Matematica, Cultura e Società

Rivista dell'Unione Matematica Italiana

Federico Talamucci

La matematica armonia dei suoni naturali. Ovvero, l'armonica matematica dei suoni naturali

Matematica, Cultura e Società. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **7** (2022), n.2, p. 135–158.

Unione Matematica Italiana

¡http://www.bdim.eu/item?id=RUMI_2022_1_7_2_135_0¿

Matematica, Cultura e Società. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2022.

Matematica, Cultura e Società – Rivista dell'Unione Matematica Italiana
Serie I, Vol. 7, N. 2, agosto 2022, 135-158

La matematica armonia dei suoni naturali. Ovvero, l'armonica matematica dei suoni naturali

Federico Talamucci
Università degli Studi di Firenze
E-mail: federico.talamucci@unifi.it

Sommario: *La collaborazione della matematica nei due sistemi musicali dei suoni pitagorici e dei suoni equabili è evidente ed opportuna per generare gli elementi e gestirne le relazioni. L'unica nozione indispensabile per un intervento razionale ai due mondi sonori è quella di distanza fra suoni. La scala dei suoni naturali non sembra dialogare in modo diretto con un modulo puramente matematico che articoli la sua definizione ed è generalmente presentata come aggiustamento manuale degli antichi suoni pitagorici.*

Il ribaltamento dei vocaboli armonia-matematica nelle due parti del titolo sintetizza i temi principali proposti: nelle prime sezioni dell'articolo si pone in risalto il ruolo della proporzione nell'assetto di sistemi sonori accertati dalla teoria e dalla prassi musicale di secoli, soffermandosi in particolare sulla rilevanza dalla proporzione armonica per il sistema dei suoni naturali. L'accostamento tangibile tra i numeri collegati ai suoni ed i moduli architettonici teorizzati nel Rinascimento viene richiamato per celebrare la matematica armonia di un pensiero estetico ed artistico certamente unitario.

Se questa prima parte sviluppa la presentazione dei sistemi sonori di maggior importanza nella musica occidentale e ne rintraccia le proporzioni secondo argomenti convenuti e ricorrenti, in una seconda fase del lavoro (Sezione 4) il punto di partenza viene confinato nella matematica, per chiedersi se quest'ultima è in grado, mediante un algoritmo esaustivo, di produrre un complesso armonico con senso musicale, a partire da un nucleo di base, che trae ispirazione dalle ragioni di buona proporzione degli elementi costruttivi rinascimentali. L'oggetto dunque non è solo quello di illustrare il congegno armonico della già formata scala naturale, quanto attuare la formazione di elementi sonori che rispondano al principio unitario della proporzione e che si combinino armonicamente.

Abstract: *The collaboration of mathematics in the two musical systems of Pythagorean sounds and of equal sounds is evident and opportune for generating the elements and managing their relationships. The only essential notion for a rational intervention in the two sound worlds is that of distance between sounds. The scale of natural sounds does not seem to dialogue directly with a purely mathematical module that articulates its definition and is generally presented as a manual adjustment of the ancient Pythagorean sounds.*

The overturning of the words harmony-mathematics in the two parts of the title summarizes the main themes proposed: in the first sections of the article the role of proportion in the arrangement of sound systems ascertained by the theory and practice of music over the centuries is highlighted, in particular focusing on the relevance of the harmonic proportion for the natural sound system. The tangible juxtaposition between numbers linked to sounds and architectural modules theorized in the Renaissance is recalled to celebrate the mathematical harmony of a certainly unitary aesthetic and artistic thought.

If this first part develops the presentation of the most important sound systems in Western music and traces their proportions according to arguments defendants and applicants, in a second phase of the work (Section 4) the starting point is confined to mathematics, to ask whether the latter is able, by means of an exhaustive algorithm, to produce a harmonic complex with musical sense, to starting from a basic nucleus, which draws inspiration from the reasons for the good proportion of the Renaissance construction elements. The object therefore is not only to illustrate the harmonic device of the already formed natural scale, but to implement the formation of sound elements that respond to the unitary principle of proportion and combine harmoniously.

Accettato: il 6 luglio 2022.

1. – Preambolo

La musica è nata da un impulso emotivo; laddove l'ispirazione e l'istinto sono sorretti dal pensiero e da fondamenti teorici si assiste ad un'affermazione e ad un progresso talmente formidabili da avere pochi eguali nelle conquiste dell'attività umana e nell'equilibrio tra natura ed intelletto. Questo è avvenuto per la nostra cosiddetta musica della cultura occidentale, a partire dal mondo classico fino ai nostri giorni.

Nella decifrazione e l'elaborazione del pensiero musicale interviene certamente anche la scienza, talvolta la matematica: quanto alla presenza di quest'ultima, seppur ogni tanto forzata o azzardata o ingombrante, ritengo di poter ricondurre idealmente il punto di partenza alla geniale sintesi del pensiero musicale antico della Figura 1 e rintracciare nel corso della storia due snodi impareggiabili: i rapporti ben proporzionati fra suoni che ispirano i moduli architettonici del Rinascimento e la presa di coscienza del suono come sovrapposizione di suoni più semplici in epoca illuministica.

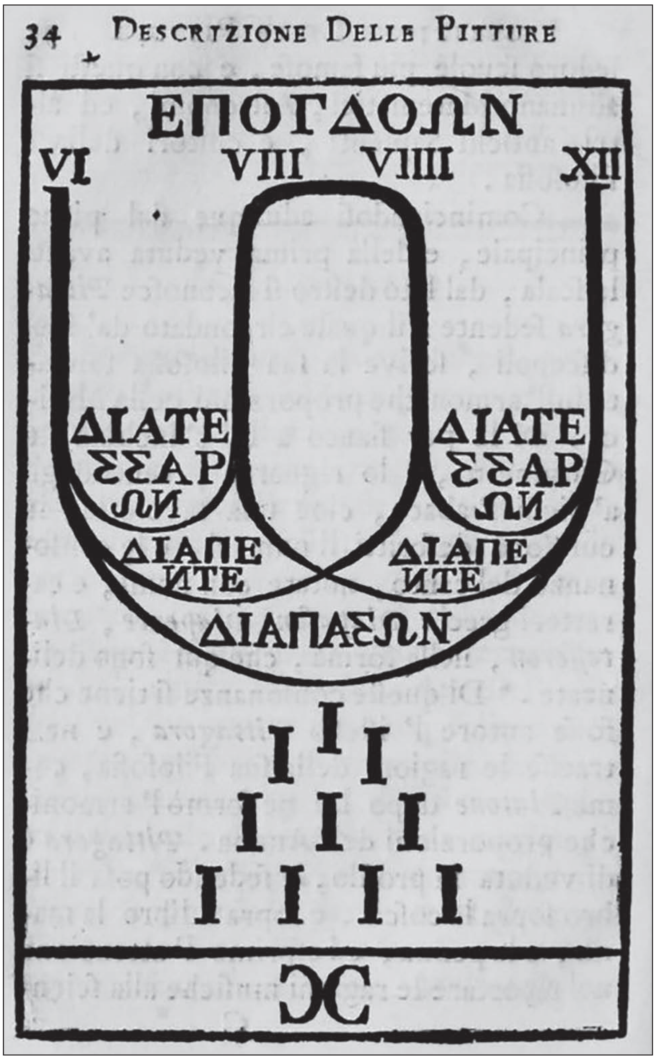


FIGURA 1 – Prospetto della suddivisione del diapason, secondo la teoria musicale pitagorica. L'illustrazione è tratta da [4].

Riguardo al secondo episodio, che non tratteremo direttamente, va almeno ricordata nella prima metà del 700 la sorprendente concordanza fra la teoria scientifica dei suoni armonici (1) nella corda vibrante e la coeva teoria musicale, presente quest'ultima principalmente attraverso i trattati di J. P. Rameau, il primo dei quali ([11]) già attraverso le prime parole "*La musica è la scienza dei suoni...*" assegna all'armonia il ruolo di scienza deduttiva, su cui compiere dimostrazioni e sintesi matematiche.

L'ispirazione è la medesima dei *Principia* di Newton nel campo della scienza del moto, di non tanto precedenti; l'impatto culturale che non permetterà agli studiosi dei rispettivi generi di evitare da lì in poi di averne a che fare, il medesimo.

Il clima evocato trova una rapida sintesi in questo: pur nella percezione di un suono netto, la natura assegna al mezzo in vibrazione un insieme di suoni che si fondono; la base naturale dell'armonia musicale, che dispone i suoni e forma gli accordi, non può non rivolgersi a tale evidenza per formare le regole.

L'altra circostanza di mediazione matematica in materia di musica dapprima nominata trae anch'essa ispirazione dall'insegnamento della natura: l'architetto del Rinascimento è prima di tutto uno scienziato che ha il compito di apprendere dall'Universo l'armonico sistema di rapporti matematici per edificare mediante esso. Ed è qui che interviene la musica: i rapporti universalmente validi vengono rivelati dai suoni, che risultano in armonia se disposti nelle giuste proporzioni. Ovvero, nella musica la natura espone distintamente i rapporti valevoli in assoluto.

La convinzione di un ordine universale della Natura filtrato dalla musica attraversa tutta l'Architettura del 400 e del 500, da Leon Battista Alberti (2)

(1) La prima dimostrazione sperimentale circa l'esistenza dei suoni armonici, che concorrono con frequenze differenti a formare un unico suono, è ad opera di J. Sauveur e risale al 1701.

(2) Condensando lo sterminato argomento in sbrigativa aneddotica citiamo la celebre e significativa ammonizione dell'Alberti, durante la costruzione del Tempio Malatestiano,

(1404-1472) ad Andrea Palladio ([3]) (1508-1580). L'armonia dell'Universo si rivela in musica attraverso un rapporto ben proporzionato tra i suoni: accogliere i rapporti musicali in architettura mediante il linguaggio universale dei numeri conferisce il giusto compimento al progetto da realizzare.

Più che un connubio, una simbiosi fra Architettura rinascimentale e musica è un contemplarsi ed ispirarsi su piani separati, il più elevato dei quali è abitato dalla musica con il suo ruolo speciale e sovrano di custodire e dispensare le proporzioni universali. Ben inteso, nessuna architettura è possibile senza proporzioni metriche, anche nel Medioevo o in epoca moderna se ne fa uso, ma il rivolgersi alla teoria musicale per procedere è un tratto distintivo del Rinascimento. Talvolta si ha l'impressione di un affidamento, un'aspettativa verso la musica da parte di alcuni umanisti più autentica e risoluta dei musicisti stessi, come pure di un'incrollabile convinzione delle norme assolute della musica da parte degli architetti rinascimentali che non si può non trarre ispirazione dalle elaborazioni di costoro.

Una sorta di "collocazione spaziale" dei suoni mediante i rapporti è comunque antica almeno quanto l'Armonia delle sfere della metafisica pitagorica: il modello dei corpi celesti su sfere ruotanti è un concerto nello spazio più che nel tempo, più statico che dinamico, più volto a contemplare l'eufonica concordanza dei rapporti che il piacevole fluire della musica.

È proprio il mondo antico di Pitagora che ci riaccosta all'emblematica Figura 1 ([4]), nella quale sono disposti in modo essenziale i soggetti musicali e le proporzioni aritmetiche a cui dedicare l'attenzione e le precisazioni della prossima Sezione, senza rinunciare alla praticità di affiancare all'antica simbologia la trasposizione del punto di vista moderno.

2. – Suoni ed intervalli

La percezione acuto-grave di un suono, ovvero l'*altezza*, è correlata al numero di vibrazioni che compie un mezzo per produrre un suono. Riferendoci all'esperienza della corda vibrante, esercitata sin dall'antichità, la maggiore lunghezza produce un suono più grave, la diminuzione di questa dà origine ad un suono più acuto.

Ai nostri giorni è semplice formulare in termini assoluti questa correlazione adoperando la *frequenza*, ovvero il numero di vibrazioni al secondo: è infatti ben nota la *proporzionalità inversa tra la lunghezza della corda e la frequenza di vibrazione*, proprietà che viene dedotta dall'olandese Isaac Beeckman con una dimostrazione matematica solo intorno al 1614, ed approfondita negli aspetti matematici e sperimentali da Marin Mersenne ([10]), che prende in esame anche la tensione e la massa della corda.

Prima di allora, la non identificata frequenza non ha comunque impedito di fissare una scala dell'altezza del suono, per lo meno relativa, basandosi su aspetti più facilmente ispezionabili della corda, come appunto la lunghezza. Ciò che ha colmato l'assenza di sperimentazione fisica sul suono è una valutazione di carattere percettivo, dunque non scientifica ma inattaccabile: raddoppiando o dimezzando la lunghezza della corda si avverte una sorta di *replica*, più acuta o più grave, del suono prodotto dalla corda di partenza, nel senso di risultare fortemente assimilabile, estremamente consonante.

La certezza di riascoltare pressoché il medesimo suono dividendo in due la corda fa decifrare parte della riga in alto con i numeri romani VI (sei) e XII (dodici) della tavoletta, come pure la scritta ΔΙΑΠΑΣΩΝ (*diapason*, ovvero "*attraverso tutti*") che abbraccia i numeri: attribuendo al suono di base il numero sei ([5]), si

---

di non alterare le proporzioni dei pilastri altrimenti "*si discorda tutta quella musica*".

([3]) Col medesimo animo della precedente nota, rievochiamo una memoria al Palladio richiesta nel 1567 sulle nuove costruzioni di Brescia in cui si legge "...le proporzioni delle voci sono armonia delle orecchie, così quelle delle misure sono armonia degli occhi nostri...".

([4]) Una raffigurazione di contenuto pressoché identico appare nella tavoletta innanzi a Pitagora, nel celebre affresco "*La Scuola di Atene*" eseguito da Raffaello intorno al 1510. La riproduzione qui utilizzata, tratta da [4], appartiene a G. P. Bellori (1613-1696), celebre biografo di pittori seicenteschi e profondo studioso dell'arte di Raffaello e della filosofia di Platone.

([5]) La scelta, consolidata dalla presenza in testi importanti come i Commenti che Marsilio Ficino aggiunse alla traduzione latina del *Timeo* ([9]), il dialogo platonico delle armonie e dei medi proporzionali, agevola la produzione di esempi numerici di proporzioni, come pure rileviamo nei Trattati di Architettura del Cinquecento.

oltrepassano tutti i suoni per ritrovarlo in corrispondenza della corda dimezzata, ma contrassegnato dal *numero doppio* dodici per porre maggior rilevanza sulla dislocazione più acuta. Non siamo affatto lontani dal preciso concetto di frequenza, tanto che la proporzionalità inversa di quest'ultima alla lunghezza della corda è azzardatamente talvolta attribuita a Pitagora. D'altronde, "vedere" i suoni come relazione tra numeri è pienamente nello spirito pitagorico: la realtà è conoscibile perché misurabile.

Avvalendosi per comodità della nozione di frequenza, accreditiamo il giusto valore al tema che è emerso: l'unica certezza universalmente riconosciuta da qualunque cultura musicale ed in ogni epoca storica, evitando di andare alla ricerca di incerte eccezioni, è proprio il *percepire e riconoscere la massima consonanza raddoppiando o dimezzando il numero di vibrazioni* ([6]).

Attraversando la gamma dei suoni udibili si scoprono dunque degli elementi ricorsivi che semplificano decisamente la gestione musicale del complesso sonoro: i suoni sono raggruppabili in una sorta di ripartizione in classi ciascuna delle quali contenente un suono con frequenza ν e quelli con frequenza $2^k \nu$, k numero intero ([7]). Il "ripetersi" del suono alle frequenze $\nu, 2\nu, \dots, 2^n \nu$ qualunque sia la frequenza ν – nonché il passo già compiuto di assegnare la comune dicitura *diapason* a tutti gli intervalli tra un suono ed il suo doppio – propone, anzi impone una disposizione equidistanziata di tali suoni: questo avviene se la distanza fra due suoni – o meglio, in termini musicali, dell'*intervallo tra due suoni* – viene quantificata tramite il *rapporto delle frequenze*, ponendo al numeratore la frequenza del suono più acuto; in questo modo, l'intervallo *diapason* misura sempre 2, da abbinare all'1/2 del dimezzamento della corda. La misura dell'intervallo come il rapporto tra le frequenze (oppure con quantità identificative analoghe, come nel caso della tavoletta) predispone il sostegno adatto per operare con i suoni: se un suono ha altezza μ compresa nel diapason fra ν e 2ν, la replica 2μ ha medesima distanza dagli estremi del diapason di competenza 2ν, 4ν, dato che $2\mu : 2\nu = \mu : \nu$. Ovvero, in ciascun diapason si ripetono inalterate le medesime distanze tra suoni omologhi ([8]). Altresì, la misura come rapporto impone una regola di tipo moltiplicativo per la composizione di intervalli: se infatti un terzo suono ha frequenza $\eta > \mu$, la separazione $\dfrac{\eta}{\nu} = \dfrac{\eta}{\mu} \times \dfrac{\mu}{\nu}$ fa sì che la ripartizione dell'intervallo da ν a η nei due intervalli contigui da ν a μ e da μ a η abbia come misura il prodotto delle misure, qualunque siano le altezze ν, μ e η.

Una seconda ricognizione alla tavoletta della Figura 1 permette l'accesso ad ulteriori decifrazioni, ampliando con coerenza gli elementi forniti: lo spazio denominato ΔΙΑΠΕΝΤΕ; (diapente), traducibile come "*attraverso cinque*", collega i numeri VI (sei) e VIIII (nove), come pure VIII (otto) e XII (dodici), sottintendendo una porzione di $6/9 = 8/12 = 2/3$ della corda iniziale; d'altra parte, la scritta ΔΙΑΤΕΣΣΑΡΩΝ (diatessaron), "*attraverso quattro*", congiunge VI e VIII, oltre che VIIII e XII, presupponendo una frazione di corda pari a $6/8 = 9/12 = 3/4$ di quella iniziale. L'antico diagramma non riporta solo il nome dello spazio che separa due suoni, ma prosegue ed esaurisce la dichiarazione delle consonanze: il suono prodotto dalla corda di lunghezza $2/3$ e quello prodotto dalla corda di lunghezza $3/4$ (rispetto alla lunghezza della corda iniziale) sono in buon accordo, in armonia con il suono di partenza. L'accrescimento musicale consiste nell'acquisire la consonanza dell'intervallo *diapente* corrispondente alla *quinta* nel-

([6]) Nel già nominato Trattato [11], di taglio newtoniano, l'asserzione assume il ruolo di un Principio (*"Principe de l'identité des octaves"*) da cui si deduce matematicamente l'armonia.

([7]) La denominazione stessa dei suoni a cui siamo abituati assegna il medesimo nome alla classe, non al singolo suono: ad esempio con 440 vibrazioni al secondo il suono si chiama LA, con 880 vibrazioni è il LA più acuto, a 220 vibrazioni il LA più grave. Nell'ambito dell'udibilità, all'incirca da 20 a 20.000 vibrazioni al secondo, i LA udibili sono complessivamente dieci, dalla frequenza 27,5 fino a 14.080, i primi otto dei quali fanno parte della tastiera di un pianoforte moderno. Va detto che l'esatta identificazione nota-frequenza era ignota nel passato e proviene dai progressi della moderna metrologia: è singolare il fatto che il LA a 440, suono di riferimento per l'intonazione degli strumenti musicali, viene ufficialmente fissato dall'Organizzazione Internazionale per la Normazione I.S.O. solo nell'Ottobre del 1939, seppur prendendo atto di una prassi generalizzata e diffusa ormai da tempo.

([8]) Qui ed in seguito, nominiamo *omologhi* i suoni a distanza di diapason ν, 2ν, 4ν, ...

l'armonia musicale moderna, di lunghezza (coerentemente con l'enunciata regola del rapporto) $9/6 = 12/8 = 3/2$ e dell'intervallo *diatessaron*, l'odierna *quarta*, di lunghezza $8/6 = 12/9 = 4/3$.

La parte in basso della tavoletta, con i primi quattro numeri naturali disposti a piramide, riproduce la celebre *tetraktys* di Pitagora ([9]), la cui presenza da una parte sta ad indicare la pratica generazione dei tre intervalli descritti con la divisione della corda in due, tre, quattro parti ([10]), dall'altra appare come fermo monito a fermarsi qui nella ricerca di consonanze; è come se i quattro supremi numeri che si affacciano in basso risuonassero la loro autorità nel perfetto ed esclusivo intreccio di loro elaborazioni che appare in alto. La *tetraktys* prescrive le armonie, ma è la musica a dare una conferma, una riprova alla filosofia: nel globale concetto pitagorico del Numero come fondamento dell'Universo la sacralità dei rapporti numerici 1:2, 2:3 e 3:4 prende voce e trova riscontro nella meravigliosa sintonia dei corrispondenti suoni.

2.1 – *I suoni pitagorici*

Manca per ora la spiegazione dell'iscrizione in alto e della doppia C speculare in basso: quest'ultima è in realtà una X (come appare più chiaramente nell'affresco di Raffaello) a testimonianza della sacra decade 10, somma dei numeri che compongono la *tetraktys* e simbolo dell'Universo.

Più importante è la scritta della parte superiore ΕΠΟΓΔΟΩΝ (*epogdoon*) che incombe per grandezza ma appare esclusa dalle consonanze: la traduzione "*sopra di un ottavo*" (epi-ogdoon) ricapitola l'operazione di sommare l'ottava parte di un numero dato al numero medesimo: partendo da VIII, come indicato, si ottiene VIIII, coerentemente con gli estremi VIII e VIIII sovrastati dall scritta e a distanza 9/8. Al tempo stesso, l'epogdoon proviene dagli intervalli consonanti, come intervallo da aggiungere al diatessaron per ottenere il diapente, in accordo con la regola moltiplicativa $\frac{4}{3} \times \frac{9}{8} = \frac{3}{2}$.

L'ubicazione privilegiata e per niente sfuggevole dell'epogdoon sembra suggerire la rilevanza e la gravosità della proposta di un progetto, quello di aumentare i suoni, quello di formare scale musicali. La prospettiva è nuova: non si è aggiunta una consonanza, ma un intervallo più piccolo dei precedenti, con cui infittire il diapason ([11]), aggiungendo nuovi suoni ai soli quattro finora presenti e rendendo il diapente e il diatessaron ottemperanti a ciò che dichiarano, ovvero: quali "cinque" oppure "quattro" suoni attraversano?

La direzione prevedibile per andare alla ricerca di altri suoni, senza trasgredire le consonanze dichiarate, è quella di formare l'intervallo diapente con i suoni presenti: l'unico che dà origine ad una novità (a meno di diapason, tramite raddoppi o dimezzamenti) è il suono VIIII, il cui diapente va a fermarsi sul suono di altezza 27 che oltrepassa il diapason e che corrisponde alla replica (più bassa di due diapason) 27/4, stavolta all'interno del diapason VI-XII. Si prosegue in modo analogo ([12]) generando ogni volta la consonanza diapente dal nuovo suono per trovare (compiendo i necessari dimezzamenti) $\frac{27}{4} \rightarrow \frac{81}{8} \rightarrow \frac{243}{32} \rightarrow \frac{729}{64}$.

La collocazione dei suoni ottenuti nel diapason "normalizzato" tra 1 e 2 espone i suoni in modo più agevole ed è conveniente per le comparazioni successive: la divisione per 6 produce la sequenza – in ordine crescente ed includendo naturalmente i già esistenti suoni $\frac{1}{6} \cdot 9 = \frac{3}{2}$ e $\frac{1}{6} \cdot 8 = \frac{4}{3}$ del diapente e del

([9]) Nella dottrina pitagorica, in cui il fondamento numerico stabilisce ogni aspetto della realtà, il complesso 1, 2, 3 e 4 conserva un significato simbolico e filosofico superiore ed è alla base dell'essenza dell'ordine dell'Universo.

([10]) Precisamente, ciascuna delle due parti uguali di suddivisione produce il diapason, la divisione in tre parti genera il diapente ed il diapente più acuto, nelle rispettive lunghezze di 2/3 e 1/3; la ripartizione in quattro parti dà origine al diapason del diapason (1/4 della lunghezza), diapason (1/2), diatessaron (3/4).

([11]) Il termine *emmelés* (εμμηλης, da εν μελει = "nel canto") della teoria musicale greca per indicare i suoni armoniosi degni di essere aggiunti e necessari per il canto esprime brillantemente il proposito. Il termine contrapposto *ekmelés* (εκμηλης="fuori dal canto") indica invece la dissonanza.

([12]) Questo modo di procedere non è unico, ad esempio c'è a disposizione anche la consonanza del diatessaron; tuttavia, i vari risultati ottenuti essenzialmente si equivalgono.

diatessaron –

$$\underbrace{\underbrace{1\ (\mathrm{VI})\quad \frac{9}{8}\ \ \frac{81}{64}\quad \frac{4}{3}\ (\mathrm{VIII})}_{\textit{diatessaron}}\ \overbrace{\qquad}^{\textit{epogdoon}}\ \frac{3}{2}\ (\mathrm{VIIII})}_{\textit{diapente}}\quad \frac{27}{16}\quad \frac{243}{128}\quad 2\ (\mathrm{XII})$$

$$1\ (\mathrm{VI})\quad \frac{9}{8}\ \ \frac{81}{64}\quad \underbrace{\frac{4}{3}\ (\mathrm{VIII})\quad \underbrace{\frac{3}{2}\ (\mathrm{VIIII})\quad \frac{27}{16}\quad \frac{243}{128}\quad 2\ (\mathrm{XII})}_{\textit{diatessaron}}}_{\textit{diapente}}$$

$$\underbrace{1\ (\mathrm{VI})\quad \frac{9}{8}\ \ \frac{81}{64}\quad \frac{4}{3}\ (\mathrm{VIII})\quad \frac{3}{2}\ (\mathrm{VIIII})\quad \frac{27}{16}\quad \frac{243}{128}\quad 2\ (\mathrm{XII})}_{\textit{diapason}}$$

$$\underbrace{\qquad}_{\textit{epogdoon}}\ \underbrace{\qquad}_{\textit{epogdoon}}\ \underbrace{\qquad}_{256:243}\qquad\qquad \underbrace{\qquad}_{\textit{epogdoon}}\ \underbrace{\qquad}_{\textit{epogdoon}}\ \underbrace{\qquad}_{256:243}$$

(i numeri romani rimandano al suono analogo di origine). In base alla numerazione semplificata, il fondamento dei quattro suoni consonanti dichiarati sulla tavoletta corrisponde all'insieme

$$\mathcal{T} = \left\{1, \frac{4}{3}, \frac{3}{2}, 2\right\}. \tag{1}$$

Lo schema, pur privo del fascino cinquecentesco, riproduce gli intervalli della tavoletta ed aggiunge quelli che intercorrono fra suoni consecutivi, disposti sull'ultima riga, per dare origine alla *scala pitagorica*

$$\mathfrak{S}_{\mathcal{P}} = \left\{1, \frac{9}{8}, \frac{81}{64}, \frac{4}{3}, \frac{3}{2}, \frac{27}{16}, \frac{243}{128}, 2\right\}. \tag{2}$$

Se può far comodo una collocazione sonora più moderna, la sequenza riproduce la probabilmente familiare scala diatonica DO-RE-MI-FA-SOL-LA-SI-DO, nell'intonazione pitagorica. I commenti sono molteplici: il diatessaron abbraccia effettivamente quattro suoni (estremi compresi) ed il diapente cinque, la mutua distanza è prevalentemente l'epogdoon, che tuttavia non si incastra perfettamente nel diapason; esordisce un intervallo più piccolo di misura $\frac{256}{243}$, che conserva un'impronta della *tetraktys* pitagorica nella scrittura $\frac{2^8}{3^5}$ ma mostra al tempo stesso una struttura complicata, se pensiamo alla suddivisione della corda. Questo intervallo minimo è il cosiddetto *limma* (ovvero "residuo") ed interviene nell'articolata questione, qui estranea, di estendere la scala a 13 suoni (estremi compresi), suggerita in modo forzato ed antistorico dall'odierna scala cromatica, quella che si ascolta suonando in progressione i tasti (bianchi e neri) di un pianoforte ([13]). La sequenza degli otto suoni poco sopra esibita è già sufficiente per proseguire l'argomento.

([13]) Dal punto di vista della matematica, la questione va associata alla non finitezza della successione di suoni che si generano procedendo per diapente: la necessità di una selezione finita di suoni ha prodotto svariate soluzioni e compromessi, soprattutto in sede di accordatura di strumenti. Si può per esempio verificare (vedi [13]) che l'avanzamento del suono ν di 12 diapente in avanti e 12 all'indietro stabilisce una situazione di quasi chiusura e completamento, nel senso che al dodicesimo passo in avanti e riportando il suono nell'intervallo di riferimento $[\nu, 2\nu]$ tramite un numero opportuno di dimezzamenti ci si imbatte in $\left(\frac{3}{2}\right)^{12} \times 2^{-7}\nu = 1,01364\ldots\nu$, molto vicino a quello di partenza (la distanza è il cosiddetto *comma pitagorico*); parimenti, al dodicesimo passo all'indietro e con gli opportuni raddoppi per rimanere in $[\nu, 2\nu]$ si trova $\left(\frac{3}{2}\right)^{-12} \times 2^{-8}\nu = 1,97308\ldots\nu$, suono molto vicino al diapason 2ν (la distanza da questo è il medesimo comma). Inoltre i 26 suoni (12 salti in avanti, 12 all'indietro più ν e 2ν) si dispongono a coppie attorno a ciascuno dei 13 suoni della scala cromatica del pianoforte dell'intervallo $[\nu, 2\nu]$: invertendo il punto di vista, è come se ciascun suono di tale scala attuasse una sintesi dei due esemplari pitagorici per difetto (calante) e per eccesso (crescente) che lo abbracciano (per ν o 2ν l'elemento per difetto è ν o 2ν medesimo, rispettivamente).

2.2 – *I suoni naturali*

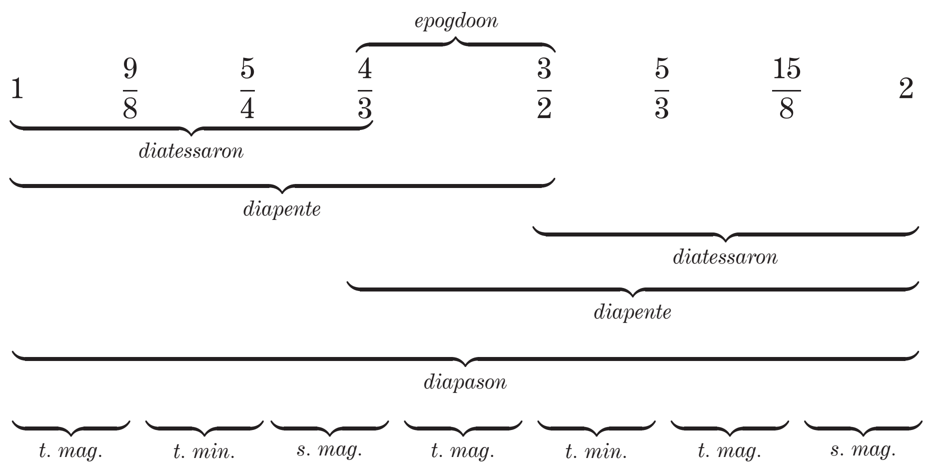
Accogliamo una novità: valichiamo il precetto pitagorico di intervento dei soli numeri 1, 2, 3 e 4 nell'armonia e proclamiamo la consonanza del suono prodotto dalla corda divisa in cinque parti. Entrano a far parte delle consonanze (sorvolando su complicate gerarchie) i suoni prodotti da 1/5 della corda, 2/5, 3/5 e 4/5. Il naturale e disarmato passaggio da 4 a 5 si articola in realtà attraverso un lungo e serio dibattito di epoca tardomedievale, quando i profondi mutamenti della pratica musicale ponevano dubbi sull'uso di alcuni suoni pitagorici ([14]). I suoni inediti sono in realtà solamente due: quello prodotto dalla lunghezza 4/5 (oppure 1/5 o 2/5 a meno di diapason) e quello prodotto dalla lunghezza 3/5; i corrispondenti suoni hanno altezza, nel diapason normalizzato, 5/4 e 5/3. Così come la divisione fino a quattro parti della corda dà luogo, al netto di distanze lunghe un diapason, ai quattro suoni (1), la divisione fino a cinque parti aggiorna l'insieme sonoro di base a

(3) $$\mathcal{T}_5 = \left\{1, \frac{5}{4}, \frac{4}{3}, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, 2\right\}$$

a meno delle medesime identificazioni. L'ampliamento dei suoni $\mathcal{T}_5$ segue un percorso ben differente da quello dei suoni pitagorici, come si evince dai manuali di acustica musicale o da interventi in merito presenti in letteratura: non c'è da aspettarsi un procedimento ciclico, come per la scala pitagorica, per generare nuovi suoni; in effetti le molteplici possibilità che si aggiungono con l'apertura alla divisione per cinque rendono complicato questo approccio. Il modo di procedere si basa piuttosto su un aggiustamento – o per meglio dire un *temperamento* – di alcuni tra i suoni pitagorici. Il nucleo originale (1) delle consonanze non viene comprensibilmente toccato, non solo per rispetto "ideologico", ma anche per la non necessità di alterare questi semplici rapporti numerici. Diversamente, la vicinanza di $\frac{81}{64}$ e $\frac{27}{16}$ a $\frac{5}{4}$ e $\frac{5}{3}$ convince ad aggiornare le due complicate frazioni pitagoriche mediante questi ultimi due suoni a disposizione. L'altro elemento con medesima sorte è il suono pitagorico $\frac{243}{128}$, prossimo a $\frac{15}{8}$, che è utilizzabile grazie al nuovo assortimento procurato dal cinque e che sostituisce il primo nella nuova sequenza. Si stabilisce la scala dei cosiddetti *suoni naturali* con il riconoscere i valori (fissati nuovamente e comodamente nel diapason tra 1 e 2)

(4) $$\mathfrak{S}_{\mathcal{N}} = \left\{1, \frac{9}{8}, \frac{5}{4}, \frac{4}{3}, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{15}{8}, 2\right\}.$$

che dispone ed amplia l'insieme (3) in accordo al seguente diagramma, in cui continuiamo a riportare anche l'antica presenza degli intervalli della tavoletta:



([14]) L'ideazione di ulteriori divisioni della corda è antica e trova l'esponente più illustre in Claudio Tolomeo (circa 100–circa 175) che afferma la consonanza dei suoni provenienti dalle divisioni della corda in cinque parti. L'assestamento teorico dell'innovazione si compie nei trattati di Gioseffo Zarlino ([16]) del XVI secolo, nell'epoca di forte convinzione sull'esistenza di rapporti universalmente validi, svelati dalla musica e adoperati dall'architettura. È proprio la ripetuta presenza di proporzioni nella cosiddetta *scala naturale* promossa da Zarlino che verrà messa in evidenza più avanti. Il sistema musicale dei suoni naturali è spesso denominato come *sistema tolemaico-zarliniano*.

La denominazione attuale dei suoni (2) è la medesima data in precedenza, ovvero le note DO-RE-MI-FA-SOL-LA-SI-DO, nell'intonazione stavolta naturale. Va tuttavia osservato – e su ciò torneremo nelle conclusioni – che, pur essendo antica la denominazione richiamata ([15]), alla base del ragionamento della teoria musicale cinquecentesca (e a maggior ragione del mondo antico) c'è l'intervallo, ovvero il mutuo rapporto fra i suoni – già noto dall'antichità prima ancora di dare il nome alle note – e non la scala, la sequenza sonora in successione crescente. Quest'ultima, supporto inevitabile attuale per trattare i presenti argomenti, porta con sé la moderna impronta sonora della *tonalità*, dell'evoluto clima musicale che fa da contorno e detta le regole alle note, faccenda che non interviene nel nostro percorso.

Tornando a (4), il commento è indubbiamente quello di una semplificazione delle frazioni che fissano i suoni e delle misure degli intervalli: giustappunto, la serie riceve la denominazione di *suoni naturali* ([16]). È aumentata la gamma delle distanze, fatto non necessariamente sfavorevole: oltre all'epogdoon (che prende il nome di *tono maggiore*, abbreviato con *t. mag.*) di misura 9/8, si trova la distanza 10/9 (*tono minore*, *t. min.*) e quella minima 16/15 (*semitono maggiore*, *s. mag.*) che rimpiazza e semplifica il limma.

Altri elementi di riflessione circa la formazione della scala lasciano più incertezze: da una parte, il criterio "manuale" di rimpiazzare i suoni appare lontano da un sostegno matematico; dall'altra, non si vede la ragione musicale per cui un suono cifrato da una frazione più semplice sia preferibile ad un altro, se non per l'agevolazione di riprodurli suddividendo la corda. Gli interventi della matematica a sostegno della selezione dei suoni naturali saranno oggetto della Sezione 3.

Ribaltando l'ordine di apparizione precedente, mostriamo solo ora come Zarlino ha completato il diapason, in una celebre illustrazione del Trattato [16] riportata in Figura 2, nella quale si riconoscono, in mezzo ad uno schema più completo, le indicazioni fornite.

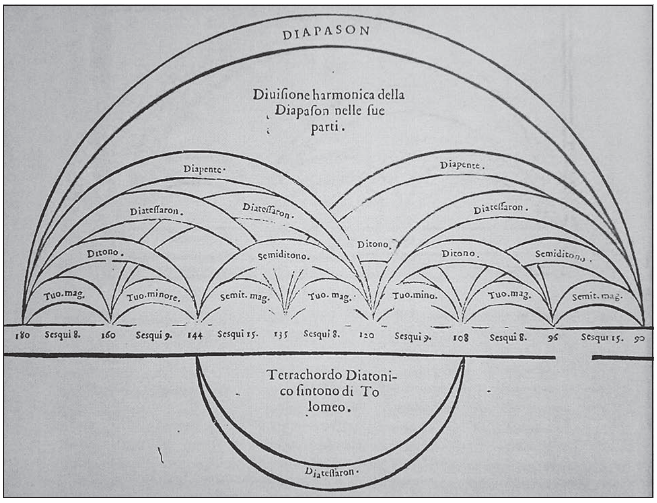


FIGURA 2 – Schema della suddivisione del diapason, secondo la teoria dei suoni naturali di Zarlino. Nei semicerchi verso l'alto riconosciamo i nomi degli intervalli. Lungo la riga orizzontale la posizione del suono è indicata mediante la lunghezza della corda, decrescente verso l'acuto da 180 a 90, per formare un diapason; calcolando l'inverso dei rapporti fra ciascun numero in successione ed il primo valore 180 si trova la frazione corrispondente al suono (adoperando ad esempio il quarto valore troviamo $(135/180)^{-1} = 4/3$, corrispondente al diatessaron. Le diciture *Sesqui 8* (sesquiottava), *Sesqui 9* (sesquinona) e *Sesqui 15* (sesquiquintadecima) si riferiscono alle frazioni 9/8, 10/9 e 16/15, che fissano rispettivamente il tono maggiore, il tono minore ed il semitono maggiore. Tutti e tre i rapporti sono presenti nel semicerchio verso il basso, indicato come tetracordo (successione di quattro suoni, nell'ambito di un diatessaron) diatonico (grossolanamente: solo suoni naturali, non alterati); la presenza del semitono tra i primi due suoni 144 e 135 colloca il tetracordo come primo nella gerarchia stabilita dalla teoria musicale degli antichi Greci, tramandataci in gran parte dal celebre astronomo del II secolo Claudio Tolomeo. L'immagine è tratta da [16].

2.3 – *I suoni equabili*

Innanzi al diapason, alla nozione di distanza e alla regola moltiplicativa per gli intervalli, il matematico non può trattenersi dall'affermare la soluzione più logica, che consiste nel disporre i suoni *in modo equidistante*, ovvero suoni separati da intervalli di medesima lunghezza. L'impostazione matematica propone la ricerca dei coefficienti

([15]) Guido Monaco, attorno all'anno Mille, utilizzò sei suoni in progressione dell'inno "Ut queant laxis" di Paolo Diacono, di epoca longobarda, per nominare gli intervalli dell'*esacordo musicale* UT(=DO)-RE-MI-FA-SOL-LA; il SI è assente.

([16]) La spontanea analogia con il fenomeno dei suoni naturali che accompagnano il suono fondamentale richiamato all'inizio, pur comportando parziali concidenze, è antistorica.

$1 = \alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_N < 2$ che distribuiscano i suoni $\alpha_1 v = v$, $\alpha_2 v$, ..., $\alpha_N v$, $2v$ – appartenenti al diapason tra v e $2v$ – alla medesima distanza. La regola moltiplicativa della distanza comporta

$$\frac{\alpha_2}{1} = \frac{\alpha_3}{\alpha_2} = \ \ldots \ = \frac{\alpha_N}{\alpha_{N-1}} = \frac{2}{\alpha_N}$$

che dispone gli N numeri $\alpha_1 = 1$, α_2, ..., α_N in progressione geometrica di ragione $\sqrt[N]{2}$ e con elementi pari a

$$(5) \qquad \alpha_\kappa = \sqrt[N]{2^{\kappa-1}}, \qquad \kappa = 1, \ldots, N.$$

A dire il vero, la leggera presentazione, a mo' di esercizio, dei suoni equidistanziati è irrispettosa verso la pesante problematica di uniformare i suoni per fini pratici, a costo di un ipotetico appiattimento sonoro causato dall'abbattimento delle varietà di intervalli.

D'altra parte, la spontanea domanda di suoni equidistanti trova in realtà risposta solo nella teoria, dal momento che i numeri (5) sono irrazionali ed il preciso valore matematico non è nella pratica eseguibile, se non accogliendo un certo grado di approssimazione; dalla lista (5) spariscono il diapente ed il diatessaron. Per includere nella scala equiripartita suoni prossimi a quelli pitagorici e naturali dapprima discussi, va scelto $N = 12$ per trovare la cosiddetta *scala del temperamento equabile* formata da 12 unità (*semitoni*) uguali ed il cui principale vantaggio consiste nell'essere identica, da qualunque suono di partenza v si proceda ([17]); la "lente" del logaritmo predispone i suoni (5) alla comoda ma piatta linearità.

Commenti e confronti fra le tre tipologie di suoni procurate – pitagorici, naturali ed equabili – non fanno parte dei propositi prefissi e sono comunque argomenti con vasto repertorio, anche divulgativo; autorevoli testo di riferimento sono [2] ed il recente [3]. È parimenti omesso per le medesime ragioni un accenno alla pur interessante storia del temperamento equabile, a partire dall'immancabile precursore nel mondo antico – Aristosseno di Taranto ([18]) –, attraverso il sostegno di Vincenzo Galilei in polemica con Zarlino, l'attenzione di matematici come Stevino e Cartesio, fino all'ingegnosa sistemazione teorica e pratica di Andreas Werckmeister, alla fine del 600.

3. – I medi proporzionali

Inquadriamo ora un aspetto della tavoletta della Figura 1 che fa da preludio alle successive considerazioni: è possibile rintracciare in essa la presenza schematica dei tre medi proporzionali più familiari in matematica, definiti come segue, con il pratico supporto di due segmenti di lunghezza a e $b \geq a$.

Nella *proporzione aritmetica* un terzo segmento di lunghezza m_A si inframezza in modo che superi il primo segmento tanto quanto viene superato dal secondo:

$$m_A - a = b - m_A$$

Nella *proporzione geometrica* il terzo segmento di misura m_G supera il primo formando un rapporto con esso pari a quello che esso forma con il secondo segmento:

$$a : m_G = m_G : b$$

Infine, nella *proporzione armonica* il segmento di misura m_H si interpone fra a e $b > a$ in modo da superare il primo ed essere superato dal secondo rispettando il medesimo rapporto dei due segmenti assegnati:

$$\frac{m_H - a}{b - m_H} = \frac{a}{b}$$

Questa presentazione dei medi proporzionali, dal sapore antico, già appare nei Commenti che Marsilio

([17]) Chiamando senza troppo impegno la nota v *tonalità*, il vantaggio pratico dell'invariabilità risiede nel poter comporre in ogni totalità e nel passare più agevolmente da una tonalità ad un'altra. I dodici suoni dell'ottava di un pianoforte (sette tasti bianchi e cinque neri) fanno riferimento alla scala temperata ed in fase di accordatura l'avvicinamento ai suoni teorici avviene sfruttando il fenomeno dei battimenti oppure utilizzando apparecchi elettronici. Diversamente, gli strumenti a tastiera di origine più antica (clavicembalo, clavicordo, organo, ...) frequentemente non fanno uso del temperamento equabile.

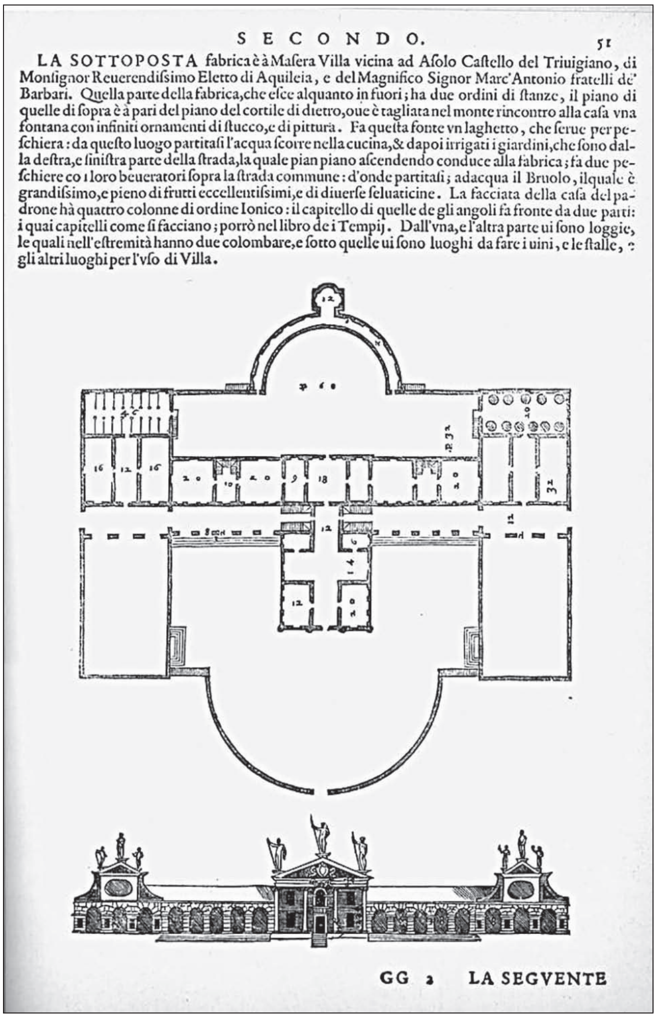
([18]) Nell'affresco della Scuola di Atene Aristosseno viene identificato con il filosofo in piedi di fronte a Pitagora, oppure con quello seduto dietro il medesimo; in qualsiasi modo, entrambi sono in atto di fissare le azioni di Pitagora e di prendere appunti su un libro; l'interpretazione è probabilmente guidata dalla contrapposizione delle rispettive teorie musicali.

Ficino aggiunse alla traduzione latina del dialogo platonico *Timeo* ([9]). La predominanza dei medi proporzionali e la corrispondenza fra suoni ed elementi architettonici che pervade il periodo rinascimentale, dall'Alberti a Palladio, trae una delle principali fonti di ispirazione per l'appunto dal testo del Ficino. Proprio nel *Timeo* ([19]) viene offerta una spiegazione sul fatto che i tre medi proporzionali individuano tutti gli intervalli della scala musicale: sostanzialmente, la motivazione sviluppa la stilizzata comparsa dei medi nella tavoletta, come dichiarato dapprima, che consiste nella proporzione geometrica di cui fanno parte i diapason VI e XII (a rappresentare i raddoppi e i dimezzamenti), nel medio aritmetico VIIII degli estremi VI e XII, nel medio armonico VIII dei medesimi estremi.

Ecco il passo in avanti da compiere, sommessamente evocato dalla tavoletta: non solo cercare l'origine, la motivazione numerica del singolo suono, ma raccordare con un elemento intermedio i suoni tra loro, trovare le motivazioni dell'armonia nella presenza di medi proporzionali.

E questo aggiorna il motivo principale dello scritto che portiamo avanti: il suono è reso intelligibile dal numero, dal rapporto che lo pone in relazione con il tutto. Ma ciascuna parte del tutto deve accordarsi con l'altra, ed il mezzo primario di indagine risiede nella matematica delle concatenazioni proporzionali.

Se nell'Alberti c'è piena coscienza ed affermazione dell'identificazione tra rapporto spaziale e musicale, è con i rapporti palladiani ([20]) che l'architettura e la teoria musicale trovano un'inedita ed irripetibile intesa. I moduli architettonici vengono concatenati come accordi, le proporzioni dei suoni e dello spazio obbediscono ad un medesimo ed unico sistema armonico, a rapporti universalmente validi che la musica ha il privilegio di esibire. Palladio sceglie ambienti e misure come se fossero note; dispone, organizza, raccorda gli ambienti come se formasse una scala musicale.


SECONDO. 51

LA SOTTOPOSTA fabrica è à Maſera Villa vicina ad Aſolo Caſtello del Triuigiano, di Monſignor Reuerendiſsimo Eletto di Aquileia, e del Magnifico Signor Marc'Antonio fratelli de' Barbari. Quella parte della fabrica, che eſce alquanto in fuori; ha due ordini di ſtanze, il piano di quelle di ſopra è à pari del piano del cortile di dietro, oue è tagliata nel monte rincontro alla caſa vna fontana con infiniti ornamenti di ſtucco, e di pittura. Fa queſta fonte vn laghetto, che ſerue per peſchiera: da queſto luogo partitaſi l'acqua ſcorre nella cucina, & dapoi irrigati i giardini, che ſono dalla deſtra, e ſiniſtra parte della ſtrada, la quale pian piano aſcendendo conduce alla fabrica; fa due peſchiere co i loro beueratori ſopra la ſtrada commune: d'onde partitaſi; adacqua il Bruolo, ilquale è grandiſsimo, e pieno di frutti eccellentiſsimi, e di diuerſe ſeluaticine. La facciata della caſa del padrone hà quattro colonne di ordine Ionico: il capitello di quelle de gli angoli fa fronte da due parti: i quai capitelli come ſi facciano; porrò nel libro de i Tempij. Dall'vna, e l'altra parte ui ſono loggie, le quali nell'eſtremità hanno due colombare, e ſotto quelle ui ſono luoghi da fare i uini, e le ſtalle, e gli altri luoghi per l'vſo di Villa.

GG 2 LA SEGVENTE

FIGURA 3 – Planimetria e facciata della Villa Maser. La pagina è tratta dalla celebre opera "I quattro libri dell'Architettura" di Andrea Palladio, 1570.

Il principio costruttivo "sinfonico" – nel senso etimologico di "suono insieme" – e più in generale il nesso tra l'architettura rinascimentale e i coevi elementi culturali sono mirabilmente narrati con disciplina e fascino nel celebre testo [15] di Rudolf Wittkower ([21]): in particolare, nella Parte quarta "Il problema della proporzione armonica in architettura" l'Autore del saggio ci accompagna in celebri ville palladiane a spasso per i vari ambienti, decifrandone con rigore le varie proporzioni e gli scambievoli

([19]) Di nuovo un richiamo all'affresco di Raffaello: l'attempato filosofo Platone-Leonardo da Vinci al centro della scena stringe fra il braccio ed il fianco il testo del Timeo.

([20]) Il trattato *"I quattro libri di Architettura"* del 1570 è ritenuto il punto di riferimento più elevato per un corretto sistema costruttivo proporzionale.

([21]) Berlino 1906 – New York 1971, celebre storico dell'architettura e dell'arte, ha chiarito l'evidenza del modello rinascimentale delle proporzioni, contrariamente ad una interpretazione puramente estetica.

rapporti armonici. Quell'apparentemente indecifrabile percezione di ordine, simmetria, bellezza – insomma di benessere per la mente – destata dall'essere immersi in ambienti del genere come pure dall'ascolto di suoni armoniosi, incontra la logica spiegazione, la naturale delucidazione – la scienza – nelle insuperate argomentazioni del Wittkower. L'armonico progetto delle stanze della superba Villa Barbaro ([22]) riportato in figura 3 ed il prospetto degli intervalli della scala naturale della figura 2 nella loro essenza sono identici, ispirati dal medesimo principio universale.

Sul terreno dei princip̂i universali che gettino la luce dell'assoluto su qualche attività umana si aggira perennemente – e più o meno proficuamente – il matematico: cambiamo decisamente scenario e procediamo da matematici, per compiere un'indagine neutrale, razionale, cieca (anzi sorda) al cospetto di motivazioni musicali che potrebbero deviarne il percorso. Le formule esplicite, ricavabili algebricamente dalle definizioni dei medi geometrici,

$$m_A(a,b) = \frac{a+b}{2}, \quad m_G(a,b) = \sqrt{ab} \tag{6}$$

$$m_H(a,b) = \frac{2ab}{a+b} = \frac{2}{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}} \tag{7}$$

danno agevole accesso ad alcune immediate proprietà:

- le tre medie rispettano il rapporto di similitudine, nel senso che le medie dei segmenti di lunghezza λa e λb sono le (6) e (7) moltiplicate per λ, qualunque sia il numero reale positivo λ;
- $m_H \leq m_G \leq m_A$ e l'uguaglianza vale, in entrambi i segni, se e solo se $a = b$, caso nel quale le tre medie coincidono con a;
- la prima uguaglianza in (7) equivale alla relazione $m_A m_H = m_G^2$, ovvero ciascuna media è ricavabile dalle altre due; in particolare $m_H = \dfrac{m_G^2}{m_A}$;

([22]) Per l'umanista Daniele Barbaro, autore di importanti commenti sull'architettura di Vitruvio, Andrea Palladio costruì intorno al 1558 la magnifica villa di Maser, decorata dagli splendidi affreschi di Paolo Veronese.

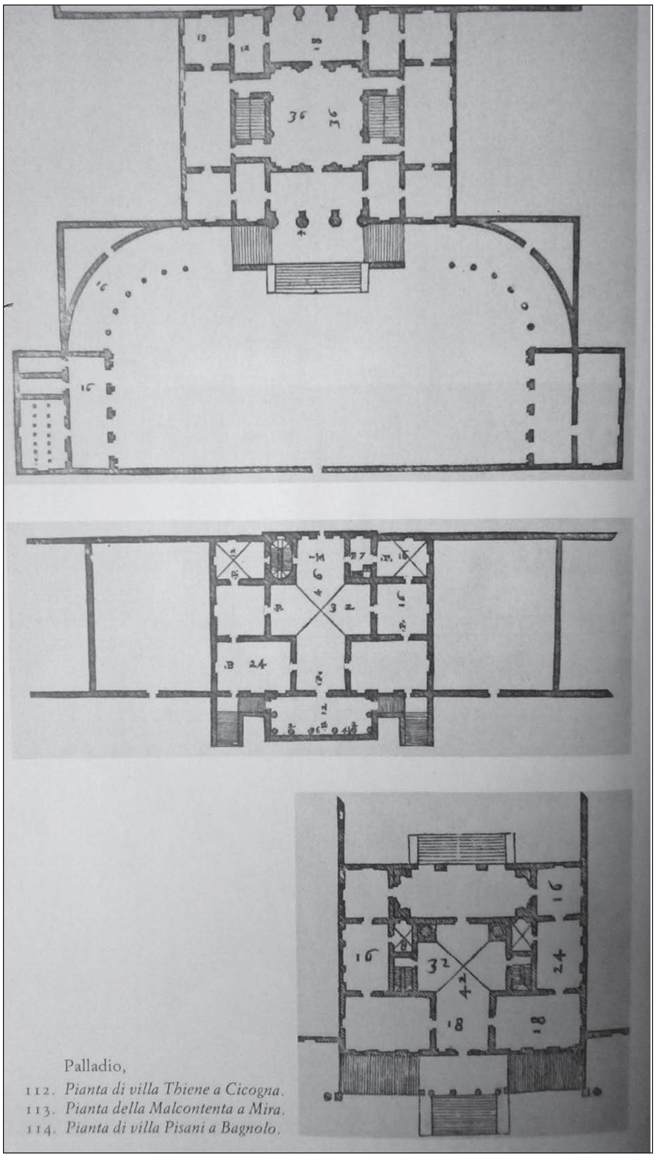


FIGURA 4 – Altre piante di ville del Palladio, concepite come universi musicali. L'immagine è tratta da [15].

- la seconda uguaglianza in (7) mostra che la media armonica di a e b coincide con il reciproco della media aritmetica dei reciproci $1/a$ e $1/b$:

$$m_H(a,b) = m_A^{-1}\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}\right),$$

$$m_A(a,b) = m_H^{-1}\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}\right);$$

- i reciproci di una proporzione geometrica formano una proporzione geometrica e

$$m_G\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}\right) = \frac{1}{m_G(a,b)}.$$

Se i segmenti sono corde poste in vibrazione, la proporzionalità inversa tra la lunghezza ℓ della corda e la frequenza di vibrazione ν

$$\nu = \frac{\kappa}{\ell} \tag{8}$$

(la costante κ è la medesima a partià di densità e di tensione) stabilisce la seguente

Proprietà 1 *Se due corde di lunghezza a e b hanno media armonica m_H, allora la frequenza di vibrazione della corda lunga m_H è la media aritmetica delle frequenze delle due corde.*

Dim. Le frequenze di vibrazione, in virtù della (8), sono $\nu_a = \dfrac{\kappa}{a}$, $\nu_b = \dfrac{\kappa}{b}$; d'altra parte dalla (7) si deduce

$$m_H = \frac{2\kappa}{\dfrac{\kappa}{a} + \dfrac{\kappa}{b}} = \frac{2\kappa}{\nu_a + \nu_b} = \frac{\kappa}{m_A(\nu_a, \nu_b)}$$

dunque $\nu_{m_H} = \dfrac{\kappa}{m_H} = m_A(\nu_a, \nu_b)$. □

Definiamo infine un'ulteriore quantità che talvolta interviene nei ragionamenti aritmetici sui suoni in alcuni trattati, come in [17]: tornando alle notazioni dell'inizio della Sezione, nella *proporzione contrarmonica* il segmento di misura m_{CH} si interpone fra a e $b > a$ superando il primo ed essendo superato dal secondo rispettando il rapporto tra il secondo segmento ed il primo (ovvero in ordine inverso rispetto alla proporzione armonica):

$$\frac{m_{CH} - a}{b - m_{CH}} = \frac{b}{a}. \tag{9}$$

La formula esplicita analoga a (7) è

$$m_{CH}(a,b) = \frac{a^2 + b^2}{a+b} = a + b - \frac{2ab}{a+b};$$

inoltre, $m_{CH} > m_H$ e vale la relazione $m_H(a,b) + m_{CH}(a,b) = 2m_A(a,b)$. Un semplice esempio è $a = 3$, $b = 6$, con media armonica e contrarmonica rispettivamente $m_H = 4$, $m_{CH} = 5$.

4. – Alla ricerca di proporzioni

L'insegnamento da scorgere nell'ispirazione ai canoni dell'architettura rinascimentale è la predilezione per la proporzione armonica delle dimensioni spaziali, che giocano il ruolo di corde musicali: la prima esplorazione da compiere è riscontrare la presenza di terne di corde formanti proporzioni armoniche nei sistemi di suoni dapprima delineati. La Proprietà 1 fa trasferire l'indagine sulle proporzioni armoniche alla ricerca di proporzioni aritmetiche sulle frequenze o su equivalenti quantità inversamente proporzionali alle lunghezze delle corde (23). Richiamiamo le due sequenze (2) e (4) di suoni pitagorici e suoni naturali (24) dapprima delineate, per osservare che dal punto di vista del numero esse appartengono all'universo dei suoni prescritto dalle divisioni consentite:

$$\mathfrak{S}_{\mathcal{P}} \subset \mathcal{P}, \quad \mathfrak{S}_{\mathcal{N}} \subset \mathcal{N}$$

dove

$$\mathcal{P} = \{2^m 3^n, \ \ m, n \in \mathbb{Z}\} \tag{10}$$

$$\mathcal{N} = \{2^m 3^n 5^p, \ \ m, n, p \in \mathbb{Z}\} \tag{11}$$

con $\mathbb{Z}$ l'insieme dei numeri interi. L'illustrazione delle medie aritmetiche tra gli elementi di $\mathfrak{S}_{\mathcal{P}}$ o di $\mathfrak{S}_{\mathcal{N}}$, esibite nelle due tabelle che seguono (il calcolo proviene in ciascuna posizione dal corrispondente incrocio degli elementi incontrati sulla prima riga e prima colonna),

$\mathfrak{S}_{\mathcal{P}}$	1	9/8	81/64	4/3	3/2	27/16	243/128	2
1		17/16	145/128	7/6	4/3	43/32	371/128	3/2
9/8			153/128	59/48	21/16	45/32	387/256	25/16
81/64				499/384	177/256	189/128	405/256	209/128
4/3					17/12	145/96	1241/384	5/3
3/2						51/32	435/256	7/4
27/16							459/256	59/32
243/128								499/256

(23) Questo fatto, non in termini di frequenza ma di inverso della lunghezza, è presente già nel Trattato [16], in cui Zarlino mostra che le consonanze siano determinate "*dal medio tanto aritmetico che armonico*".
(24) La circostanza dei suoni equabili verrà commentata più in seguito.

$\mathfrak{S}_{\mathcal{N}}$	1	9/8	5/4	4/3	3/2	5/3	15/8	2
1		17/16	9/8	7/6	5/4	4/3	23/16	3/2
9/8			9/16	59/48	21/16	67/48	3/2	25/16
5/4				31/24	11/8	35/24	25/16	13/8
4/3					17/12	3/2	77/48	5/3
3/2						19/12	27/16	7/4
5/3							85/48	11/6
15/8								31/16

è già di per sé espressiva. Con il fondo più scuro si sono evidenziate le medie che non escono dalla scala $\mathfrak{S}_{\mathcal{P}}$ nella prima tabella, o da $\mathfrak{S}_{\mathcal{N}}$ nella seconda, con il fondo grigio meno scuro le medie estranee alla scala, tuttavia appartenenti a $\mathcal{P}$ (ovvero di tipo (10)) nel primo caso, appartenenti a $\mathcal{N}$ (dunque di tipo (11)) nel secondo. Nella prima tabella l'unica presenza di proporzioni aritmetiche è limitata alla stretta cerchia dei quattro suoni (1), con le due proporzioni evidenziate; il resto delle caselle presenta dei rapporti talvolta complicati e non connaturati con la corrispondente ricerca di "moduli costruttivi" da sezioni della corda. Ben differente appare la situazione nella seconda tabella: ogni valore della scala $\mathfrak{S}_{\mathcal{N}}$ è interessato da almeno una proporzione, inoltre vengono generati due suoni naturali (fondo grigio chiaro), ovvero del tipo (11). La predisposizione dei suoni naturali alla proporzione armonica (intesa sempre nel senso della Proprietà 1) emersa dalla tabella è avvalorata anche da più di un metodo costruttivo che possiamo architettare per giungere ai suoni $\mathfrak{S}_{\mathcal{N}}$ procedendo per proporzioni, senza che sia neppure necessario il "dogma" (1): può valere la pena di esporre il seguente, che presenta dei tratti quasi esclusivamente matematici. A partire dal solo suono di base, corrispondente a 1, e dal suo diapason 2, si aggiungono in successione le medie

$$(12)\quad m_A(1,2)=\frac{3}{2}\rightarrow m_A\left(1,\frac{3}{2}\right)=\frac{5}{4}\rightarrow m_A\left(1,\frac{5}{4}\right)=\frac{9}{8}$$

legittimamente appartenenti all'universo dei suoni (11); per contro, il frazionamento successivo $m_A\left(1,\frac{9}{8}\right)=\frac{17}{16}$ farebbe uscire dai suoni naturali. Il temporaneo insieme di suoni $\left\{1,\frac{9}{8},\frac{5}{4},\frac{3}{2},2\right\}$ può essere ampliato sempre ricorrendo alle proporzioni, cercando di compensare alcune distanze eccessive tra suoni consecutivi:

(i) l'unico suono naturale compreso fra $\frac{3}{2}$ e 2 in grado di formare una proporzione aritmetica con i quattro precedenti è $\frac{15}{8}$, tramite l'espressione $m_A\left(\frac{5}{4},\frac{15}{8}\right)=\frac{3}{2}$.

(ii) una seconda considerazione, ancora a sostegno di una sorta di unicità della costruzione, è la seguente: i suoni naturali che possono formare medie aritmetiche con gli estremi del diapason, nel senso di due suoni σ_1 e σ_2 per cui $\sigma_1=m_A(1,\sigma_2)$ e $\sigma_2=m_A(\sigma_1,2)$, sono solamente $\frac{5}{4}$ e $\frac{5}{3}$.

Intervallare il diapason con i tre suoni (12) e con i tre emersi da (i) e (ii) fa conseguire esattamente i suoni naturali $\mathfrak{S}_{\mathcal{N}}$; tuttavia la soddisfazione è attenuata da più di una perplessità: innanzitutto, la decisione di fermarsi è principalmente motivata dall'aver ottenuto qualcosa che, in un certo senso, non ha tradito le aspettative, ovvero le sette note. La disinteressata neutralità della matematica, ignara della teoria musicale, non vedrebbe la ragione per cui non procedere al calcolo di ulteriori medie "naturali", effettivamente esistenti. In secondo luogo, un oggetto di critica – in cui rientra peraltro l'obiezione appena esposta – è quello di aver seguito un metodo non sistematico, la cui consequenzialità si aggiusta più su considerazioni sensate ma "esterne", anziché su una linea precisa, anteposta.

4.1 – *Il metodo di Zarlino e di Keplero*

È doveroso e non privo di interesse accennare all'impianto teorico formulato dal teorico musicale del Cinquecento Zarlino nell'importante trattato [17], rivolgendo l'attenzione soprattutto ai temi che appartengono alla nostra discussione, ovvero il nucleo primario di consonanze ed il riscontro di proporzioni. L'inizio del Ragionamento Secondo di [17] presenta la dichiarazione – in base ad un principio assiomatico non distante dall'osservanza dei Pitagorici verso la tetraktys – della provenienza di ogni consonanza musicale dal *Senario*, i primi sei numeri interi e dal "primo numero cubo", da 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8. La formazione dei suoni armonici avviene calcolando tutti i rapporti tra ciascuno dei sette numeri con i precedenti ([25]): delle ventuno possibili relazioni rimangono, in termini musicali (ovvero riportandosi nel diapason fra 1 e 2 ed includendo ovviamente il suono base 1):

$$\mathcal{T}_Z = \left\{1, \frac{6}{5}, \frac{5}{4}, \frac{4}{3}, \frac{3}{2}, \frac{8}{5}, \frac{5}{3}, 2\right\}. \tag{13}$$

In verità, l'insieme dei suoni (13) proveniente dal Senario mediante un criterio numerico è più ampio di (3) ottenuto con la reale divisione della corda fino a cinque parti, per l'aggiunta di 6/5 e e 8/5, rispettivamente *semiditono* o terza minore (l'intervallo DO – MI bemolle, in notazione moderna) e *hexacordo minore* o sesta minore (l'intervallo DO – LA bemolle). Un compromesso tra le ragioni matematiche di $\mathcal{T}_Z$ e quelle pratiche di $\mathcal{T}_5$ può essere attuato permettendo la divisione della corda in sei ed in otto parti, del resto derivanti rispettivamente dalla divisione a metà di un terzo e di un quarto della corda, operazioni non estranee: in tal modo si ottengono effettivamente i due suoni 6/5 e 8/5 (e solo quelli). L'aspetto meno invitante del risultato è il cedere ad una pratica di aggiustamento *a posteriori*, seppur legittimamente motivata, attività che nelle intenzioni dalla presente discussione vuole essere assente.

Nel Ragionamento Primo del medesimo trattato [17] vengono definite accuratamente l'*Arithmetica progressione*, la *Geometrica proportionalità*, la *mediocrità Harmonica* e la *proportionalità Contr'-Harmonica*, corrispondenti alle quattro medie m_A, m_G, m_H e m_{CH} dapprima definite. Nel Ragionamento successivo i passaggi che attirano maggiormente l'attenzione di chi, come noi, indaga sulla questione delle proporzioni riguardano il ritrovamento di proporzioni armoniche nell'insieme sonoro (13): nei termini delle notazioni utilizzate ed avendo presente la Proprietà 1 della Sezione 3, viene argomentato ([26]) che $3/2 = m_A(1, 2)$, con distanza di 3/2 da 2 pari a 4/3, e che $5/4 = m_A(1, 3/2)$, con distanza di 5/4 da 3/2 pari a 6/5.

La Proposta XI del medesimo Ragionamento Secondo sembra centrare in pieno il fine della nostra discussione, quello di cogliere la struttura serrata e completa di proporzioni fra i suoni naturali: "*Tra i termini delle diuisioni della Diapason, fatte secondo l'Harmonica & Contr'harmonica proportionalità: & anco tra le loro differenze: si trouano le forme de tutte le Consonanze musicali.*" Nel seguire tuttavia la riflessione successiva, si raccoglie questa spiegazione dell'enunciato: partendo da una corda di lunghezza 6 e dal suo diapason di lunghezza 3, le medie $m_H(3, 6) = 4$, $m_{CH}(3, 6) = 5$ e le differenze $6 - m_{CH} = m_H - 3 = 1$, $6 - m_H = m_{CH} - 3 = 2$ (*& anco tra le loro differenze*), si colleziona la lista dei numeri da 1 a 6 del Senario, con i quali si formano le consonanze nel modo dapprima descritto ([27]). Non

([25]) Il criterio rincorre la predilezione verso i rapporti "superparticolari", dove il numeratore supera di una unità il denominatore. La presenza nell'insieme dei rapporti non superparticolari 8/5 e 5/3 è sorretta dal Teorico con la provenienza di questi dalla composizione dei rapporti superparticolari $8/5 = 4/3 \times 6/5$, $5/3 = 4/3 \times 5/4$.

([26]) È interessante esporre le parole del Trattato a riguardo: "PROPOSTA PRIMA: *La Diapente & la Diatessaron nascono dalla diuisione Harmonica della Diapason consonanza.*" La dimostrazione viene effettuata con la terna (riferita alla lunghezza delle corde) 3, 4 e 6, per la quale $m_H(3, 6) = 4$. "PROPOSTA VI: *Il Ditono, & lo Semiditono nascono dalla diuisione della Diapente Harmonicamente fatta*", dimostrazione svolta con la terna 10, 12 e 15. Seguirà la "PROPOSTA VIII: *Il Tuono maggiore & lo minore nascono dalla diuisione del Ditono fatta harmonicamente*"; la terna armonica 36, 40 e 45, impiegata nella dimostrazione, comporta $9/8 = m_A(1, 5/4)$, 9/8 tono maggiore e 10/9, distanza tra 9/8 e 5/4, tono minore.

([27]) L'assenza del numero 8 comporta quella dell'esacordo minore 8/5 tra le consonanze generate secondo la Proposta XI; in questo modo Zarlino si rivolge ad una prima definizione di consonanza che coinvolge esclusivamente il siamo dunque nell'ordine di idee della ricerca di proporzioni secondo il metodo della Sezione 4, ma di utilizzare i valori delle medie in un puro aggiustamento di numeri, una sorta di "gioco" combinatorio. A conferma di ciò, nella Proposta successiva il medesimo intento di contenere tutte le consonanze viene ottenuto tramite la formazione di rapporti provenienti da progressioni aritmetiche.

La definizione di nuovi suoni da aggiungere ed interporre a quelli in (14) avviene ponendo il tono maggiore $9/8 = 3/2 : 4/3$ come il distacco diatessaron-diapente, il tono minore $10/9 = 4/3 : 6/5$ semitono-diatessaron, il semitono maggiore $16/15 = 4/3 : 5/4$ ditono-diatessaron, il semitono minore (o diesis maggiore) $25/24 = 5/4 : 6/5 = 10/9 : 16/15$ semiditono-ditono nonché semitono maggiore-tono minore, il comma $81/80 = 9/8 : 10/9$ tono maggiore-tono minore, il diesis minore $128/125 = 16/15 : 25/24$ semitono minore-semitono maggiore. In merito all'aggiunta di proporzioni, viene osservata la divisione armonica del ditono in tono maggiore e tono minore (28), ovvero $m_H(1, 5/4) = 10/9$, con distanza pari a 9/8 da 10/9 a 5/4. La rassegna degli intervalli piccoli si conclude con lo *schisma* (= divisione) ed il *diaschisma*, come divisione a metà, nell'ordine, del comma e del semitono minore; opportunamente Zarlino osserva che "*Le proportioni del Schisma & dello Diaschisma sono incognite & irrationali*" (Proposta XXV). A conclusione del Secondo Ragionamento, il teorico dedica circa una ventina di Proposte all'esame attento ed esaustivo della formazione di un intervallo tramite sottointervalli ed al confronto tra essi (29).

La volontà di trarre dalla rapida illustrazione del procedimento di Zarlino un sistema sonoro da confrontare con i risultati successivi porta a considerare i rapporti dichiarati nel corso del Secondo Ragionamento (30), elencabili unendo a (13) i suoni che appena sopra sono emersi:

$$(14)\ \mathfrak{S}_{\mathcal{Z}} = \left\{1, \frac{81}{80}, \frac{25}{24}, \frac{135}{128}, \frac{16}{15}, \frac{10}{9}, \frac{9}{8}, \frac{6}{5}, \frac{5}{4}, \frac{4}{3}, \frac{3}{2}, \frac{8}{5}, \frac{5}{3}, 2\right\}$$

Il celebre astronomo Keplero dedicò il Libro Terzo del trattato *Harmonices Mundi* ([7], il medesimo che contiene la III legge sul moto dei pianeti) alla teoria musicale: schieratosi contro l'assiomatica derivazione pitagorica dell'armonia dalla perfezione della tetraktys (31) – come del resto compie Zarlino nell'accogliere il Senario – egli si fa promotore di un percorso dimostrativo, per mezzo della matematica, della causa della consonanza (32), importante snodo per poi trasferire l'armonia dei suoni alle leggi del complesso cosmologico. I primi due libri di [7], di argomento geometrico (poligoni regolari, congruenze, ...) forniscono l'adeguato apparato teorico per l'impresa: la causa della consonanza è la dimostrazione, non il numero in sé.

La corda, intesa in astratto come una qualsiasi lunghezza, viene posta da Keplero a forma di cerchio e le suddivisioni sono quelle prodotte dai vertici dei poligoni regolari inscritti nel cerchio. Vengono dichiarate consonanti con l'intero cerchio il diametro stesso e quelle suddivisioni della corda che sono sottese da lati che si giovano di una "dimostrazione propria" (*demonstratio propria*), nel senso di una deduzione a partire dal diame-

Senario: approfondire la questione ci allontanerebbe dai propositi principali.

(28) Proposta VIII del Secondo Ragionamento di [17]: "*Il Tuono maggiore & lo minore nascono dalla diuisione del Ditono fatta harmonicamente.*"

(29) Riportiamo ad esempio la Proposta XXI: "*Il Semituono minore è maggior di tre Comma, & minor di quattro*" e la Proposta XXXIV: "*Aggiungendo alla Diapente il Tuono minore; ouero alla Diatessaron il Ditono, nasce l'Hexachordo maggiore. Simigliantemente aggiungendo alla Diapente il maggior Semituono; ouero alla Diatesseron il Semiditono, ne viene l'Hexachordo minore*", la decifrazione delle quali è immediata.

(30) Nei Ragionamenti successivi, che inquadrano le teorie musicali antiche della modalità secondo il corrente pensiero, ulteriori tipi di intervallo vengono considerati.

(31) In corrispondenza dell'Assioma III si legge: "*Questo assioma rende conto compiutamente della causa delle consonanze, che io sostituisco ai ripudiati numeri astratti dei Pitagorici.*"; la traduzione è tratta da [14].

(32) "*...Sebbene sia antica la forma del canto umano, composta da intervalli consonanti o emmeli, le sue cause rimasero tuttavia celate agli uomini, a tal punto che prima di Pitagora non vennero nemmeno indagate. Ricercate per duemila anni, io per primo, se non erro, le presenterò in maniera esatta.*", traduzione da [14].

tro (33). "*Detto altrimenti: la sorte che ha, tra le varie figure, la figura a cui appartiene il lato, è la stessa sorte che avrà quella consonanza tra le altre.*" (Assioma II di [7], tradotto come in [14]). La sequenza di consonanze che si ottengono con questa procedura è infinita: a selezionarne un numero finito interviene proporzione armonica, adoperabile però solo se la suddivisione genera suoni consonanti. Esplorando tra gli esempi portati da Keplero all'inizio del Capitolo III troviamo la terna $a = 12$, $b = 20$, $m_H = 15$, accettabile in quanto la divisione del suono consonante (ovvero appartenente alla sequenza della procedura) $20/12 = 5/3$ genera $15/12 = 5/4$ e $20/15 = 4/3$, ancora consonanti. Non vale lo stesso per la terna $a = 14$, $b = 35$, $m_H = 20$, non accettabile (34) in quanto $20/14 = 10/7$ e $35/20 = 7/4$ non sono suoni ammessi, pur provenendo dalla corda intera $35/14 = 5/2$, tra i suoni consonanti.

Sulla base delle premesse a cui abbiamo accennato, Keplero conclude (e dimostra) che le divisioni armoniche sono esclusivamente quelle raccolte in (13), il cui grado di perfezione segue la sorte della figura geometrica generante il suono (35). Il completamento del sistema sonoro (13) con l'aggiunta di suoni degni di prendere parte al canto, o emmeli (vedi Nota 11) viene dichiarato in [7] in modo semplice e degno di nota: "*Vengono dunque definiti come intervalli emmeli tutte le differenze tra le consonanze minori dell'intervallo doppio; né altri intervalli emmeli sono ammessi dalla facoltà naturale dell'udito che non siano generati da questa sottrazione.*" L'astratta definizione contiene in effetti la ragione musicale di spostarsi da una nota all'altra di un sistema consonante di suoni usando intervalli armoniosi. Considerando tutte le possibili distanze tra i suoni (13) ed eliminando i rapporti già presenti si ottiene un secondo ordine di intervalli $9/8$, $10/9$, $16/15$ e $25/24$, in cui riconosciamo il tono maggiore, il tono minore ed il semitono maggiore nei primi tre. Il ruolo di $25/24$ (il *diesis*) è in certi passaggi sfuggente: nel generare l'insieme i sottointervalli del terzo ordine a partire dal secondo ed applicando la definizione di emmele, Keplero considera solo i tre suoni $9/8$, $10/9$, $16/15$ per trovare $81/80$ (il *comma*), $135/128$ (il *limma*) e recuperare $25/24$ nella distanza tra $16/15$ e $10/9$ fra tono minore e tono maggiore (36).

Al termine di questa breve digressione sul metodo di Keplero, doverosa per la singolare e rara – se non unica – attenzione per la matematica come ragione e prova dell'armonia, riassumiamo in

$$\mathfrak{S}_{\mathcal{K}} = \left\{1, \frac{81}{80}, \frac{128}{125}, \frac{25}{24}, \frac{16}{15}, \frac{10}{9}, \frac{9}{8}, \frac{6}{5}, \frac{5}{4}, \frac{4}{3}, \frac{3}{2}, \frac{8}{5}, \frac{5}{3}, 2\right\} \tag{15}$$

il sistema armonico risultante dall'analisi del metodo kepleriano.

4.2 – *Un metodo che genera medi proporzionali*

A questo punto, anziché cercare un procedimento che insegua la matematica armonia *in itinere* – laddove, oltre alla teoria dei due celebri studiosi dapprima riassunta, non mancano considerevoli esempi di illustri esponenti del pensiero teorico, quali Mersenne ([10]), Cartesio ([5]), Rameau ([11]), Eulero (37) ([6]) – meditiamo sulla capacità

(33) Ad esempio, il quadrato inscritto produce la porzione di lunghezza $1/4$ rispetto al cerchio e genera il suono corrispondente a due diapason, la parte residua sul cerchio di lunghezza $3/4$ genera il diatessaron. Affrontare la questione delle figure "dimostrabili" e "non dimostrabili" ci porterebbe lontano.

(34) "*in proportione revera* (=in realtà) *non Harmonica*", [7].

(35) Sono consonanze perfette diapason, diapente e diatessaron, di rapporti 2, $3/2$ e $4/3$, provenienti dal diametro, dal triangolo e dal quadrato, rispettivamente; sono consonanze imperfette le terze e le seste maggiori e minori ($5/4$, $6/5$, $5/3$ e $8/5$ rispettivamente) originate dal pentagono.

(36) È interessante la posizione di Keplero nel motivare l'origine degli intervalli minori – del secondo e terzo ordine – non con l'esigenza di *riempire* gli intervalli consonanti (ad esempio, tono maggiore $9/8$, tono minore $10/9$ e semitono maggiore $16/15$ uniti assieme formano e riempiono il diatessaron), ma col raffronto delle distanze tra suoni: i tre intervalli del secondo ordine rappresentano tutte e sole le distanze tra suoni consecutivi del primo ordine, gli intervalli del terzo ordine nascono dalle comparazioni degli emmeli del secondo ordine, togliendo $25/24$. La cura – dapprima segnalata – di Zarlino di evidenziare la provenienza di un intervallo dalla composizione di più sottointervalli è elusa in Keplero.

(37) Il famoso matematico si è cimentato in modo non marginale su questioni di teoria musicale e di consonanza;

dell'armonica matematica di portare un *incipit*, un avvio, ad un *exitus* convincente, un prodotto musicale, attraverso la conduttura rigorosa di un algoritmo.

Rientriamo così nell'esatto perimetro della matematica per porre la seguente questione: è possibile formulare un procedimento sulla linea intenzionale di accostare i suoni sulla base delle proporzioni, ma che proceda senza intromissioni, per offrire alla fine un insieme di suoni "ideale" in merito al reciproco accordo che le proporzioni medesime trasmettono?

Per fissare un'idea dal punto di vista matematico, procurandoci uno strumento per conteggiare la presenza e la generazione di medie aritmetiche, definiamo il *generatore di medie*

(16) $\mathbb{M}\langle\, \mathcal{I}\rangle_{\mathfrak{R}}$ $\mathcal{I}$ insieme di numeri, $\mathfrak{R}$ restrizioni

come l'insieme di tutte le possibili medie aritmetiche calcolate con le coppie di elementi in $\mathcal{I}$, accettando il risultato solo se è soddisfatta la restrizione $\mathfrak{R}$. La destinazione è prevedibile: $\mathcal{I}$ è un complesso originario di suoni, $\mathfrak{R}$ è la richiesta che la media risultante dia luogo ad un suono di una precisa tipologia (essenzialmente pitagorico oppure naturale), l'intento è quello di dar luogo ad un calcolo che esaurisca iterativamente tutte i possibili medi proporzionali, per conquistare alla fine una scala di suoni in buoni rapporti fra loro.

La prima indagine che pone, comprensibilmente, $\mathcal{I} = \mathcal{T}$, l'insieme dei quattro suoni pitagorici consonanti (1), non può che confermare ciò che è emerso dalla tabella precedente, relativa a $\mathfrak{S}_{\mathcal{P}}$: posta come restrizione $\mathfrak{R}$ l'appartenenza ai suoni pitagorici (10), indicata in modo conciso dal pedice $(2,3)$, il calcolo (16) è

$$(17)\quad \mathbb{M}\langle\mathcal{T}\rangle_{(2,3)} = \left\{ m_A\left(1,\frac{3}{2}\right) = \frac{4}{3},\ m_A(1,2) = \frac{3}{2}\right\} \subset \mathcal{T}$$

e non trova accesso ad un secondo passaggio. In altri termini, non esistono suoni intermedi di tipo pitagorico le cui corde formino proporzioni armoniche con le quattro prescritte.

Un quadro teorico più interessante, da abbinare alla seconda tabella attinente a $\mathfrak{S}_{\mathcal{N}}$, emerge se si allenta la restrizione ammettendo i suoni naturali (11), indicata stavolta con il pedice $(2,3,5)$: il primo passo di (16), sempre a partire dall'insieme (1), è

$$(18)\quad \begin{aligned}&\mathbb{M}\langle\mathcal{T}\rangle_{(2,3,5)} =\\ &= \left\{ m_A(1,\frac{3}{2}) = \frac{5}{4},\ m_A(1,2) = \frac{3}{2},\ m_A(\frac{4}{3},2) = \frac{5}{3}\right\}\end{aligned}$$

e non sfugge il fatto che dà luogo all'ampliamento $\mathcal{T}_5$, definito in (3), di $\mathcal{T}$. Si prosegue dunque calcolando

$$\mathbb{M}\langle\mathcal{T}_5\rangle_{(2,3,5)} = \mathbb{M}\langle\mathcal{T}\rangle_{(2,3,5)} \bigcup$$

$$\bigcup \left\{ m_A\left(1,\frac{5}{4}\right) = \frac{9}{8},\ m_A\left(1,\frac{5}{3}\right) = \frac{4}{3},\ m_A\left(\frac{4}{3},\frac{5}{3}\right) = \frac{3}{2}\right\}$$

che permette di proseguire accogliendo la novità $\dfrac{9}{8}$:

$$\mathbb{M}\left\langle \mathcal{T}_5 \bigcup \left\{\frac{9}{8}\right\}\right\rangle_{(2,3,5)} =$$

$$= \mathbb{M}\langle\mathcal{T}_5\rangle_{(2,3,5)} \bigcup \left\{ m_A\left(\frac{9}{8},2\right) = \frac{25}{16}\right\}$$

poi $\dfrac{25}{16}$:

$$\mathbb{M}\left\langle \mathcal{T}_5 \bigcup \left\{\frac{9}{8},\frac{25}{16}\right\}\right\rangle_{(2,3,5)} =$$

$$= \mathbb{M}\left\langle \mathcal{T}_5 \bigcup \left\{\frac{9}{8}\right\}\right\rangle_{(2,3,5)} \bigcup \left\{ m_A\left(\frac{5}{4},\frac{25}{16}\right) = \frac{45}{32}\right\},$$

di seguito $\dfrac{45}{32}$:

$$\mathbb{M}\left\langle \mathcal{T}_5 \bigcup \left\{\frac{9}{8},\frac{45}{32},\frac{25}{16}\right\}\right\rangle_{(2,3,5)} =$$

$$= \mathbb{M}\left\langle \mathcal{T}_5 \bigcup \left\{\frac{9}{8},\frac{25}{16}\right\}\right\rangle_{(2,3,5)} \bigcup \left\{ m_A\left(\frac{9}{8},\frac{45}{32}\right) = \frac{81}{64}\right\}$$

---

nel trattato [6] del 1739 i suoni sono immaginati tutti della tipologia nominata in (11) $2^m 3^n 5^p$, $m,n,p \in \mathbb{Z}$ (in anni in cui, a dire il vero, si stavano affermando i sistemi di temperamento e le teorie che ambivano all'accordatura equabile, con la divisione in parti identiche del diapason) e catalogati in una gerarchia di piacevolezza (*gradus suavitatis*) che diminuisce all'aumentare degli esponenti della forma rappresentativa. Se si colloca il contributo di Eulero nell'epoca delle nascenti teorie di consonanza che coinvolgono ormai le armonie di accordi (più suoni insieme) anziché nell'epoca zarliniana ormai trascorsa da quasi due secoli, le conclusioni di Eulero risultano talvolta deboli, criticabili e probabilmente appesantite dalla smisurata predisposizione matematica a scapito di ragioni musicali.

infine $\frac{81}{64}$:

$$\mathbb{M}\left\langle \mathcal{T}_5 \bigcup \left\{\frac{9}{8},\frac{81}{64},\frac{45}{32},\frac{25}{16}\right\}\right\rangle_{(2,3,5)} =$$

$$= \mathbb{M}\left\langle \mathcal{T}_5 \bigcup \left\{\frac{9}{8},\frac{45}{32},\frac{25}{16}\right\}\right\rangle_{(2,3,5)}.$$

L'ultima uguaglianza mostra che il procedimento ha avuto termine, non essendo stata generata alcuna media nuova di tipo naturale. Vale la pena elencare la gamma finale dei suoni

$$(19) \qquad \mathfrak{S}_{\mathcal{N}}^{(1)} = \left\{1,\frac{9}{8},\frac{5}{4},\frac{81}{64},\frac{4}{3},\frac{45}{32},\frac{3}{2},\frac{25}{16},\frac{5}{3},2\right\}$$

che amplia l'insieme di partenza (1) incorporando sei suoni. Il pedice $\mathcal{N}$ fa riferimento sempre ai suoni di tipo (11), l'apice (1) comunica l'esistenza di (almeno) una seconda procedura iterativa che utilizza (16): effettivamente un'esplorazione del tutto spontanea viene in mente ponendo l'avvio in $\mathcal{I} = \mathfrak{S}_N$, per rispondere alla questione: la scala naturale è "chiusa" rispetto al calcolo della media o necessita di altri suoni naturali per esaurire le medie m_A? Inoltre: il procedimento ha un termine come per (19), così da dare origine ad una nuova scala di suoni naturali? Calcoliamo dunque (radunando praticamente le caselle a sfondo grigio chiaro e grigio scuro della tabella relativa a $\mathfrak{S}_{\mathcal{N}}$)

$$\mathbb{M}\langle\mathfrak{S}_{\mathcal{N}}\rangle_{(2,3,5)} = \left\{ m_A\left(1,\frac{5}{4}\right) = \frac{9}{8},\ m_A\left(1,\frac{3}{2}\right) = \right.$$

$$= \frac{5}{4},\quad m_A\left(1,\frac{5}{3}\right) = \frac{4}{3},\quad m_A(1,2) = m_A\left(\frac{9}{8},\frac{15}{8}\right) =$$

$$= m_A\left(\frac{4}{3},\frac{5}{3}\right) = \frac{3}{2},$$

.

$$m_A\left(\frac{9}{8},2\right) = m_A\left(\frac{5}{4},\frac{15}{8}\right) = \frac{25}{16},$$

$$\left. m_A\left(\frac{4}{3},2\right) = \frac{5}{3},\ m_A\left(\frac{3}{2},\frac{15}{8}\right) = \frac{27}{16} \right\}$$

per trovare i due suoni naturali $\frac{25}{16}$ e $\frac{27}{16}$. Si può procedere oltre, per effettuare tre iterazioni:

$$\mathbb{M}\left\langle \mathfrak{S}_{\mathcal{N}} \bigcup \left\{\frac{25}{16},\frac{27}{16}\right\}\right\rangle_{(2,3,5)} =$$

$$= \mathbb{M}\langle\mathfrak{S}_{\mathcal{N}}\rangle_{(2,3,5)} \bigcup \left\{ m_A\left(\frac{9}{8},\frac{27}{16}\right) = m_A\left(\frac{5}{4},\frac{25}{16}\right) = \frac{45}{32}\right\}$$

$$\mathbb{M}\left\langle \mathfrak{S}_{\mathcal{N}} \bigcup \left\{\frac{45}{32},\frac{25}{16},\frac{27}{16}\right\}\right\rangle_{(2,3,5)} =$$

$$\mathbb{M}\left\langle \mathfrak{S}_{\mathcal{N}} \bigcup \left\{\frac{25}{16},\frac{27}{16}\right\}\right\rangle_{(2,3,5)} \bigcup \left\{ m_A\left(\frac{9}{8},\frac{45}{32}\right) = \frac{81}{64}\right\}$$

$$\mathbb{M}\left\langle \mathfrak{S}_{\mathcal{N}} \bigcup \left\{\frac{81}{64},\frac{45}{32},\frac{25}{16},\frac{27}{16}\right\}\right\rangle_{(2,3,5)} =$$

$$= \mathbb{M}\left\langle \mathfrak{S}_{\mathcal{N}} \bigcup \left\{\frac{45}{32},\frac{25}{16},\frac{27}{16}\right\}\right\rangle_{(2,3,5)}$$

l'ultima delle quali segnala che il processo si è arrestato. Conviene elencare la lista finale dei suoni originali e di quelli via via aggiunti:

$$(20) \quad \mathfrak{S}_{\mathcal{N}}^{(2)} = \left\{1,\frac{9}{8},\frac{5}{4},\frac{81}{64},\frac{4}{3},\frac{45}{32},\frac{3}{2},\frac{25}{16},\frac{5}{3},\frac{27}{16},\frac{15}{8},2\right\}.$$

Restando nell'ordine di idee della procedura appena conclusa, osserviamo che, applicando il metodo ai suoni pitagorici $\mathfrak{S}_{\mathcal{P}}$, non viene prodotta alcuna novità, in linea con (17): ovvero, ponendo $\mathcal{I} = \mathfrak{S}_{\mathcal{N}}$ e calcolando (16) nella restrizione $\mathfrak{R}$ dei suoni pitagorici si trova

$$(21) \qquad \mathbb{M}(\mathfrak{S}_{\mathcal{P}})_{(2,3)} \subseteq \mathfrak{S}_{\mathcal{P}},$$

come mostra la tabella delle medie relativa ai suoni pitagorici $\mathfrak{S}_{\mathcal{P}}$.

Prima di dare un'interpretazione sulla disposizione dei suoni (19), (20) lungo il diapason e di valutarne l'interesse musicale, prendiamo in esame la scala dei suoni equabili (5). Le proprietà dapprima elencate sui medi proporzionali e la (8) stabiliscono la seguente relazione fra le lunghezze a e b delle corde e le altezze del suono v_a, v_b:

$$m_G(v_a, v_b) = \frac{\kappa}{m_G(a,b)},$$

dunque la presenza di proporzioni geometriche sulla scala dei suoni corrisponde esattamente alla presenza della proporzione geometrica delle corrispondenti lunghezze. Se si considera poi che (5) è essa stessa una successione geometrica, allora è semplice concludere che ciascuna terna di suoni alla medesima distanza (compresi tre suoni consecutivi) forma una proporzione geometrica. L'occorrenza già incontrata (accennata sulla tavoletta) è l'equidistanza dei diapason disposti ad altezze in progressione geometrica. L'assenza di proporzioni armoniche nella scala equabile e il pur fitto ma disadorno intervento della proporzione geometrica nella scala equabile rende la formazione di quest'ultima non in dialogo con le altre, se non per confrontare i valori irrazionali (5) con le frazioni naturali prossime ad essi.

5. – Sul contenuto musicale del risultato

Se dapprima hanno recitato i personaggi (matematici), andiamo ora a svelare gli interpreti (musicali) – in parte già noti – e la loro parte. Innanzitutto, la capacità di generare suoni che amplino la presenza della proporzione armonica nella consonanza è assente nelle sonorità pitagoriche, come indica la (17): la formazione di proporzioni armoniche è impossibile se la gamma sonora viene limitata ai suoni generati da bipartizione o tripartizione della corda. Allo stesso tempo, la (21) testimonia che l'aggiunta dei suoni pitagorici di (2) alle quattro consonanze (1) non predispone alcuna proporzione armonica che intensifichi le due iniziali del diapente e del diatessaron. In termini del processo di generazione per diapente illustrato nel Paragrafo 2.1, l'attenzione del suono aggiunto esclusivamente alla consonanza "perfetta" [38] che forma con quello che lo genera produce un assetto finale refrattario alla disposizione armonica generale dei suoni. Non è impropria o forzata la considerazione che per vari secoli la musica monodica del canto gregoriano e l'arcaica sovrapposizione di suoni solo per diapason, diapente e diatessaron del primo Medioevo riflettono l'assetto "ostile" alla reciproca armonia dell'utilizzata gamma di suoni pitagorici. L'uso dei suoni naturali (4), che adotta le consonanze "imperfette" 5/4 e 5/3, proviene appunto dall'esigenza di armonia fra suoni in un periodo in cui la polifonia e la musica strumentale prendono il sopravvento, a partire dal tardo Medioevo: se è la proporzione armonica a valorizzare, esaltare le consonanze, la diffusa presenza di questa nei suoni naturali $\mathfrak{S}_{\mathcal{N}}$ è un'indicazione qualitativa della fondatezza del criterio.

Nondimeno, si è pensato di andare oltre al riscontro oggettivo offerto dai calcoli eseguiti nella tabella del Paragrafo 3.1, per affiancare al meglio la matematica delle proporzioni all'aggregazione di suoni naturali, o addirittura assegnarle un ruolo esclusivo. Perciò, affidandosi al generatore di medie che seleziona solo suoni naturali ed in proporzione armonica con gli esistenti, la base delle consonanze perfette (1) si estende, dopo un numero finito di passi, ai suoni naturali (19). A questo punto, ciò che si raccoglie in (19) abbandonandosi al calcolo, alla sentenza dei numeri, propone un'interpretazione dal punto di vista musicale? Si può cominciare col dire quello che non si è trovato, ovvero la scala naturale (4): è un aspetto tutt'altro che sfavorevole, in quanto tale scala [39] non è attinente al periodo storico della teorizzazione dei suoni naturali. Il metodo non dà concessioni ad inseguire la scala dei sette suoni, volontà quest'ultima che trasmette probabilmente il maggior difetto nella letteratura a proposito, che ingabbia ogni risultato nella griglia della tonalità e che articola i passaggi nei termini delle denominazioni moderne delle note, a cui siamo abituati [40]. Parimenti, non ci siamo imbattuti né nel sistema sonoro zarliniano $\mathfrak{S}_{\mathcal{Z}}$ costruito in (14) né in quello kepleriano $\mathfrak{S}_{\mathcal{K}}$ di (15), nuovamente non deludendo le aspettative: pur essendo accomunati i sistemi sonori dall'utilizzo della proporzione armonica, quest'ultima interviene nei tre procedimenti – zarliniano, kepleriano e quello inerente a (19), (20) – in momenti differenti e secondo modalità ben distinte. Nondimeno, laddove $\mathfrak{S}_{\mathcal{Z}}$ e $\mathfrak{S}_{\mathcal{K}}$ protendono

[38] Questo è proprio il termine della teoria musicale per denotare le consonanze di diapente e diatessaron.

[39] Nel nostro tempo nota come *scala di DO maggiore*.

[40] La descrizione in breve del già menzionato libro [3] introduce in modo efficace la questione: "*La melodia delle note Do-Re-Mi-Fa-Sol-La-Si-Do, suonate di fila, è per noi così familiare che quasi pensiamo sia il modo con cui la musica necessariamente si esprime. Questa scala di suoni è invece il punto d'arrivo di una storia lunga più di duemila anni, che ha coinvolto musici, matematici e filosofi.*"

per costruzione verso la fisionomia di scale musicali, le $\mathfrak{S}_{\mathcal{N}}^{(1)}$, $\mathfrak{S}_{\mathcal{N}}^{(2)}$ propongono una serie di pezzi da costruzione consoni ad erigire un edificio sonoro, ancora non esplorati dalle leggi dell'armonia e della pratica musicale. Propriamente, la raccolta (19) o la (20) non va intesa come sequenza di suoni da scandire in successione, una scala ascendente, ma come repertorio di moduli costruttivi in armonia tra loro, predisposti alla combinazione per la compiacenza della proporzione.

La prima evidenza apparentemente scomoda è l'esistenza di due suoni molto vicini, 5/4 (il MI naturale) e 81/64 (il MI pitagorico). In realtà, se inseriti nel giusto contesto, le due presenze rintracciano i due maggiori capisaldi della lunga fase di teoria e prassi musicale che precorre il Rinascimento: da una parte, i quattro suoni pitagorici

$$(22) \qquad \underbrace{\frac{9}{8} \quad \frac{81}{64}}_{\textit{epogdoon}} \underbrace{\quad}_{\textit{limma}} \underbrace{\frac{4}{3} \quad \frac{3}{2}}_{\textit{epogdoon}}$$

formano un tetracordo diatonico [41], particella fondamentale della teoria armonica dell'antica Grecia, che confluisce nella teoria musicale dei modi [42] come elemento centrale per la metodica classificazione del repertorio, mediante le quattro *finales*, note sulle quali la melodia si riposa definitivamente e attorno alle quali si sviluppa il canto, nominate *protus*, (RE, 9/8), *deuterus* (MI, 81/64), *tritus* (FA, 4/3) e *tetrardus* (SOL, 3/2) e qui legittimamente presenti nella loro isolata ed antica intonazione pitagorica. I quattro modi indotti dalle *finales* rappresentano il punto stabile di riferimento non solo per la sistemazione universale del canto gregoriano operata nell'VIII secolo (l'*octoechos* bizantino), ma persino per l'inoltrato repertorio rinascimentale di madrigali, mottetti, toccate, ... tuttora di complicato inquadramento sistematico ([12], [1]). La compresenza in (19) dell'altro MI, ad altezza 5/4, ben documenta la dispersione dei suoni pitagorici a vantaggio di altre soluzioni e ben si inserisce nella reperibile selezione dell'*esacordo naturale*

$$(23) \qquad 1 \underbrace{\quad}_{\textit{t. mag.}} \frac{9}{8} \underbrace{\quad}_{\textit{t. min.}} \frac{5}{4} \underbrace{\quad}_{\textit{s. mag.}} \frac{4}{3} \underbrace{\quad}_{\textit{t. mag.}} \frac{3}{2} \underbrace{\quad}_{\textit{t. min.}} \frac{5}{3}$$

che dalla esplicita formulazione di Guido Monaco rappresentò per vari secoli il sistema di riferimento basilare per la teoria, la pratica e la didattica musicale [43]. Pur ambientandosi nella griglia della modalità, l'esacordo imprime un segno fondamentale nel dirigere i tanti fermenti di un'epoca in continua evoluzione, quella tardomedievale e rinascimentale, densa di materiali sonori eterogenei e si distingue come sistema proiettato nel futuro, per esempio nella prassi di passaggio da un esacordo ad un altro più grave o più acuto (la cosiddetta *mutatio*), qualcosa che al giorno d'oggi è assimilabile alla modulazione da una tonalità ad un'altra. L'intreccio tra le finales modali e l'esacordo – cardini per la fluida dottrina musicale di tanti secoli – costituisce l'impianto teorico più convincente per passare in rassegna almeno un millennio di poliedrica teoria e prassi musicale.

In (19) altre presenze interessanti oltre alle quattro *finales* e all'esacordo possono essere rintracciate, per un contributo stavolta in termini di consonanze: nell'enucleare il prospetto

$$1 \quad \underbrace{\frac{5}{4} \quad \frac{4}{3} \quad \frac{3}{2} \quad \underbrace{\frac{5}{3} \quad}_{6/5}}_{8/5} \quad 2$$

si trova l'impronta del principio proclamato da Zarlino in [17] delle consonanze musicali basato sul *Senario*, ovvero la successione dei primi sei numeri interi che estendono il concetto pitagorico di consonanza basato sui primi quattro numeri interi. Per Zarlino la consonanza proviene dai rapporti "superparticolari" (frazioni dove il numeratore supera di un'unità il denominatore) 2/1, 3/2, 4/3, 5/4, 6/5 e dai rapporti 5/3 e 8/5 (questi ultimi comunque

[41] Gli altri due generi, cromatico ed enarmonico furono abbandonati nel passaggio dal mondo classico a quello medievale.

[42] "Il significato del termine *modalità* è talmente esteso che si qualifica come modale, con maggiore o minore proprietà, buona parte di ciò che non rientra nell'ambito del nostro sistema tonale", [18].

[43] È il cosiddetto metodo di *solmisazione*.

collegabili al Senario) ma di cruciale importanza per l'affermarsi della musica polifonica ed il nascere della musica strumentale del tempo [44]. Nonostante la selezione operata sulle distanze possa apparire mirata ad esaltare la conclusione, è semplice vedere che tutte le altre distanze – ad eccezione di tono maggiore, tono minore e semitono maggiore, da non considerare consonanze – riproducono sempre i medesimi valori.

I restanti suoni 45/32 e 25/16 di (19) mettono a disposizione una proposta in merito all'articolata questione della divisione del tono: a partire dal limma pitagorico [45] contrassegnato dall'impervio rapporto 256/243, il problema di infittire ulteriormente il diapason ha dato vita nei secoli ad un'appassionata ricerca che ha stimolato i teorici anche dal punto di vista del calcolo aritmetico e della geometria applicati all'acustica [46]: ad esempio è di Zarlino stesso la dimostrazione che il tono maggiore non può essere suddiviso in due intervalli uguali, ovvero, in termini matematici, la frazione 9/8 non è il prodotto di numeri razionali uguali. In merito alla ricerca di gradini più piccoli che siano in armonia con il resto, la risoluzione (19) addita indicazioni nei suoni dell'intervallo fra 4/3 e 5/3, qui rappresentati [47]

$$\overbrace{\frac{4}{3}\underbrace{\qquad}_{135/128}\frac{45}{32}\underbrace{\qquad}_{16/15}\frac{3}{2}}^{\textit{tono maggiore}}\overbrace{\underbrace{\qquad}_{25/24}\frac{25}{16}\underbrace{\qquad}_{16/15}\frac{5}{3}}^{\textit{tono minore}}$$

Effettivamente nella suddivisione sia del tono maggiore che del tono minore è evidente il ruolo del semitono maggiore di misura 16/15, già conosciuto nel disporre i suoni naturali (4). D'altra parte, anche il frazionamento 25/24, il cosiddetto *semitono minore*, altro elemento centrale nelle suddivisioni armoniche di Zarlino, è importante per gestire ed arricchire il repertorio dei suoni. L'inevitabile sbalzo 135/128 che occorre per ricoprire il tono maggiore non è privo di significato: cogliamo l'occasione per scrivere $\frac{135}{128} = \frac{5}{4} \times \left(\frac{3}{2}\right)^3 \times \frac{1}{2^2}$ e tradurre l'operazione come "aggiunta di tre diapente (o quinte) al suono 5/4 (MI) e trasporto in grave di due diapason (o ottave)", con la mera intenzione di un unico accenno al modo di ragionare (in tutti i tempi) sul materiale sonoro mediante le frazioni, abbracciando tuttavia contenuti e metodi che vanno ben oltre i nostri intenti [48].

Rivolgiamo ora l'attenzione alla seconda lista (20), frutto dell'esperimento di "chiusura" della scala naturale (4) tramite il generatore di medie: ovviamente $\mathfrak{S}^{(2)}_{\mathcal{N}}$ amplia $\mathfrak{S}^{(1)}_{\mathcal{N}}$, coerentemente alla posizione $\mathcal{T} \subset \mathfrak{S}_{\mathcal{N}}$ degli insiemi di partenza, ma non di tanto: le uniche nuove presenze sono $\frac{27}{16}$ e $\frac{15}{8}$. I due suoni [49] vanno a riempire lo spazio vuoto più ampio di $\mathfrak{S}^{(1)}_{\mathcal{N}}$, quello tra 5/3 e 2:

$$\overbrace{\frac{5}{3}\underbrace{\qquad}_{81/80}\overbrace{\frac{27}{16}\qquad\qquad\frac{15}{8}\underbrace{\qquad}_{\textit{semitono maggiore}}2}^{\textit{tono minore}}}^{\textit{tono maggiore}}$$

senza tuttavia introdurre novità dal punto di vista della misura degli intervalli. La particella 81/80 è il pezzo più piccolo della collezione: fa parte dei cosiddetti *comma* – termine traducibile appunto con "frammento" – ed è talmente ricorrente nella tratta-

[44] Nella terminologia attuale 6/5, 5/3 e 8/5 danno luogo agli intervalli di terza minore, sesta maggiore e sesta minore, rispettivamente; una linea melodica che si sovrappone ad un'altra utilizza largamente gli intervalli di terza e sesta per contrapporsi armonicamente a quella esistente.

[45] Elencare le altre sottounità di genere pitagorico, calcolabili sulla base della prosecuzione del ciclo dei diapente, sposterebbe l'attenzione su altri argomenti.

[46] Fra i numerosi casi, nominiamo il trattato *Alia Musica*, di provenienza francese o fiamminga, in cui compare la soluzione geometrica per il calcolo del medio proporzionale armonico.

[47] Se può orientare un'odierna denominazione di massima, scansando la questione dei semitoni diatonici o cromatici, 45/32 compreso tra 4/3 (FA) e 3/2 (SOL) corrisponde al FA diesis, 25/16 tra 3/2 (SOL) e 5/3 (LA) corrisponde al SOL diesis.

[48] Per chi ha la pazienza di seguire la soluzione, semplificando in suoni equabili: tre quinte dal MI fa percorrere MI $\rightarrow$ *SI* $\rightarrow$ *FA#* $\rightarrow$ *DO#*, quest'ultimo da trasportare due ottave sotto, per trovare un suono fra il DO ed il RE della scala originale.

[49] Essi corrispondono rispettivamente al LA pitagorico e al SI di intonazione naturale.

tistica musicale da ricevere svariate denominazioni ([50]) a seconda della mansione svolta: qui è evidente il ruolo di scarto tra il tono maggiore e tono minore, come d'altra parte lo si può ottenere dal divario dei due MI pitagorico e naturale dapprima considerati: $\frac{81}{64} : \frac{5}{4} = \frac{81}{80}$. La comparsa del suono pitagorico $\frac{27}{16}$ si collega ad almeno due chiavi di lettura interessanti: da una parte, si struttura un nuovo impianto quattro finales-esacordo nei valori, rispettivamente, $\left(\frac{27}{16}, \frac{15}{8}, 2, \frac{9}{4}\right)$ e $\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{15}{8}, 2, \frac{9}{4}, \frac{5}{2}\right)$ – considerando al di là del 2 i suoni omologhi sul diapason più acuto – con il medesimo dualismo dei due suoni addossati, l'uno $\frac{27}{16}$ pitagorico l'altro $\frac{5}{3}$ naturale, ma con distanze reciproche disposte differentemente rispetto alla precedente presentazione (22), (23) ([51]) e con un colore diverso. Dall'altra parte, il suono $\frac{27}{16}$ va a completare la presenza di tutti i diapente dell'esacordo naturale, nel senso che tutti i suoni di (23) trasportati in alto di un diapente (ovvero moltiplicati per 3/2) tornano su un suono dell'esacordo medesimo, a meno eventualmente di un irrilevante diapason, eccetto $\frac{9}{8}$, che appunto si trasferisce su $\frac{9}{8} \times \frac{3}{2} = \frac{27}{16}$.

Malgrado la non vistosa differenza fra i due insiemi (19) e (20), un fatto è da segnalare: a partire dal quadricordo $\mathcal{T}$ di consonanze essenziali non è possibile ottenere le sette note diatoniche formanti, piegandosi al linguaggio della tonalità, la "scala di DO maggiore"; il settimo suono SI deve essere già presente, come avviene in (20), affinché possa essere annoverato. La "scala" apparentemente più consona alla disposizione armoniosa dei suoni – ovviamente in base al punto di vista percorso – sembra essere quella esacordale, che si afferma in (19) insieme ai frazionamenti dapprima esaminati.

Commentiamo infine la sistemazione equidistante (5), al cospetto delle proporzioni: l'unica presente è quella geometrica, in modo peraltro abbondante, dal momento che suoni a medesima distanza da un suono centrale formano proporzioni geometriche. Dal punto di vista dell'eufonia – e ciò ribadisce la fiducia riposta nella proporzione armonica – l'accostamento dei tre suoni in tale proporzione è sostanzialmente privo di significato musicale: sono in proporzione geometrica ad esempio tre suoni intervallati da due diapason, perfettamente omogenei, come tre suoni emessi da tre tasti consecutivi di un pianoforte, di ascolto non certo gradevole. La questione della consonanza nel temperamento equabile, designato come quello correntemente predominante, almeno in teoria, è molto complessa e coinvolge argomenti più assimilabili alla simmetria che alla proporzione; l'ambito musicale più frequentato da questa analisi è il repertorio otto – novecentesco, lontano dal periodo in cui ci siamo calati: un esempio in tal senso è l'articolo [8].

6. – Coda

Il modello di proporzioni che ha formato ed ispirato l'architettura del Cinquecento, epoca in cui la scala naturale emerge, fornisce un lucido spunto per assestare in modo sistematico i suoni naturali; dall'altra parte, la generazione di suoni basata ed avviata esclusivamente sul rispetto delle proporzioni propone sistemi di suoni naturali interessanti. Nell'ambito della scambievole azione e del mutuo sostegno tra matematica ed armonia si sviluppano le motivazioni informali e personali del lavoro, che ruotano attorno all'interrogativo "come mai è così immediata, trasparente la formazione, la struttura matematica della scala pitagorica e della scala equabile – connaturate rispettivamente con la generazione per diapente in successione e con l'equidistanza attraversando il diapason – quanto invece è apparentemente assente, introvabile nella scala naturale, presentata sempre – nei testi di teoria musicale – in modo manuale, enumerando l'elenco dei suoni?" Probabilmente la bellezza dei suoni naturali sta proprio nella difficoltà di far emergere il ruolo esclusivo della matematica che chiarisca, nella vasta scelta (11), la sequenza di Zarlino: la matematica armonia del calcolo avviato in (12) compie un tentativo in tal senso.

([50]) Le principali sono comma diatonico, sintonico, didimeo, tolemaico.

([51]) Si tratta stavolta del cosiddetto *esacordo duro*.

D'altra parte, può essere la matematica stessa in veste armonica a cercare con i propri strumenti i suoni: il modesto conteggio sviluppato nel lavoro ha voluto affiancare l'idea che un incastro di proporzioni armoniche possa assegnare ai suoni naturali un'anima razionale, teorizzabile. A partire dall'ossatura inconfutabile della cetra dei quattro suoni pitagorici (1), un percorso in tal senso non può non incontrare il principio maestro nel Rinascimento di proporzione metrica, per guidare l'armonia dei componenti, e dei componenti con il tutto.

È per questo comprensibile, immagino, l'estemporaneo abbandono in qualche punto di ciò che precede alla sconfinata ammirazione per capolavori dell'architettura, qui trascinati dalla musica. Gli esiti raccolti in (19) e (20) propongono uno scrigno sonoro di tutto rispetto, fedele al percorso storico-musicale fino al 500, atto se non altro per accendere la riflessione sui veri impianti teorici che sorreggono la musica (almeno) fino al tempo di Zarlino e scansare la troppo frequente forzatura propensa ad incasellare i suoni nelle sette note della scala diatonica (i tasti bianchi del pianoforte) o, peggio ancora, nelle dodici note della scala cromatica (tasti bianchi e neri). L'emerso predominio dell'esacordo, con la sola cifra dell'algoritmo, è una rivincita sulla leggerezza di sentir dire spesso che "Guido Monaco ha inventato le sette note".

Al di là del significato musicale proposto ed analizzato – peraltro in modo onesto e non forzato, anche se consapevolmente impugnabile con svariati argomenti – c'è un aspetto che ritengo degno di interesse: la procedura è chiusa, ha avuto un inizio ed una fine; il progetto di costruzione si è esaurito, è approdato ad una conclusione. La contrapposizione spontanea è offerta dagli infiniti suoni pitagorici generati per diapente, ciascuno dei quali rende conto della propria consonanza solo al precedente ma non tiene memoria di tutti gli altri, con i quali non è tenuto a formare proporzioni sonore. L'istintivo richiamo a valutazioni di carattere estetico e concettuale dei nostri tempi ([52]) riguardo al lungo periodo culturale preso in esame sembra avvalorare l'idea di una torre infinita di suoni medievali, dove ciascun pezzo riconosce solo quello sottostante, contrapposta al disegno compiuto di suoni rinascimentali, dove gli elementi si riconoscono e si completano nelle proporzioni. Tentando di esprimere una percezione sfuggente, non semplice da mettere a fuoco, direi che il trovato compimento è proprio espressione del rispetto imposto dalla proporzione, dell'armonia della parte con il tutto, in accordo con l'idea rinascimentale, albertiana di perfezione nel senso etimologico di *perfectum*, ultimato, concluso.

Proseguendo il capriccioso parallelo tra i mondi sonori esplorati e la pluralità di invenzioni dell'architettura – per attardarsi nel tema dominante dell'articolo – la sublime levatura dei ristretti numeri (1) è paragonabile alla perfezione di poche linee mirabilmente combinate di un tempio greco, in cui il numero è al servizio del sacro; la fredda e controllata disposizione dei suoni equabili fa pensare alla regolare ripetitività di un grattacielo moderno, in cui il numero è assoggettato al pratico, al funzionale, sempre uguale a se stesso in una parte o nella vista di insieme.

Non è così per la percezione di unità in cui si raccolgono le parti in rapporto armonico, per l'inesauribile ricerca di nuovi spunti e dettagli che si crea attorno al già formato che ci permea quando si è immersi nei capolavori architettonici del Rinascimento animati dalle proporzioni, le medesime che troviamo nei suoni naturali.

È un rapporto difficile quello tra matematica e musica, è piena di insidie l'esplorazione oggettiva senza essere manovrati dalla suggestione di rintracciare la matematica ovunque, come avviene troppo spesso nell'analisi formale e strutturale del repertorio musicale. Sono poche le leve scientifiche che lanciano un'ispirazione emotiva, una percezione estetica verso le categorie dell'assoluto, per mezzo del riscontro della razionalità: tra le poche, il principio architettonico-musicale del Rinascimento ha probabilmente il posto d'onore. La matematica a spiegazione dell'armonia, l'armonia edificata dalla matematica.

In riconoscenza a Claudio B., accordatore di Arturo B.M.

([52]) Nella vasta letteratura a proposito citiamo Cesare Brandi, 1906-1988, illustre storico dell'arte e critico d'arte: "*La differenza cruciale tra gotico e Rinascimento sta tutta qui: la cancellazione dell'infinito come slancio mistico e dell'infinito come dimensione in cui si sciolgono le guglie gotiche. Lo spazio si rinchiude dentro l'uomo.*".

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

[1] Azzaroni, L., *Ai confini della modalità – Le Toccate per cembalo e organo di Girolamo Frescobaldi*, QUEB, Bologna 1986

[2] Barbour, I., M., *Tuning and temperament. A Historical Survey*, Dover 1951

[3] Bellissima, F., *La scala musicale: una storia tra matematica e filosofia*, Carocci editore 2022

[4] Bellori, G., P., *Descrizzione Delle Imagini Dipinte da Rafaelle d'Urbino nelle camere del Palazzo Apostolico Vaticano*, 1695. Provenienza: Bibliothèque nationale de France, data di pubblicazione online: 15/10/2007, https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k1118531

[5] Descartes, R., *Compenduim Musicae*, 1650. A cura di P. Iandolo, Stilo Editrice 2008

[6] Euler, L., *Tentamen novae theoriae musicae ex certissimis harmoniae principiis dilucide expositae*. Editore: ex typographia Academiae scientiarum (Petropoli), 1739. Provenienza: Bibliothèque nationale de France, data di pubblicazione online: 20/06/2021, https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/btv1b100723695

[7] Kepler, I., *Harmonices Mundi Liber V*, Pubbl. di dominio pubblico online: https://archive.org/details/ioanniskepplerih00kepl/page/n35/mode/2up

[8] Locanto, M., *Armonia come simmetria. Rapporti tra teoria musicale, tecnica compositiva e pensiero scientifico*. Gianmario Borio, Carlo Gentili (eds.), "Armonia, Tempo" (Storia dei concetti musicali, 1), Roma, Carocci, 2007, pp. 199-246

[9] Megna, P., *Marsilio Ficino e il commento al "Timeo" di Proclo*, Studi medievali e umanistici, 1, 2003, pp. 93-135.

[10] Mersenne, M., *Traité de l'Harmonie universelle*, 1636. Ed. Fayard, 2003

[11] Rameau, J.P., *Traité de l'Harmonie reduite à ses Principes naturels*, 1722. Ed. Dover, 1971

[12] Powers H.S., *Tonal Types and Modal Categories in Renaissance Polyphony*, Journal of the American Musicological Society, Vol. 34 No. 3, 1981, pp. 428-470

[13] Talamucci, F., *La matematica delle scale musicali*, NUOVA SECONDARIA, vol. 8 pp. 103-140, 2020

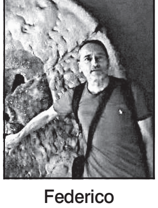
[14] Uggias, G., *Keplero e la musica. Il Libro III dell'Harmonice mundi (Linz, 1619): traduzione e Introduzione*, Tesi di Dottorato, http://amsdottorato.unibo.it/7054/1/uggias_gabriele_tesi.pdf

[15] Wittkower, R., *Principî architettonici nell'età dell'Umanesimo*, Biblioteca di Storia dell'Arte – Einaudi, 1964

[16] Zarlino, G., Istitutioni harmoniche, Venezia 1558. Pubbl. di dominio pubblico online: https://imslp.org/wiki/Le_Harmoniche_(Zarlino,_Gioseffo)

[17] Zarlino, G., Dimostrationi harmoniche, Venezia 1571. Pubbl. di dominio pubblico online: https://imslp.org/wiki/Le_Dimostrationi_Harmoniche\textunderscore(Zarlino\%2C_Gioseffo)

[18] Dizionario enciclopedico universale della musica e dei musicisti, diretto da A. Basso, UTET



Federico Talamucci

Federico Talamucci, ricercatore di Fisica matematica presso l'Università degli Studi di Firenze, dedica la ricerca principalmente ai modelli di sistemi meccanici soggetti a vincoli anolonomi. Il conseguimento dei diplomi in Pianoforte, Organo e Composizione organistica, Clavicembalo ha posto le basi per un interesse scientifico e musicale sulle teorie della consonanza, l'acustica degli strumenti, l'indagine e l'analisi di sistemi sonori.