggiungere tre termini dipendenti da un parametro in modo che il primo membro continui ad essere un quadrato (di un trinomio) e il secondo diventi un'equazione quadratica che, per certi valori del parametro ammetta discriminante nullo e sia quindi a sua volta un quadrato. Dal punto di vista geometrico occorre dunque aggiungere uno "gnomone" HILJMF al quadrato che avevamo prima completato. Se aggiungiamo ad entrambi i membri l'espressione $2kx^2 + k^2 + 12k$, dove k è la "larghezza" dello gnomone, che è un parametro libero, si ottiene

$$x^4 + (2k + 12)x^2 + k^2 + 12k + 36 =$$
$$= (2k + 6)x^2 + 60x + k^2 + 12k$$
$$\left(x^2 + 6 + k\right)^2 = (2k + 6)x^2 + 60x + k^2 + 12k$$

Il secondo membro avrà due radici coincidenti quando si annulla il discriminante della relativa equazione, ovvero quando

$$k^3 + 15k^2 + 36k = 450$$

quia cubus BC, qui iungitur 6 quadratis debuit esse 10, & est tantum 8; at cubus AB cum 100 rebus, superat cubum AB & triplum AB in quadratum BC, quod est 12 res, in 88 rebus, differentia igitur cubi BC & tripli BC in quadratum AB, a cubo AB cum triplo AB in quadratum BC, est 88 AB, m: 2, huic igitur differentiae, aequalis est cubus GB, ut diximus, ponatur igitur BG res, erit igitur GC seu AB, 2m: re, cuius quantitas sumpta 88 vicibus, ut dictum est, aequatur cubo BG p: 2; igitur cubus BG, p: 2, p: 88 suis rebus, aequalis est 176, quare cubus BG cum 88 suis rebus, aequatur 174, quare si eam aestimationem BG detraxeris ex BC, quae est tertia pars numeri quadratorum, scilicet 2, habebis quantitaem AB quaesitam [Cardano 1545, cc. 39v-40r].

([6]) Si noti che si assume tacitamente che la soluzione sia inferiore a b/3; se così non fosse, tuttavia, si dovrebbe condurre un ragionamento del tutto analogo.

Ferrari dunque subordina la risoluzione di un'equazione di quarto grado a quella di terzo, la sua "risolvente"; una volta determinati i valori del parametro k, l'equazione di partenza si riduce a una semplice equazione di secondo grado (oppure, con occhi moderni, si spezza in due equazioni di secondo grado).

Alla pubblicazione dell'*Ars Magna* Niccolò Tartaglia si sentì defraudato della gloria e della considerazione a cui aspirava: certo Cardano lo aveva menzionato come scopritore della formula risolutiva, ma al contempo ne aveva anche sminuito l'importanza rivelando che vent'anni prima Scipione del Ferro lo aveva preceduto. Amareggiato e adirato per il tradimento della promessa, Tartaglia si affrettò a dare alle stampe i *Quesiti et inventioni diverse* (1546) raccogliendo nell'ultimo capitolo alcune lettere, scambiate con Cardano tra il 1539 e il 1540, allo scopo di denunciare l'inganno perpetrato ai suoi danni. La pesante accusa di Tartaglia non cadde nel vuoto, ma, come abbiamo anticipato, fu il "creato" e non il maestro a replicare.

6. – La disfida tra Ferrari e Tartaglia

Il 10 febbraio 1547, dunque, Ferrari "pubblico lettore della Mathematiche in Melano" indirizzò a Tartaglia una lettera molto aspra: le accuse rivolte al suo maestro erano secondo lui ingenerose, tanto più perché pronunciate da chi si era veramente macchiato di "furto", pubblicando nei *Quesiti* diverse proposizioni di Giordano Nemorario senza citarne la paternità. Per difendere l'onore di Cardano sfidava dunque il matematico bresciano a confrontarsi in una leale disfida "in Geometria, Arithmetica & in tutte le discipline che da esse dependono, come è Astrologia, Musica, Cosmographia, Prospettiva, Architettura & altre [...] accettando di disputar, non solamente sopra quanti authori greci, latini, & volgari hanno scritto in tali faculta, ma anchora sopra le vostre nuove inventioni" [Cartelli 1974, p.7].

La parte restante della lettera si occupa di dettagli tecnici – la scelta del campo, dei giudici, della posta in gioco – e si conclude informando che una sua copia cartacea sarebbe stata inviata a una cinquantina di personaggi "che si dilettano e sanno delle mathematiche, oltra non poche altre le quali sono sparse in diversi luoghi d'Italia", in modo che fossero testimoni di una sfida a cui ormai il matematico bresciano non si sarebbe più potuto sottrarre.

Tartaglia replicò tentando di coinvolgere personalmente anche Cardano nella disputa, ma non ebbe fortuna, né in questo caso né tutte le volte successive in cui ci provò: il "Signor Hieronimo Cardano Medico Milanese" rimase sempre in posizione defilata. Non ripercorreremo le estenuanti scaramucce sui termini della disputa – i temi, il luogo, i giudici – che occuparono gran parte dello scambio epistolare, ma chi voglia cimentarsi nella lettura potrà apprezzare l'abilità con cui Ferrari riuscì a condurre il gioco, costringendo costantemente Tartaglia a un atteggiamento difensivo che non di rado sfociò in reazioni scomposte. Da parte di Ferrari non mancarono infatti delle provocazioni pungenti: ad esempio, consapevole che il suo antagonista soffriva della mancanza di un'adeguata formazione umanistica, decise beffardamente di scrivere il secondo cartello in latino, suscitando le prevedibili risentite rimostranze dell'abachista bresciano, che chiese di tornare a scrivere nella "nostra materna lingua Italiana".

L'impianto difensivo messo a punto da Ferrari contro l'accusa di aver tradito il giuramento di segretezza non si basava solo sulla constatazione che Tartaglia non poteva considerarsi né il primo né l'unico scopritore della formula, ma anche sul fatto che nella cornice teorica dell'*Ars Magna* l'"inventiuncula" era rinata a nuova vita, proprio come una pianticella morente ritrova vigore quando viene trapiantata in un orto rigoglioso ("velut languentem et semimortua arbusculam in amplissimo, feracissimo et amoenissimo horto inferuit" [Cartelli 1974, p.27]). Anche se l'argomento di Ferrari era finalizzato a giustificare la pubblicazione dell'opera di Cardano, l'attenzione riposta in essa alla dimostrazione di un risultato, oltre che al risultato stesso, segna un certo distacco dalla pratica abachistica, orientata verso il "come" eseguire una procedura piuttosto che verso il "perché". Si può certo comprendere la tagliente replica di Tartaglia, secondo cui "cavando la detta mia pianta del detto vostro giardino, tal vostro giardino restaria una oscura selva, perche tutte le altre cose sostantiale derivano da detta mia pianta" [Cartelli 1974, p.44], ma resta il fatto che l'*Ars Magna* documenta il tentativo di costruire un'organica teoria delle equazioni algebriche e in tal senso rappresenta un punto di svolta nella matematica del periodo.

Raggiunta un'intesa di massima sulle condizioni della disfida, il 21 aprile Tartaglia si affrettò a depositare 31 quesiti per Ferrari, lasciandogli 15 giorni di tempo per rispondere e mettendo in palio 300 ducati, in parte in contanti in parte in copie di proprie opere da vendere (ben 750). I quesiti riguardavano la geometria euclidea piana e solida (18), l'aritmetica e l'algebra (10) e la geografia tolemaica (3). Non entreremo nei dettagli delle soluzioni, limitandoci qui a discutere solo qualche aspetto che sembra particolarmente significativo per delineare il profilo scientifico di Ferrari. ([7]) I primi quesiti posti da Tartaglia chiedevano di dimostrare alcune proposizioni degli *Elementi* di Euclide supponendo di sostituire al terzo postulato, ovvero alla "tertia petitione, cioe quella dove che adimanda che gli sia concesso che sopra a qualunque centro che gli pare di potervi designare un cerchio di che grandezza gli pare" un nuovo postulato "cioe che sopra a qual si voglia centro ve pare, vi concedo che gli possiati designare un cerchio secondo la quantita della data appertura di compasso, cioe proposta dal aversario, secondo che a lui pare (pur che non sia in retta linea)" [Cartelli 1974, p.53] Si tratta dunque di usare, oltre alla riga, il compasso ad apertura fissa anziché il compasso collassabile postulato da Euclide.

Ferrari non si limitò a dimostrare col compasso fisso le proposizioni indicate dal suo avversario, ma proseguì dimostrando anche quelle che gli consentivano di dedurre tutte le restanti proposizioni degli *Elementi*, stabilendo così il cosiddetto *Teorema di Ferrari*: "Colla riga e col compasso ad apertura fissa si possono dimostrare tutti i teoremi di geometria piana ed eseguire tutte le costruzioni relative, colla restrizione che le circonferenze a raggio diverso dall'apertura fissa non possono essere tracciate completamente, ma però di esse si può costruire il centro, il raggio e quanti punti si vogliono" [Agostini 1937, p.496]. Analizzando le relazioni di dipendenza logica tra le proposizioni euclidee, Ferrari ricostruì l'architettura degli *Elementi* in funzione del nuovo postulato, assumendo come punto di partenza la proposizione I.4 degli *Elementi* – oggi nota come "primo criterio di congruenza tra triangoli" - dato "che la non ha bisogno delle propositioni antecedenti, ne anche della petitione eccettuata". Di questa si servì poi per dimostrare in successione la quinta, poi l'ottava, la nona, la decima etc.e procedendo in questo modo riuscì a ricostruire "tutto Euclide, solamente con gli suoi principi; mutando la sua terza petitione in una che dica sopra ogni punto descrivere un circolo secondo l'apertura del compasso assignata, secondo il voler dell'adversario" [Cartelli 1974, p.154]. Come si vede, Ferrari si mostrò più interessato a un'articolata costruzione teorica che ai risultati isolati richiesti dal suo avversario, analogamente a quanto era stato fatto nell'*Ars Magna* per le equazioni.

Dopo molte titubanze Tartaglia accettò infine di dibattere pubblicamente, dicendosi disposto a raggiungere il suo antagonista a Milano per sfidarsi su un elenco di opere - tra le quali alcune delle loro – con il patto che "per ogni errore che retrovareti nelle mie opere, di perdere e pagare ducati uno, il medesimo voglio che fati voi, cioe che tanti errori quanto ritrovaro nella vostra opera di Arithmetica & nella Arte Magna & altre, che voi medesimamente perdiati tanti ducati" [Cartelli 1974, p.181].

La sfida ebbe luogo il 10 agosto 1548 nella Chiesa di Santa Maria del Giardino (oggi non più esistente perché demolita nel 1865). Al seguito di Ferrari figuravano, tra gli altri, Don Ferrante Gonzaga, governatore di Milano, e Niccolò Secco, capitano di Giustizia; Tartaglia, invece, racconta di essersi presentato accompagnato solo da suo fratello. Non abbiamo documenti ufficiali sullo svolgimento e sull'esito di quella sfida, ma solo un lapidario commento di Cardano, secondo il quale "il suo creato" vinse trionfalmente e costrinse il matematico bresciano a ritrattare le accuse [Cardano 2004, p.221] e alcuni resoconti di Tartaglia che raccontano una versione diversa, secondo la quale egli venne sgarbatamente ridotto al silenzio dalla "gran comittiva" al seguito del suo contendente e a causa di questa palese faziosità decise di tornare a Brescia senza concludere lo scontro. ([8])

([7]) Per un'analisi dei contenuti matematici della disfida si veda [Masotti 1974].

([8]) Si tratta del *Terzo Ragionamento sopra la Travagliata Inventione* [Tartaglia 1551], della *Seconda Parte* (cc.41r-42r) e *Quinta Parte* (21r, 22r-23r) del *General Trattato* [Tartaglia 1556-1560].

L'eco di questa disfida portò a Ferrari fama e offerte di lavoro: fu chiamato "a Roma, dal Vicerè delle Gallie Brisacco, a Venezia, in condizione privata ma con maggiore ricchezza, e inoltre dal Cardinale di Mantova e dal Cesare, affinché istruisse il figlio che ora è imperatore" ([Cardano 1663a] trad. mia). Nonostante il parere contrario del suo maestro, Ferrari accettò l'offerta del Cardinale di Mantova Ercole Gonzaga e nello stesso anno il fratello Ferrante lo nominò Prefetto della Provincia con l'incarico di sovrintendere alla misurazione dell'agro milanese per realizzare il primo catasto dello Stato di Milano, voluto da Carlo V. Il censimento del Ducato, diviso in otto parti assegnate ad altrettante squadre di misuratori, cominciò il 12 agosto 1549 per concludersi circa tre anni dopo, anche se le notificazioni e le verifiche dovute alle contestazioni prolungarono i lavori ancora per diversi anni. Ludovico Ferrari, nominato Commissario della settima squadra, decise di rinunciare alla lettura di matematica per dedicarsi interamente a questo incarico, che mantenne per otto anni fino a che alcuni problemi di salute lo costrinsero ad abbandonare l'impiego e a trasferirsi a Bologna, pur senza interrompere la collaborazione né con il Cardinal Gonzaga né con l'amministrazione cittadina responsabile del progetto del catasto. Tra i pochissimi documenti autografi conservati sono infatti sopravvissuti due opuscoli sul problema del calendario redatti nel 1562 su commissione di Ercole Gonzaga, legato pontificio al Concilio di Trento (9) e una lettera del novembre 1563 inviata al "Vicario e dodeci della Provincia di Milano" in risposta alla richiesta, indirizzata sia a Ferrari sia a Cardano, di un parere su come stabilire il valore di un terreno conoscendo quello di alcune sue parti [Fiocca 1988].

Dal 1556 Ferrari visse con la sorella Maddalena, rimasta vedova e senza mezzi di sostentamento, ma non è noto in quali attività fosse occupato fino al 1564, quando il suo nome apparve nei *Rotuli degli Artisti* dello Studio bolognese in qualità di lettore "ad mathematicam et dependentes". Il rapporto con l'Università non lo vedeva solo in veste di docente: il 14 luglio 1565 si laureò in filosofia e medicina, avendo per promotori Domenico Bonfioli, priore di filosofia, il filosofo Antonio Francesco Fava e il noto naturalista Ulisse Aldrovandi. I rotuli dell'anno accademico 1565-66 lo registrarono ancora come lettore: non poté tuttavia assolvere il compito per l'improvvisa morte avvenuta nell'ottobre 1565. Nella *Vita*, Cardano adombrò il sospetto di avvelenamento per mano della sorella, non solo perché non aveva pianto al funerale ("nulla prorsus lachrymas in funere ediderit"), lasciando così trapelare il suo odio, ma soprattutto perché dopo meno di due settimane dalla morte si sposò, trasferendo al nuovo marito la cospicua eredità lasciatale dal fratello. Né miglior giudizio fu riservato da Cardano a tale marito, reo di avergli impedito di pubblicare i commenti su Vitruvio e Cesare a cui Ludovico stava lavorando, allo scopo di farli stampare a nome di un figlio avuto da un precedente matrimonio – pubblicazione di cui però non abbiamo traccia – e di avere successivamente scacciato di casa Maddalena per godersi tutte le sue fortune.

7. – "... quaedam tertia natura abscondita"

Dopo la morte di Ferrari, Cardano pubblicò nel 1570 la seconda edizione dell'*Ars Magna* e il *De regula aliza*, un trattato di "disperante oscurità" [Loria 1950, p.298] in cui vennero confusamente raccolti risultati e riflessioni anche sul caso irriducibile che documentano "l'atto del tentare, non un ordine delle scoperte" [Cossali 1996, p.27]. (10) Lo scoglio che Cardano (e Ferrari) non riuscirono a superare era la determinazione della natura matematica delle radici quadrate di numeri negativi: questi strani "numeri" avevano un quadrato negativo e non si comportavano dunque né come numeri positivi né come numeri negativi, ma erano oggetti di una terza natura indecifrabile, come scrive esplicitamente Cardano:

> *Et nota quod R. p̃ 9 est 3 p̃ vel 3 m̃ nam p̃ & m̃ in m̃ faciunt p̃. Igitur R m̃ 9 non est p̃ 3 nec m̃ sed quaedam tertia natura abscondita* (11) [Cardano 1663, p.373].

(9) Si tratta del *Libellus Ludovici Ferrarii de erroribus qui nostro tempore contingunt in celebratione Paschatis et de eorum causis* e di una lettera al Cardinale Ercole Gonzaga dal titolo *Super propositionibus Petri Pitati de restitutione Calendarii* pubblicati e analizzati in [Fiocca 1988].

(10) Per un'analisi del *De Regula Aliza* si veda [Confalonieri 2015], [Confalonieri 2015a].

(11) "E nota che $\sqrt{+9}$ è $+3$ o -3, infatti più [per più n.d.R] e meno per meno fanno più; allora $\sqrt{-9}$ non è $+3$ o -3 ma è qualcosa di una terza natura sconosciuta (trad. mia)".

La difficoltà di manipolare algebricamente le cosiddette "radici sofistiche", cioè le espressioni del tipo $a \pm \sqrt{-b}$ emerge, ad esempio, dal confronto di due problemi proposti da Cardano. Nel primo si deve dividere il numero 10 in due parti tali che il loro prodotto sia 40 [Cardano 1545, c.66r]; le soluzioni sono $5+\sqrt{-15}$ e $5-\sqrt{-15}$ e si verifica che soddisfano l'equazione $x^2+40=10x$, eseguendo correttamente le moltiplicazioni tra radici sofistiche. Tuttavia qualche riga dopo, nella *Quaestio VI* [Cardano 1545, c.66v] le operazioni con le radici sofistiche vengono eseguite in ben altro modo: in questo caso si cercano tre numeri in proporzione continua tali che il secondo sia pari alla differenza tra il primo e la sua radice quadrata e il terzo sia pari alla differenza tra il secondo e la sua radice quadrata. Cardano pone il primo numero pari a x^2 e si propone di verificare che il prodotto del primo e del terzo termine della proporzione:

$$x^2 : (x^2-x) = (x^2-x) : \left(x^2-x-\sqrt{x^2-x}\right)$$

sia pari al quadrato del secondo. In realtà non esistono tre numeri diversi da zero che soddisfano ai requisiti, ma Cardano indica erroneamente come soluzione la terna $\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}-\sqrt{-\frac{1}{4}}$ sostenendo che "productum primi in tertium est m: $\frac{1}{16}$ p: R $\frac{1}{64}$ quod est $\frac{1}{8}$ m: $\frac{1}{16}$ & tantum fit ducto secundo numero in se", cioè che il prodotto tra $\frac{1}{4}$ e $-\frac{1}{4}-\sqrt{-\frac{1}{4}}$ è pari a $\left(-\frac{1}{4}\right)^2=\frac{1}{16}$. Secondo Cardano evidentemente

$$\frac{1}{4}\cdot\left(-\frac{1}{4}-\sqrt{-\frac{1}{4}}\right)=-\frac{1}{16}+\frac{1}{8}=\frac{1}{16}$$

identità che ne presuppone un'altra, in cui la regola dei segni viene indebitamente "estesa":

$$-\frac{1}{4}\cdot\sqrt{-\frac{1}{4}}=\sqrt{\frac{1}{64}}=\frac{1}{8}$$

Cardano era consapevole però che la questione non era chiusa, tanto che in seguito riprovò a risolverla anche a costo di sostenere tesi poco plausibili: nel capitolo XXII del *De regula aliza*, *De contemplatione p̃ et m̃ et quod m̃ in m̃ facit m̃* tentò addirittura di dimostrare geometricamente che il prodotto di due numeri negativi era in realtà un numero negativo [Tanner 1980], per poter così finalmente operare algebricamente con le radici sofistiche.

8. – "Ridurre a perfetto ordine": *L'Algebra* di Bombelli

Una nuova, ingegnosa, risposta alla questione venne data due anni dopo, nel 1572, da Rafael Bombelli con la pubblicazione della sua unica opera, *L'Algebra.* Non abbiamo molti elementi per ricostruire il contesto culturale in cui maturò quest'opera, così come non abbiamo nemmeno molte notizie sulla vita del suo autore [Gavagna 2013].

Sappiamo che Bombelli nacque a Bologna, dove venne battezzato il 20 gennaio 1526 [Jayawardene 1963]. Nulla si sa della sua formazione matematica se non, come racconta nella lettera dedicatoria de *L'Algebra*, che ebbe come precettore l'architetto-ingegnere Pier Francesco Clementi di Corinaldo, che aveva partecipato ai lavori di bonifica delle paludi di Foligno sotto il pontificato di Paolo III. Lo stesso Bombelli divenne poi architetto-ingegnere e si pose al servizio di Monsignor Alessandro Rufini, chierico papale e poi vescovo di Melfi. In veste di «ingegniero della disseccatione» partecipò, almeno a partire dal 1551, alla bonifica della Val di Chiana: le sue famose paludi malsane – citate persino da Dante nell'*Inferno* (12) – erano state più volte oggetto di progetti di sistemazione idraulica, (13) che cominciarono tuttavia a venire attuati in maniera organica solo in questo periodo, grazie alla stabilità politica raggiunta sotto il dominio mediceo. Nel 1561 i lavori di bonifica si conclusero e Bombelli venne chiamato a Roma per sovrintendere alla riparazione del Ponte

(12) Recitano i versi 46-51 del Canto XXIX: *Qual dolor fora, se de li spedali / di Valdichiana tra 'l luglio e 'l settembre / e di Maremma e di Sardigna i mali / fossero in una fossa tutti 'nsembre, / tal era quivi, e tal puzzo n'usciva / qual suol venir de le marcite membre.*

(13) Celebre esempio sono le splendide mappe idrografiche disegnate da Leonardo da Vinci negli anni 1502-03 su incarico di Cesare Borgia, finalizzate alla realizzazione di un progetto di regimazione delle acque: tra queste mappe figura proprio una veduta a volo d'uccello della Val di Chiana e delle sue paludi (Windsor, RL 12278).

Santa Maria sul Tevere (oggi noto come Ponte Rotto), danneggiato da un'alluvione nel 1557. La data di morte, ignota, è compresa tra il 23 giugno 1572, data della lettera dedicatoria dell'*Algebra*, e il 5 maggio 1573, giorno in cui venne stilato un atto notarile in cui si citano i figli Antonio ed Ercole come eredi «Domini Raffaelis de Bombellis Bononiensis» [Jayawardene 1963].

Fu nelle pause del suo lavoro da «ingegniero» che Bombelli si dedicò alla matematica: nella dedicatoria de *L'Algebra* raccontò infatti che, giunto ormai alla conclusione del suo compito in Val di Chiana, si ritirò a Frascati nella villa "La Rufina" (oggi Villa Falconieri), messagli a disposizione dal suo protettore, per comporre assieme al fratello Ercole "ben versato nelle matematiche" e a Francesco Maria Salando "scrittore" (14) un'opera "per giovar al mondo". Nella prefazione a *L'Algebra*, infatti, Bombelli spiega che "la parte maggiore dell'Aritmetica (oggi dal vulgo Algebra detta)" era fondamentale per la comprensione di tutte le matematiche – aritmetica, geometria, astronomia, cosmologia, musica, architettura e così via – ma "per il confuso scrivere" degli autori che ne avevano trattato, risultava poco conosciuta e ancora meno usata in seno alla comunità scientifica. Era dunque necessario "ridurre a perfetto ordine" la disciplina "perché questa bella scientia resti conosciuta". Nella rassegna degli autori che avevano scritto di algebra – tra cui "Maumetto di Mosè, Arabo" (ovvero al-Khwārizmī), Luca Pacioli, Leonardo Pisano, Oronce Finé, Michael Stifel (15), "un certo Spagnuolo" (probabilmente Pedro Nunes) – Bombelli conclude che "invero alcuno non è stato che nel secreto della cosa sia penetrato, oltre che il Cardano melanese", autore di pietre miliari come l'*Ars magna*, di difficile comprensione poiché "nel dire fu oscuro", o i *Cartelli* scritti in collaborazione con Ludovico Ferrari "nostro bolognese". (16) Mentre per Cardano e Ferrari, "ingegni a questi nostri tempi più tosto divini che humani" Bombelli nutre profonda ammirazione, mostra malcelato disprezzo per Niccolò Tartaglia, "uomo di poca modestia" e "di sua natura assuefatto a dir male".

Il primo dei tre libri de *L'Algebra* è dedicato all'introduzione degli elementi fondamentali – potenze, radici, binomi, trinomi – e alle regole aritmetiche per operare con essi: si tratta essenzialmente dell'interpretazione aritmetica del libro X degli *Elementi* di Euclide, tema fondamentale e ricorrente della matematica abachistica. Il secondo libro si apre poi con la definizione delle potenze algebriche e prosegue con i procedimenti risolutivi delle equazioni dal primo al quarto grado. La struttura dei capitoli ricalca quella dell'*Ars magna*: all'enunciato della formula espresso in forma retorica seguono prima esempi esplicativi e poi un'interpretazione geometrica dell'algoritmo risolutivo che ne garantisca la generalità. È in questa parte del trattato che Bombelli affronta il caso irriducibile dell'equazione cubica. Mentre Cardano, come abbiamo visto, si era arenato sul problema di stabilire quale segno avessero le radici di numeri negativi, Bombelli lo supera inventando non tanto i nuovi numeri che oggi chiamiamo "numeri immaginari", quanto i nuovi segni "più di meno" e "meno di meno" [Gavagna 2014]:

> *Ho trovato un'altra sorte di Radici cubiche legate* [espressioni del tipo $\sqrt[3]{A+\sqrt{B}}$ NdR] *molto differenti dalle altre, la qual nasce dal Capitolo di cubo eguale a tanti* (17) *e numero* [$x^3 = px + q$], *quando il cubato del terzo delli tanti è maggiore del quadrato della metà del numero* [...] *La qual sorte di Radici quadrate ha nel suo Algorismo diversa operatione dall'altre e diverso nome; perché quando il cubato del terzo delli tanti è maggiore del quadrato della metà del numero, lo eccesso loro non si può chiamare né più né meno, però lo chiamerò più di meno quando egli si doverà aggiongere, e quando si dovrà cavare lo chiamerò men di meno e questa operatione è necessarijssima* [Bombelli 1572, p.169]

(14) Salando fu lettore dello studio bolognese "ad artem scribendi", cioè di calligrafia, nei periodi 1541-1545 e 1576-1583 [Dallari 1888].

(15) Erroneamente citato come "Giovan Stifelio Todesco" [Bombelli 1572 p.LI].

(16) Bombelli era evidentemente convinto che i *Cartelli* fossero frutto della collaborazione tra Cardano e Ferrari e non solo opera di quest'ultimo.

(17) Come vedremo, Bombelli operò precise scelte lessicali, preferendo ad esempio indicare l'incognita con il termine "tanto" invece che con l'usuale termine abachistico "cosa".

Naturalmente l'introduzione dei nuovi segni imponeva una estensione della "regola dei segni" [Bombelli 1572, p.169]:

Più via più di meno, fa più di meno
Meno via più di meno, fa meno di meno
Più via meno di meno, fa meno di meno
Meno via meno di meno, fa più di meno
Più di meno via più di meno, fa meno
Più di meno via men di meno, fa più
Men di meno via più di meno, fa più
Men di meno via men di meno, fa meno

Anche se l'ingegnosa trovata di Bombelli consentiva di dare significato alla "formula" di Tartaglia anche nel caso irriducibile, la soluzione si presentava nella forma $\sqrt[3]{a+\sqrt{-b}}+\sqrt[3]{a-\sqrt{-b}}$, difficile da maneggiare e quindi poco utile. Bombelli cercò dunque di estrarre la radice cubica (*lato cubico*) delle espressioni $a \pm \sqrt{-b}$:

Volendo trovare il lato cubico di simil specie di radici, per prattica si terrà in questo modo: giongasi il quadrato del numero col quadrato della R. e della somma si pigli il lato cubico, poi si cerchi a tentone di trovare un numero et una R.q. che li loro quadrati gionti insieme faccino tanto quanto fu il lato cubico detto di sopra. e che del cubato del numero cavatone il triplo della moltiplicatione del numero via il quadrato della Rad. q. quello, che resta, sia il numero del lato, che si cerca [Bombelli 1572, p.180]

L'ipotesi (forte) su cui egli si basava, era dunque che la radice cubica $\sqrt[3]{a \pm \sqrt{-b}}$ fosse ancora del tipo $x \pm \sqrt{-y}$, ovvero

$$(x \pm \sqrt{-y}\,)^3 = a \pm \sqrt{-b}$$

che corrisponde al sistema

$$\begin{cases} \sqrt[3]{a^2+b} = x^2 + y \\ a = x^3 - 3xy \end{cases}$$

dove i numeri naturali x e y si dovevano trovare «a tentone». Nei casi in cui era semplice risolvere il sistema, Bombelli fu finalmente in grado di ricavare concretamente le tre radici reali dell'equazione e di ottenere il risultato più rilevante di questi primi due libri, che rappresentano uno dei punti più alti dell'algebra italiana del Cinquecento.

Non meno degna di nota è la particolare attenzione che Bombelli dedicò alla rappresentazione geometrica delle equazioni cubiche. Mentre nei casi più semplici ripropose il modello della decomposizione in cubi e parallelepipedi, già presente nell'*Ars Magna*, fu nelle equazioni irriducibili, in cui tale via non è praticabile, che Bombelli mostrò la propria creatività, presentando "una dimostratione in superficie piana generalissima" [Bombelli 1572, p.297] basata sull'uso di due "squadri materiali" ovvero coppie di asticelle saldate ad angolo retto che consentivano di costruire le soluzioni reali delle cubiche nel caso irriducibile (ma più in generale per qualsiasi equazione cubica) superando in tal modo il vincolo euclideo della riga e del compasso che Cardano considerava ineliminabile.

Nel progetto iniziale de *L'Algebra*, conclusa l'esposizione delle equazioni algebriche e dei loro procedimenti risolutivi, sarebbe seguita, nel terzo libro, una raccolta di problemi risolti, una parte dei quali di carattere mercantile; ma una scoperta importante indusse Bombelli a una profonda revisione di questo libro e di alcuni aspetti dell'intera opera.

9. – "un'opera greca ... composta da un certo Diofante Alessandrino"

Il reggiano Antonio Maria Pazzi, lettore di matematiche all'Università di Roma dal 1567 al 1576, aveva trovato un codice greco dell'*Aritmetica* di Diofanto nella Biblioteca Vaticana e – consapevole della rilevanza della scoperta – ne aveva informato l'ingegnere bolognese. ([18]) Come scrive nella prefazione a

([18]) Già nel 1463 il celebre matematico tedesco Regiomontano aveva trovato a Venezia una copia greca dell'*Aritmetica* in sei libri e aveva cercato inutilmente un esemplare completo di tutti i 13 libri in modo da poter preparare una traduzione latina. Quella dell'*Aritmetica* rappresentava infatti una scoperta di eccezionale importanza per i matematici umanisti, dato che consentiva di ascrivere alla cultura greca anche l'invenzione dell'algebra, unica disciplina considerata un'esclusiva eredità della matematica araba. La mancanza degli ultimi sette libri in greco – che non si sono conservati – forse spinse Regiomontano a desistere dal fare un'edizione a stampa: l'*Aritmetica* di Diofanto non figurava infatti nel suo celebre programma editoriale.

L'Algebra, Bombelli rimase conquistato da questo antico "autore assai intelligente de numeri" che aveva organizzato il suo trattato "in perfetto ordine": con l'aiuto di Pazzi, in un'altra provvidenziale pausa dal lavoro tradusse cinque dei sei libri contenuti nel codice vaticano, ma dovette poi interrompere l'attività per alcuni impegni sopraggiunti. Tanto bastò, comunque, per convincerlo a rivedere il testo che stava redigendo, a partire dall'adozione di una terminologia diversa da quella della tradizione abachistica, a cui preferì le "voci antichissime" dell'*Aritmetica*. E così ad esempio, i termini "cosa" e "censo" che usualmente identificavano l'incognita e il suo quadrato, vennero giudicati da Bombelli del tutto inappropriati e soprattutto il censo fu considerato "voce tanto sconvenevole che più dir non si potrebbe" [Bombelli 1572 p.203]: furono dunque sostituiti, "per seguitar Diofante", da "tanto" (come già visto) e "potenza", termini "universalissimi" e quindi più adatti a una disciplina che doveva ambire, secondo Bombelli, a studiare quantità generali e a svincolarsi da una realtà esclusivamente mercantile. (19)

I cambiamenti subiti dal terzo libro de *L'Algebra* emergono dall'esame di due testimoni manoscritti redatti presumibilmente tra il 1550 e il 1570 e ritrovati a Bologna nel 1923 da Ettore Bortolotti. Il primo, conservato presso la Biblioteca dell'Archiginnasio, è articolato in cinque libri – due in più dell'edizione a stampa – mentre il secondo, custodito presso la Biblioteca Universitaria, comprende solo il Libro III e la parte iniziale del Libro IV. L'analisi delle varianti mostra che le due redazioni non differiscono di molto e che il manoscritto completo è posteriore a quello mutilo: ben altro rilievo assumono invece le varianti tra i manoscritti e il testo a stampa. L'edizione del 1572 accoglie la maggior parte dei *marginalia* dei primi due libri manoscritti e alcune proposizioni che nei manoscritti compaiono nel libro IV ma, come abbiamo detto, è il Libro III ad apparire molto diverso dalla versione che uscì poi dai torchi. Nei manoscritti questo libro comprende 156 problemi aritmetici, molti dei quali tipici della trattatistica dell'abaco, mentre nell'edizione a stampa raccoglie 271 problemi, dei quali 148 sono tratti dai primi cinque libri dell'*Aritmetica* diofantea, 55 trovano corrispondenza nei manoscritti e i restanti sono nuovi [Fiocca Leone 2017]. Bombelli non era tuttavia interessato a pubblicare una vera e propria traduzione del testo greco, ma a rileggere i problemi diofantei in chiave più moderna: ne mantenne dunque la struttura ma usò anche, ad esempio, numeri irrazionali e radici cubiche non presenti nel codice greco. Non di rado poi allo svolgimento dei problemi vennero aggiunte delle appendici in cui l'algoritmo risolutivo veniva ripetuto eliminando i riferimenti ai dati numerici, in modo da arrivare alla formulazione di un procedimento del tutto generale. Con la scelta di pubblicare i problemi diofantei, Bombelli era perfettamente consapevole di aver "deviato dall'uso de' scrittori di questa disciplina" ma giustificò la scelta di imitare gli «antichi scrittori» affermando che i problemi astratti, soprattutto nell'insegnamento della matematica, garantivano una maggior generalità e sottolineò come fosse opportuno far precedere l'aspetto teorico a quello meramente applicativo "pensandosi che la capacità dello intelletto humano debbia poi esser tale ch'egli per se debbia, posedendo la Teorica, venire all'uso della pratica" [Bombelli 1572, p.414].

Le varianti tra il manoscritto dell'Archiginnasio e il testo edito non riguardano solo i contenuti, ma anche le notazioni inventate da Bombelli le quali, benché non siano state fedelmente riprodotte nell'opera a stampa per i limiti tecnologici della tipografia dell'epoca, si mostrano più efficaci di quelle della tradizione abachistica, pur mantenendosi nella tradizione dell'algebra retorica (o più precisamente, sincopata). Per esempio, nei trattati d'abaco la radice era indicata generalmente dalla lettera R (con un trattino sulla gamba) seguita da un numero o un'espressione che costituiva il radicando, ma era talvolta ambiguo dove terminasse il radicando, mancando un sistema di parentesi. Bombelli inserì una sottolineatura delimitata da due tratti verticali per "inscatolare" il radicando immediatamente dopo la R, il che

(19) Bombelli elenca esplicitamente i nomi di tutte le "dignità" fino alla dodicesima: tanto, potenza, cubo, potenza di potenza, primo relato, potenza cuba (o cubo di potenza), secondo relato, potenza di potenza di potenza, cubo di cubo, potenza del primo relato, terzo relato, cubo di potenza di potenza [Bombelli 1572 p. 204].

rese l'espressione molto più leggibile e manipolabile algebricamente, soprattutto in caso di radici annidate (nel testo a stampa rimasero solo i tratti verticali, rappresentati da simboli a squadra, piuttosto simili alle attuali parentesi quadrate). Ancora più interessante la notazione di Bombelli per indicare l'indice di una radice oppure l'incognita e le sue potenze: nel primo caso egli scriveva l'indice sopra la R, nel secondo scriveva l'esponente dentro una piccola semicirconferenza posta sopra il coefficiente. Per esempio i termini $3x^2$ o $4x^3$, che gli abachisti e lo stesso Cardano scrivevano come "3 ce." (censi) e "4 cu." (cubi), venivano rappresentati da Bombelli come 3 sormontato da 2 (in una semicirconferenza) e da 4 sormontato da 3, in una semicirconferenza (nel testo a stampa la semicirconferenza diventò un archetto che però non era più posto sopra il coefficiente, ma al suo fianco, allineato alla riga di scrittura) [Wagner 2010a p.492].

I manoscritti ritrovati non permisero solo di conoscere una redazione del Libro III anteriore a quella edita e queste innovative notazioni, ma anche, come abbiamo detto, due ulteriori libri, il IV e il V, che costituivano una bozza della seconda parte de *L'Algebra* promessa da Bombelli nella parte finale dell'edizione a stampa [Bombelli 1572, pp.648-9]. Questi libri, rimasti inediti fino all'edizione del 1929 curata da Bortolotti [Bortolotti 1929], sono dedicati a quella che l'autore definisce *algebra linearia* [Bortolotti Forti 1966, p.488], ovvero all'uso dell'algebra nella risoluzione dei problemi geometrici [Wagner 2010a].

Il Libro IV si presenta in uno stato di redazione molto avanzato e comprende la descrizione di un certo numero di costruzioni geometriche – ad esempio la perpendicolare o la parallela a una retta data, oppure la divisione di un segmento in 2 o 3 parti uguali – mutuate dagli *Elementi* di Euclide. Nella parte successiva si presenta un'interpretazione geometrica delle operazioni aritmetiche elementari (addizione, sottrazione, moltiplicazione, divisione, estrazione di radice quadrata e cubica) in cui viene introdotto l'uso del segmento unitario. Infine nell'ultima parte vengono presentate dimostrazioni geometriche dei procedimenti algebrici per la risoluzione di equazioni dal primo al quarto, e discussi problemi riconducibili a equazioni quadratiche. Il Libro V, poco più che abbozzato, è dedicato alla costruzione di poligoni regolari inscritti in un cerchio, alla divisione di figure piane secondo rapporti fissati e alla costruzione dei cinque poliedri regolari e di tre poliedri semiregolari. Con l'*algebra linearia* Bombelli voleva illustrare la "tanta convenientia" – intesa nel senso di comunanza – tra algebra e geometria, poiché da un lato la seconda costituiva il fondamento teorico della prima e forniva i mezzi per rappresentare le soluzioni delle equazioni algebriche fin da al-Khwārizmī, dall'altro le manipolazioni e le formule algebriche si potevano opportunamente interpretare come istruzioni per realizzare costruzioni geometriche [Bombelli 1572, p.648]. Gli sviluppi del dialogo sistematico tra le "due scientie" auspicato da Bombelli erano destinati a ridisegnare il ruolo della geometria in ambito algebrico e a porre le basi della matematica moderna, ma nell'opera dell'ingegnere bolognese questa corrispondenza doveva ancora essere ricostruita caso per caso, mancando una teoria – come sarà ad esempio la teoria delle proporzioni per François Viète – che consentisse di formulare regole valide almeno per gruppi di esempi accomunati da affinità strutturali. Nonostante questo, lo spirito del quale René Descartes informò la sua *Géométrie* (1637), espressione di una matura sintesi tra algebra e geometria, fu più vicino a quello di Bombelli – del quale non conosceva l'ancora inedita *algebra linearia* – che a quello di Viéte, forse matematicamente più rigoroso, ma di sicuro meno efficace [Giusti 1992].

È probabile che il fatto di essere stata scritta in volgare abbia limitato la circolazione de *L'Algebra* fuori dalla penisola. Certamente la conobbe e l'apprezzò Simon Stevin, che rese omaggio al matematico bolognese nella sua *Arithmétique* (1575), come pure Claude-Gaspard Bachet de Méziriac, editore dell'*editio princeps* del testo greco dell'*Aritmetica* di Diofanto (1621). Tra gli estimatori più influenti si deve annoverare Gottfried Wilhelm Leibniz che studiò *L'Algebra* («Algebram perelegantem Italico sermone») e ne discusse nel 1675 con Christian Huygens in uno scambio epistolare [Huygens 1897] in occasione della composizione di uno scritto sul problema del caso irriducibile (*De resolutionibus aequationum cubicarum triradicalium, de radicibus realibus quae interventu imaginarium expri-*

muntur deque sexta quadam operatione arithmetica) nel quale affermò che tra i matematici che contribuirono a porlo e poi risolverlo, accanto a Tartaglia, Cardano e Ferrari, spiccava la figura Rafael Bombelli "egregium certe artis analyticae magistrum".

La stagione più feconda dell'algebra rinascimentale italiana, che si era aperta con il bolognese Scipione del Ferro e aveva toccato uno dei momenti più intensi grazie al concittadino Ludovico Ferrari - assieme a Girolamo Cardano e Niccolò Tartaglia - era infine destinata a chiudersi proprio con un altro bolognese, Rafael Bombelli. I brillanti risultati che questi protagonisti avevano conseguito avevano sfruttato fino in fondo le potenzialità dell'algebra retorica e si erano spinti ai suoi limiti. Questi tuttavia stavano per essere superati da una rivoluzione capace di cambiare il volto della matematica, che avrebbe anche spostato il baricentro delle ricerche nel campo dell'algebra dall'Italia alla Francia di François Viète e René Descartes: l'invenzione del calcolo letterale.

BIBLIOGRAFIA

[Agostini 1937] A. AGOSTINI, *I problemi geometrici elementari e i problemi classici*, in L. BERZOLARI, G.VIVANTI e D. GIGLI (a cura di), *Enciclopedia delle Matematiche Elementari*, Milano, Hoepli, vol. II parte I, pp.483-540.

[Belloni Speciale 1996] G. BELLONI SPECIALE, *Ferrari, Ludovico*, Dizionario Biografico degli Italiani, 46, *ad vocem*.

[Bombelli 1572] *L'algebra. Opera di Rafael Bombelli da Bologna divisa in tre libri,* Bologna, G. Rossi (seconda edizione 1579)

[Bortolotti 1926] E. BORTOLOTTI, *I contributi del Tartaglia, del Cardano, del Ferrari e della scuola matematica bolognese alla teoria algebrica delle equazioni cubiche*, estratto da *Studi e memorie per la storia dell'università di Bologna* vol. IX, pp.55-108 (ristampato in *Studi e ricerche sulla storia della matematica in Italia nei secoli XVI e XVII*, Bologna, Zanichelli 1928)

[Bortolotti 1929] E. BORTOLOTTI, L'algebra opera di Rafael Bombelli da Bologna: libri IV e V comprendenti la parte geometrica inedita tratta dal manoscritto B.1569 della Biblioteca dell'Archiginnasio di Bologna, Bologna, Zanichelli.

[Bortolotti 1947] E. BORTOLOTTI, *La storia della matematica nella Università di Bologna*, Bologna, Zanichelli.

[Bortolotti Forti 1966] E. BORTOLOTTI, U. FORTI (a cura di), *Rafael Bombelli da Bologna. L'algebra. Prima edizione integrale*, Milano.

[Canacci 1983] R. CANACCI, *Ragionamenti d'algebra. I problemi,* a cura e con introduzione di A. Procissi, Siena, Quaderni del centro studi della matematica medievale, 7.

[Cardano 1545] *Artis magnae sive de regulis algebraicis liber unus*, Norimbergae, Johannes Petreius (seconda edizione 1570).

[Cardano 1570] *De regula aliza libellus*, Basileae, ex Officina Henricpetrina.

[Cardano 1663] *Ars magna arithmeticae*, in *Hieronymi Cardani Mediolanensis Opera Omnia*, Lugduni, Sumptibus Ioannis Antonii Huguetan & Marci Antonii Ravaud, IV, pp.303-376.

[Cardano 1663a] *Vita Ludovici Ferrarii bononiensis a Cardano descripta*, in *Hieronymi Cardani Mediolanensis Opera Omnia*, Lugduni, Sumptibus Ioannis Antonii Huguetan & Marci Antonii Ravaud, IX, pp.568-568.

[Cardano 1663b] *Claudii Ptolomaei Pelusiensis libri quatuor. De astrorum iudiciis cum expositione Hieronymi Cardani*, in *Hieronymi Cardani Mediolanensis Opera Omnia*, Lugduni, Sumptibus Ioannis Antonii Huguetan & Marci Antonii Ravaud, V, pp.93-368.

[Cardano 1663c] *Liber de exemplis centum geniturarum*, in *Hieronymi Cardani Mediolanensis Opera Omnia*, Lugduni, Sumptibus Ioannis Antonii Huguetan & Marci Antonii Ravaud, V, pp.458-552.

[Cardano 1982] G. CARDANO, *Della mia vita*, a cura di A. Ingegno, Milano, Serra & Riva.

[Cardano 1993] G. CARDANO, *Sogni*, a cura di A. Grieco e M. Mancia, Venezia, Marsilio.

[Cardano 2004] *Girolamo Cardano De libris propriis. The editions of 1544, 1550, 1557, 1562 with supplementary material*, edited by Ian Maclean, Milano, FrancoAngeli.

[Cartelli 1974] *Cartelli di sfida matematica.* Riproduzione in facsmile delle edizioni originali 1547-1548 edita con parti introduttorie da A. Masotti, Brescia, Commentari dell'Ateneo di Brescia.

[Confalonieri 2015] S. CONFALONIERI, *The Unattainable Attempt to Avoid the Casus Irreducibilis for Cubic Equations. Girolamo Cardano's* De Regula Aliza, Springer Spektrum.

[Confalonieri 2015a] S. CONFALONIERI, *The Casus Irreducibilis in Cardano's* Ars Magna *and* De Regula Aliza, Archive for History of Exact Sciences, 69, pp.257–289.

[Cossali 1996] P. COSSALI, *La storia del caso irriducibile*. Trascrizione, introduzione e note a cura di R.Gatto, Venezia, Istituto Veneto di Scienze, Lettere e Arti.

[Dallari 1888] U. DALLARI, *I Rotuli dei lettori legisti e artisti dello Studio Bolognese dal 1384 al 1789*, Bologna, Regia Tipografia dei F.lli Merlani, 2 voll.

[Fiocca 1988] A. FIOCCA, *Alcune opere inedite di Ludovico Ferrari*, Bollettino di Storia delle Scienze Matematiche, 2, pp.239-305.

[Fiocca Leone 2017] A. FIOCCA, E. LEONE (a cura di), *L'inedito terzo libro de* L'Algebra *di Rafael Bombelli*, Pisa, Edizioni della Normale.

[Gatto 1994] R. GATTO, *Il caso irriducibile delle equazioni di terzo grado da Cardano a Galois*, Atti e memorie dell'Accademia di Scienze Lettere e Arti di Modena, s. VII, vol. X , Modena, Mucchi, pp.117-191.

[Gavagna 1999] V. GAVAGNA, Alcune osservazioni sulla Practica Arithmetice *di Cardano e la tradizione abachistica quattrocentesca*, in M.L.BALDI, G.CANZIANI (a cura di) *Girolamo*

Cardano. Le opere, le fonti, la vita, Milano, FrancoAngeli, pp.273-312.

[Gavagna 2012] V. Gavagna, *L'*Ars magna arithmeticae *nel corpus matematico di Cardano*, in S. Rommevaux, M. Spiesser e M. Massa Estève (a cura di), *Pluralité de l'algèbre à la Renaissance*, Paris, Champion, pp.237-268.

[Gavagna 2013] V. Gavagna, *Rafael Bombelli*, in A. Clericuzio, S.Ricci (a cura di), Enciclopedia italiana di scienze, lettere ed arti. Il contributo italiano alla storia del pensiero. Scienze, ottava appendice, Roma, Istituto della Enciclopedia Italiana, pp.232-235.

[Gavagna 2014] V. Gavagna, *Radices sophisticae, racines imaginaires: the Origin of Complex Numbers in the Late Renaissance*, in A. Angelini, R. Lupacchini (a cura di), *The Art of Science. From Perspective Drawing to Quantum Randomness*, Springer, pp.161-187.

[Giusti 1991] E. Giusti, *L'algebra nel* Trattato d'abaco *di Piero della Francesca: osservazioni e congetture*, Bollettino di Storia delle Scienze Matematiche, 2, pp.55-83.

[Giusti 1992] E. Giusti, *Algebra and geometry in Bombelli and Viète*, Bollettino di Storia delle Scienze Matematiche, 2, pp.303-328.

[Giusti 1999] E. Giusti, *Ipotesi sulla natura degli oggetti matematici*, Torino, Bollati Boringhieri.

[Giusti 2020] *Leonardi Bigolli Pisani* vulgo *Fibonacci Liber Abbaci*, edidit Enrico Giusti adiuvante Paolo d'Alessandro, Firenze, Olschki.

[Huygens 1897] C. Huygens, *Oeuvres complètes*, *Tome VII. Correspondance 1670-1675*, pp.500-505.

[Jayawardene 1963] S.A. Jayawardene, *Unpublished documents relating to Rafael Bombelli in the Archives of Bologna*, Isis, vol. 54 n.3, pp.391-395.

[Jayawardene 1965] S.A. Jayawardene, *Rafael Bombelli, engineer-architect: some unpublished documents of the Apostolic Camera*, Isis, vol. 56 n.3, pp.298-306.

[Jayawardene 1973] S.A. Jayawardene, *The influence of practical arithmetics on the* Algebra *of Rafael Bombelli*, Isis, vol. 64 n.4, pp.510-523.

[Loria 1950] G. Loria, *Storia delle matematiche: dall'alba della civiltà al secolo XIX*, Milano, Hoepli.

[Masotti 1974] A. Masotti, *I cartelli di Ferrari e Tartaglia*, in [Cartelli 1974] pp.V-CXCIII.

[Mazzinghi 1967] M° Antonio de Mazzinghi, *Trattato di fioretti nella trascelta a cura di M° Benedetto*, a cura di G. Arrighi, Pisa, Domus Galilaeana.

[Pacioli 1494] L. Pacioli, *Summa de arithmetica, geometria proportioni et proportionalita*, Venetiis, Paganinus de Paganini.

[Piero 1970] Piero della Francesca, *Trattato d'abaco. Dal codice Ashburnhamiano 280 (359*-291*) della Biblioteca Mediceo Laurenziana di Firenze*, a cura di G. Arrighi, Pisa, Domus Galilaeana.

[Tamborini 2003] M. Tamborini, *Per una storia dell'*Opus Arithmeticae Perfectum, in M.L. Baldi, G. Canziani (a cura di) *Cardano e la tradizione dei saperi*, Milano FrancoAngeli, pp.157-189

[Tartaglia 1546] N. Tartaglia, *Quesiti et inventioni diverse di Niccolo Tartaglia*, Stampata in Venetia per Venturino Ruffinelli.

[Tartaglia 1551] N. Tartaglia , Ragionamenti di Nicolo Tartaglia sopra la sua travagliata inventione, Stampata in Venetia per Nicolo Bascarini.

[Tartaglia 1556-1560] N. Tartaglia, *General Trattato di numeri et misure di Nicolo Tartaglia*, in Vinegia per Curtio Troiano dei Navò.

[Tanner 1980] R.C.H. Tanner, *The Alien Realm of the Minus: Deviatory Mathematics in Cardano's Writings*, Annals of Science, 37, pp.159-178.

[Wagner 2010] R. Wagner, *The geometry of the unknown: Bombelli's* Algebra linearia, in A.Heeffer e M.van Dyck (a cura di), *Philosophical aspects of symbolic reasoning in early modern science and mathematics*, London, College Publications.

[Wagner 2010a] R. Wagner, *The natures of numbers in and around Bombelli's* L'Algebra, Archive for History of Exact Sciences, 64, pp.485-523.

Veronica Gavagna

Veronica Gavagna è professoressa associata di Matematiche Complementari presso il Dipartimento di Matematica e Informatica dell'Università di Firenze. I suoi interessi di ricerca riguardano la storia della matematica nei secoli XV e XVI con particolare riguardo alla tradizione euclidea e alla transizione dall'algebra retorica a quella simbolica. È membro del Consiglio Direttivo della Società di Storia delle Matematiche (SISM).