Matematica, Cultura e Società

Rivista dell'Unione Matematica Italiana

Ciro Ciliberto

Uno sguardo alla geometria proiettivo-differenziale

Matematica, Cultura e Società. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **7** (2022), n.2, p. 97–119.

Unione Matematica Italiana

¡http://www.bdim.eu/item?id=RUMI_2022_1_7_2_97_0¿

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI
http://www.bdim.eu/

Matematica, Cultura e Società. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2022.

Matematica, Cultura e Società – Rivista dell'Unione Matematica Italiana
Serie I, Vol. 7, N. 2, agosto 2022, 97-119

Uno sguardo alla geometria proiettivo-differenziale

CIRO CILIBERTO
Università di Roma "Tor Vergata"
E-mail: cilibert@mat.uniroma2.it

Sommario: *La geometria proiettivo-differenziale è una disciplina che si situa in un territorio di confine tra la geometria algebrica e gli sviluppi analitici propri della geometria differenziale. Essa ha come oggetto lo studio di proprietà analitico-differenziali di sottovarietà di uno spazio proiettivo reale o complesso, invarianti per l'azione del gruppo delle proiettività. Obiettivo di questo articolo è di ripercorrere, a grandi linee e senza entrare in troppi dettagli tecnici, lo sviluppo storico della geometria proiettivo-differenziale, con una particolare attenzione agli importanti contributi italiani a questa disciplina concentrati nella prima metà del XX secolo.*

Abstract: *Projective differential geometry lies at the boundary between algebraic geometry and differential geometry. It studies analytic-differential properties of subvarieties of a real or complex projective space, invariant by the action of the projective group. The aim of this paper is to follow, with a wide perspective and without entering in too many technical details, the historical developments of projective differential geometry, with a special focus on the important Italian contributions that are mainly concentrated in the first half of the XX century.*

Introduzione

La *geometria proiettivo-differenziale* è una disciplina che si situa in un territorio di confine tra la geometria algebrica e gli sviluppi analitici propri della geometria differenziale classica. Essa ha come oggetto lo studio di proprietà analitico-differenziali di sottovarietà di uno *spazio proiettivo* reale o complesso $\mathbb{P}^n$ di dimensione n, che siano invarianti per l'azione del *gruppo delle proiettività*. Concetti tipici della geometria proiettivo-differenziale sono: spazi tangenti ed osculatori ad una varietà, spazi secanti ad una varietà, inviluppi, ecc.

Discipline strettamente correlate alla geometria proiettivo-differenziale, ma da essa diverse, sono:

- la *geometria differenziale affine*, che si occupa dello studio di proprietà differenziali di sottovarietà di uno *spazio affine* reale o complesso $\mathbb{A}^n$ di dimensione n, che siano invarianti per l'azione del *gruppo delle affinità*. Concetti tipici della geometria differenziale affine sono: spazi tangenti asintotici ad una varietà, quadriche osculatrici, ecc.
- la *geometria differenziale metrica*, che si occupa dello studio di proprietà differenziali di sottovarietà di uno *spazio euclideo* reale $\mathbb{E}^n$ di dimensione n, che siano invarianti per l'azione del *gruppo dei movimenti euclidei*. Concetti tipici della geometria differenziale metrica sono: vettori normali ad una varietà, distanze tra punti su una varietà, curvatura, linee geodetiche, misura di angoli, aree, volumi, ecc.

Di queste tre discipline, la geometria differenziale metrica è quella di più antica tradizione, essendo nata con i primi sviluppi dell'Analisi Matematica. La geometria differenziale affine sembra risalire a L. Euler (1707-1783) col suo trattato [27]. La geometria proiettivo-differenziale è quella che ha ricevuto sviluppi un po' più recenti, a partire dal secolo XIX, anche grazie alle sue interazioni con la geometria algebrica, cui è intimamente legata. L'importanza della geometria proiettivo-differenziale deri-

Accettato: il 2 settembre 2022.

va, tra l'altro, dall'idea, che risale a F. Klein (1849-1925), che tutte le geometrie si possano in qualche modo considerare come *sotto-geometrie* della geometria proiettiva.

Per inquadrare l'attività in geometria proiettivo-differenziale giova qui riportare due citazioni. La prima di un illustre esponente di questa disciplina, S.S. Chern (1911-2004), mette in evidenza gli obiettivi e le difficoltà di questo settore della matematica (cfr. Prefazione di [21]):

> Its main problem is to find a complete system of local invariants of a submanifold under the projective group and interpret them geometrically through osculation by simpler geometrical figures. The main difficulty lies in that the projective group is relatively large and invariants can only be reached through high order of osculation.
> Moreover the group of isotropy is non-compact, a fact which excludes many beautiful geometrical properties.

La seconda, tratta dalla Prefazione del trattato [47] di E. P. Lane (1886-1969), un personaggio su cui torneremo in seguito, mette in evidenza in poche parole lo sviluppo storico della geometria proiettivo-differenziale:

> There was first of all a period of discovery of isolated theorems which were of a projective differential nature but which were not recognized at the time as having this character, because there was then no organized science of projective differential geometry.
> Later came the initiation of projective differential investigations, and still later the organization of comprehensive theories and the perfection of systematic methods of study.

Obiettivo di questo articolo è di ripercorrere, a grandi linee e senza entrare in troppi dettagli tecnici, lo sviluppo storico della geometria proiettivo-differenziale, con una particolare attenzione agli importanti contributi italiani a questa disciplina. Parlare di *scuole nazionali*, o, peggio, di *scuole locali* di una data disciplina può sempre essere discutibile da un punto di vista storico. Tuttavia penso si possa parlare di una notevole *scuola italiana* di geometria proiettivo-differenziale, come un insieme di studiosi che si sono occupati di problemi analoghi, con analogo linguaggio e comuni obiettivi, facendo riferimento a comuni punti di partenza, come, ad esempio, l'eredità scientifica di alcuni maestri indiscussi. Inoltre gli sviluppi di questa scuola si intrecciano con quelli della importante scuola di geometria algebrica italiana.

Un'avvertenza: nel corso di questo articolo ho pensato di dare spesso, mediante molte citazioni, voce ai protagonisti della nostra storia. Mi è sembrato questo un modo utile per illustrare in maniera immediata idee e concetti che forse avrei saputo spiegare in modo meno efficace di quanto abbia fatto chi ha contribuito in prima persona agli sviluppi della geometria proiettivo-differenziale.

1. – Dai primordi al XIX secolo

1.1 – *La retta tangente ad una curva*

Probabilmente il più semplice ed antico esempio di un concetto la cui definizione ha una natura proiettivo-differenziale è quello di *retta tangente ad una curva in un suo punto*. Si tratta di un concetto già presente presso gli antichi Greci, i quali, forse facendo riferimento al caso della circonferenza, sembra pensassero alla retta tangente ad una curva semplicemente come la retta che interseca la curva in un solo punto, almeno intorno al punto di contatto con la curva. Il concetto moderno di tangente come *limite di rette secanti* probabilmente risale a P. de Fermat (1601-1665) e a R. Descartes (1596-1650).

Uno dei primi teoremi di geometria proiettivo-differenziale è quello che afferma che: *una curva $y = y(x)$ del piano con coordinate cartesiane (x, y) è una retta se e solo se*

$$y'' \equiv 0,$$

il che equivale a dire che ogni punto della curva è un *flesso*. Questo risultato risale ai primissimi sviluppi del calcolo differenziale con I. Newton (1643-1727) e G. W. Leibnitz (1646-1716).

1.2 – *Le superficie sviluppabili*

La teoria delle *superficie sviluppabili* è probabilmente quella che si impone come uno dei primi sviluppi organici in geometria proiettivo-differenziale. Una superficie sviluppabile è definita dalla proprietà che ogni suo piano tangente è tangente alla superficie lungo una curva, che necessariamente risulta una retta. Le superficie sviluppabili sono di due tipi: i *coni* (e i *cilindri*, che dal punto di vista proiettivo sono coni con vertice in un punto all'infinito) e le *tangenti sviluppabili a una curva*, ossia le superficie luogo delle rette tangenti ad una curva che non sia piana.

Afferma F. Cajori (1859-1930) nel suo trattato [10]:

> The first critical studies of developable surfaces were made by Leonhard Euler and Gaspard Monge.
> The two investigators approached the subject about the same time, but Euler's paper received earlier publication, in 1772 ([1]). It is noteworthy that at this time Euler was blind.
>
> [...]
>
> About the same time, and independently of Euler, the subject of developable surfaces was investigated by Gaspard Monge, the creator of descriptive geometry. His earliest publication on such surfaces appeared at Paris in 1785 ([2]); he discussed them repeatedly in later writings. Monge's treatment is less analytical than that of Euler and more nearly the result of direct contemplation of space relations.

Eulero è probabilmente il primo ad aver considerato le superficie sviluppabili come luogo di una famiglia ad un parametro di *rette generatrici*, con una famiglia ad un parametro di piani tangenti, uno lungo ciascuna retta generatrice.

G. Monge (1746-1818) è stato invece il primo a considerare le superficie sviluppabili come gli *inviluppi* di una famiglia ad un parametro di piani.

1.3 – *Gaspard Monge*

Monge, che dopo i primordi di G. Desargues (1591-1661) e B. Pascal (1623-1662), è da considerarsi uno dei fondatori della geometria proiettiva, ha dato altri importanti contributi alla geometria proiettivo-differenziale, al punto che, con buona ragione, possiamo considerarlo come uno degli iniziatori di questa disciplina. Per esempio Monge si è occupato dello studio delle *congruenze generali di rette* dello spazio tridimensionale, cioè delle famiglie a due parametri di rette dello spazio, un argomento importante da molti punti di vista, quali disegno, ottica, statica, ecc., iniziando così lo studio della cosiddetta *geometria della retta* su cui tornerò tra breve.

Inoltre, nel suo trattato [58], Monge ha studiato le *linee di curvatura* di una superficie, che non hanno un significato proiettivo-differenziale bensì metrico, ma che sono strettamente legate ad alcuni aspetti della teoria proiettiva delle superficie.

Uno dei più importanti contributi di Monge alla geometria proiettivo-differenziale, è stata la scoperta della *equazione differenziale delle coniche* in [59]. Egli dimostra che: *una curva piana di equazione $y = y(x)$ è una conica se e solo se la funzione $y(x)$ verifica la seguente equazione differenziale ordinaria del quinto ordine*

$$9(y'')^2 y^v - 45 y'' y''' y^{iv} + 40(y''')^3 = 0.$$

Questa equazione traduce la proprietà geometrica che la curva ha molteplicità di intersezione sei, invece di cinque, con la sua *conica iperosculante* nel suo punto generale. Si tratta di una notevole estensione della equazione differenziale $y''(x) = 0$ delle rette, e, come vedremo, giocherà un ruolo importante in ulteriori sviluppi.

A proposito della equazione differenziale delle coniche, mi piace citare un curioso episodio, che mostra, tra l'altro, come la fortuna di un risultato matematico pur importante sia spesso contrastata e vittima di giudizi soggettivi e di mode e come l'attribuzione di risultati sia talvolta molto arbitraria. Nell'articolo [76] (prolusione come "Savillian Professor of Geometry" presso l'Università di Oxford), il grande geometra inglese J. J. Sylvester (1814-1897) scrive:

> At pp. 19 and 20 of Boole's ([3]) *Differential Equations* ([4]) (edition of 1859) the author cites this form as the left-hand side of an equation which he calls the "Differential Equation of lines of the second order", and attributes it to Monge, adding the words, "But here our powers of geometrical inter-

([1]) Cfr. [28].

([2]) In realtà vi sono lavori di Monge sull'argomento precedenti al 1785, come [55, 59]. Cajori qui si riferisce a [57].

([3]) G. Boole (1815-1864).

([4]) See [6].

pretation fail, and results such as this can scarcely be otherwise useful as a registry of integrable forms". In this vaticination, which was quite uncalled for, the eminent author, now unfortunately deceased, proved himself a false prophet, for the form referred to is among the first that attracts notice in crossing the threshold of the subject of Reciprocants, and is but one of a crowd of similar and much more complicated expressions, no less that it susceptible of geometrical interpretation and of taking their place on the register of integrable forms.
Not knowing where to look in Monge for the implied reference, I wrote to an eminent geometer in Paris to give me the desired information; he replied that the thing could not be in Monge, for that M. Halphen ([5]), who had written more than one memoir on the subject of the differential equations of a conic, had made nowhere any allusion to Monge in connection with the subject. Hereupon, as I felt sure that a reference contained in repeated editions of a book in such general use and Boole's *Differential Equations* was not likely to be erroneous, I addressed myself to M. Halphen himself, and received from him a reply, from which I will read an extract:-
"En premier lieu, c'est une chose nouvelle por moi que l'èquation différentielle des coniques se trouve dans Boole, dont je ne connais pas l'ouvrage. Je vais, bien entendu, le consulter avec curiosité. Ce fait ha échappé à tout le mond ici, et l'on a cru gènèralement que j'avais le premier donné cette équation. *Nil sub sole novi!* Il m'est naturellement impossible de vous dire où la meme équations est enfouie parmi les ouvres de Monge. Pour moi, c'est dan *Le Journal de math.* (1876), p. 375 ([6]), que j'ai eu, je crois, la première occasion de développer cette équation sous la forme meme que vous citez: et c'est quand je l'ai employée, l'anne suivante, pour le problème *Sur la lois de Kepler* ([7]) *(Comptes rendus, 1876, t. LXXXIV, p. 939)* que M. Bertand ([8]) l'a remarquée comme neuve. Ce qui vous intéresse plus, c'est de connaitre la forme simplifiée sous laquelle j'ai donné plus tard cette équation dans le *Bulletin* de la Société Mathématique. C'est sous cette dernière form que M. Jordan ([9]) la donne dans son course de l'école Polytecnique (t. I, p. 53)."

Alla fine tuttavia Sylvester trovò la giusta citazione, come afferma egli stesso nel suo articolo [77], aggiungendo che la determinazione della *equazione differenziale delle cubiche* era stata trovata da S. Roberts (1827-1913) in [64]. Per una trattazione recente di queste questioni, cfr. [50].

Monge è infine famoso per essere stato un grande maestro di nuove generazioni di giovani, e alcuni dei suoi allievi divennero infatti degli eminenti geometri. Tra di loro ricordo: C. Brianchon (1783-1864), M. Chasles (1793-1880), P. C. F. Dupin (1784-1873), G. Giorgini (1795-1874), E. L. Malus (1775-1812), J. V. Poncelet (1788-1867), etc.

Ulteriori notizie su G. Monge si possono trovare in [78].

1.4 – *Geometria della retta*

Come ho già detto, la geometria della retta è stata inaugurata da Monge. Questo argomento ha le sue radici nell'ottica e nella statica, e si è poi sviluppato enormemente dando origine alla geometria delle *varietà Grassmanniane* in geometria algebrica, e allo studio delle cosiddette *congruenze W* in geometria proiettivo-differenziale.

Monge è stato il primo a dimostrare che una congruenza di rette ha due *fuochi* sulla retta generale della congruenza e che questo fatto può essere applicato alla classificazione di tali congruenze. Può essere utile dare qualche dettaglio su queste idee. Come già detto, una congruenza di rette è una famiglia a due parametri di rette dello spazio. Introdotte delle coordinate omogenee $[x_0, x_1, x_2, x_3]$ nello spazio proiettivo complesso $\mathbb{P}^3$, una congruenza di rette è definita da un sistema di equazioni del tipo

$$\begin{cases} a_0x_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0 \\ b_0x_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 = 0 \end{cases} \tag{1}$$

dove a_i, b_i sono funzioni di due parametri (u, v). Il sistema (1) rappresenta, al variare di (u, v), le rette $r := r(u, v)$ della congruenza.

Dato un operatore differenziale

$$\lambda \frac{\partial}{\partial u} + \mu \frac{\partial}{\partial v} \tag{2}$$

([5]) G. H. Halphen (1844-1889).}
([6]) See [39]
([7]) J. Kepler (1571-1630).
([8]) J. Bertrand (1822-1900).
([9]) C. Jordan (1838-1922).

con $(\lambda, \mu) \neq (0,0)$, applichiamolo al sistema (1), ottenendo

$$\text{(3)} \qquad \begin{cases} \left(\lambda \dfrac{\partial a_0}{\partial u} + \mu \dfrac{\partial a_0}{\partial v}\right) x_0 + \cdots + \left(\lambda \dfrac{\partial a_3}{\partial u} + \mu \dfrac{\partial a_3}{\partial v}\right) x_3 = 0 \\ \left(\lambda \dfrac{\partial b_0}{\partial u} + \mu \dfrac{\partial b_0}{\partial v}\right) x_0 + \cdots + \left(\lambda \dfrac{\partial b_3}{\partial u} + \mu \dfrac{\partial b_3}{\partial v}\right) x_3 = 0 \end{cases}$$

Questo sistema rappresenta, in generale, una retta $r_{\lambda,\mu}$, che si dice *infinitamente vicina* nella congruenza, alla retta r rappresentata dal sistema (1), secondo la direzione data dall'operatore (2). Sorge il problema di vedere quando tale retta $r_{\lambda,\mu}$ è incidente alla retta r. Per questo occorre vedere quando il sistema formato dalle quattro equazioni (1) e (3) ammette una soluzione non banale. Questo accade se e solo se il determinante di tale sistema è nullo, ossia se e solo se

$$\text{(4)} \qquad \det \begin{pmatrix} a_0 & \dots & a_3 \\ b_0 & \dots & b_3 \\ \left(\lambda \dfrac{\partial a_0}{\partial u} + \mu \dfrac{\partial a_0}{\partial v}\right) & \dots & \left(\lambda \dfrac{\partial a_3}{\partial u} + \mu \dfrac{\partial a_3}{\partial v}\right) \\ \left(\lambda \dfrac{\partial b_0}{\partial u} + \mu \dfrac{\partial a_b}{\partial v}\right) & \dots & \left(\lambda \dfrac{\partial b_3}{\partial u} + \mu \dfrac{\partial b_3}{\partial v}\right) \end{pmatrix} = 0.$$

Questa è un'equazione omogenea di secondo grado in (λ, μ) che ha dunque in generale due soluzioni distinte (o una con molteplicità due), il che determina sulla retta r due punti, intersezioni di r con le due rette infinitamente vicine corrispondenti ai valori (λ, μ) che verificano l'equazione (4). Tali punti sono detti *fuochi* della congruenza sulla retta r. Al variare della retta r tali fuochi variano descrivendo una varietà che può avere dimensione 2, 1 o 0. Nel primo caso, in generale, la congruenza sarà data dall'insieme delle rette bitangenti ad una superficie, luogo dei fuochi, nel secondo caso sarà data dall'insieme delle rette bisecanti una curva, luogo dei fuochi, nel terzo, la congruenza sarà data dall'insieme delle rette cha passano per uno stesso punto, fuoco con molteplictà due su ogni retta della congruenza. Può naturalmente anche darsi il caso di una congruenza luogo delle rette che intersecano in un punto una curva e sono tangenti ad una superficie, e questo è il caso in cui i due fuochi descrivano due varietà, una di dimensione 2 (la superficie) ed una di dimensione 1 (la curva).

Nel suo importante lavoro [60] sull'ottica Malus, uno degli allievi di Monge, ha introdotto il concetto di *complesso generale di rette*, cioè una famiglia tridimensionale di rette nello spazio proiettivo di dimensione 3. Questo concetto è poi stato attribuito a J. Plücker (1801-1868) che lo ha sviluppato nella sua fondamentale opera [62]. Giorgini, altro allievo di Monge, è stato il primo a considerare nel 1828 i *complessi lineari* di rette (cfr. [54]), che in termini moderni sono le sezioni iperpiane della varietà Grassmanniana delle rette di $\mathbb{P}^3$, che è ben noto essere una quadrica liscia di $\mathbb{P}^5$. Questi studi furono poi approfonditi nel 1837 da A. F. Möbius (1790-1868) nel suo trattato di statica [58], dove i complessi lineari sono chiamati *sistemi nulli*. Möbius dimostra che in un complesso lineare le rette del complesso che passano per un dato punto p dello spazio $\mathbb{P}^3$ formano un fascio in un piano passante per p. Quindi un sistema nullo può essere riguardato come una proiettività $\omega : \mathbb{P}^3 \longrightarrow \check{\mathbb{P}}^3$ di $\mathbb{P}^3$ nel suo *duale* $\check{\mathbb{P}}^3$, che ad ogni punto p di $\mathbb{P}^3$ associa un piano $\omega(p)$ passante per p, e che inoltre verifica una *legge di reciprocità* che afferma che dati due punti $p, q \in \mathbb{P}^3$ si ha che $q \in \omega(p)$ se e solo se $p \in \omega(q)$.

È H. Grassmann (1809-1877) che nel suo fondamentale lavoro [35] introduce le coordinate proiettive omogenee (oggi dette *coordinate grassmanniane o plückeriane*) di un sottospazio lineare in uno spazio proiettivo, definendo così implicitamente le *varietà*

Grassmanniane. Le coordinate grassmanniane delle rette nello spazio 3-dimensionale furono indipendentemente scoperte da A. Cayley (1821-1895) nel suo famoso articolo [18], nel quale egli introduce quella che oggi chiamiano *forma di Cayley*. Data una curva C nello spazio proiettivo tridimensionale, l'insieme delle rette che intersecano C formano una sottovarietà tridimensionale della Grassmanniana che si può individuare con un'unica equazione, detta appunto forma di Cayley, la quale serve per identificare la curva C. Questa idea è stata successivamente estesa al concetto di *varietà di Chow* ([10]), che si applica non solo alle curve di $\mathbb{P}^3$ ma a qualunque sottovarietà di $\mathbb{P}^n$, per n qualunque.

Relazioni dei complessi e delle congruenze di rette con equazioni differenziali risalgono già a Monge, e sono state oggetto di studio nel corso dei decenni. Ho già citato, ad esempio, lo studio delle congruenze W, che sono particolari congruenze di rette di $\mathbb{P}^3$, rappresentate come superficie sulla varietà Grassmanniana delle rette di $\mathbb{P}^3$, che è una quadrica liscia di $\mathbb{P}^5$, le cui coordinate, date parametricamente, verificano una equazione differenziale lineare alle derivate parziali del secondo ordine. Su questo tornerò più avanti (cfr. §2.1).

1.5 – *La teoria degli invarianti differenziali*

La teoria degli *invarianti differenziali* si ricollega alla teoria delle equazioni differenziali delle curve che abbiamo visto svilupparsi con molta lentezza, a partire dalla equazione differenziale della retta, per passare a quella di Monge delle coniche e poi a quella delle cubiche di Roberts.

Per dirla con H. Poincaré in [63]:

> On peut dire que la théorie des invariants différentiels est à la théorie de la courbure ce que la Géométrie projective est à la Géométrie élémentaire.

I protagonisti della teoria degli invarianti differenziali sono essenzialmente due, S. Lie (1842-1899) e G. H. Halphen ed il primo ad occuparsene è stato Lie, sebbene Halphen, che probabilmente non era a conoscenza dei lavori di Lie, peraltro poco sistematici, sia stato quello che ha sviluppato una teoria compiuta sull'argomento. Per questo penso sia meglio cominciare da Halphen.

Halphen entra sulla scena nel 1878 con la sua tesi dottorale [40] che ha per oggetto appunto gli invarianti differenziali. Di che si tratta? Consideriamo una funzione razionale

$$F(x, y, y_1, \ldots, y_n)$$

in cui y_n effettivamente appaia, e consideriamo l'equazione differenziale ordinaria

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0.$$

Operiamo ora un qualunque cambiamento di variabili (o, se si vuole, una proiettività)

$$x \to \frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_0x + b_0y + c_0}, \quad y \to \frac{a_2x + b_2y + c_2}{a_0x + b_0y + c_0}.$$

Se la suddetta equazione coincide, a meno di un fattore moltiplicativo g non nullo, con la sua trasformata mediante un qualunque cambiamento di variabili come sopra, allora $F(x, y, y_1, \ldots, y_n)$ si dice un *invariante differenziale proiettivo* di ordine n. Se il fattore moltiplicativo g è costante, allora $F(x, y, y_1, \ldots, y_n)$ si dice un *invariante assoluto*, altrimenti si dice *relativo*.

Per esempio l'equazione differenziale delle coniche dà luogo a un basilare invariante proiettivo differenziale di ordine 5.

Nel suo articolo [19], Cayley attribuisce l'iniziale idea degli invarianti differenziali, che lui chiama *reciprocanti*, a A. M. Ampère (1775-1836) nel suo lavoro [3], sebbene in una nota a piè di pagina avverta che già nella memoria [46] di J. L. Lagrange (1736-1813) appaia un invariante differenziale, detto poi *derivata di Riemann-Schwartz* ([11]).

I risultati principali di Halphen sono i seguenti:

- non vi sono invarianti differenziali assoluti e ve ne sono solo due relativi di ordine $n \leq 6$, e questi sono dati dalle equazioni differenziali delle coniche e delle cubiche;
- per ogni ordine $n \geq 7$ vi è un unico invariante differenziale assoluto; Halphen studia in parti-

([10]) W. L. Chow (1911-1995).

([11]) B. Riemann (1826-1866), K. H. A. Schwarz (1843-1921).

colare il caso $n = 7$ e prova che le curve soluzioni solo le *spirali logaritmiche* che tagliano i loro raggi secondo un angolo di $\frac{\pi}{6}$;
- ogni equazione differenziale invariante di ordine $n + 8$ (con $n \geq 0$) può essere ridotta alla integrazione di una equazione di ordine n e una di ordine 8; Halphen poi studia in particolare le equazioni di ordine 8 e 9;
- Halphen avvia lo studio degli invarianti differenziali per le curve nello spazio tridimensionale.

I primi tre risultati sono nella sua Tesi Dottorale [40] mentre l'ultimo si trova nel susseguente articolo [41]. Questo venne poi ulteriormente esteso alle curve di $\mathbb{P}^n$, con $n \geq 4$ da L. Berzolari (1863-1949) in [4].

Afferma Lane in [47]:

> Credit for consciously undertaking the first systematic projective differential investigation is due to Halphen (1844-89). Reference has already been made to his Paris thesis of 1878 on plane curves, and to the memoir of 1880 on curves in ordinary space.
> These publications contain very fundamental and far-reaching results; surprisingly little has been added to our knowledge of plane and space curves since the time of Halphen.

Questa citazione contiene due affermazioni importanti. La prima è che, secondo Lane, Halphen è stato il fondatore di uno studio sistematico degli invarianti differenziali. Opinione condivisa da molti autori anche in seguito. La seconda affermazione, vera ai tempi di Lane come ai nostri, è che ben poco si è aggiunto alla nostra conoscenza dell'argomento dal tempo di Halphen in poi. Incredibilmente infatti questo interessantissimo capitolo della matematica non è stato, sostanzialmente, più ripreso in modo sistematico, in tempi più recenti.

Tuttavia il primo dei giudizi di Lane viene contestato (ante litteram) da Lie, sia privatamente che pubblicamente. Infatti, leggiamo in una lettera di Lie a Klein del Giugno 1882:

> During my stay in Paris I will make it clear to Halphen that his theory of differential invariants embraces not just general linear groups but arbitrary transformation groups.
> The concept of differential invariant belongs to the two of us (Klein and myself).
> His propositions are in part obvious consequences of a rather important body of simple corollaries to propositions concerning infinitesimal transformations that I published long ago.

Questa lettera è tradotta e riportata da D. E. Rowe in [65], che aggiunge tuttavia:

> One should bear in mind when reading these letters that Lie was anything but an objective observer; he was, rather, a highly temperamental and one-sided advocate of his own particular ideas, and tended to evaluate other mathematicians according to the degree to which they happened to find his own work praiseworthy.

Leggiamo poi dal libro [52], commentato da R. Hermann (1931-2020), le seguenti parole di Lie:

> ... Halphen ... produced some beautiful, though at first glance special, works bearing the closest relation to my general investigations.
> He studied the differential invariants of the projective group of the plane (or on n-dimensional manifold) and at the same time considered the integration of ordinary differential equations which admit such a group.
> In this he called attention to the relations of his investigations to Klein's and to my old works on curves which admit infinitely many linear transformations. On the other hand he seems not to have known my other, more far-reaching works in this area.
> Of course, it would never occur to me to deny the great service of Halphen's distinguished investigations in this direction and of his more recent, deep works on linear differential equations. But one will allow me to assert that his older works mentioned here have their origin, to a not inconsiderable extent, in my general ideas, which, in my opinion, were first developed by me.

E Hermann commenta:

> Lie would no doubt have been very pleased to see Wilczynski's (12) beautiful book on projective differential geometry (which this subject eventually became), which gave full credit to his ideas as the conceptual foundation of the subject! This theory is one of the simplest and most interesting examples of Lie's differential invariant theory.

(12) E. J. Wilczynski (1876-1932).

Giova ancora citare, su questo argomento una dotta nota di G. Fano (1871-1952), tratta dalla sua bella opera [29]:

> La notion d'invariant différentiel entre déjà, d'une maniére plus o moins précise, dans le premiers travaux de S. Lie [Forhandling Videnskabs-Selskabet Christiania, 1872 (éd. 1873) ou bien 1871 (éd. 1872); Nachr. Gess. Gött., 1874, p. 529]. Le paramètre différentiel de Riemann-Schwarz (H. A. Schwarz, J. Reine Angew. math., t. 75, 1873, p. 292; Werke, t. 2, Berlin, 1890, p. 211) est un example isolé d'invariant différentiel du groupe projective. Ce sont le travaux de G. H. Halphen e de E. Laguerre (13), entre 1875 et 1879, qui ont donné à la théorie des invariants différentiels una grande impulsion. G. H. Halphen [C. R. Acad. Sci., t. 81, 1875, p. 1053; J. Math. pures et appl., (3), t. 2, 1876, p. 257, 371; Thèse sur les invariants différentiels, Paris, 1878; J. éc. polyt., (1), cah. 47, 1880, p. 1] étudia les invariants differentiels *projectifs* des courbes et des surfaces; E. Laguerre [C.R. Acad. Sci., t. 88, 1879, p. 116, 224; Oeuvres, t. I, Paris, 1898, p. 420, 424] étudia les invariants differentiels des équations différentielles linèaires et homogènes, c'est-à-dire les expressions invariantes vis-à-vis du groupe infini $x_1 = F(x), y_1 = y\Phi(x)$, où F et Φ sont des fonctions arbitraires; voir aussi: F. Brioschi (14), Bull. Soc. Math. Fr., t. 7, 1879, p. 105. Toutes ces recherches sont reliées entre elles par G. H. Halphen dans un Mémoire couronné de 1881 [Mém. présentés Acad. Sc. Paris, (2), t. 28, 1884, Mém. no. 1, p. 1; voir aussi: Acta math., t. 3, 1884, p. 325; Oeuvres complètes, t. III].

Rispetto alla trattazione di Halphen, che si limita al caso degli invarianti differenziali per il gruppo proiettivo, quella di Lie (cfr. [52]) è più generale, in quanto si applica agli invarianti differenziali rispetto all'azione di un qualunque gruppo di Lie, anche di dimensione infinita. Infatti Lie considera l'azione sulle espressioni differenziali dello spazio tangente nell'origine al gruppo di Lie, ossia dell'*algebra di Lie*, deducendone delle relazioni formali che semplificano molto la trattazione. Come Lie stesso afferma in [52, §3.1]:

> I soon realized that considering just the infinitesimal transformations led to as great a reduction in the order of the integration involved as I could obtain in any case, so that in my next work I restricted myself to the case where only the infinitesimal transformations are known.

Sebbene sia vero che, come dice Fano, i primi lavori di Lie sull'argomento risalgono agli anni 1871-1874, quindi sono antecedenti quelli di Halphen, e sebbene l'approccio di Lie sia più generale, è pur vero che ad Halphen si deve un primo lavoro sistematico in questo settore.

1.6 – *La trasformazione di contatto di Lie*

Un altro argomento in cui Lie ha dato dei contributi di grande valore alla geometria proiettivo-differenziale è la *trasformazione di contatto* (cfr. [53]).

Lo spazio proiettivo $\mathbb{P}^3$ (con coordinate omogenee $[y_1, \dots, y_4]$) può essere rappresentato birazionalmente sulla quadrica Q di $\mathbb{P}^4$ (con coordinate omogenee $[x_1, \dots, x_5]$) di equazione

$$F = x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 - x_1 x_5 = 0$$

mediante l'applicazione

$$\phi : [y_1, \dots, y_4] \mapsto [y_1^2 + y_2^2 + y_3^2, y_1 y_4, y_2 y_4, y_3 y_4, y_4^2].$$

Notiamo che, preso in $\mathbb{P}^4$ come iperpiano all'infinito l'iperpiano $x_5 = 0$, la quadrica Q è un paraboloide di rivoluzione attorno all'asse x_1.

Un punto $A = [a_1, \dots, a_5] \in \mathbb{P}^4$ corrisponde alla sfera di $\mathbb{P}^3$ ottenuta prendendo la controimmagine tramite ϕ della intersezione di Q con l'*iperpiano polare* rispetto a Q, di equazione

$$a_1 \frac{\partial F}{\partial x_1} + \cdots + a_5 \frac{\partial F}{\partial x_5} = 0,$$

del punto A.

Consideriamo ora la quadrica liscia Φ di $\mathbb{P}^5$ di equazione

$$x_6^2 - F(x_1, \dots, x_5) = 0.$$

Possiamo pensare ai punti di Φ come a *sfere orientate*. Ad esempio, dato $A' = [a_1, \dots, a_6] \in \Phi$, tale che $a_1, \dots, a_5$ siano numeri reali e $F(a_1, \dots, a_5) > 0$, ad A' possiamo far corrispondere la sfera corrispondente al punto $A = [a_1, \dots, a_5] \in \mathbb{P}^4$, con una delle due orientazioni a seconda che a_6 sia positivo o negativo.

(13) E. Laguerre (1834-1886).
(14) F. Brioschi (1824-1897).

D'altra parte, essendo Φ una quadrica liscia di $\mathbb{P}^5$, essa si può pensare come la varietà Grassmanniana delle rette di $\mathbb{P}^3$, ossia i punti di Φ corrispondono anche alle rette di $\mathbb{P}^3$. In tal modo si ha una corrispondenza biunivoca fra rette di $\mathbb{P}^3$ e sfere orientate in $\mathbb{P}^3$. Questa è la famosa trasformazione di contatto di Lie. Sfruttando tale corrispondenza si ha che ogni risultato di natura proiettiva sulle rette di $\mathbb{P}^3$ si trasforma in un risultato sulle sfere, e viceversa.

Per dirlo con le parole dello stesso Lie (cfr. [52, §2.1]):

> I discovered a remarkable contact transformation taking straight lines into spheres and with one stroke thereby transformed Plücker's line geometry into a new sphere geometry.
> Among other things this yielded the fact that the group of all projective transformations of space can be transformed to the group of all contact transformations taking spheres into spheres.

Quello a cui si riferisce Lie in questo brano è il famoso isomorfismo di algebre di Lie

$$\mathfrak{sl}(4,\mathbb{C}) \simeq \mathfrak{so}(6,\mathbb{C})$$

da lui stabilito, insieme al fatto che $\mathrm{SL}(4,\mathbb{C})$ è il rivestimento universale di $\mathrm{SO}(6,\mathbb{C})$. Questi fatti hanno notevoli conseguenze per la geometria differenziale delle superficie dello spazio 3-dimensionale. In particolare la trasformazione di contatto pone in evidenza una bellissima corrispondenza tra proprietà differenziali metriche e proprietà differenziali proiettive, creando così un ponte tra geometria proiettivo-differenziale e geometria differenziale metrica.

Ma la portata della trasformazione di contatto non si ferma qui. Lo stesso Lie, in una breve comunicazione alla Società Scientifica di Christiania (oggi Oslo) del 5 Luglio 1870, propone un programma di ricerca nel quale sono compresi dei risultati che egli annuncia come veri, ottenuti a partire dalla sua trasformazione di contatto. Egli annuncia che:

(1) nella sua trasformazione di contatto due rette si intersecano se e solo se le corrispondenti sfere sono tangenti;
(2) da ciò egli è in grado di dedurre la costruzione delle curve asintotiche di una superficie a partire dalle linee di curvatura di un'altra opportuna superficie e viceversa;
(3) in tal modo egli è in grado di trovare le linee asintotiche della famosa *superficie di Kummer* (15), superficie algebrica di grado 4 in $\mathbb{P}^3$ con il massimo numero 16 di punti singolari isolati, legata ai complessi quadratici di rette; tali linee asintotiche sono algebriche di grado 16;
(4) è in grado di calcolare per quadrature le asintotiche di una superficie rigata le cui rette appartengono ad un complesso lineare;
(5) è in grado di ottenere vari interessanti risultati sulle *superficie minimali*, cioè le superficie la cui *curvatura media* è identicamente nulla.

Di qui si vede la grande creatività di Lie e la sua capacità di collegare molti settori della matematica apparentemente distinti. A tale proposito F. Klein ricorda in [44, Vol. 1, p. 97]:

> ... one morning I got up early and wanted to go out right away when Lie, who still lay in bed, called me into his room. He explained to me that relationship he had found during the night between the asymptotic curves of one surface and the lines of curvature of another, but in such a way that I could not understand a word (it had to do with the line-to-sphere transformation, but instead of spheres he operated part-visually with straight-lined hyperboloids that passed through a fixed conic section).
> In any case, he assured me that this meant that the asymptotic curves of the Kummer surface must be algebraic curves of degree sixteen.
> That morning, while I was visiting the *Conservatoire des Arts el Metiers*, the thought came to me that these must be the same curves of degree sixteen that already appeared in my paper "Theorie der Linienkomplexe ersten und zweiten Grades" (16), and I quickly succeeded in showing this independently of Lie's geometric considerations.
> When I returned around four o'clock in the afternoon, Lie had gone out, so I left him a summary of my results in a letter.

La trasformazione di contatto di Lie diede un ulteriore impulso allo studio delle geometria della retta. G. Darboux (1842-1917), che pure è stato soprattutto interessato alla geometria differen-

(15) E. Kummer (1810-1893).
(16) See [45].

ziale metrica, ha dedicato vari capitoli della sua opera [24] ad argomenti di interesse proiettivo-differenziale, il che ha dato a questa disciplina un notevole slancio. Ad esempio è Darboux che introduce in ambito proiettivo-differenziale il metodo del *riferimento mobile*, ad imitazione del caso differenziale metrico delle curve studiato da J. F. Frenet (1816-1900) e J. A. Serret (1819-1885). Il metodo del riferimento mobile fu poi sviluppato da E. Cartan (1869-1951) di cui parleremo più avanti.

D. Rowe scrive in [66]:

> It appears likely that Lie's persistent study of the line-to-sphere transformation was at least partly inspired by the work of the French school of "anallagmatician", whose main proponents were Laguerre, Moutard (17), and Darboux.
> These geometers had developed a new type of sphere geometry [...] It combined concepts from classical differential geometry (lines of curvature, orthogonal systems, etc.) – a tradition going back to Monge and his pupils and later advanced by Liouville (18) and Bonnet (19) – with the projective methods developed by Chasles and his followers, who adroitly exploited the properties of the spherical-circle at infinity.
> Lie evidently hoped to develop fruitful analogues in line geometry to some of the key results that had since been obtained by the French "anallagmaticians", an approach strikingly similar in spirit to the one that guided his early work on the geometry of imaginary elements.
> Darboux had a masterful command of both differential and projective geometry, and Lie and Klein were both fortunate that he imparted many of his latest findings to them during their short stay in Paris.

1.7 – *E. J. Wilczynski e la teoria proiettivo-differenziale delle superficie*

Con E. J. Wilczynski (1876-1932) si conclude questo capitolo della nostra storia, che ci ha portato dai primordi della geometria proiettivo-differenziale agli inizi del XX secolo.

(17) T. F. Moutard (1827-1901).
(18) J. Liouville (1809-1882).
(19) P. O. Bonnet (1819-1892).

Per illustrare la figura di Wilczynski, cominciamo citando uno dei suoi più autorevoli allievi, E. P. Lane, che in [49] afferma:

> It has often been stated that Wilczynski was the founder, or inventor, of projective differential geometry.
> This is not quite precise, for Halphen in the latter part of the nineteenth century was the first ever consciously to undertake and carry to fruition a systematic projective differential investigation. He was primarily interested in curves in the plane and in ordinary space.
> But Wilczynski was the first ever to appreciate, demonstrate and exploit the utility of completely integrable systems of linear homogeneous differential equations for projective differential geometry.

Wilczynski iniziò a lavorare in geometria intorno al 1901 e nel 1906 aveva già acquisito una solida reputazione come geometra di grande qualità. Egli contribuì alla definizione di un metodo analitico sistematico per lo studio delle superficie differenziabili nello spazio proiettivo tridimensionale, un metodo che si ispira alle idee di Lie e di Darboux.

I suoi contributi sono in buona parte contenuti nel libro [87] e sono brevemente ricapitolati nel commenti di R. Hermann al libro [52] di Lie sugli invarianti differenziali.

Gli esponenti di maggior successo della scuola di Wilczynski sono stati G. M. Green (1891-1919) e E. P. Lane. P. Sperry (1885-1967), una studentessa di Wilczynski, scrisse nel 1931 un supplemento alla bibliografia del testo [33] di Fubini-Čech (20), includendovi studiosi delle scuole statunitense e asiatica di geometria proiettivo-differenziale. Su tutto ciò tornerò più avanti.

Giova illustrare rapidamente il metodo di Wilczynski per lo studio delle superficie nello spazio proiettivo complesso $\mathbb{P}^3$. Supponiamo di avere una superficie non piana e non sviluppabile S in $\mathbb{P}^3$, parametricamente data da

$$(u, v) \to [y_1(u, v), \ldots, y_4(u, v)]$$

e supponiamo che le *curve parametriche* $u =$ cost. e $v =$ cost. siano curve asintotiche di S, ossia curve il

(20) G. Fubini (1879-1943), E. Cech (1893-1960).

cui piano osculatore in ogni punto coincida con il piano tangente alla superficie.

Wilczynski nota che le funzioni $y_1(u,v),\dots,y_4(u,v)$ sono soluzioni di un sistema di equazioni differenziali alle derivate parziali del secondo ordine, del tipo

$$
\begin{aligned}
&y_{uu} + 2ay_u + 2by_v + cy = 0,\\
&y_{vv} + 2a'y_u + 2b'y_v + c'y = 0.
\end{aligned}
\tag{5}
$$

Ciò esprime la condizione geometrica che in ogni punto lo *spazio osculatore* ad S coincide con il $\mathbb{P}^3$ ambiente. Il concetto di spazio osculatore ad una superficie era stato introdotto da P. del Pezzo (1859-1936) nel 1886 in ambiente puramente algebrico-geometrico.

Con opportune manipolazioni analitiche e usando il gruppo delle trasformazioni proiettive, Wilczynski è in grado di ridurre il sistema (5) alla *forma canonica*

$$y_{uu} + 2by_v + fy = 0, \quad y_{vv} + 2ay_u + gy = 0.$$

Queste sono l'analogo proiettivo delle *equazioni di Gauss-Weingarten* ([21]) della geometria differenziale metrica, e caratterizzano la superficie a meno di trasformazioni proiettive.

Prendendo y, y_u, y_v, y_{uv} come punti fondamentali di un riferimento proiettivo mobile, si hanno delle equazioni parametriche locali di S che Wilczynski usa per studiare particolari tipi di superficie.

L'approccio di Wilczynski è molto elegante e naturale, ma ha dei limiti. Il primo è che è limitato alle superficie di $\mathbb{P}^3$. Il secondo è che Wilczynski si concentra fin troppo sull'aspetto analitico, facendo passare in secondo ordine le proprietà geometriche delle superficie che analizza.

2. – Il XX secolo e la geometria proiettivo-differenziale in Italia

L'inizio del XX secolo vede il sorgere in Italia di una importante schiera di geometri proiettivo-differenziali. Il lavoro di questi geometri è segnato da notevoli tratti di comunanza, il più rilevante dei quali è probabilmente la vicinanza alla geometria algebrica, che in Italia aveva grandi cultori già da alcuni decenni.

2.1 – *Corrado Segre*

Per introdurre la figura di Corrado Segre (1863-1924), la cui vita accademica si svolse a Torino, vero fondatore della scuola italiana di geometria proiettivo-differenziale, ricorro ancora una volta a Lane [47]:

> The distinguished Italian geometer C. Segre (1863-1924) began his geometrical researches at the University of Torino in the early eighties of the nineteenth century.
> His interest in projective differential geometry is said to have been stimulated by Wilczynski at the Heidelberg Congress of 1904.
> Beginning with a very significant memoir in 1907 Segre made important contributions to the subject.
> He was not only interested in the geometry of ordinary space, to which his contributions of the tangents of Segre and the cone of Segre have already been studied in this book, but was a leader in studying the projective differential geometry of hyperspace.
> Segre gave analytic proofs regularly, but was also an outstanding exponent of the synthetic method, making differential properties even in hyperspace appear intuitive.

Ho citato questo brano perché riassume varie notizie interessanti. La prima è che Segre, ben prima di occuparsi di geometria proiettivo-differenziale, di cui è divenuto poi un maestro, era già molto ben affermato come geometra algebrico. Segre infatti affonda le sue radici nella scuola italiana di geometria algebrica, fondata da L. Cremona (1830-1903), e ne è stato un esponente di primissimo piano insieme a G. Castelnuovo (1865-1952) , F. Enriques (1871-1946) e F. Severi (1879-1961), e di quest'ultimo fu maestro. La seconda notizia è la predilezione di Segre per la geometria proiettiva iperspaziale e gli argomenti geometrici intuitivi, anche se non disdegnava affatto di ricorrere a dimostrazioni analitiche, di cui però cercava sempre di spiegare il significato geometrico. In effetti è con Segre che la geometria proiettivo-differenziale si impadronisce del territorio iperspaziale. Difatti nell'ultimo periodo della sua attività scientifica, Segre si dedicò per lo più a problemi di geometria proiettivo-differenziale iperspaziale.

([21]) C.F. Gauss (1777-1855), J. Weingarten (1836 -1910).

Infatti J. L. Coolidge (1873-1954), geometra statunitense che per ben due anni venne in visita in Italia a Torino dove lavorava Segre, afferma in [23]:

> In fact the subject of projective differential geometry was that to which he gave most attention during the later years of his life.
> He made the acquaintance of Wilczynski at Heidelberg in 1904 and thoroughly appreciated the importance of his work.
> Yet an outsider cannot help feeling some regret that there still appears a considerable gulf between the Italian doctrine of projective differential geometry, developed by Segre, Bompiani (22), Fubini and others, and the American contributions of Wilczynski and Gabriel Green (23), of whom, by the way, no Italian seems to have heard the name.

L'ultima affermazione non sembra essere del tutto vera, come testimoniato dal credito che A. Terracini (1889-1968), allievo di C. Segre, dà a Green in [84], testo di una conferenza tenuta in Pisa il 24 Settembre 1948 al III Congresso dell'Unione Matematica Italiana.

Inoltre Terracini aggiunge in [80]:

> Non si cerchino in Segre metodi analitici unitari ideati per costruire tutta una teoria, come p.e. ... in Wilczynski oppure in Fubini.
>
> [...]
>
> In Segre non troviamo nulla di simile: anche quando la primitiva trattazione sintetica non ha lasciato nella sua redazione una traccia visibile, essa si indovina sotto la trattazione analitica, la quale ha, in ogni suo stadio saliente, un significato geometrico.

Venendo ai maggiori contributi di Segre alla geometria proiettivo-differenziale, va detto che non è del tutto vero che il suo interesse per questa disciplina sorga solo dopo il suo incontro con Wilczynski al Congresso di Heidelberg del 1904. Infatti il suo primo articolo su un argomento proiettivo-differenziale è [70] del 1897, in cui egli introduce il cosiddetto *invariante di contatto di Mehmke* (24)-*Segre* per due curve piane in un punto dove hanno la tangente in comune.

Consideriamo infatti due curve piane C, C' tangenti in un punto p, e sia T la loro comune tangente in p. Sia x un punto generico del piano, e si conduca una retta s passante per x "vicina" alla retta r congiungente x con p. La retta s interseca C, C', T in punti a, b, t che tendono a p quando s tende a r. Il limite del *birapporto* (m, t, a, b) quando s tende a r è indipendente da x ed è l'invariante in questione. Lo studio di simili invarianti di contatto per curve, superficie e varietà di dimensione e codimensione maggiore, ha costituito un insieme di ricerche sulla geometria proiettivo-differenziale di *calotte* o *germi di ordine qualunque* di varietà, che è stato molto coltivato dalla scuola italiana fino agli anni 1960, con alcuni risultati interessanti, ad esempio di E. Bompiani e di suoi allievi.

Come ricordato da Lane, nel 1907 Segre pubblica il fondamentale lavoro [71], che è chiaramente influenzato dall'opera di Wilczynski, ma che si collega anche a lavori di geometria differenziale metrica di Darboux e di E. E. Levi (1883-1917) (cfr. [51]). Questo lavoro di Segre è una pietra miliare della scuola italiana di geometria proiettivo-differenziale.

Prendendo un punto di vista più generale di quello di Wilczynski, Segre studia tutte le superficie Φ di uno spazio proiettivo complesso $\mathbb{P}^n$ descritte parametricamente da equazioni del tipo

$$(u_1, u_2) \to [x(u_1, u_2)] = [x_0(u_1, u_2)), \dots, x_n(u_1, u_2)]$$

verificanti una equazione differenziale lineare alle derivate parziali del secondo ordine, detta anche *equazione di Laplace* (25), del tipo

$$Ax_{11} + Bx_{12} + Cx_{22} + Dx_1 + Ex_2 + Fx = 0.$$

Segre nota che ciò significa che il primo *spazio osculatore* alla superficie Φ nel suo punto generale ha dimensione minore di quella attesa, che è 5.

I principali risultati contenuti in questo articolo sono essenzialmente i seguenti:

- una superficie verifica due equazioni di Laplace linearmente indipendenti se e solo se o è sviluppabile o sta in $\mathbb{P}^3$;

(22) E. Bompiani (1889-1975, Rome).
(23) G. Green (1891-1919).
(24) R. Mehmke (1857-1944).

(25) P. S. Laplace (1749-1827).

- ogni superficie di $\mathbb{P}^4$ verifica una equazione di Laplace (queste superficie erano state studiate dal punto di vista metrico da E. E. Levi nella sua tesi [51]);
- Segre studia in dettaglio la ricca geometria proiettiva delle superficie di $\mathbb{P}^5$ verificanti una equazione di Laplace, in relazione con il comportamento della loro *varietà tangente* (cioè la varietà descritta dai piani tangenti) che ha dimensione 4;
- una superficie Φ ha un doppio sistema di curve *coniugate* che Segre adopera per costruire nuove superficie a partire da Φ, dette *trasformate di Laplace* di Φ. Questo fornisce una bellissima interpretazione geometrica di precedenti lavori di Darboux sulla integrazione per quadrature di un'equazione di Laplace mediante trasformazioni analitiche dette *trasformazioni di Laplace*.

Importanti estensioni di questi risultati a varietà di dimensione maggiore e a equazioni differenziali di ordine superiore vennero poi ottenuti da studenti e seguaci di Segre, come Terracini, Bompiani ed altri (cfr., ad es. [7, 80]). Per dirla con Terracini (cfr. [85]):

> ... si può dire che nella Nota in questione sono introdotti in germe i concetti e le proprietà che, a partire da quel momento, hanno dominato molti fra i successivi sviluppi della geometria proiettiva differenziale iperspaziale; e anzi alla possibilità delle generalizzazioni successive molto spesso si accenna in questa Nota.

Nel 1907 appare un altro importante lavoro di Segre [72], seguito dal lavoro [73] su analogo argomento. Qui l'oggetto di studio è quello delle congruenze W, cui ho già di sfuggita accennato dianzi. Si tratta di superficie di tipo Φ contenute in una quadrica liscia di $\mathbb{P}^5$. Poiché tale quadrica coincide con la varietà Grassmanniana delle rette di $\mathbb{P}^3$, tali superficie si identificano con speciali congruenze di rette. Come ho già detto dianzi, queste congruenze sono state oggetto di studio fin dagli albori della geometria proiettivo-differenziale e, per venire a tempi più vicini a Segre, erano state trattate ampiamente da Darboux e dal grande geometra differenziale italiano L. Bianchi (1865-1928) che le avevano collegate alle *deformazioni infinitesime* di superficie di $\mathbb{P}^3$. Segre descrive, nella prima delle note citate, una costruzione generale per tali congruenze correlate alle deformazioni infinitesime di una superficie rigata, per le quali la superficie rimanga rigata. La trattazione di Segre, in contrasto con quella di altri autori come Bianchi, è essenzialmente geometrica e fa uso sostanziale della Grassmanniana delle rette di $\mathbb{P}^3$. Una trattazione sintetica delle deformazioni infinitesime di varietà, anche di dimensione superiore, è un argomento che meriterebbe ulteriori ricerche.

L'articolo [74] gioca un ruolo essenziale negli ulteriori sviluppi della geometria proiettivo – differenziale, giacchè ha motivato i successivi importanti lavori di G. Fubini.

Data una superficie S in $\mathbb{P}^3$ e un suo punto liscio p, Segre introduce in un modo elegantissimo tre notevoli rette tangenti a S in p, le cosiddette *tangenti di Segre*. Segre paragona questa tre tangenti con un altra tripla di tangenti introdotta da Darboux in [25], le cosiddette *tangenti di Darboux*. Segre dimostra che le tangenti di Darboux sono coniugate alle sue tangenti rispetto alla coppia di *tangenti asintotiche* alla superficie S che escono dal punto p.

Infine voglio menzionare l'articolo [75], in cui Segre studia le varietà che son descritte da una famiglia di sottospazi dello spazio proiettivo ambiente. Segre pone in relazione proprietà tangenziali di queste varietà con proprietà infinitesimali, o *focali*, dei sottospazi che le generano, estendendo in modo ampio la nozione di superficie sviluppabile. Non starò qui a descrivere la nozione di *fuoco* di una famiglia di sottospazi, bastando per ciò l'esempio menzionato in §1.4 (per il concetto generale di fuoco di una famiglia di varietà in un ambiente puramente agebrico-geometrico, si veda [22]; questo concetto è stato adoperato da vari autori dopo Segre per attaccare vari interessanti problemi geometrici di diverso tipo). In particolare Segre inizia in questo articolo la classificazione delle varetà *tangenzialmente difettive* ossia quelle varietà di dimensione n tali che la varietà descritta dai loro spazi tangenti ha dimensione minore di quella attesa, che è $2n$. Questa area di ricerca è stata proseguita da vari epigoni di Segre (come, ad es., Terracini, cfr. [80]), ed è tutt'ora oggetto di studio.

2.2 – *La rivoluzione di Fubini: forme differenziali*

Guido Fubini fu studente di Bianchi a Pisa. Insegnò a Catania, a Genova e poi a Torino, dove rimase fino al 1939 quando emigrò negli Stati Uniti causa le leggi razziali. Quindi da giovane fu avviato allo studio della geometria differenziale metrica. Terracini afferma nel bell'articolo [84] la cui lettura va certamente consigliata a chi voglia avvicinarsi alla figura e alle opere di Fubini:

> Però non vi è dubbio che, anche in geometria, Fubini fu prevalentemente un analista. Questa non vuol essere una minor valutazione, ma solo il riconoscimento di una realtà: Fubini ha fatto opera estremamente importante, guidato sì in certi momenti dalla conoscenza preliminare di circostanze geometriche che gli servivano di punto di partenza o di guida, ma soprattutto scoprendo fatti geometrici nuovi con metodi analitici ... Fubini ... era un sarto tanto abile che, allo stesso tempo che la veste [trattazione analitica], creava la persona a cui era destinata [fatto geometrico nuovo].

Fubini cominciò ad interessarsi a questioni di geometria proiettivo-differenziale nel 1914, quando scrisse la prima nota [30] sulla determinazione proiettivo-differenziale di una superficie in $\mathbb{P}^3$. Fubini intraprese il compito di determinare una superficie dello spazio proiettivo 3-dimensionale mediante un insieme di *forme differenziali* come già aveva fatto Gauss in geometria differenziale metrica con l'introduzione delle due forme fondamentali di una superficie nello spazio tridimensionale euclideo, i cui coefficienti debbono verificare delle condizioni di compatibilità che si riassumono nelle *equazioni di Codazzi-Mainardi* (26) e nel *Theorema Egregium* di Gauss.

Nel 1916 Fubini trovò un modo per ottenere il suo scopo nel lavoro [31]. All'inizio il suo approccio non era puramente proiettivo, ma usava anche tecniche metriche. Gli occorsero circa dieci anni per perfezionare la sua teoria. Al riguardo Bompiani afferma in [9], altro articolo che, al pari di [84], va consigliato a chi voglia saperne di più su Fubini e la sua opera:

> Permeato dall'insegnamento e dai metodi esposti nelle classiche Lezioni di geometria differenziale (27) del Bianchi, il Fubini aspira a creare una geometria proiettiva delle superficie servendosi di *forme differenziali invarianti* (come la prima e seconda forma nella teoria metrica ordinaria).
>
> [...]
>
> Egli attacca il problema con i metodi a lui familiari del Bianchi: metodi, diciamo pure, del tutto inadatti perché riferentisi ad una situazione del tutto differente (cioè al gruppo euclideo invece che a quello proiettivo).
>
> [...]
>
> Con salti acrobatici ... trova le forme differenziali proiettivamente invarianti che vanno con il suo nome.

La teoria di Fubini è esposta nel libro in due volumi [33] e nella edizione francese [34]. Un riassunto di parte della teoria è contenuto nella Appendice di Fubini [32] alla seconda edizione del testo di Bianchi [5]. Fubini inizia con le parole:

> I metodi usati in questo libro per lo studio delle proprietà *metriche* di una superficie, cioè delle proprietà invarianti per movimenti, si possono, convenientemente modificati, applicare anche allo studio delle proprietà *proiettive*. Come si *inizi* un simile studio sarà rapidamente svolto in questa nota.

In questo modo Fubini, in qualche misura, riconosce l'influenza su di lui esercitata dal suo maestro Bianchi. Tuttavia anche C. Segre ebbe su Fubini una forte influenza. Come vedremo infatti il punto di partenza di Fubini fu lo studio delle tangenti di Darboux e di Segre. Secondo Bompiani, fu Segre, che era collega di Fubini a Torino, che gli pose il problema se la distribuzione di queste tangenti fosse sufficiente a caratterizzare una superficie a meno di proiettività. Fubini risponde alla questione negativamente nel suo articolo [31], ma, al contempo, pone le fondamenta della sua teoria delle forme differenziali e del suo cosiddetto *teorema di rigidità* su cui tornerò tra breve.

Come già detto, prima di Fubini era stato Wilczysnsky a occuparsi della caratterizzazione proiettiva delle superficie in $\mathbb{P}^3$. Il punto di vista di Fubini era però diverso da quello di Wilczysnsky, benchè vi fossero delle relazioni tra i due approcci, come spiegato da Lane in [49]:

> The projective differential geometry of surfaces has been studied extensively in the United States by Wilczynski, Green, and others, using the inva-

(26) D. Codazzi (1824-1873), G. Mainardi (1800-1879).
(27) Cfr. [5].

riants and covariants of a completely integrable system of linear homogeneous partial differential equations.

In Italy, much progress in projective differential geometry has been made by Fubini, Bompiani, and others, who have approached the subject from the point of view of differential forms and the absolute calculus.

... It is the purpose of this note to show how Fubini's canonical differential equations may be obtained by Wilczynski's method, and to compare Wilczynski's and Fubini's canonical forms for the differential equations of a surface.

It is evidently desirable that geometers living on different sides of the Atlantic, writing in different languages, and using different analytic apparatus, but interested in the same subject, should be able to exchange ideas freely. It is hoped that this note will to some extent smooth the way for this commerce of ideas by showing how certain equations and formulas obtained in one notation may be written also in the other.

Ed E. Cartan aggiunge in [11]:

... l'étude systématique de la géometrie différentielle projective des surfaces, commencée par M. Wilczysnsky, a été pursuivie par M. Fubini, qui, par l'application de méthodes générales réguliéres à de nombreux problémes, a érigé cette nouvelle branche de la géometrie en corps de doctrine.

In ogni caso, come afferma Bompiani in [9]:

Non si toglie nulla al merito sostanziale di Wilczynski se si afferma che, almeno all'inizio delle sue ricerche, il Fubini non conosceva affatto l'opera del Wilczynski: ciò Egli dichiarava nel suo lavoro negli Annali di Matematica del 1916 ([28]); cioè che quando tutti i calcoli di essa erano compiuti il Segre l'informò dei risultati del Wilczynski.

E Terracini conferma in [84]:

... mi pare si possa dire che l'influenza del Wilczynski su Fubini venne forse sopravvalutata dallo Struik ([29]), quando ha tratteggiato l'opera di Fubini con le parole "riattaccandosi a Wilczynski e continuando la sua opera". No, Fubini, pur non ignorando Wilczynski, non ne è stato il continuatore. E anche il giudizio pronunciato da Lane, sebbene in modo più generico e impersonale, quando commemorando Wilczynski ([30]) disse che la sua influenza fu particolarmente forte in Italia e in Cecoslovacchia, mi pare vada al di là della realtà oggettiva.

Ma veniamo a qualche dettaglio sull'approccio di Fubini. Una superficie non sviluppabile S di $\mathbb{P}^3$ è data parametricamente mediante equazioni del tipo

$$(u_1, u_2) \rightarrow [y(u_1, u_2)] = [y_1(u_1, u_2), \ldots, y_4(u_1, u_2)].$$

Fubini definisce due forme differenziali simmetriche

$$F_2(du_1, du_2), \quad F_3(du_1, du_2)$$

con le seguenti proprietà:

- F_2 è quadratica e svanisce lungo le *direzioni tangenti asintotiche* di S in ogni punto $p \in S$, cioè lungo le direzioni delle rette che hanno con S in p molteplicità di intersezione maggiore di 2; questa è l'analoga della seconda forma differenziale in ambito metrico;
- F_3 è cubica e svanisce lungo le direzioni delle rette tangenti di Darboux: F_3 è ottenuta dalla parte cubica dell'espressione locale di y in modo tale che F_3 sia *apolare* di F_2, cioè la forma *hessiana* di F_3 sia F_2;
- F_2 ed F_3 sono solo definite a meno di un fattore moltiplicativo non nullo, quindi il loro rapporto

$$\omega = F_3/F_2$$

è ben definito; esso è chiamato l'*elemento proiettivo lineare*, e gioca lo stesso ruolo della *forma di volume* nel caso metrico.

Il *primo teorema di rigidità* di Fubini afferma che: *due superficie hanno lo stesso elemento proiettivo lineare se e solo se sono proiettivamente applicabili*. La *proiettiva applicabilità* è l'analogo della *applicabilità* in ambiente metrico: due superficie S e S' di $\mathbb{P}^3$ sono proiettivamente applicabili se esiste un'applicazione analitica, localmente invertibile $f : S \longrightarrow S'$ tale che dati due punti corrispondenti $p \in S$ e $p' \in S'$, ogni curva su S con un flesso in p venga mutata da f in una curva con un flesso in p'.

Il primo teorema di rigidità risponde alla domanda che aveva posto Segre, se cioè la distribuzione

([28]) Cfr. [31].
([29]) D. J. Struik (1894-2000).
([30]) Cfr. [49].

delle tangenti di Darboux fosse sufficiente a determinare la superficie proiettivamente. La risposta è no. Quello che è vero è che tale distribuzione, assieme a quella delle direzioni asintotiche, determina la superficie solo a meno di applicabilità proiettiva. Tuttavia il teorema di Fubini mostra che la questione posta da Segre aveva senso. Inoltre, come corollario, Fubini dimostra che l'essere F_3 identicamente nulla caratterizza le quadriche. Questa è la generalizzazione bidimensionale dell'equazione differenziale delle coniche di Monge. Per un'estesione del teorema di rigidità di Fubini a ipersuperficie in uno spazio proiettivo, si veda [43].

Fubini successivamente introduce una terza forma differenziale, nel modo seguente. Se

$$F_2 = a_{11}du_1^2 + 2a_{12}du_1du_2 + a_{22}du_2^2$$

Fubini considera il punto

$$Y = \frac{1}{2}(A_{11}y_{11} + 2A_{12}y_{12} + A_{22}y_{22})$$

dove (A_{ij}) è la matrice *aggiunta* ad (a_{ij}). Il punto Y non sta nel piano tangente alla superficie in y. La retta congiungente y con Y gioca il ruolo della *retta normale* alla superficie in y, ed è infatti chiamata la *normale proiettiva* alla superficie in y, una nozione indipendentemente introdotta da G. Green in [36]. Si ha allora

$$y_{rs} = p_{rs}y + \lambda_{rs}y_1 + \mu_{rs}y_2 + \rho_{rs}Y,$$

per ogni $1 \leq r \leq s \leq 2$, dove y_{rs} sta per la derivata di y rispetto alle variabili u_r, u_s. Queste sono le analoghe delle formule di Gauss-Weingarten nel caso metrico.

Fubini allora definisce la *terza forma fondamentale* come

$$P = p_{11}du_1^2 + 2p_{12}du_1du_2 + p_{22}du_2^2.$$

Vale inoltre il *teorema principale di rigidità* di Fubini, che afferma che: *una superficie è univocamente determinata, a meno di proiettività, dalle sue tre forme fondamentali F_2, F_3, P.*

Le *condizioni di integrabilità* delle tre forme, cioè le condizioni affinchè esse provengano da una superficie, sono gli analoghi proiettivi delle equazioni di Codazzi-Mainardi e del Theorema Egregium di Gauss. Inoltre l'intero macchinario può essere esteso alle ipersuperficie in uno spazio proiettivo $\mathbb{P}^n$ di dimensione $n \geq 4$, ma non è ancora noto un teorema di rigidità in tal caso. Si può tuttavia estendere alle quadriche liscie di dimensione qualunque l'equazione differenziale di Monge-Fubini. L'estensione della teoria di Fubini a varietà di codimensione maggiore di 1 è tutt'ora un territorio di ricerca del tutto aperto.

2.3 – *Il perché delle forme differenziali e la filosofia di Élie Cartan*

Ma perché le forme differenziali giocano un ruolo importante in geometria proiettivo-differenziale? Questo è spiegato in dettaglio da un grande geometra come Ph. Griffiths nel suo articolo [37], in cui egli illustra alcune delle idee di E. Cartan. Un gruppo di Lie G ha una *forma di Maurer* (31)- *Cartan* ω a valori nella sua algebra di Lie, che fu introdotta da Cartan nel 1904, il quale la pose alla base del suo metodo dei riferimenti mobili. Ricordo brevemente come si definisce tale forma.

Dato il gruppo di Lie G, resta determinata la sua *algebra di Lie* $\mathfrak{g}$, che coincide con il suo spazio tangente $T_e(G)$ nell'origine $e \in G$.

Ogni elemento $g \in G$ induce la moltiplicazione

$$L_{g^{-1}} : h \in G \longrightarrow g^{-1}h \in G$$

che risulta essere un diffeomorfismo. Il relativo differenziale è

$$(TL_{g^{-1}})_g : T_g(G) \longrightarrow T_e(G) = \mathfrak{g}.$$

La forma di Maurer-Cartan è l'applicazione lineare

$$\omega : v \in T_g(G) \longrightarrow (TL_{g^{-1}})_g(v) \in \mathfrak{g}.$$

Se X è una varietà e si hanno due applicazioni differenziabili $f, g : X \to G$, vi è un elemento $s \in G$ tale che

$$f(x) = s \cdot g(x), \quad \forall x \in X$$

se e solo se

$$f^*(\omega) = g^*(\omega)$$

Prendendo opportuni sollevamenti a G, lo stesso si può dire per mappe a valori in uno spazio omoge-

(31) L. Maurer (1859-1927).

neo G/H (come ad esempio lo spazio proiettivo). Quindi le controimmagini di opportune forme di Maurer-Cartan danno un *sistema completo di invarianti* per l'immersione di una varietà in uno spazio omogeneo.

Nel lavoro citato, Griffiths spiega l'efficacia e la difficoltà dell'approccio di Cartan di cui abbiano appena detto:

> These notes are an exposition of the philosophy due to Elie Cartan that, via the use of moving frames, the theory of Lie groups constitutes a powerful and elegant method for studying uniqueness and existence questions for submanifolds of homogeneous space.
> This philosophy, as expounded in his beautiful book "Groupes finis et continus et la geométrie differentielle" (32), Gauthier-Villars (Paris), is perhaps not as widely appreciated as it should be, especially as regards the higher order invariants of a submanifold.
> A possible reason for this is that, even though the basic Lie group statements underlying the theory are of rather general nature, their application to geometry seems at present more adapted to special cases depending on subtle conditions of non-degeneracy, rather than constituting a vast general theory.
> It is the intricacy and beauty of these special cases which in the end justifies the general approch.
>
> [...]
>
> The method of moving frames of Cartan ... has its roots in the geometric works of the 19th century (especially those of Darboux) ...
> One may view moving frames as one manifestation of the Cartan philosophy that whenever there are natural parameters in a geometric situation, these parameters should be included as part of the structure and their invariants should enter into its study.

Nella prima metà del XX secolo E. Cartan combinò la teoria dei gruppi di Lie e la teoria degli invarianti differenziali allo scopo di analizzare il concetto di immersione in spazi generalizzati, il che include gli spazi omogenei e la geometria locale di Riemann. In termini moderni, la tecnica del riferimento mobile non è altro che l'uso del fibrato principale di tali riferimenti su una data varietà.

(32) Cfr. [12].

La filosofia di Cartan, di cui parla Griffiths, in quanto ricorre ai gruppi di Lie e alle forme differenziali per ottenere sistemi completi di invarianti per immersioni di varietà in spazi omogenei, ha dei punti di contatto con la filosofia di Fubini, ma in verità ne estende la portata in modo notevole.

Fubini e Čech erano ben consapevoli della teoria di Cartan, come risulta dal loro trattato in francese [34], in cui espongono parte di tale teoria nei due ultimi capitoli e menzionano i suoi lavori [13, 14], nell'ultimo dei quali Cartan a sua volta cita più volte Fubini. Sarebbe interessante vedere se vi sia qualche traccia di uno scambio diretto di idee tra Cartan e Fubini su questi, o altri, argomenti.

Nel testo [34] Fubini e Čech citano anche i lavori di Cartan [15, 16] sulle *connessioni proiettive*. Il concetto di connessione proiettiva è la naturale estensione di quello di *connessione affine* che Cartan (insieme a H. Weyl (1885-1955)) era andato sviluppando precedentemente (cfr. [17]). Secondo lo stesso Cartan (cfr. [15]) una delle motivazioni da parte sua per introdurre il concetto di connessione proiettiva era stato il lavoro di Fubini sulle superficie: in fin dei conti la terza forma fondamentale di Fubini nasce dall'uso di riferimenti mobili e di una connessione proiettiva sulla superficie.

Per spiegare in breve i concetti di connessione affine e di connessione proiettiva, diamo voce allo stesso Cartan in [17] e [16]:

> La variété sera dit à "connexion affine" lorsqu'on aura défini,d'une maniére d'alleurs arbitraire, une loi permettant de repérer l'un par rapport à l'autre les espaces affines attachés à deux points infiniment voisins qualconques $\mathbf{m}$ et $\mathbf{m}'$ de la variété; cete loi permettra de dire que tel point de l'espace affine attaché au point $\mathbf{m}$ correspond à tel point de l'espace affine attaché au point $\mathbf{m}'$, que tel vecteur du premier espace es paralléle ou équippollent à tel vecteur du second espace.

e

> Une variété (ou espace) à connexion projective est une variété numérique qui, au voisinage immédiat de chaque point, présente tous le charactéres d'un espace projectif et doué de plus d'une loi permettant de raccorder en un seul espace projectif le deux morceaux qui entoourent deux points infiniment voisins. ...

> Analytiquement, on choisira, d'une maniére arbitraire, dans l'espace projectif attaché à chaque point **a** de la variété, un repére définissant un systéme de coordonnées projectives. ...
> Le raccord entre les espaces projectifs attachés à deux points infiniment voisins **a** et **a**′ se traduira analytiquement par une transformation homographique.

Lo studio delle connessioni affini e proiettive è stato oggetto di ricerca presso i geometri italiani, in particolare di E. Bompiani e i suoi allievi.

2.4 – *Terracini e Bompiani*

Terracini fu allievo di C. Segre a Torino, insegnò a Catania e poi a Torino, fino al 1938 quando dovette emigrare in Argentina causa le leggi razziali; tornò poi a Torino dopo la guerra. Bompiani fu invece allievo di Castelnuovo a Roma, e fu professore ordinario prima a Milano e Bologna e poi a Roma. Terracini e Bompiani furono, probabilmente i più importanti esponenti della scuola italiana di geometria proiettivo-differenziale.

Benché i due non abbiano mai scritto un lavoro in collaborazione, essi hanno avuto una lunghissima ed ottima relazione personale e scientifica. Entrambi ebbero un contatto scientifico molto stretto con C. Segre e G. Fubini. Tendenzialmente Terracini, pur non rifuggendo affatto dai metodi analitici, aveva un approccio più geometrico, Bompiani più analitico. Entrambi hanno avuto una produzione scientifica molto ampia che meriterebbe, in buona parte, di essere riscoperta. Una bella esposizione dei principali risultati di C. Segre, di Bompiani e dello stesso Terracini si trova nella appendice [86] che quest'ultimo scrisse per il volume [33] di Fubini-Čech.

Tra i principali risultati di Terracini menziono:

- dimostrazione, nella sua tesi di laurea, di un fondamentale risultato, oggi noto come *Lemma di Terracini* (cfr. [79]), che determina la struttura dello spazio tangente nel punto generale alla varietà degli spazi secanti una data varietà. Conseguentemente Terracini si è occupato della classificazione delle varietà *secanti difettive* o *tangenti difettive*, cioè varietà con dimensione di varietà degli spazi secanti o degli spazi tangenti minore dell'atteso (cfr. [80]). Questo è un argomento che tutt'ora è oggetto di studio;
- classificazione di varietà che verificano *molte* equazioni di Laplace rispetto alla loro dimensione e contributi allo studio geometrico-proiettivo delle equazioni alle derivate parziali (si veda ancora, ad es., [80]);
- estensione della geometria della retta a sottospazi di dimensione e codimensione maggiore (cfr., ad es., [83]);
- ampia estensione a varietà di dimensione e codimensione qualunque del concetto di forme differenziali di Fubini, sostituite da sistemi lineari di forme differenziali. Conseguente caratterizzazione proiettivo-differenziale di alcune proprietà speciali, come le *varietà di Segre* prodotti di due spazi proiettivi (cfr. ancora [80]);
- importanti interpretazioni geometriche della teoria di Fubini, ad esempio, della normale proiettiva, dell'elemento lineare proiettivo, ecc. (cfr. [82, 81]).

Tra la ricerche di Bompiani, oltre a quelle già menzionate brevemente nel corso di questo articolo, mi limiterò a segnalare qui l'interessantissimo articolo [8] in cui, dopo aver ricordato il concetto di curva *quasi asintotica* su una varietà, da lui già precedentemente introdotto, usa questo concetto per provare un teorema di caratterizzazione delle *varietà di Veronese* (33) che meriterebbe ulteriori approfondimenti.

2.5 – *La scuola italiana*

La geometria proiettivo-differenziale ha visto in Italia una vera fioritura nella prima metà del XX secolo. La seguente è una lista non esaustiva degli studiosi di questa disciplina che non ho nominato già dianzi:

- L. Berzolari, che fu allievo di E. Bertini (1846-1933) a Pisa, insegnò a Torino, Milano, Pavia e fu anche un valido geometra algebrico, si occupò di geometria proiettivo-differenziale di curve in spazi proiettivi di dimensione qualunque;

(33) G. Veronese (1854-1917).

- E. Pascal (1865-1940), studiò a Napoli e poi a Göttingen con F. Klein, insegnò a Pavia e Napoli, si occupò della geometria delle equazioni differenziali;
- E. Bortolotti (1866-1947), studiò a Bologna con S. Pincherle (1853-1936), insegnò a Roma, Firenze, Modena, Bologna: si occupò di connessioni proiettive e caratterizzazione proiettivo-differenziale di varietà speciali;
- G. Fano (1871-1952), allievo di C. Segre a Torino e poi di F. Klein a Göttingen, insegnò a Roma, Messina, Torino, un eminente geometra algebrico, si occupò di approccio geometrico allo studio delle equazioni differenziali;
- G. Sannia (1875-1930), studiò a Napoli con D. Montesano (1863-1930), insegnò a Modena e Napoli, si occupò di geometria della retta, approccio geometrico a equazioni differenziali, geometria differenziale affine;
- G. Marletta (1878-1944), studiò e poi insegnò a Catania, valido geometra algebrico, si occupò di geometria della retta, invarianti proiettivi;
- E. G. Togliatti (1890-1977), allievo di C. Segre a Torino, insegnò a Zürich e Genova, anche geometra algebrico: si occupò di varietà descritte da famiglie di spazi lineari e di varietà che verificano equazioni differenziali;
- R. Calapso (1901-1976), studiò e insegnò a Messina, si occupò di invarianti proiettivi di curve e superficie;
- U. Morin (1901-1968), studiò a Padova con A. Comessatti (1886-1945), insegnò a Firenze e Padova, fu principalmente un geometra algebrico, si occupò di proprietà focali di famiglie di spazi proiettivi;
- B. Segre (1903-1977), allievo di C. Segre a Torino poi di E. Cartan a Parigi, insegnò a Bologna, Manchester, Roma, fu un eminente geometra algebrico, si occupò di geometria della retta, geometria di contatto, varietà duali;
- M. Villa (1907-1973), studiò a Pavia e poi a Parigi con E. Cartan, insegnò a Bologna, si occupò di problemi di contatto di calotte;
- P. Buzano (1911-1993), studiò e insegnò a Torino e si occupò di approccio geometrico allo studio di equazioni differenziali;
- C. Longo (1912-1971), studiò a Roma con G. Scorza (1876-1939), e insegnò a Roma, Parma e Torino, si occupò di vari aspetti di geometria proiettivo-differenziale iperspaziale.

Nel suo periodo più florido, che copre la prima metà del XX secolo, la scuola italiana di geometria proiettivo-differenziale ebbe relazioni con altre realtà internazionali. Già ho indicato quelle con le scuole statunitense e francese. Ma non vanno trascurate:

- la scuola tedesca: i cui esponenti maggiori furono L. Berwald (1883-1942), W. Blaschke (1885-1962), G. Bol (1906 -1989) (benchè quest'ultimo fosse olandese di nascita, lavorò a lungo in Germania ed era legato a Blaschke);
- la scuola rumena: con G. Titeica (1874-1939) e G. Vranceanu (1900-1979).

Vi fu anche una scuola asiatica, ma non mi risultano dei contatti con la scuola italiana.

2.6 – *Il declino*

La geometria proiettivo-differenziale entra in crisi in Italia all'inizio della seconda metà del XX secolo. La sorte di questa disciplina in Italia non è molto dissimile da quella della geometria algebrica, che ebbe in Italia uno sviluppo anche più florido, ma che fu destinata, dopo molti decenni di splendore, ad un inesorabile declino dopo la fine della seconda guerra mondiale. Quali sono le ragioni di questo declino? Posso provare a sintetizzarle in tre o quattro punti:

- l'isolamento autarchico imposto dal regime fascista, che tagliò i ponti con gli sviluppi che andavano imponendosi all'estero: negli anni '30 e nei primi anni '40 del XX secolo gli unici contatti di fatto consentiti furono quelli con i tedeschi e i rumeni, mentre si indebolirono molto quelli con i francesi, proprio mentre E. Cartan e i suoi seguaci stavano aprendo nuove ampie strade alla ricerca in geometria proiettivo-differenziale;
- in particolare, le leggi razziali del 1938, in conseguenza delle quali Fubini, Terracini, e B. Segre dovettero abbandonare l'Italia;
- l'uscita di scena dei grandi maestri: C. Segre muore nel 1924, Fubini nel 1943 in esilio a New

York, Terracini morirà più tardi, ma restò per ben 10 anni in esilio lontano dall'Italia;
- dal punto di vista scientifico, molto importante è una certa frammentazione degli interessi di ricerca in geometria proiettivo-differenziale, presente anche nel periodo più florido e forse perfino intrinseca alla disciplina: in sostanza non molti erano i grandi temi di ricerca, come quelli perseguiti da C. Segre e Fubini, per esempio, mentre molti, forse troppi, erano i rivoli in cui si disperdeva il lavoro degli epigoni.

Nella Prefazione alle Opere Scelte di B. Segre [68] di E. Vesentini(1928-2020) troviamo una valutazione abbastanza severa di alcuni aspetti del lavoro di B. Segre e dello stato della geometria proiettivo-differenziale in Italia nell'ultimo periodo dei suoi sviluppi:

> La frammentarietà ... è uno dei caratteri distintivi dell'opera di questo autore ...
> Un esempio in proposito è offerto dalle ricerche in geometria proiettiva differenziale, che Beniamino Segre aveva iniziato con in lavoro giovanile ([34]), pubblicato nel 1926, nello stesso anno cioè in cui appariva il primo volume del trattato di G. Fubini e E. Čech. A questi studi egli dedicherà una ventina di note e memorie ... ritornandovi a più riprese ... senza riuscire tuttavia a spingere questo settore di ricerca fuori dalla zona d'ombra nella quale si trova tutt'ora, malgrado gli sforzi compiuti dallo stesso Segre, da E. Bompiani, A. Terracini ed Elie Cartan. Solo in tempi recenti si è intrapreso un riesame della imponente costruzione invariantiva di Fubini e Čech, e si è iniziato, con gli strumenti di indagine oggi disponibili, uno studio sistematico delle forme fondamentali dei vari ordini per varietà complesse immerse in uno spazio proiettivo complesso.

Vesentini forse si riferisce qui all'ormai famoso articolo [38] di Ph. Griffiths e J. Harris, che ha rilanciato in modo poderoso gli studi in questo settore della matematica, rivisitando con un nuovo spirito i problemi classici della disciplina.

E il giudizio sulla frammentarietà della ricerca in geometria proiettivo-differenziale è confermato da quanto dice Terracini a proposito di Fubini in [84]:

> Per certi aspetti della geometria proiettiva propriamente detta, Fubini non aveva particolare predilezione. A questa sua posizione forse non era estranea la circostanza che egli l'aveva vista un poco sperdersi nei mille rigagnoli dell'indagine di figure particolari, dalle quali rifuggiva, avendo sempre in vista fatti e proprietà generali. Fubini non amava le configurazioni geometriche in cui intervengono proprietà minute. Ricordo a questo proposito che, nella stessa geometria proiettiva differenziale, più di una volta, vedendo moltiplicarsi gli enti geometrici legati all'intorno di un punto, su una curva o su una superficie, manifestava il suo accorato timore che si creasse così quello che, forse un po' troppo spregiativamente, chiamava una seconda geometria del triangolo.

E, per concludere con le citazioni, voglio dar voce ad un grande maestro della geometria differenziale moderna, S. S. Chern (1911-2004). Chern si laureò presso l'Università di Nankai nel 1930 sotto la guida di Dan Sun, che a sua volta era stato studente di Lane a Chicago nel 1918. Quindi Chern affondava, per così dire, le sue radici scientifiche nella geometria proiettivo-differenziale staunitense. La sua tesi concerneva questioni di geometria della retta. Dopo la laurea Chern visitò Blaschke ad Amburgo negli anni 1934-36, dove conseguì il dottorato con una tesi sulle *reti* (*web* in inglese), e Cartan a Parigi nel 1936. Chern in qualche modo continuò la tradizione di Fubini e Cartan, occupandosi del problema basilare di trovare un sistema completo di invarianti locali per l'azione del gruppo proiettivo di una sottovarietà dello spazio proiettivo e di interpretarli geometricamente attraverso proprietà di osculazione.

Chern afferma in [20]:

> There was ... an Italian school of projective differential geometry founded by G. Fubini and E. Čech in 1918.
> The American school takes as analytic basis systems of partial differential equations and uses Lie theory to generate invariants, while the Italian school takes the differential forms to be the analytic basis.
> It may be interesting to note that when, in 1949, I joined the faculty of the University of Chicago, I was essentially the successor to E. P. Lane, a typical gentleman.
> I spent some of my best years on the subject, but left it for greener pastures when I went to Germany.

A parte l'imprecisione sul fatto che la scuola italiana fosse stata fondata da Fubini e Čech, le parole di Chern suggeriscono che attorno alla metà degli anni

([34]) Cfr. [69].

’30 del XX secolo il declino non coinvolgesse solo la scuola italiana ma anche quella statunitense. Infatti egli afferma in [21]:

> ... around 1934 I began to realize the importance of global differential geometry, called differential geometry in the large at the time.
> It was generally considered to be a difficult subject, both in the mathematical breath required and in depth of the problems.
> My main inspiration came from Wilhelm Blaschke’s book on differential geometry.

Chern in questo modo sottolinea il suo allontanarsi dalla geometria proiettivo-differenziale per dedicarsi alla geometria differenziale globale sotto l’ispirazione di Blaschke. É singolare che gli italiani, che pure ebbero la possibilità di interagire con Blaschke, non abbiano colto la stessa opportunità.

2.7 – *Tempi moderni*

Il lavoro epocale [38] di Griffiths e Harris ha segnato un punto di svolta della geometria proiettivo-differenziale. Dopo di esso questa disciplina, che già era per sua natura vicina alla geometria algebrica, si è ad essa sempre più avvicinata, fino a diventarne in sostanza indistinguibile. E ciò è stato ancora di più evidenziato dal lavoro fondamentale di F. Zak sulle varietà secanti-difettive e tangenti-difettive, che ha avuto l’effetto di inglobare molti dei risultati e problemi della geometria proiettivo-differenziale nell’ambito più propriamente algebrico. I risultati più importanti di Zak sono contenuti nel suo testo [88] (per un altro bel libro su analoghi argomenti, si veda [67]).

Più orientati all’approccio classico alla geometria proiettivo-differenziale sono i testi [1, 2]. Il primo è dedicato a vari aspetti della teoria generale delle sottovarietà di un iperspazio, problemi di osculazione, forme fondamentali, curve asintotiche, ecc. Il secondo è dedicato allo studio della struttura delle varietà con *applicazione di Gauss degenere*. L’applicazione di Gauss è quella che ad ogni punto della varietà associa lo spazio tangente alla varietà in quel punto, visto come un punto di una opportuna varietà di Grassmann. Tale applicazione è *degenere* se presenta delle patologie come non essere finita, o genericamente finita, o birazionale sull’immagine. Questo testo fa largo uso della tecnica del riferimento mobile. A questa tecnica è dedicato anche il testo [42].

In definitiva mi sembra di poter dire che, anche se vari aspetti della geometria proiettiva-differenziale risultano oggi ancora attuali ed interessanti, per lo più questa disciplina viene sempre più assorbita dalla geometria algebrica, in quanto vari suoi problemi sono oggetto di studio e ricerca con metodi algebrico-geometrici piuttosto che analitici.

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

[1] M. Akivis, V. Goldberg, *Projective Differential Geometry of Submanifolds*, Elsevier, 1993.

[2] M. Akivis, V. Goldberg, *Differential Geometry of Varieties with Degenerate Gauss Maps*, Springer Science and Business Media, 2006.

[3] A. M. Ampère, *Mémoire sr les avantages qu’on peut retirer dans la théorie des courbes de la considération des paraboles osculatrices, avec de reflexions sur le fonctions différentielles dont la valeur ne change pas lors de transformation des axes*, J. école Polyth., **7** (1808), 151-191.

[4] L. Berzolari, *Sugli invarianti differenziali proiettivi delle curve di un iperspazio*, Ann. di Mat. pura e applicata, **26** (2) (1897), 1-58.

[5] L. Bianchi, *Lezioni di geometria differenziale*, Spoerri, 1903, seconda ed. Zanichelli, Bologna, 1923.

[6] G. Boole, *A Treatise on Differential Equations*, Macmillan, Cambridge, 1859.

[7] E. Bompiani, *Sull’equazione di Laplace*, Rend. del Circolo Mat. di Palermo, **34** (1912), 383-407.

[8] E. Bompiani, *Proprietà caratteristiche di enti algebrici*, Mem. Accad. Lincei, (5) **13** (1921), 451-474.

[9] E. Bompiani, *Dopo cinquant’anni dall’inizio della geometria proiettiva differenziale secondo G. Fubini*, Rend. Sem. Mat. Torino, **25** (1966), 83-106.

[10] F. Cajori, *A History of Mathematical Notations, voll. 1-2*, Open Court Publishing Company, 1928-1929.

[11] E. Cartan, *Lecons sur la Théorie des Espaces à connexion projective*, Gauthiers-Villars, Paris, 1937.

[12] E. Cartan, *La théorie des groupes finis et continus et la géométrie différentielle, traitées par la méthode du repere mobile. Lecons professées à la Sorbonne. La théorie des groupes finis et continus et la géométrie différentielle*, Gauthier-Villars, Paris, 1951.

[13] E. Cartan, *Sur l’applicabilité projective des surfaces}, C.R. Acad. Sci.*, **171** (1920).

[14] E. Cartan, *Sur la déformation projective des surfaces*, Annales scientifiques de l’É.N.S., (3) **37** (1920), 259-356.

[15] E. Cartan, *Sur la connexion projective des surfaces*, C.R. Acad. Sci., **178** (1924), 750-752.

[16] E. CARTAN, *Sur le variétés à connection projective*, Bull. S.M.F., **52** (1924), 205-241.

[17] E. CARTAN, *Sur les variétés à connexion affine, et la théorie de la relativité généralisé (première partie)*, Annales Scientifiques de l'école Normale Supérieure, **40** (1923), 325-412.

[18] A. CAYLEY, *On a new analytical representation of curves in space*, Q. J. Pure Appl. Math., **3** (1860), 225-236.

[19] A. CAYLEY, *On reciprocants and differential invariants*, Quarterly J. of Pure and Appl. Math., **26** (1893), 169-194, 289-307.

[20] S. S. CHERN, *American differential geometry-Some personal notes*, in "A century of mathematics in America", Duren, Peter L., et al., edit., American Mathematical Soc., 1988.

[21] S. S. CHERN, *A Mathematician and His Mathematical Work: Selected Papers*, World Scientific, 1996.

[22] C. CILIBERTO, E. SERNESI, *Singularities of the theta divisor and congruences of planes*, J. of Algebraic Geometry, **1** (1992), 231-250.

[23] J. L. COOLIDGE, *Corrado Segre*, Bulletin of the American Mathematical Society, **33** (3) (1927), 352-357.

[24] G. DARBOUX, *Lecons sur la théorie générale des surfaces et le applications géométriques du calcul infinitésimale*, vol. I-IV, Gauthier-Villars, Paris, 1889-1896, reprinted by Chelsea, New York, 2003.

[25] G. DARBOUX, *Sur le contact des courbes et des surfaces*, Bull. Sc. math., **4** (2), (1880), 356-358.

[26] P. DEL PEZZO *Sugli spazii tangenti ad una superficie o ad una varietà immersa in uno spazio a più dimensioni*, Rend. R. Acc. delle Scienze Fisiche e Mat. di Napoli, **25** (1886), 176-180.

[27] L. EULER, *Introductio in analysis infinitorum*, Lausanne, Marcum-Michaelem Bousquet, 1748.

[28] L. EULER, *De solidis quorum superficiem in planum explicare licet*, Novi commentarii academiae scientiarvm imperiatis Petropolitanae, **16** (1771), 3-34; Rist. Leonhardi Euleri Opera Omnia: Series 1, **28**, 161-186.

[29] G. FANO, *La théorie des groupes continus et la géometrie*, traduzione commentata di E. Cartan (1869-1951) dell'articolo di G. Fano per la Enzyklopädie der Mathematische Wisseschaften, Vol. III, **1**A (1907-1910).

[30] G. FUBINI, *Definizione proiettivo-differenziale di una superficie*, Atti Accad. Torino, **49** (1914).

[31] G. FUBINI, *Invarianti proiettivo differenziali delle curve tracciate su una superficie e definizione proiettivo-differenziale di una superficie*, Ann. di Mat. pura e appl., **25** (3), (1916), 229-252.

[32] G. FUBINI, *Introduzione alla Geometria proiettiva differenziale d'una superficie*, Introduzione alla seconda edizione di [5], (1923).

[33] G. FUBINI, E. CECH, *Geometria proiettiva differenziale*, Zanichelli, Bologna, 1926.

[34] G. FUBINI, E. CECH, *Introduction á la Géométrie projective différentielle des surface*, Gauthier-Villars, Paris, 1931.

[35] H. GRASSMANN, *Die Lineale Ausdehnungslehre*, Leipzig, 1844.

[36] G. GREEN, *Memoir on the general theory of surfaces and rectilinear congruences*, Transactions of the American Mathematical Society, **20** (2) (1919), 79-153.

[37] Ph. GRIFFITHS, *On Cartan's method of Lie groups and moving frames as applied to uniqueness and existence questions in differential geometry*, Duke Math. J., **41** (1974), 775-814.

[38] Ph. GRIFFITHS, J. HARRIS, *Algebraic geometry and local differential geometry*, Ann. Sci. Éc. Norm. Sup., (4) **12** (1979), 355-452.

[39] G. H. HALPHEN, *Sur la recherche des points d'une courbe algébrique plane, qui satisfont à une condition exprimée par une équation différentielle algébrique, et sur les questions analogues dans l'espace*, Le Journal de math., **12** (1876), 371-408.

[40] G. H. HALPHEN, *Sur les invariants differéntiels*, Gauthier-Villars, Paris, 1878.

[41] G. H. HALPHEN, *Sur les invariants differéntiels des courbes gauches*, Journ. de l'école Polytech., **28** (1880).

[42] T. A. IVEY, J. M. LANDSBERG, *Cartan for beginners: differential geometry via moving frames and exterior differential systems*, American Mathematical Society, Providence, RI, **61**, 2003.

[43] G. R. JENSEN, E. MUSSO, *Rigidity of hypersurfaces in complex projective space*, Annales scientifiques de l'É.N.S. 4e série, tome 27, no 2, (1994), 227-248.

[44] F. KLEIN, *Gesammelte Mathematische Abhandlungen*, Vol. I-III, Berlin, 1921-1923.

[45] F. KLEIN, *Zur Theorie der Liniencomplexe des ersten und zweiten Grades*, Mathematische Annalen, **2** (1870), 198-226.

[46] J. L. LAGRANGE, *Sur la construction des cartes géographiques*, Nouveaux mémoires de l'Académie Royale des Sciences et Belles-lettres de Berlin, (1779) Premier mémoire, Oeuvres complètes, **4**, 637-664. Second mémoire, Oeuvres completes, **4**, 664-692.

[47] E. P. LANE, *A Treatise on Projective Differential Geometry*, The University of Chicago press, 1943.

[48] E. P. LANE, *Wilczynski's and Fubini's canonical systems of differential equations*, Bulletin of the American Mathematical Society, **32.4** (1926), 365-373.

[49] E. P. LANE, *Ernest Julius Wilczynski*, Amer. Math. Monthly, **39** (1932), 567-569.

[50] A. LASCOUX, *The differential equation satisfied by a plane curve of degree n*, Bull. Sci. Math. , **130** (2006), 354-359.

[51] E. E. LEVI, *Saggio sulla teoria delle superfcie a due dimensioni immerse in un iperspazio*, Atti R. Scuola Norm. Sup. Pisa, **10** (1905), 1-99.

[52] S. LIE, *On differential invariants*, Math. Annalen, **24** (1884), 537-578. Traduzione inglese commentata da R. Hermann, in *Sophus Lie's 1884 Differential Invariant Paper*, traduzione di Michael Ackerman, Brookline, Mass. (Math. Sci. Press). 1976.

[53] S. LIE, G. SCHEFFERS, *Geometrie der Berührungstranformationen*, Teubner, leipzig, 1896, rist. da Chelsea, New York, 1977.

[54] G. LORIA, *Intorno a la vita e le opere di Gaetano Giorgini*, Giorn. Mat. Batt., **31** (1893).

[55] G. Monge, *Sur les développées des courbes à double courbure et leurs inflexions*, Journal encyclopédiquee, (1769), 284-287.

[56] G. Monge, *Mémoire sur les propriétés de plusieurs genres de surfaces courbes, particulièrment sur celles des surfaces d'eveloppables, avec une application à la theorie des ombres et des pénombres*. Mémoires de divers scavants, **9** (1780), 593-624 (scritto nel 1775).

[57] G. Monge, *Mémoire sur les développées, les rayons de courbure, et les différents genres d'inflexions des courbes à double courbure*. Mémoires de divers scavans **10**, 511-550 (scritto nel 1771).

[58] G. Monge, *Géométrie descriptive*, Baudouin, Paris, 1794-95.

[59] G. Monge, *Sur les Equations differentielles de courbes du second degré*, Corresp. sur l'école Polyetch., Paris, II, (1809-13), 51-54.

[60] E. L. Malus, *Théorie de la double réfraction de la lumière dans les substances cristallisés*, Garnery, Paris, 1810.

[61] A. F. Möbius, *Lehrbuch der statik*, Göschen, 1837.

[62] J. Plücker, *Neue Geometrie des Raumes: gegründet auf die Betrachtung der geraden Linie als Raumelement*, Teubner, 1868.

[63] H. Poincaré, *Notice sur Halphen*, Journal de l'école Polytechnique, **60** (1890), 137-161.

[64] S. Roberts, Educational Times, Mathematical questions and solutions, **10**, 47.

[65] D. E. Rowe, *Three Letters from Sophus Lie to Felix Klein on Parisian Mathematics during the Early 1880's*, The Mathematical Intelligencer, **7** (3), 1985, 74-77.

[66] D. E. Rowe, *Geometry and the Emergence of Transformation Groups, The Early Geometrical Works of Sophus Lie and Felix Klein*, in "The Hystory of Modern Mathathematics", Vol. 2, Academic Press, 1988.

[67] F. Russo, *On the geometry of some special projective varieties*, UMI-Springer Lecture Notes in Math., **18**, 2016.

[68] B. Segre, *Opere scelte*, Cremonese, Roma, 1987-2000.

[69] B. Segre, *Généralisation de la trasformation de Laplace*, C. R. Acad. Sci. Paris, **183** (1926), 1238-1250.

[70] C. Segre, *Su alcuni punti singolari delle curve algebriche, e sulla linea parabolica di una superficie*, Atti R. Accad. Lincei, **6** (1897), 168-175.

[71] C. Segre, *Su una classe di superficie degl'iperspazi legate colle equazioni lineari alle derivate parziali di 2º ordine*, Atti R. Accad. Sci. Torino, 42 (1906-07), 1047-1079.

[72] C. Segre, *Sulle congruenze rettilinee W aderenti a due superficie rigate*, Atti R. Accad. Torino, **42** (1906-07), 539-550.

[73] C. Segre, *Sulle congruenze rettilinee W di cui una od ambe le falde focali sono rigate*, Atti R. Accad. Torino, **49** (1913-14), 257-269.

[74] C. Segre, *Complementi alla teoria delle tangenti coniugate di una superficie*, Atti R. Accad. Lincei, **17** (1908), 405-412.

[75] C. Segre, *Preliminari di una teoria delle varietà luoghi di spazi*, Rend. Circ. Mat. Palermo, **30** (1910), 87-121.

[76] J. J. Sylvester, *On the method of reciprocants as containing an exhaustive theory of the singularities of curves*, Nature, **33** (1886), 222-231.

[77] J. J. Sylvester, *Lectures on the theory of reciprocants*, Amer. J. of Math, **9** (4) (1887), 297-352.

[78] R. Taton, *Gaspar Monge*, Birkhäuser, Basel, 1950.

[79] A. Terracini, *Sulle V_k per cui la varietà degli S_h $(h+1)$ seganti ha dimensione minore dell'ordinario*, Rend. del Circolo Mat. di Palermo, **31**, (1911), 392-396.

[80] A. Terracini, *Alcune questioni sugli spazi tangenti e osculatori ad una varietà*, (3 articoli), Atti della R. Acc. delle Scienze di Torino, **49** (1913), **51** (1916), **55** (1920).

[81] A. Terracini, *Sull'elemento lineare proiettivo di una superficie*, Rend. della R. Acc. Nazionale dei Lincei, (6) **3** (1926), 267-271.

[82] A. Terracini, *Sul significato geometrico della normale proiettiva*, Rend. della R. Acc. Nazionale dei Lincei, (6) **3** (1926), 584-591.

[83] A. Terracini, *Sui sistemi semplicemente infiniti di piani nello spazio a cinque dimensioni*, Atti della R. Acc. delle Scienze di Torino, **63**, (1937-38).

[84] A. Terracini, *Guido Fubini e la geometria proiettiva differenziale*, Rend. del Sem. Mat. dell'Univ. e Politecnico di Torino, **9** (1949-50), 97-123.

[85] A. Terracini, *Prefazione al secondo volume delle opere di C. Segre*, Cremonese, Roma, 1958.

[86] A. Terracini, *Esposizione di alcuni risultati di geometria proiettiva differenziale negli iperspazi*, appendice al volume [33].

[87] E. J. Wilczynski, *Projective differential geometry of curves and ruled surfaces*, Teubner, Leipzig, 1906.

[88] F. Zak, *Tangents and Secants of Algebraic Varieties*, Translations of Mathematical Monographs, American Mathematical Society, **127**, 1993.

Ciro Ciliberto

Ciro Ciliberto è un cultore di geometria algebrica. Tra i suoi interessi vi sono anche la storia della matematica e la divulgazione scientifica. Ha insegnato presso le università di Lecce, Napoli ''Federico II'' e Roma "Tor Vergata", dove è stato ordinario di Geometria Superiore fino all'ottobre del 2020. Ciro Ciliberto è autore di vari testi didattici e di numerosi articoli di ricerca scientifica pubblicati su riviste italiane e straniere a diffusione internazionale, e unisce alla passione per la matematica anche quella per la pittura e la scrittura.