Matematica, Cultura e Società

Rivista dell'Unione Matematica Italiana

Alessandro Cordelli

Teorema di Pick e Serie di Farey

Matematica, Cultura e Società. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **7** (2022), n.2, p. 159–168.

Unione Matematica Italiana

¡http://www.bdim.eu/item?id=RUMI_2022_1_7_2_159_0¿

Matematica, Cultura e Società. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2022.

Matematica, Cultura e Società – Rivista dell'Unione Matematica Italiana
Serie I, Vol. 7, N. 2, agosto 2022, 159-168

Teorema di Pick e Serie di Farey

ALESSANDRO CORDELLI
E-mail: a.cordelli@inwind.it

Sommario: *Le successioni di Farey sono sequenze di frazioni crescenti nell'intervallo [0;1] con i denominatori minori o uguali a un valore fissato, mentre il teorema di Pick fornisce una formula per calcolare l'area di poligoni qualsiasi costruiti su un reticolo in cui le coordinate sono numeri interi. Sembrerebbero argomenti distanti, ma invece esiste una stretta relazione tra di essi. In particolare la proprietà fondamentale delle serie di Farey si può ricavare dal teorema di Pick, mentre – avendo dimostrato tale proprietà per altra strada – essa può essere usata per una dimostrazione del teorema di Pick. In questo articolo analizzeremo in dettaglio questa interessante relazione.*

Abstract: *Farey sequences are sequences of fractions in increasing order in the interval [0;1] whose denominators are less than or equal to a given value. Pick's theorem provides a formula for the calculation of the area of polygonal regions on a lattice with integer coordinates. Although they seem to be quite unrelated topics there is a deep relationship between them. In particular, the fundamental property of Farey sequences can be inferred from Pick's theorem. Conversely, the same property can be used as a starting point of a proof of Pick's theorem. This paper concerns the analysis of such an interesting relationship.*

1. – Introduzione

Il problema a cui si applica il teorema di Pick è il calcolo dell'area di poligoni tali che i loro vertici si trovino sugli incroci di un reticolo regolare. Come esempio, prendiamo in considerazione un piano cartesiano e in esso il poligono mostrato in figura 1, i cui vertici hanno coordinate intere. Tale poligono avrà un certo numero di punti a coordinate intere interni (nella figura evidenziati in rosso) e sul bordo (nella figura evidenziati in blu). Del poligono, inoltre, è facile calcolare l'area, anche se la sua forma è irregolare. Basta infatti inscriverlo (come in figura 2) in un rettangolo coi lati paralleli agli assi e poi sottrarre opportunamente i triangoli in eccesso. Ci domandiamo se esista una relazione tra queste due quantità, cioè il numero di punti interni e sul bordo e l'area del poligono. Nel nostro esempio ci sono 11 punti interni e 4 sul bordo, mentre l'area si ottiene togliendo 4 triangoli dal rettangolo 7×5: il primo di base 7 e altezza 2, il secondo di base 5 e altezza 2, il terzo di base 7 e altezza 1, il quarto di base 5 e altezza 3. Ora,

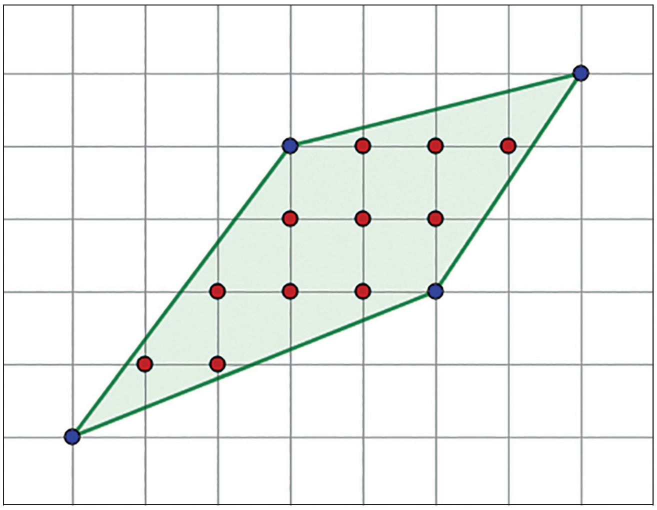


FIGURA 1.

se giochiamo un po' con i numeri di questo esempio, troviamo che la somma del doppio dei punti interni con quelli del bordo diminuita di 2 vale 24, che è il doppio dell'area del quadrilatero. Questo non è un caso. La semplice relazione trovata ha una validità assolutamente generale, stabilita dal teorema di Pick. Malgrado questo sia un risultato di carattere eminentemente geometrico, il teorema di Pick ha molto

Accettato: il 10 marzo 2022.

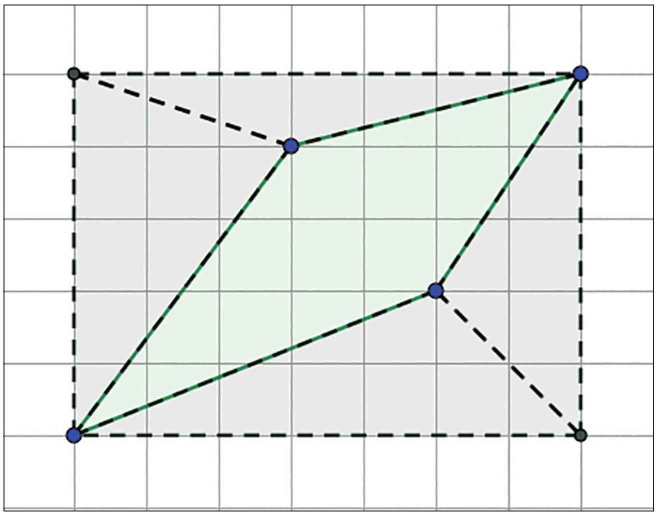


FIGURA 2.

più a che fare con la teoria dei numeri di quanto solitamente viene evidenziato nei lavori (non solo di carattere didattico) ad esso dedicati [1]. D'altra parte, lo stesso Pick aveva in animo di proporre una via geometrica alla teoria dei numeri, come si può desumere dal titolo del suo articolo originale [2] del 1899.

Molte delle dimostrazioni che si possono trovare in letteratura [3, 4, 5, 6] del teorema seguono lo schema originale proposto da Pick: si individua una quantità ottenuta a partire dal numero dei punti interni e dei punti sul perimetro che risulta essere additiva quando si compone un poligono più grande a partire da due poligoni adiacenti. Tale quantità risulta essere uguale all'area del poligono per i triangoli o altri poligoni di base, e dunque si procede induttivamente, per esempio sul numero dei lati del poligono. In particolare, l'area di un *triangolo primitivo* (cioè un triangolo che non ha punti a coordinate intere interni né sul perimetro, a parte i vertici) ha sempre lo stesso valore indipendentemente dalla forma del triangolo stesso.

È a questo punto che entra in gioco la teoria dei numeri. Vi è infatti un legame semplice e diretto con le *serie di Farey*. Queste sono successioni di frazioni proprie, in ordine crescente, ridotte ai minimi termini e con i denominatori minori o uguali a un valore fissato $\left(\text{ad esempio, la serie di Farey di ordine 4 è: } \frac{0}{1}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{1}{1}\right)$. Il legame risiede nel fatto che un triangolo con i vertici nell'origine e in due punti le cui coordinate x e y siano rispettivamente denominatore e numeratore di due frazioni adiacenti in una serie di Farey (che chiameremo *triangolo di Farey*) è un triangolo primitivo. Quindi, il fatto che l'area di tali triangoli (esprimibile in termini dei numeratori e denominatori delle due frazioni) sia costante si traduce in una proprietà – di fatto la proprietà fondamentale – delle serie di Farey.

Tuttavia le proprietà delle serie di Farey possono essere dimostrate anche per via strettamente aritmetica, senza fare riferimento al teorema di Pick. Anzi, la sopra citata proprietà delle serie di Farey, permette di sviluppare una dimostrazione alternativa del teorema di Pick. Sembra dunque che sussista una stretta relazione tra il teorema di Pick e le proprietà delle serie di Farey.

Vi sono però alcuni aspetti un po' delicati nella dimostrazione di questa relazione. In particolare, mentre il teorema di Pick garantisce senz'altro che valgano le proprietà delle serie di Farey (dato che si stabilisce facilmente che ogni triangolo di Farey è un triangolo primitivo, come mostreremo più avanti), il percorso inverso richiede che ogni triangolo primitivo sia anche un triangolo di Farey, cosa che viene spesso data per scontata ma che non lo è. Scopo del presente lavoro è proprio quello di approfondire la relazione tra il teorema di Pick e le serie di Farey.

Nelle pagine che seguono non si assumerà che il lettore sia particolarmente esperto di questi argomenti, per cui si procederà dapprima ad illustrare il teorema di Pick e le serie di Farey. Successivamente si mostrerà come dal primo si possono desumere le proprietà delle seconde, e viceversa. Una particolare attenzione verrà infine prestata alla dimostrazione del fatto che qualsiasi triangolo primitivo è un triangolo di Farey.

2. – Il teorema di Pick

Seguendo la dimostrazione originale di Pick, consideriamo un reticolo piano (o *piano reticolare*) di punti equispaziati lungo due direzioni (non necessariamente ortogonali). Nel suo articolo Pick aveva adottato la convenzione di scegliere come area unitaria quella di uno dei due triangoli uguali in cui un parallelogramma elementare (cioè avente i vertici in quattro punti reticolari adiacenti nelle due direzioni e nessun altro punto reticolare sul perimetro o all'interno) viene diviso da una sua diagonale, cosicché le aree risultavano doppie rispetto alla definizione usuale. Tuttavia l'eventuale fattore $\frac{1}{2}$ non modifica la sostanza della dimostrazione.

Sul piano reticolare consideriamo un qualsiasi poligono avente i vertici in punti reticolari. Indichiamo poi con i il numero di punti interni al poligono, con u quello dei punti sul suo perimetro e definiamo un indice associato al poligono stesso mediante l'espressione: $2i + u - 2$. Se dividiamo il poligono in due parti unendo due punti (reticolari) qualsiasi del suo bordo e indichiamo con δ il numero di punti appartenenti a tale segmento, esclusi gli estremi, osserviamo che: $i = i_1 + i_2 + \delta$ e $u = u_1 + u_2 - 2\delta - 2$, dove i_1, i_2, u_1, u_2, sono i corrispondenti valori di i e u per i due poligoni. Se si sommano gli indici dei due poligoni costituenti aggiungendo e togliendo la quantità 2δ si ottiene: $2(i_1 + i_2 + \delta) + (u_1 + u_2 - 2\delta - 2) - 2 = 2i + u - 2$.

Dunque: $2i + u - 2 = (2i_1 + u_1 - 2) + (2i_2 + u_2 - 2)$. In altri termini, quando viene costruito un poligono "attaccandone" insieme altri due, l'indice del nuovo poligono è dato dalla somma dei suoi costituenti.

Ora, per un triangolo che sia metà di un parallelogramma elementare tale indice vale 1 ($i = 0$ e $u = 3$), quindi l'area di un poligono i cui lati siano paralleli agli assi – essendo composto da un numero intero di parallelogrammi elementari – è esattamente uguale alla metà del suo indice. Questa proprietà può essere generalizzata al caso in cui i lati del poligono non sono paralleli agli assi. Tale generalizzazione – che viene solo delineata nell'articolo originale di Pick – non è affatto banale e presenta diversi aspetti delicati. Noi prenderemo qui in considerazione solo il caso dei triangoli, dato che è quello rilevante riguardo alla relazione con le serie di Farey.

Per prima cosa osserviamo che l'area di un triangolo con due lati paralleli agli assi (come ABF in figura 3) è pari a metà del suo indice. Infatti un tale triangolo è metà di un parallelogramma con i lati paralleli agli assi per il quale – come per qualsiasi altro poligono con i lati paralleli agli assi – l'area è uguale a metà dell'indice. D'altra parte anche l'indice del triangolo è la metà dell'indice del parallelogramma (quest'ultimo è diviso dalla diagonale in due triangoli uguali). Quindi, essendo l'indice del triangolo metà dell'indice del parallelogramma, l'area del triangolo metà dell'area del parallelogramma, l'area del parallelogramma uguale a metà del suo indice, ne segue che anche l'area del triangolo è metà del suo indice.

Consideriamo ora un generico triangolo – come ABC nella figura 3 – con i lati non paralleli agli assi e inscritto in un parallelogramma con i lati paralleli agli assi. La somma dell'area di ABC con le aree dei triangoli ABF, BCE e ADC uguaglia l'area del parallelogramma $ADEF$. D'altra parte anche la somma dell'indice di ABC con gli indici di ABF, BCE e ADC è uguale all'indice di $ADEF$. Inoltre, le aree di ABF, BCE e ADC come pure quella di $ADEF$ sono uguali alla metà dei relativi indici. Da ciò deduciamo che anche l'area di ABC deve essere uguale a metà del proprio indice.

Vale quindi il

TEOREMA 1. – (teorema di Pick): *l'area di qualsiasi poligono i cui vertici si trovano su nodi reticolari è pari a metà del suo indice.*

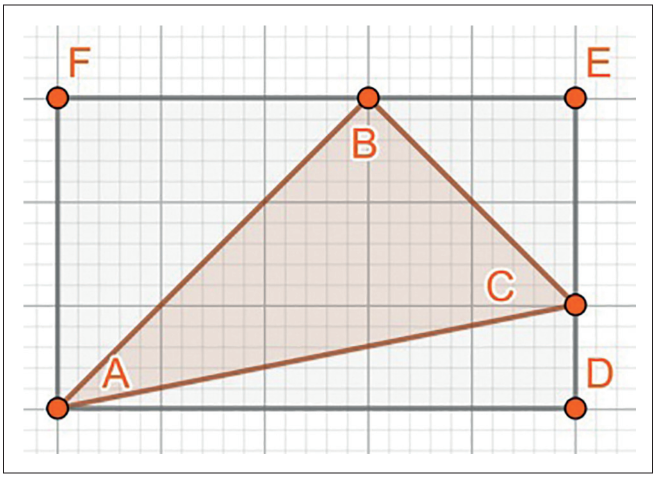


FIGURA 3.

3. – Le Serie di Farey

Passiamo adesso all'altro aspetto trattato nel presente articolo. Come già accennato sopra, le serie di Farey sono sequenze ordinate di numeri razionali, ovvero di frazioni ridotte ai minimi termini e con i denominatori minori di un determinato valore (l'ordine della serie). Più precisamente: la serie di Farey $\Im_n$ di ordine n è definita come **la successione in ordine crescente delle frazioni ridotte ai minimi termini comprese tra 0 e 1 e tali che il loro denominatore non superi n.**

Le serie di Farey relative ai primi ordini sono:

$$\frac{0}{1}, \frac{1}{1}$$

$$\frac{0}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{1}$$

$$\frac{0}{1}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{1}$$

$$\frac{0}{1}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{1}{1}$$

$$\frac{0}{1}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{1}{1}$$

$$\frac{0}{1}, \frac{1}{6}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{1}{1}$$

$$\frac{0}{1}, \frac{1}{7}, \frac{1}{6}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{2}{7}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{3}{7}, \frac{1}{2}, \frac{4}{7}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{5}{7}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{6}{7}, \frac{1}{1}$$

$\ldots$

Queste sequenze hanno diverse interessanti proprietà, specie per quanto riguarda la relazione tra un termine e i suoi primi vicini. In particolare due sono le relazioni che coinvolgono frazioni adiacenti in una serie di Farey e che si implicano l'una l'altra.

La proprietà fondamentale delle serie di Farey è espressa dal

TEOREMA 2. – *se* $\frac{\alpha}{\beta}$ *e* $\frac{\gamma}{\delta}$ $\left(\text{con } \frac{\alpha}{\beta} < \frac{\gamma}{\delta}\right)$ *sono due termini contigui in una serie di Farey, allora* $\beta \cdot \gamma - \alpha \cdot \delta = 1$.

Per la dimostrazione seguiremo lo sviluppo proposto da Hardy e Wright nello loro celebre opera sulla teoria dei numeri [7]. Posto $\alpha < \beta$, in modo da escludere il caso $\frac{\alpha}{\beta} = 1$ in cui non vi è un termine successivo, consideriamo due interi x e y tali che $\beta x - \alpha y = 1$. Questa equazione ammette sicuramente soluzioni in quanto α e β sono primi tra loro, ed è noto che l'equazione diofantea $ax + by = c$ è risolubile quando c è il M.C.D. tra a e b, o un suo multiplo. Ricordiamo che se un'equazione diofantea ammette una soluzione, allora ne ammette infinite. Infatti, se x_0 e y_0 sono soluzioni dell'equazione, anche $x_0 + \alpha r$ e $y_0 + \beta r$ (con r intero qualsiasi) lo sono, essendo:

$$\beta(x_0 + \alpha r) - \alpha(y_0 + \beta r) = \beta x_0 - \alpha y_0 = 1.$$

Essendo $n \geq \beta$, nella progressione aritmetica $y_0 + \beta r$ vi sarà un termine (positivo) compreso tra $n - \beta$ e n. Indichiamo con y tale valore e con x il corrispondente termine, soluzione dell'equazione $\beta x - \alpha y = 1$. Se in questa equazione scambiamo i ruoli tra α e β e x e y, considerando i primi due come incognite e i secondi come coefficienti, possiamo dedurre che x e y sono primi tra loro. Infatti, già sappiamo che tale equazione ammette soluzioni e, come già ricordato, un'equazione diofantea è risolubile se e solo se il termine noto è il M.C.D. dei coefficienti o un suo multiplo. Inoltre, x è minore di y (questo fatto viene dato per scontato nella dimostrazione di Hardy e Wright, ma non è del tutto ovvio; per non appesantire troppo i passaggi ne daremo una giustificazione al termine della dimostrazione del teorema). Quindi, essendo $y \leq n$, anche la frazione $\frac{x}{y}$ appartiene a $\Im_n$.

A questo punto procediamo per assurdo e, indicata con $\frac{\alpha'}{\beta'}$ la frazione che segue immediatamente $\frac{\alpha}{\beta}$ in $\Im_n$ (che sicuramente esiste, avendo posto $\alpha < \beta$ ed essendo d'altra parte $\frac{1}{1}$ l'ultimo termine di qualsiasi serie di Farey), supponiamo che $\frac{x}{y}$ sia diverso da $\frac{\alpha'}{\beta'}$. Poiché $\beta x - \alpha y > 0$, $\frac{x}{y}$ è maggiore di $\frac{\alpha}{\beta}$, ma se non coincide con $\frac{\alpha'}{\beta'}$ sarà maggiore anche di quest'ultima frazione (si è infatti detto che $\frac{\alpha'}{\beta'}$ è l'immediato successore di $\frac{\alpha}{\beta}$). Vediamo che questo ci porta a una contraddizione.

Poiché $\frac{x}{y} - \frac{\alpha'}{\beta'} > 0$ è anche $\frac{x\beta' - y\alpha'}{y\beta'} > 0$, cioè $x\beta' - y\alpha' \geq 1$, dato che x, y, α', β' sono numeri interi. Quindi, dividendo l'ultima disuguaglianza per $y\beta'$, si ha: $\frac{x}{y} \geq \frac{\alpha'}{\beta'} + \frac{1}{y\beta'}$. Applichiamo lo stesso ragionamento alla disequazione $\frac{\alpha'}{\beta'} - \frac{\alpha}{\beta} > 0$: $\beta\alpha' - \beta'\alpha \geq 1$ e, dopo aver diviso per $\beta\beta'$, otteniamo: $-\frac{\alpha}{\beta} \geq \frac{1}{\beta\beta'} - \frac{\alpha'}{\beta'}$.

Sommando le due disequazioni riquadrate otteniamo: $\frac{x}{y} - \frac{\alpha}{\beta} \geq \frac{1}{\beta\beta'} + \frac{1}{y\beta'} = \frac{\beta + y}{\beta\beta' y}$. Ricordiamo che $\beta x - \alpha y = 1$, da cui, dividendo per βy, si ottiene: $\frac{x}{y} - \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\beta x - \alpha y}{\beta y} = \frac{1}{\beta y}$. Poiché inoltre y è maggiore di $n - \beta$ si ha che $\beta + y > n$ e, essendo β minore o uguale a n, si ha anche $\frac{n}{\beta} > 1$; pertanto: $\frac{\beta + y}{\beta\beta' y} > \frac{n}{\beta\beta' y} \geq \frac{1}{\beta y}$. Mettendo insieme queste tre catene di uguaglianze/disuguaglianze otteniamo: $\frac{1}{\beta y} = \frac{x}{y} - \frac{\alpha}{\beta} \geq \frac{\beta + y}{\beta\beta' y} > \frac{1}{\beta y}$. Risulta cioè che $\frac{1}{\beta y}$ è tanto il primo che l'ultimo termine di tale catena, si ha quindi una contraddizione che si può eliminare solo assumendo che $\frac{x}{y}$ coincida con $\frac{\alpha'}{\beta'}$, che è proprio quanto si voleva dimostrare.

Come detto sopra, a titolo di completezza, terminiamo la dimostrazione del teorema 2 facendo vedere che se $\beta x - \alpha y = 1$ allora è necessariamente $x \leq y$. Anche in questo caso procediamo per assurdo e supponiamo che sia $x > y$, cioè $x = y + q$, con $q > 0$. D'altra parte, essendo $\frac{\alpha}{\beta}$ un termine di una serie di Farey, è anche $\beta \geq \alpha$, cioè $\beta = \alpha + p$, con $p \geq 0$. Sostituendo in $\beta x - \alpha y = 1$ abbiamo:

$$(\alpha + p)(y + q) - \alpha y = 1,$$

cioè $py + q\alpha + pq = 1$, ma questo non può essere perché p, y, q, α sono interi non negativi. In effetti, questa relazione sarebbe compatibile con $p = 0, q = \alpha = 1$, ma in tal caso si avrebbe che anche $\beta = 1$, in contraddizione con quanto posto all'inizio della dimostrazione, e cioè che $\alpha < \beta$.

L'altra proprietà fondamentale delle serie di Farey è espressa dal

TEOREMA 3. – *se* $\frac{\alpha}{\beta}$, $\frac{\gamma}{\delta}$ *e* $\frac{\varepsilon}{\theta}$ $\left(con\ \frac{\alpha}{\beta} < \frac{\gamma}{\delta} < \frac{\varepsilon}{\theta}\right)$ *sono tre termini contigui in una serie di Farey, allora il termine centrale è la* mediante *dei due termini estremi, cioè* $\frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha + \varepsilon}{\beta + \theta}$.

Seguendo ancora Hardy e Wright, dimostreremo che l'enunciato del Teorema 2 è equivalente a quello del Teorema 3, e quindi avendo dimostrato sopra il Teorema 2 risulta automaticamente dimostrato anche il Teorema 3.

Il Teorema 2 implica il Teorema 3.

Dal teorema 2 sappiamo che: $\beta \cdot \gamma - \alpha \cdot \delta = 1$ e che $\delta \cdot \varepsilon - \theta \cdot \gamma = 1$. Moltiplichiamo la prima equazione per ε, la seconda per α e sommiamole: $\gamma \cdot (\beta\varepsilon - \alpha\theta) = \alpha + \varepsilon$. Moltiplichiamo poi la prima per θ e la seconda per β e sommiamole: $\delta \cdot (\beta\varepsilon - \alpha\theta) = \beta + \theta$. Osserviamo che la quantità $\beta\varepsilon - \alpha\theta$ è sicuramente diversa da zero (infatti, la disuguaglianza $\frac{\varepsilon}{\theta} > \frac{\alpha}{\beta}$ si può riscrivere come: $\frac{\beta\varepsilon - \alpha\theta}{\beta\theta} > 0$, cioè $\beta\varepsilon - \alpha\theta \geq 1$), possiamo quindi dividere le due equazioni termine a termine ottenendo $\frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha + \varepsilon}{\beta + \theta}$.

Il Teorema 3 implica il Teorema 2.

La dimostrazione della seconda parte dell'equivalenza necessita di un risultato preliminare: **in una serie di Farey non possono aversi due termini contigui con lo stesso denominatore (a meno che la serie stessa non si riduca a soli due termini, cosa che avviene solo nel caso $n = 1$)**. Per dimostrare questo lemma procediamo per assurdo e supponiamo che $\frac{\alpha}{\beta}$ e $\frac{\alpha'}{\beta}$ (con $\beta > 1$) siano due termini contigui in una serie di Farey. Hardy e Wright dimostrano questa proprietà mediante la seguente catena di disuguaglianze: $\frac{\alpha}{\beta} < \frac{\alpha}{\beta - 1} < \frac{\alpha + 1}{\beta} \leq \frac{\alpha'}{\beta}$; cioè $\frac{\alpha}{\beta - 1}$ si trova tra $\frac{\alpha}{\beta}$ e $\frac{\alpha'}{\beta}$ in $\Im_n$, quindi una contraddizione.

Chiariamo brevemente i passaggi di questa deduzione che potrebbero non essere del tutto intuitivi. Dall'ipotesi si ha $\alpha' > \alpha$ e quindi, essendo α, β, α' numeri interi, $\alpha' \geq \alpha + 1$. D'altra parte, avendo escluso il caso $n = 1$, è anche $\alpha' < \beta$, quindi

$\alpha < \beta - 1$. Questo ci permette di scrivere: $\frac{\alpha}{\beta - 1} < \frac{\alpha + 1}{\beta}$, come si può facilmente verificare moltiplicando ambo i termini di questa disuguaglianza per $\beta \cdot (\beta - 1)$ e sviluppando i calcoli. Inoltre valgono evidentemente anche le disuguaglianze $\frac{\alpha}{\beta} < \frac{\alpha}{\beta - 1}$ e $\frac{\alpha}{\beta} < \frac{\alpha + 1}{\beta}$. Mettendo tutto insieme avremmo che $\frac{\alpha}{\beta - 1}$ (che è sicuramente un elemento di $\Im_n$ in quanto il denominatore è minore di β che a sua volta è minore o uguale a n, a maggior ragione se la frazione così ottenuta non è ridotta ai minimi termini) cade tra $\frac{\alpha}{\beta}$ e $\frac{\alpha'}{\beta'}$, che però per ipotesi sono contigui in $\Im_n$.

Passiamo quindi alla dimostrazione dell'equivalenza dei due enunciati. Procederemo per induzione supponendo che l'enunciato del teorema 2 sia vero in $\Im_{n-1}$ e dimostrando che esso vale anche in $\Im_n$, se si assume valido l'enunciato del teorema 3. Siano quindi $\frac{\alpha}{\beta} < \frac{\gamma}{\delta} < \frac{\varepsilon}{\theta}$ tre termini contigui in $\Im_n$, essendo $\frac{\gamma}{\delta}$ una frazione che appartiene a $\Im_n$ ma non a $\Im_{n-1}$; dovrà quindi essere $\delta = n$. Inoltre, in base al lemma, tanto β che θ sono minori di n. Di conseguenza $\frac{\alpha}{\beta}$ e $\frac{\varepsilon}{\theta}$ sono contigue in $\Im_{n-1}$. Poiché, per ipotesi, $\frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha + \varepsilon}{\beta + \theta}$, ma non sappiamo se la frazione $\frac{\alpha + \varepsilon}{\beta + \theta}$ è già ridotta ai minimi termini, sarà $\alpha + \varepsilon = k \cdot \gamma$ e $\beta + \theta = k \cdot \delta$. Ora, poiché sia β che θ sono minori di $n = \delta$, $\beta + \theta$ non può essere 2δ, né tantomeno un altro multiplo di δ. Avremo quindi $k = 1$, cioè $\alpha + \varepsilon = \gamma$ e $\beta + \theta = \delta$. Sostituiamo queste ultime due relazioni nell'espressione $\delta\alpha - \beta\gamma$, ottenendo: $(\beta + \theta) \cdot \alpha - \beta \cdot (\alpha + \varepsilon) = \theta\alpha - \beta\varepsilon = 1$ (in quanto, lo ricordiamo, per l'ipotesi di induzione, la relazione dell'enunciato del Teorema 2 è valida in $\Im_{n-1}$). In maniera del tutto analoga si dimostra che $\theta\gamma - \delta\varepsilon = 1$.

4. – Dal teorema di Pick alle serie di Farey

L'enunciato del Teorema 2 può anche essere dimostrato in maniera molto semplice come corollario

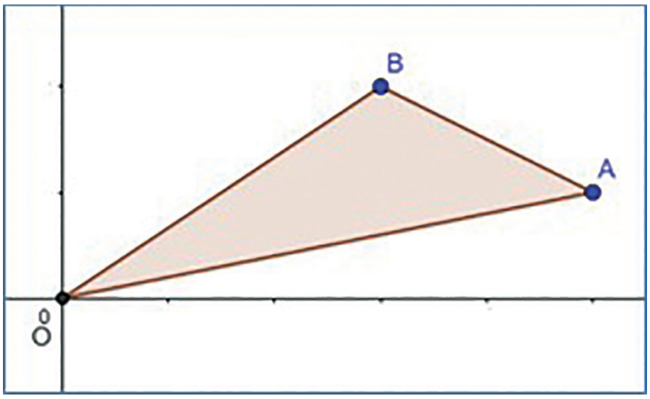


FIGURA 4.

del teorema di Pick. A tal scopo consideriamo (figura 4) nel piano reticolare un triangolo avente un vertice nell'origine e gli altri due nei punti $A(b, a)$ e $B(d, c)$ in modo che $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ siano due termini contigui in una successione di Farey $\Im_N$. Chiamiamo tale poligono *Triangolo di Farey*. Incidentalmente osserviamo che le coordinate di A e B sono positive e che $a < b$ e $c < d$, cosicché in quanto segue possiamo senza perdita di generalità limitarci alla porzione del piano reticolare compresa tra l'asse delle ascisse positive e la bisettrice del primo quadrante.

Per calcolare l'area del triangolo di Farey OAB basterà togliere dal rettangolo di dimensioni b e c i triangoli rettangoli di cateti rispettivamente c e d, a e b, $b - d$ e $c - a$. Se utilizziamo la convenzione di Pick di assegnare area unitaria ai triangoli elementari – in modo che l'area di un poligono coincida con il suo indice – avremo per l'area di OAB la seguente espressione:

$$2cb - cd - ab - (b - d)(c - a) = cb - ad.$$

Facciamo l'ulteriore ipotesi che $\frac{a}{b}$ sia la prima volta che appare (cioè $b = N$). Poiché sia $\frac{a}{b}$ che $\frac{c}{d}$ sono per ipotesi ridotte ai minimi termini, non ci sono punti reticolari sui lati OA e OB. Inoltre, per la definizione stessa di serie di Farey, non vi sono numeri razionali con il denominatore minore o uguale a N tra $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$. Questa condizione, tradotta in termini geometrici, significa che, considerando una qualsiasi retta compresa tra OA e OB $\left(\text{avente cioè pendenza compresa tra } \frac{a}{b} \text{ e } \frac{c}{d}\right)$, il primo punto reticolare K appartenente a tale retta (oltre O) avrà ascissa maggiore di quella di A. In altri termini, il segmento OK non conterrà altri punti reticolari oltre ai suoi estremi. Di conseguenza, non si avranno punti reticolari né all'interno del triangolo OAB né sul lato AB. L'indice del triangolo OAB vale pertanto 1, e quindi, in base al teorema di Pick (nella sua versione relativa ai triangoli, dimostrata sopra), si ha la relazione: $cb - ad = 1$.

5. – Dalle serie di Farey al teorema di Pick

Il percorso delineato nel precedente paragrafo può essere invertito, dimostrando cioè il teorema di Pick a partire dalle proprietà delle serie di Farey [8]. A tale scopo è necessario introdurre elementi topologici una cui completa ed esaustiva trattazione richiederebbe un livello di dettaglio che esula dagli scopi del presente articolo. Svilupperemo quindi la dimostrazione nelle sue linee principali. Il nostro punto di partenza sarà la relazione di Eulero applicata ai grafi planari [9]. Ricordiamo che un grafo si definisce *planare* quando i suoi archi non si intersecano. Ora, la relazione di Eulero per i grafi planari si può ricavare facilmente dalla più celebre relazione che lega il numero di vertici (V), facce (F) e spigoli (S) in un poliedro: $V + F - S = 2$ se osserviamo che un grafo planare è topologicamente equivalente a un poliedro a cui è stata tolta una faccia; cosicché $V + F - S = 1$ per un grafo planare.

Consideriamo adesso un poligono reticolare (vedi figura 5); se suddividiamo la figura in triangoli primitivi unendo opportunamente tra loro i punti interni e quelli sul bordo (per non appesantire troppo la trattazione assumiamo che tale suddivisione sia sempre possibile, anche se in realtà ciò andrebbe dimostrato a parte, ad esempio per induzione) la figura che otteniamo è proprio un grafo planare, al quale possiamo applicare la relazione di Eulero.

Distinguiamo adesso – usando la notazione del teorema di Pick – tra punti interni al poligono, in numero di i, e punti sul bordo, in numero di u. Il nostro obiettivo è quello di trovare una relazione tra il numero di facce del grafo (cioè di triangoli primitivi contenuti nel poligono) e i vertici (cioè i punti, sia interni che sul bordo). A tale scopo osserviamo che a ogni punto sul bordo corrisponde esattamente uno spigolo del bordo, mentre ciascuna faccia è composta da tre spigoli che vengono però contati due volte, dato che ogni spigolo è in comune a due facce. Questa considerazione vale però solo per gli spigoli interni, non per quelli del bordo che appartengono a una faccia sola. Avremo quindi che il triplo del numero delle facce è uguale al doppio degli spigoli, diminuito degli spigoli del bordo: $3F = 2S - u$.

L'altra equazione che useremo è la relazione di Eulero, in cui scriviamo il numero di vertici come somma di quelli interni più quelli esterni: $S = (i + u) + F - 1$. Sostituendo nella prima equazione otteniamo: $3F = 2(i + u) + 2F - 2 - u$, da cui: $F = 2i + u - 2$.

Fino a questo punto abbiamo solo dimostrato che il numero di facce nel grafo planare (e quindi il numero di triangoli primitivi nel poligono) è uguale al suo indice. Per poter asserire la tesi del teorema di Pick (cioè che l'area di un poligono è uguale al suo indice) è richiesto un ulteriore passaggio. In maniera del tutto analoga a quanto fatto nella precedente sezione (mantenendo la convenzione dell'articolo originale di Pick che raddoppia le aree), l'area di un triangolo avente come vertici l'origine e i punti $A(b, a)$ e $B(d, c)$ è data da: $cb - ad$. Se poi il triangolo in questione è un triangolo di Farey, avremo anche:

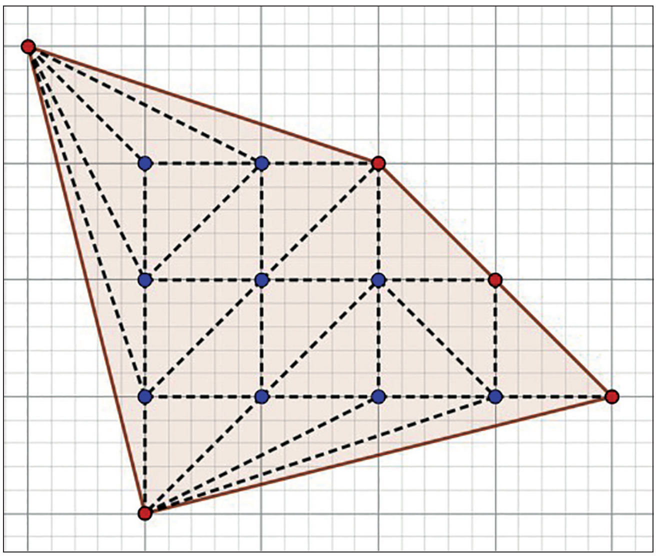


FIGURA 5.

$cb - ad = 1$. Il teorema di Pick risulterà pertanto completamente dimostrato se riusciremo a far vedere che *i triangoli primitivi sono tutti e soli i triangoli di Farey*. In particolare, è essenziale mostrare che tutti i triangoli primitivi sono triangoli di Farey. Infatti, dato che la relazione $cb - ad = 1$ vale con certezza solo per i triangoli di Farey (mentre niente si può dire al momento per triangoli che non siano di Farey), se esistessero triangoli primitivi non di Farey, resterebbe sempre aperta la possibilità che per alcuni di essi l'area sia diversa da 1, cosicché l'area di un poligono che contenga almeno uno di tali triangoli non coinciderebbe più con il suo indice.

6. – Dimostrazione dell'implicazione inversa

Abbiamo già visto come il fatto che un triangolo di Farey sia anche primitivo è una conseguenza diretta della definizione stessa di triangolo di Farey: non possono esserci punti all'interno o sul lato che non passa per l'origine perché le due frazioni sono contigue, e poiché esse sono ridotte ai minimi termini non possono esserci punti neanche sugli altri due lati. Passiamo quindi alla dimostrazione dell'implicazione inversa, cioè del

TEOREMA 4. – *Se un triangolo primitivo costruito sulla porzione di piano reticolare compresa tra l'asse delle ascisse positive e la bisettrice del primo quadrante ha un vertice nell'origine e gli altri due nei punti $A(a,b)$ e $B(c,d)$, allora $\frac{b}{a}$ e $\frac{d}{c}$ sono termini contigui in una successione di Farey.*

Una semplice analisi preliminare mostra che la limitazione al primo semiquadrante non toglie generalità alla dimostrazione in quanto, dato un triangolo reticolare primitivo, è sempre possibile, applicando opportunamente una traslazione, una rotazione di 90, 180 o 270 gradi del sistema di riferimento e una eventuale riflessione intorno alla bisettrice, fare in modo che uno dei vertici da cui nasce un angolo acuto sia nell'origine e che il triangolo giaccia tutto nella prima metà del quadrante positivo. Sottolineiamo che affinché il triangolo sia tutto contenuto nel semiquadrante inferiore la primitività è una condizione essenziale. Il lettore provi ad esempio a considerare il caso di un triangolo primitivo con un angolo acuto nell'origine che abbia un lato "sotto" la bisettrice del primo e terzo quadrante e uno "sopra": un tale triangolo conterrà all'interno o sul bordo il punto (1,1), e dunque non potrà essere primitivo. Si lascia inoltre al lettore il facile compito di analizzare il caso in cui una delle coordinate dei due vertici diversi dall'origine sia zero. Infine, essendo il triangolo primitivo, le frazioni $\frac{b}{a}$ e $\frac{d}{c}$ sono ridotte ai minimi termini.

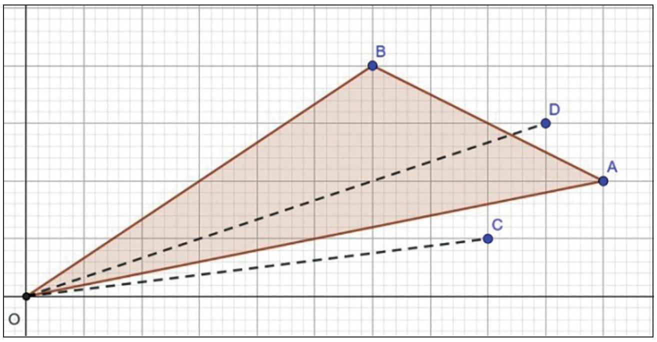


FIGURA 6.

Per fissare le idee facciamo riferimento alla figura 6, cioè $a > b$ e $d > b$ (gli altri casi si affrontano in maniera del tutto simile). Sia inoltre A il punto corrispondente a una frazione che appare per la prima volta nella serie di Farey di ordine N, cosicché $a = N$; la frazione corrispondente a B deve essere allora già presente in una serie di ordine minore di N. Infatti, come abbiamo visto sopra (lemma del teorema 3), due frazioni con lo stesso denominatore non possono essere contigue, ma se tra $\frac{b}{N}$ e $\frac{d}{N}$ si trova un'ulteriore frazione con denominatore minore di N, il corrispondente punto è interno al triangolo OAB e, pertanto, il triangolo non può essere primitivo. Deve quindi necessariamente essere $c < N$.

Dimostreremo il Teorema 4 invertendo e negando ipotesi e tesi, facendo cioè vedere che: **un triangolo corrispondente a due frazioni non contigue nella serie di Farey di ordine pari all'ascissa del punto più a destra contiene sempre almeno un ulteriore punto, al suo interno o sul bordo.**

La dimostrazione procede per induzione. Si verifica agevolmente in maniera diretta che la proprietà è verificata nelle serie di ordine 2, 3, 4, ecc.... Sia

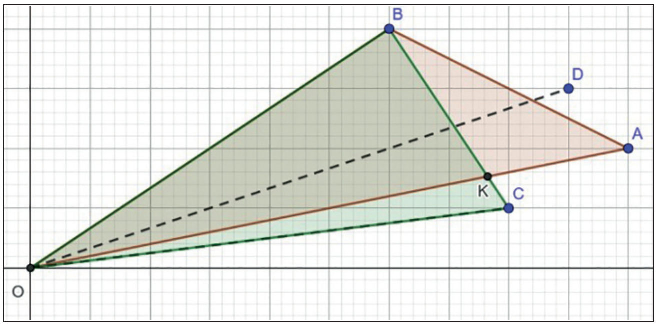


FIGURA 7.

$N \geq 2$ e supponiamo quindi che sia verificata fino all'ordine $N-1$. Siano C e D due punti contigui nella serie di ordine $N-1$ tali che la mediante tra le due corrispondenti frazioni abbia come denominatore e numeratore le coordinate di A. Osserviamo che C, A e D corrispondono a frazioni contigue nella serie di ordine N.

Prendiamo ora in considerazione il triangolo OBC (figura 6): poiché B e C non sono contigui nella serie di ordine $N-1$ (tra i due si trova infatti almeno il punto D) tale triangolo dovrà necessariamente contenere al suo interno o sul bordo almeno un altro punto reticolare (per l'ipotesi dell'induzione).

Ora, il triangolo OBC viene diviso dal segmento OA in due parti: OKB e OKC (figura 7). Poiché l'ascissa di A vale N, mentre sia B che C – e quindi K – hanno ascissa minore di N, il triangolo OKC è interamente contenuto in OAC. Essendo però A e C punti contigui, OAC è un triangolo primitivo, e quindi anche OKC – che pure non è un triangolo primitivo in quanto K non è un punto reticolare – essendo una parte di OAC non conterrà punti reticolari al suo interno o sul bordo, ad eccezione di C e O.

I punti interni a OBC devono quindi trovarsi in OKB. Ma OKB è interamente contenuto in OAB, pertanto tali punti saranno anche interni a OAB, che quindi non è un triangolo primitivo.

Avendo quindi dimostrato che un triangolo in cui le coordinate dei vertici corrispondono a frazioni non contigue (nella serie di Farey di ordine pari all'ascissa del punto più a destra) non è primitivo, possiamo affermare che se un triangolo è primitivo le coordinate dei suoi vertici corrisponderanno a due frazioni contigue in una serie di Farey, e con ciò risulta completata la dimostrazione del teorema di Pick a partire dalle proprietà di frazioni contigue in una serie di Farey.

7. – Conclusioni

Il teorema di Pick e le proprietà della serie di Farey riguardano sotto due aspetti complementari le coppie di numeri naturali: come coordinate di punti sul piano reticolare in un caso, come numeratore e denominatore di una frazione nell'altro. Non stupisce pertanto che esista una correlazione tra i due ambiti. La proprietà fondamentale delle serie di Farey, dalla quale se ne possono dimostrare altre, risulta essere una semplice conseguenza del teorema di Pick per i triangoli dopo che si è osservato che un qualsiasi triangolo di Farey è – in base alla sua stessa definizione – un triangolo primitivo. È altresì possibile dimostrare la proprietà fondamentale delle serie di Farey con un procedimento puramente aritmetico, e una volta acquisito tale risultato, derivare da esso – con l'aiuto della relazione di Eulero – il teorema di Pick. Questo percorso però necessita di poter utilizzare il fatto che ogni triangolo primitivo sia un triangolo di Farey, la cui dimostrazione non è così evidente quanto quella della proposizione inversa, ed è stata qui sviluppata basandosi solo su considerazioni geometriche elementari.

BIBLIOGRAFIA

[1] M. BRUCKHEIMER – A. ARCAVI, Farey Series and Pick's Area Theorem The Mathematical Intelligencer, 17(4) (1995), 64-67

[2] G. A. PICK, Geometrisches zur Zahlentheorie, Sitzungber. Lotos, Naturwissen Zeitschrift, 19 (1899), 311-319

[3] R. W. GASKELL – M. S. KLAMKIN – P. WATSON, Triangulation and Pick's theorem, Math. Mag., 280 (1975), 61-69

[4] R. HONSBERGER, Ingenuity in Mathematics, New Mathematical Library, vol. 23, Mathematical Association of America, Washington DC, 1970, 27-31

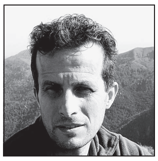
[5] A. C. F. LIU, Lattice points and Pick's theorem, Math. Mag., 52 (1979), 232-235

[6] D. E. VARBERG, Pick's theorem revisited, The American Mathematical Monthly Vol. 92, No. 8, pp. 584-587

[7] G. H. HARDY – E. M. WRIGHT, An introduction to the Theory of Numbers, Oxford University Press, London, 1954, cap. III

[8] J. Amen, Farey Sequences, Ford Circles and Pick's Theorem, MAT Exam Expository Papers, University of Nebraska, Lincoln, 2006

[9] W. W. Funkenbusch, From Euler's Formula to Pick's Formula Using an Edge Theorem, The American Mathematical Monthly, 81(6) (1974), 647-648



Alessandro Cordelli

Insegnante di matematica e fisica presso il Liceo "G. Carducci" di Viareggio (LU), dottorato in fisica e dottorato in filosofia, tiene spesso conferenze ed è autore di circa 90 pubblicazioni tra libri e articoli su riviste nazionali e internazionali. Membro del comitato direttivo del Gruppo di Formazione Matematica della Toscana, è attivamente impegnato nella ricerca didattica e nella formazione dei docenti.