Matematica, Cultura e Società

Rivista dell'Unione Matematica Italiana

Gabriele Lolli

ZF cento anni fa

Matematica, Cultura e Società. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **7** (2022), n.1, p. 5–33.

Unione Matematica Italiana

¡http://www.bdim.eu/item?id=RUMI_2022_1_7_1_5_0¿

Matematica, Cultura e Società. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2022.

Matematica, Cultura e Società – Rivista dell'Unione Matematica Italiana
Serie I, Vol. 7, N. 1, aprile 2022, 5-33

ZF cento anni fa

Gabriele Lolli
Accademia delle scienze di Torino
E-mail: gabrielelolli42@gmail.com

Sommario: *Cento anni fa, nel 1922, si è conclusa la laboriosa ricerca di un sistema di assiomi che caratterizzasse una nuova disciplina, la teoria degli insiemi, coronando un processo di sviluppo di circa cinquanta anni, dal primo lavoro di Cantor nel 1874 sulla esistenza di almeno due infiniti diversi, il numerabile e il continuo.*

A completamento degli assiomi di Ernst Zermelo del 1908, Thoralf Skolem e Abraham Fraenkel indipendentemente proposero l'assioma di rimpiazzamento, che garantiva un'estensione sufficiente dell'universo degli insiemi, facendo sì che la teoria diventasse nel Novecento un quadro generale per tutta la matematica allora conosciuta.

La difficoltà nel concepire l'assioma mancante si è capito a posteriori che consisteva nella necessità di esprimere nel linguaggio insiemistico un concetto di applicazione che fosse una estensione di quello di funzione intesa come insieme di coppie ordinate.

Il logico Skolem non ha avuto difficoltà a trovare la soluzione, mentre Fraenkel ha dovuto essere aiutato da von Neumann a chiarire il nuovo concetto. Ma nello stesso tempo l'esito suggerisce che la pura teoria degli insiemi non sia del tutto adeguata per il concetto di funzione.

Abstract: *One hundred years ago the search for an axiom system for the new theory of sets was completed, almost fifty years after the first Cantor's discovery in 1874 of the existence of two different actual infinities, the numerabile and the continuum.*

To Zermelo's 1908 axioms, in 1922, Thoralf Skolem and Abraham Fraenkel independently added the axiom of replacement, that guarantees a sufficient extension for the universe of sets; on this basis the theory could purport in the twentieth century to be a framework of all of known mathematics.

It became clear after the fact that the difficulty to conceive the new axiom depended on the necessity of expressing in the set theoretic language a concept of application that was more general than that of a function defined as a set of ordered pairs.

While logicians as Skolem and John von Neumann were quick to see an answer, Fraenkel had to be helped by the latter. But the upshot suggests that pure set theory could be not enough to grasp the concept of function.

0. – Introduzione

Cento anni fa il matematico tedesco Adolf Abraham Fraenkel (1891-1965) e il norvegese Thoralf Skolem (1887-1963) in modo indipendente proposero di formalizzare una costruzione usata nello studio degli insiemi infiniti ma ambigua nei suoi termini e difficile da esprimere matematicamente – come era successo con altre forme di ragionamento, il principio di scelta per esempio. La proposta fu accettata e un nuovo assioma, detto di rimpiazzamento, si aggiunse a quelli che già aveva presentato nel 1908 Ernst Zermelo (1871-1953) a formare la "teoria di Zermelo e Fraenkel", indicata con la sigla ZF – nonostante la formulazione adottata per l'assioma fosse quella di Skolem.

L'aggiunta del nuovo assioma permise di eliminare alcune lacune nella sviluppo della teoria, e soprattutto rese più agevole la trattazione di argomenti come quello dei numeri ordinali e dell'induzione transfinita. ZF divenne così l'espressione della teoria di base degli insiemi, a prescindere da successive estensioni, tuttora esplorate.

Accettato: il 26 gennaio 2022.

Conoscere come si è formata la teoria degli insiemi è interessante e doveroso per due motivi. Da una parte essa è l'esempio più chiaro che possediamo della nascita e formazione di una disciplina completamente nuova nel panorama matematico, e essendo la vicenda ben documentata, per la sua vicinanza storica, permette di studiare la manifestazione della creatività matematica. D'altra parte non si può ignorare la sua importanza considerando che nei successivi cento anni essa è stata adottata, sia pure in modo non unanime, come teoria che include, o è il fondamento (con diversi sensi di fondamento), o almeno il linguaggio di tutta la matematica.

In questo articolo raccontiamo brevemente alcune tappe della trasformazione in argomento matematico del concetto di insieme, della sua applicazione in vari campi della matematica, della ricerca dei principi di ragionamento adeguati allo studio dell'infinito, fino al 1922. Era l'epoca in cui maturava l'imperativo che sarà raccomandato nel 1939 da Jean Dieudonné (1906-1992) quando affermava che "[a] ogni matematico che abbia a cuore la probità intellettuale s'impone ormai la necessità assoluta di presentare i propri ragionamenti in forma assiomatica" (1). Lo sviluppo successivo della teoria, che ha legittimato la sua importanza, richiederebbe di considerare tutta la storia della matematica nel Novecento.

1. – Preistoria

La gestazione della teoria degli insiemi è stata lunga, quasi cinquanta anni dalle prime idee di [Cantor 1874], di più se si parte da [Riemann 1868] o da altri presagi. Il linguaggio che si chiamerà insiemistico si è formato nel corso dell'Ottocento con l'uso sempre più frequente del termine varietà (*Mannigfaltigkeit*), introdotto da Bernhard Riemann (1826-1866) ma usato anche da Carl F. Gauss (1777-1855), o dei suoi sinonimi, quali: sistema (preferito da Richard Dedekind (1831-1916)), molteplicità, dominio, estensione (*Ausdehnung*, usato da Hermann Günther Grassmann (1809-1877)), collezione, insieme (*Menge*), gruppo. Quando Giuseppe Peano (1858-1932) rese note traducendole tempestivamente le ricerche di Cantor negli anni Novanta dell'Ottocento usò il termine "classe" perché vedeva il collegamento con ricerche di un'altra tradizione, quella dell'algebra della logica iniziata da George Boole (1815-1964) nelle *Laws of Thought* del 1854, e questo termine, adottato poi da Bertrand Russell (1872-1970) è un segno dell'iniziale non esplicita e fatale contaminazione di insiemistica e logica che condizionerà come un peccato originale la teoria.

C'era bisogno di nuovi termini perché nella matematica dell'Ottocento agli oggetti tradizionali si affiancavano nuove entità, per esempio numeri analoghi ma diversi da quelli usuali (dai quaternioni di William R. Hamilton (1805-1865) ai numeri ideali di Ernst Eduard Kummer (1810-1893), entrambi nel 1843) e ci si doveva riferire con un nome ai contenitori di tali enti; oppure in geometria si aggiungevano a quello euclideo spazi di altre dimensioni, forme e proprietà; o nell'analisi si voleva studiare il comportamento delle funzioni su un numero di punti sempre più grande, un insieme infinito, ben più intricato dei soliti intervalli, magari distribuito in modo sparpagliato.

Una *teoria* degli insiemi nasce, o si incomincia a sospettarne la possibilità, a opera di Georg Cantor (1845-1918) con due risultati, uno del 1874, sull'esistenza di due infiniti diversi, rappresentati dai numeri naturali (il numerabile) e reali (il continuo), e uno del 1878, con la sorprendente corrispondenza biunivoca tra il quadrato e il suo lato, entrambi dimostrati con l'assistenza di Dedekind. Nella successiva serie di lavori sugli insiemi di punti (*Punktmannigfaltigkeit*) del 1878-84 Cantor realizza un progressivo distacco da un dominio particolare da cui si dovessero formare insiemi, che porterà al concetto di insieme astratto e alla teoria generale dei numeri cardinali e ordinali infiniti, esposta nei "Beiträge" [contributi] del 1895-97.

Il successivo periodo 1900-1908 è decisivo per la fortuna della teoria: l'accettazione della *Mengenlehre* (teoria degli insiemi) da parte della comunità matematica (almeno quella tedesca), le antinomie rese pubbliche, il successo nella dimostrazione dei teoremi mancanti per avere una buona teoria dei numeri cardinali, in particolare la tricotomia, o

(1) [Dieudonné 1939, ristampa p. 544].

confrontabilità dei cardinali infiniti (2), fanno sì che la teoria, per la quale nel 1908 Ernst Zermelo propone la prima assiomatizzazione, sia accolta come teoria matematica ma anche discussa vivacemente come teoria fondazionale.

Nel 1900 un rapporto di 250 pagine commissionato dalla società matematica tedesca a Arthur Schoenflies (1853-1928) ne segna il decollo (3). Esso è preceduto di poco dalla prima esposizione per matematici non specialisti dei concetti introdotti da Cantor, dovuta a Émile Borel (1871-1956), che ne vede i vantaggi per l'analisi (4). In [Borel 1898], un libro di lezioni sulla teoria delle funzioni, viene presentato, per usare una formula fortunata, tutto quello che "un analista [del suo tempo] dovrebbe sapere" dei nuovi argomenti. L'appropriazione da parte degli analisti ha peraltro introdotto una piccola distorsione storica, privilegiando il ruolo di Cantor come creatore della teoria, a scapito di quello di Dedekind. Non era solo nell'analisi che si rivelava inevitabile parlare di insiemi; anche in algebra, con i numeri ideali per esempio, con i gruppi (termine molto usato in Italia per "insieme") e altre strutture. Tuttavia è vero che l'aspetto fondazionale è più evidente nel plasmare l'analisi, almeno fino alla sintesi di Bourbaki.

Il titolo del rapporto tedesco si riferisce alla teoria delle varietà di punti, cioè in un dominio geometrico euclideo, ma Schoenflies dichiara di esporre la teoria generale degli insiemi, già chiamata in questo modo in tedesco; la vede come una disciplina molto controversa ai suoi inizi, e tuttavia fondamentale e necessaria, come spera che la sua rassegna possa dimostrare. Egli è consapevole del fatto che si tratta di un'area in sviluppo, ma cercherà di darne una visione almeno parzialmente coerente perché essa ha un influsso crescente e perché "lavori recenti" (probabilmente si riferisce ai "Beiträge" di Cantor) danno almeno a alcuni argomenti una forma compiuta.

Schoenflies considera come sorgente della teoria le analisi volte alla chiarificazione di due concetti collegati, quello di *argomento* e quello di *funzione*. Il primo, equivalente a quello di variabile indipendente, all'inizio della matematica moderna era legato al concetto intuitivo del continuo geometrico, mentre ora gli argomenti possono variare su insiemi di valori qualunque.

Per quel che riguarda il concetto di funzione, Schoenflies ricorda l'evoluzione verso l'idea di funzione arbitraria, che ha portato alla definizione di Gustav Lejeune Dirichlet (1805-1859), in cui il concetto generale di funzione è puramente estensionale, equivalente, detto in breve, a quello di una *Tabelle* arbitraria; l'esempio di Riemann di una funzione rappresentabile analiticamente ma discontinua in ogni punto razionale e continua in ogni punto irrazionale mette i matematici di fronte a possibilità per fondare le quali le rappresentazioni disponibili non sono sufficienti: ne viene la necessità di studiare insiemi infiniti di punti e la loro struttura e le loro proprietà; ma per dominarle sono necessari nuovi concetti.

Diversi matematici sono citati da Schoenflies, tra i quali Hermann Hankel (1839-1873) e Paul du Bois-Reymond (1831-1889), che hanno fatto molto lavoro di aratura, ma hanno posto i problemi più che trovare le soluzioni; è stato Cantor che è riuscito a portare gli insiemi infiniti sotto il dominio delle formule e delle leggi matematiche, con un'impresa del tutto originale e impegnativa; Schoenflies ricorda come lo stesso Cantor abbia confidato di essersi sottoposto a uno sforzo di dieci anni prima di sentirsi pronto a portare al pubblico i suoi concetti nella forma di ben definiti oggetti matematici.

La presentazione della teoria a opera di Schoenflies è basata sul principio di studiare gli insiemi infiniti con gli stessi metodi che valgono per quelli finiti, con definizioni che per quanto possibile si applichino a entrambi, secondo il principio di Hankel della permanenza delle leggi formali (5). Per quanto ciò sia possibile, perché Schoenflies avverte che nel

(2) Cioè il carattere di ordine totale della relazione di grandezza dei cardinali.

(3) [Schoenflies 1900]. Nel 1908 uscirà la seconda parte del rapporto.

(4) La rivalità tra le comunità matematiche francese e tedesca era forte; anche diversi matematici francesi svolgevano ricerche su insiemi di punti, ma Borel riconosce in Cantor la figura principale.

(5) "Le operazioni aritmetiche per le classi numeriche via via più ampie devono possedere le proprietà che la nostra mente è già abituata a sentir soddisfatte nelle classi più ristrette e considerate precedentemente", Hermann Hankel.

caso degli insiemi infiniti vale una possibilità esclusa nel caso finito, cioè che "la parte sia uguale al tutto".

Definizioni di "insieme" erano state tentate da Cantor, in genere risultando inevitabilmente circolari, variazioni dell'idea del mettere assieme (*Zusammenfassen*) in un tutto unico oggetti determinati e ben distinti. Nel 1882 aveva introdotto il concetto di "insieme ben definito" come oggetto matematico:

> Chiamo *ben definita* una varietà [*Manningfaltigkeit*] (collezione [*Inbegriff*], insieme [*Menge*]) di elementi che appartengono a un qualsiasi dominio di concetti se, sulla base della sua definizione e in conseguenza del principio logico del terzo escluso, si deve riconoscere come *internamente determinato* [*intern bestimmt*] se un oggetto che appartiene allo stesso dominio di concetti appartiene alla suddetta varietà come elemento o no, come anche se due oggetti che vi appartengano, nonostante differenze formali, siano uguali o no (6).

Nel 1983, in una nota al termine delle *Grundlagen*, proponeva invece

> Con "varietà" [*Mannigfaltigkeit*] o "insieme" [*Menge*] io intendo in generale ogni Molti che possono essere pensati come Uno, cioè ogni molteplicità [*Inbegriff*] di elementi determinati che possono essere uniti in un tutto da una legge, e con questo io credo di definire qualcosa che è affine all'ἔιδος (eidos) o all'ἰδέα (idea) di Platone, come anche a ciò che Platone chiama μικτόν (micton) nel dialogo "Filebo o del massimo bene" (7).

La necessità di una definizione dalla quale dovevano seguire le proprietà degli enti studiati era l'eredità della tradizionale teoria della scienza codificata da Aristotele; ma i postulati mancavano.

C'era chi pensava che una teoria fondamentale, come da alcuni cominciava a essere considerata la teoria degli insiemi (mentre Cantor insisteva di più sulla novità matematica dei nuovi concetti), non dovesse essere assiomatizzata, considerando questo tipo di presentazione come un ripiego. Una teoria assiomatica infatti non determina in modo unico gli enti ai quali si riferisce: ha in generale più di un modello, come sapevano già a fine Ottocento geometri e algebristi. Presentare la teoria degli insiemi come una teoria assiomatica avrebbe significato rinunciare alla pretesa che con essa si possano definire in modo assoluto le nozioni matematiche. L'equivoco sorgeva da due diverse nozioni di fondazione, una che pretendeva definizioni costitutive creative, l'altra che richiedeva soltanto la presentazione nella forma imprescindibile, assiomatica, di ogni teoria matematica.

Nella volontà di assiomatizzare la teoria degli insiemi il desiderio di evitare i paradossi era certo presente. Già Cantor aveva osservato che era necessario porre una limitazione all'uso del cosiddetto principio di *comprensione*, cioè all'assunto che a ogni definizione corrisponda un insieme: era troppo facile definire collezioni così grandi da non poter essere contenute in alcun insieme e capaci perciò di portare a paradossi se assunte come oggetti. La totalità di tutti gli insiemi $V = \{x : x = x\}$ ne era un esempio, come quella *On* di tutti gli ordinali o quella di tutti i cardinali, o quella di tutti gli insiemi equipotenti a un insieme dato (cioè con la stessa potenza, o cardinalità) (8).

Di fronte alla difficoltà di dimostrazioni come quella del teorema poi detto di Cantor-Bernstein (confessate da Cantor fin dal 1882 per il lemma chiave che afferma: se $M'' \subset M' \subset M$ e se esiste una corrispondenza biunivoca tra M ed M'', allora M' ha la stessa potenza di M), al fallimento dei tentativi di dimostrare teoremi come la tricotomia o l'ipotesi del continuo (l'ipotesi di Cantor che non

(6) [Cantor 1879-84, terzo articolo, del 1882].

(7) [Cantor 1883, Osservazione 1 a §1]. ἔιδος e ἰδέα sono sinonimi usati da Platone per le forme ideali; μικτόν è il terzo genere della realtà discusso nel "Filebo", al quale appartengono le cose proporzionate, generate ponendo un limite all'infinito.

(8) Per queste collezioni è diventato usuale in seguito utilizzare il termine "classe"; tuttavia questa parola compare in due modi diversi nello studio degli insiemi. In certi casi, quando la teoria di riferimento è una teoria degli insiemi come ZF, dove tutti i termini denotano insiemi, "classe" è un termine informale, o meglio un termine della metateoria. Si chiamano classi certi simboli predicativi introdotti per definizione quando si sa che non esiste un insieme che contiene tutti e soli gli insiemi che soddisfano la definizione. Esistono invece teorie nelle quali gli oggetti sono proprio di due tipi, gli insiemi e le classi, gli insiemi essendo anche classi – classi che appartengono a altre classi – con i loro rapporti regolati dagli opportuni assiomi. Si veda la nota 21 *infra*.

esistano cardinalità intermedie tra il numerabile e il continuo), alla comparsa delle prime antinomie, da diverse parti si incominciò a chiedere di trovare una codifica dei principi alla base dei ragionamenti sugli insiemi nella forma di assiomi.

Lo stesso Cantor, che non era portato a una matematica impostata assiomaticamente, era arrivato a formulare proposizioni che si potrebbero considerare proposte di assiomi. In una lettera a Dedekind del 3 agosto 1899 elencava tre proprietà, o principi di esistenza condizionali ([9]):

> – Due molteplicità equivalenti sono o entrambe "insiemi" o entrambe inconsistenti ([10]).

Con "molteplicità inconsistente", opposta a "molteplicità consistente" Cantor voleva esprimere il concetto di una molteplicità che non è un tutto, è troppo grande, e non può essere considerata un oggetto matematico.

> – Ogni sottomolteplicità [*Teilvielheit*] di un insieme [molteplicità consistente] è un insieme.
> – Se abbiamo un insieme di insiemi gli elementi di questi insiemi formano pure un insieme.

Dedekind era meno preoccupato di Cantor per eventuali assiomi, in quanto trattava il nuovo argomento come un'espressione della logica naturale. Nel 1888 esponendo la sua fondazione del concetto di numero naturale sulla base dei concetti di "sistema" e "rappresentazione", dichiarava di volersi appoggiare unicamente a "una capacità dello spirito senza la quale è impossibile ogni pensiero".

Dedekind non aveva tuttavia potuto evitare di enunciare alcune, poche, assunzioni sui "sistemi" nel § 1 del suo lavoro sui numeri del 1888: il principio di estensionalità, l'esistenza degli insiemi con un solo elemento ([11]), dell'unione e dell'intersezione. La forma in cui le introduceva non era però quella di affermazioni di esistenza codificate in postulati, ma di definizioni di operazioni, come se la introduzione di un simbolo di operazione e delle leggi alle quali obbedisce (per esempio l'unione $X \cup Y$ come l'insieme a cui appartengono gli elementi di X e quelli di Y) comportasse l'esistenza dei valori.

A parte quelli dei fondatori, altri suggerimenti per candidati a essere assunti come assiomi erano venuti da Cesare Burali-Forti (1861-1931) e da Piero Pieri (1893-1979), entrambi della scuola di Peano.

Nel 1896 Burali-Forti aveva espresso l'opinione che la teoria degli insiemi dovesse essere assiomatizzata con i concetti primitivi dedekindiani, ma nel contesto della logica peaniana:

> Dovremmo considerare i concetti di *classe* e di *corrispondenza* come primitivi (o *irriducibili*) ed assegnare a essi un sistema di proprietà (*postulati*) dai quali sia possibile *dedurre* logicamente tutte le proprietà che sono usualmente attribuite a quei concetti. Allo stato attuale, un tale sistema di postulati non è conosciuto.

Burali-Forti suggeriva che nell'auspicabile insieme di assiomi per la teoria delle classi dovessero essere inseriti due principi; uno era quello che "ogni famiglia non vuota di classi è equivalente a una sottoclasse dell'unione" ([12]); un secondo postulato, concepito per la dimostrazione del teorema di Cantor-Bernstein, sarebbe dovuto essere che per due classi A e B esiste una funzione $f : A \longrightarrow B$ che è o uno-uno o sopra.

Nel 1906 Pieri, presentando una correzione della dimostrazione di Burali-Forti della non contraddittorietà degli assiomi di Peano dell'aritmetica con il modello delle classi finite ([13]), esprimeva la convinzione che con le sue revisioni la dimostrazione risultasse puramente logica, in una logica che era quella di Peano arricchita con le classi; nel 1898 aveva già parlato dei concetti di classe e appartenenza come

([9]) Trad. inglese in [van Heijenoort 1967, pp. 113-7].

([10]) Qualcuno considera tale principio un'anticipazione dell'assioma di rimpiazzamento, di cui parleremo in seguito.

([11]) Non aveva tuttavia nel 1888 una notazione per il singoletto $\{a\}$; la introdusse in seguito e nel 1911, nella prefazione alla terza ristampa, dichiarava che un sistema è necessariamente diverso dai suoi elementi – escludendo così $x \in x$.

([12]) L'enunciato è analogo al principio di partizione che sarà menzionato in [Zermelo 1904], ma dimenticando la condizione che le classi siano a due a due disgiunte. Se ne accorgerà Russell (un controesempio è $\{\{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$ la cui unione è $\{1, 2\}$), il quale peraltro non noterà lo stesso difetto in una formulazione di Jourdain del principio moltiplicativo nel 1906. Il primo a darne una formulazione corretta sarà Beppo Levi (1875-1961), che lo aveva riconosciuto come usato ripetutamente ma implicitamente da Felix Bernstein (1878-1956).

([13]) Esposto in [Burali-Forti 1896].

"categorie logiche generali comuni a qualunque discorso umano", ora osservava che per la dimostrazione sono necessari due principi che egli pensava di poter includere senza scrupoli tra gli assiomi logici sulle classi: "car je n'y vois qu'une *détermination* convenable des concepts de *classe* et *représentation*":

> I. *Il y a au moins une classe infinie* (Le Tout est une classe infinie)
> II. *Étant donné une classe infinie, dont les éléments sont à leur tour des classes, la classe formée par tous les éléments de celles-ci est elle-même infinie* (14).

I suggerimenti di Burali-Forti e di Pieri passarono sotto silenzio e non furono raccolti da nessuno nell'immediato. Muovevano peraltro in direzioni anomale anche rispetto alla scuola torinese.

Nei primi anni del secolo, l'argomento più caldo non era quello di un sistema di assiomi, ma forse la dimostrazione del teorema del buon ordine. Il teorema afferma che ogni insieme può essere bene ordinato (15). Da esso seguirebbe che a ogni insieme può essere assegnato un aleph $\aleph$, il più piccolo ordinale che è la lunghezza di un buon ordine di quell'insieme; definendo la cardinalità di un insieme come il suo aleph si potrebbe dimostrare che le cardinalità sono confrontabili e stabilire la tricotomia (o se i cardinali sono definiti separatamente, si dovrebbe dimostrare che ogni cardinale è un $\aleph$ – teorema degli aleph).

Ma l'unico modo di dimostrare il teorema del buon ordine sembrava essere quello di enumerare transfinitamente un insieme eseguendo in successione infinite scelte arbitrarie del prossimo elemento. In questo caso la permanenza delle leggi formali sembrava presupporre capacità soprannaturali.

(14) [Pieri 1906, p. 207].

(15) Un buon ordine di un insieme X è un ordine totale $\prec$ di X (con le proprietà antisimmetrica, transitiva e di connessione) tale che per ogni sottoinsieme $Y \subseteq X$ esista un minimo di Y. Nel 1983 Cantor aveva associato gli ordinali ai buoni ordini degli insiemi. Gli ordinali sono per così dire la lunghezza dei buoni ordini; dati due insiemi bene ordinati, o essi sono isomorfi come ordini, o uno è isomorfo a un segmento iniziale dell'altro, o viceversa; quindi sono confrontabili, e così gli ordinali.

2. – Zermelo

Ernst Zermelo era un allievo di David Hilbert (1862-1943), inizialmente orientato al calcolo delle variazioni, in seguito attratto dalla teoria degli insiemi (16). Nel 1902 aveva descritto a Hilbert un argomento del tipo di quello dell'antinomia di Russell, che inserirà in [Zermelo 1908b], come vedremo (17).

Zermelo è noto anche per aver pubblicato il primo teorema di Teoria dei Giochi: nel 1913, molto prima che Nash, von Neumann e Morgenstern rendessero popolare questa semisconosciuta branca della matematica, Zermelo scriveva "Uber eine Anwendung der Mengenlehre auf die Theorie des Schachspiels"; sotto questo titolo si trova il teorema che in una partita a scacchi il Bianco può forzare la vittoria, oppure il Nero può forzare la vittoria, oppure entrambi i colori possono forzare almeno la patta. Può non sembrare un risultato memorabile, a prima vista, ma in realtà coinvolge aspetti già profondi della Teoria dei Giochi, ed è spesso riportato in letteratura come il "Teorema di Zermelo".

Nel 1904 Zermelo manda una lettera a Hilbert, da pubblicare sui *Mathematische Annalen*, dove dimostra il teorema del buon ordine. La dimostrazione si appoggia a una assunzione che Zermelo dichiara essere un "principio logico", e che diventerà noto inizialmente come postulato di Zermelo, o principio moltiplicativo, in seguito assioma di scelta (anche per Zermelo).

> La presente dimostrazione dipende dall'assunzione che in generale esistano ricoprimenti γ (18), cioè sul principio che anche per una totalità infinita di insiemi esistano sempre correlazioni per mezzo delle quali a ciascun insieme corrisponde uno dei suoi elementi, o formalmente, che il prodotto di una totalità infinita di insiemi, ciascuno dei quali contiene almeno un elemento, è diffe-

(16) Segnaliamo la biografia di [Ebbinghaus 2007]. Zermelo rinunciò al posto all'Università di Friburgo per il rifiuto di adottare il saluto nazista (reintegrato nel 1946).

(17) Secondo una testimonianza di Edmund Husserl (1859-1938), in un appunto del 16 aprile 1902 conservato nel suo *Nachlass*, Zermelo gli avrebbe esposto l'osservazione forse nel 1901. Si veda [Kanamori 2004].

(18) [Il termine "ricoprimento" (*Belegung*) per "funzione" è di origine cantoriana. NdA]

rente da zero [insieme vuoto]. Invero, questo principio logico non può essere ridotto a uno più semplice, ma è usato inconsapevolmente in numerose deduzioni matematiche. Per esempio la validità generale del teorema che il numero di parti in cui un insieme è diviso è minore o uguale al numero dei suoi elementi [principio di partizione] non può essere dimostrato altrimenti che pensando che ciascuna delle parti in questione venga correlata a uno dei suoi elementi.

L'uso di un tale principio gli era stato suggerito dalle conversazioni con un altro allievo di Hilbert, Erhard Schmidt (1876-1959).

La dimostrazione, in particolare l'assunzione sopra dichiarata, suscita grandi e aspre discussioni in tutta Europa (19); Zermelo nel 1908 propone una nuova dimostrazione e nello stesso anno presenta una assiomatizzazione costituita da assiomi di esistenza e assiomi di chiusura, per porre fine alla discussione risolvendo i problemi aperti e mostrando come evitare le antinomie note.

L'*incipit* delle "Untersuchungen" del 1908 recita:

> La teoria degli insiemi è la branca della matematica il cui compito è quello di indagare matematicamente i concetti fondamentali di "numero", "ordine", e "funzione", prendendoli nella loro forma pristina, semplice e sviluppando quindi i fondamenti logici di tutta l'aritmetica e dell'analisi; perciò essa costituisce una componente indispensabile della scienza matematica.

Tuttavia per certe contraddizioni che possono essere dedotte dai suoi principi non si è ancora trovata una soluzione soddisfacente.

> In particolare, in considerazione della "antinomia di Russell"dell'insieme di tutti gli insiemi che non contengono se stessi come elementi (20), non sembra più ammissibile oggi assegnare a un arbitrario concetto logicamente definibile un insieme, o classe, come sua estensione. La definizione originaria di Cantor di un insieme (1895) come "una collezione, riunita in un tutto, di determinati oggetti ben distinti della nostra percezione o del nostro pensiero" richiede perciò certamente qualche restrizione; non è tuttavia stata sostituita con successo da una che sia altrettanto semplice e non dia adito a simili riserve. Data tale situazione, non resta a questo punto altro da fare che procedere nella direzione opposta e, partendo dalla teoria degli insiemi come essa è data storicamente, esplicitare i principi che sono richiesti per stabilire i fondamenti di questa disciplina matematica. Nel risolvere il problema dobbiamo da una parte restringere abbastanza tali principi in modo da escludere tutte le contraddizioni e, dall'altra, rafforzarli abbastanza in modo che conservare tutto quello che è valido di questa teoria.

Quindi annuncia che la teoria "creata da Cantor e Dedekind" sarà ridotta a "poche definizioni e sette principi, o assiomi" e di essa sarà presentata la teoria dell'equivalenza, vale a dire della cardinalità, senza introdurre i cardinali.

Il concetto di "funzione" sarà definito in termini di quello di "insieme". La scelta è rilevante perché sarebbe stato possibile, come proponevano già alcuni contemporanei, raccogliere il suggerimento di Dedekind e pensare a una teoria di insiemi e funzioni come due termini primitivi indipendenti.

In generale i termini "insieme" (*Menge*) e "classe" (*Klass*) sono usati da Zermelo in modo interscambiabile. In alcuni passi tuttavia (per esempio *infra* al punto 1) di § 1 sembra che Zermelo preferisca riservare il termine "classe" a collezioni che possono non essere insiemi, come accade nell'uso moderno (21).

Questa è l'apertura:

> § 1. Definizioni fondamentali e assiomi
>
> 1. La teoria degli insiemi riguarda un *dominio* [*Bereich*] (22) $\mathfrak{B}$ di individui, che chiameremo semplicemente *oggetti* e tra i quali ci sono gli *insiemi*. Se due simboli, a e b denotano lo stesso oggetto (23), scriviamo $a = b$, altrimenti $a \neq b$. Diciamo di un

(19) Non è possibile riassumerle, per un panorama generale si veda [Lolli 2013, cap. 4].

(20) [Zermelo qui in nota cita [Russell 1903, trad. it. p. 149 e pp. 501-2]. NdA]

(21) Si veda la nota 8. Le teorie che contemplano sia insiemi sia classi che non sono insiemi, in seguito proposte da parte di John (János) von Neumann (1903-1957), Paul Bernays (1888-1977), Kurt Gödel (1906-1978), erano evidentemente state anticipate dall'uso, che ne aveva fatto sentire l'esigenza o l'utilità.

(22) [Estensione, ambito. NdA]

(23) [In questo esordio, Zermelo è attento a distinguere il simbolo dall'oggetto denotato; presto adotterà il solito modo abbreviato di esprimersi, come subito dopo: "Diciamo di un oggetto a [...]" invece di "Diciamo di un oggetto denotato da a [...]". NdA]

oggetto a che "esiste" se esso appartiene al dominio $\mathfrak{B}$; analogamente di una classe $\mathfrak{A}$ di oggetti diciamo che "esistono oggetti della classe $\mathfrak{A}$" se $\mathfrak{B}$ contiene almeno un individuo di questa classe.
2. Tra gli oggetti del dominio $\mathfrak{B}$ sussistono certe *relazioni fondamentali* della forma $a \varepsilon b$. Se per due oggetti a e b vale la relazione $a \varepsilon b$, diciamo che "a è un *elemento* dell'insieme b", "b contiene a come elemento", o "b possiede l'elemento a" ([24]). Un oggetto b può essere chiamato un *insieme* se e – con una sola eccezione (Assioma II) – solo se esso contiene un altro oggetto, a, come elemento.
3. Se ogni elemento x di un insieme M è anche un elemento dell'insieme N, in modo che da $x \varepsilon M$ segua sempre che $x \varepsilon N$, diciamo che M è un *sottoinsieme* di N e scriviamo $M \Subset N$. Abbiamo sempre che $M \Subset M$ e da $M \Subset N$ e $N \Subset R$ segue che $M \Subset R$. Due insiemi M ed N sono detti *disgiunti* se non possiedono alcun elemento comune, ovvero se nessun elemento di M è un elemento di N.

Oggi si esordisce direttamente enunciando quali sono gli assiomi, lasciando che la teoria generale delle strutture si prenda cura del fatto che le interpretazioni sono strutture costituite da un dominio, o universo, che è un insieme non vuoto nel senso della teoria semantica, sul quale è data una relazione binaria, la relazione di appartenenza.

Zermelo, e altri come lui in questa fase dell'assiomatica, parla di un dominio (*Bereich*) $\mathfrak{B}$, usando opportunamente una parola diversa da "insieme", ma non dà alcuna precisazione o limitazione sul dominio stesso; né dice che $\mathfrak{B}$ non è vuoto, ma dal seguito si vede che lo assume ([25]).

Si faccia attenzione tuttavia che identificare i *Bereich* con i modelli della posteriore semantica insiemistica è in parte una forzatura. Il *Bereich* è piuttosto confrontabile a quello che oggi si chiama *knowledge domain*, o a un concetto, che solo in una semantica estensionale si può trasformare in un insieme.

Poiché si tratta di una teoria degli insiemi, è legittimo chiedersi che cosa siano gli oggetti che non sono insiemi. L'idea che nel dominio ci siano oggetti che sono chiamati insiemi e oggetti che non lo sono è caratteristica di questo primo periodo della teoria, e corrisponde alla pratica di usare gli insiemi nello studio di altri argomenti; Zermelo fa qui una concessione all'uso strumentale degli insiemi; nei successivi perfezionamenti dell'assiomatizzazione si escluderanno gli oggetti che non sono insiemi perché tutti gli enti matematici, i numeri per esempio, devono essere insiemi, come peraltro lo sono già nella teoria di Zermelo. La discussione se si dovessero ammettere o no i cosiddetti "atomi", o *Urelemente*, elementi originari, elementi senza elementi, sarà chiusa negli anni venti con il cosiddetto assioma di fondazione (salvo la più tarda ripresa degli studi sugli insiemi non ben fondati) ([26]).

L'uso delle lettere minuscole o maiuscole come simboli per oggetti è dettato da convenienze di lettura, senza essere codificato da una convenzione esplicita, anche se dalle prime formule che scrive Zermelo si prevede che prevarrà l'abitudine di usare lettere maiuscole per gli insiemi ([27]).

Il successivo capoverso del lavoro di Zermelo introduce uno degli inciampi della teoria degli insiemi, della logica e dei fondamenti contemporanei. I problemi sollevati dalla definizione ivi contenuta non sono ancora stati chiariti in modo universalmente accettato.

4. Una domanda o asserzione $\mathfrak{E}$ è detta *definita* [*definit*] se le relazioni fondamentali del dominio, per mezzo degli assiomi e delle leggi universalmente valide della logica, determinano senza arbitrarietà se essa vale o no. Analogamente, una "funzione

([24]) [Tra tutte le letture di $a \varepsilon b$ proposte, manca quella oggi prevalente: "a appartiene a b". NdA]

([25]) Anche Dedekind aveva escluso dalla sua trattazione il sistema vuoto. Se le strutture insiemistiche sono usate come interpretazioni dei linguaggi, bisogna ricordare che la logica è diversa a seconda che si ammettano domini vuoti o no. Nella logica moderna non si ammettono, ma in quella sillogistica che era certamente ancora familiare è possibile l'alternativa, chiarita proprio definitivamente nell'Ottocento.

([26]) Per esempio in [Aczel 1988] con l'assioma di Antifondazione o in [De Giorgi-Forti-Lenzi 1994] con il principio di libera costruzione incompatibile con l'assioma di fondazione.

([27]) Per esempio $\Subset$ è sempre inserito tra lettere maiuscole, ma anche le minuscole denotano insiemi, o elementi. Se un insieme è denotato da una lettera maiuscola, i suoi elementi in genere, insiemi o no, sono denotati da lettere minuscole, a meno che derivino da altre considerazioni; la denotazione ha un carattere locale. Questa è ancora la pratica usuale.

proposizionale" [*Klassenaussage*] $\mathfrak{E}(x)$ ([28]), nella quale il termine variabile x varia sugli individui di una classe $\mathfrak{K}$ è detta definita se essa è definita per *ogni singolo* individuo x della classe $\mathfrak{K}$. Così la domanda se $a \,\varepsilon\, b$ o no è sempre definita, così come la domanda se $M \Subset N$ o no.

La domanda $a \,\varepsilon\, b$ si può pensare che sia definita, nel senso della definizione di *definit*, perché l'appartenenza è la relazione fondamentale del dominio. Ma già per quanto riguarda la relazione $M \Subset N$, che non è fondamentale, per riconoscere che è definita occorrerebbe ricondurla esplicitamente, attraverso la sua definizione, e quindi usando leggi logiche, a quella di appartenenza che è fondamentale ([29]).

Le relazioni fondamentali del nostro dominio $\mathfrak{B}$, ora, sono soggette ai seguenti *assiomi* o *postulati*.
Assioma I. (Assioma di estensionalità [*Axiom der Bestimmtheit*]) Se ogni elemento di un insieme M è anche un elemento di N e viceversa, se perciò, sia $M \Subset N$ sia $N \Subset M$, allora è sempre $M = N$; o, più brevemente: Ogni insieme è determinato dai suoi elementi ([30]).
L'insieme che contiene solo gli elementi $a, b, , c, \ldots, r$ sarà spesso denotato concisamente con $\{a, b, c, \ldots, r\}$.
Assioma II. (Assioma degli insiemi elementari [*Axiom der Elementarmengen*]) Esiste un insieme (fittizio), l'*insieme vuoto*, 0, che non contiene alcun elemento ([31]). Se a è un oggetto qualsiasi del dominio, esiste un insieme $\{a\}$ che contiene a e solo a come elemento; se a e b sono due oggetti qualunque del dominio, esiste sempre un insieme $\{a, b\}$ che contiene come elementi a e b ma nessun oggetto x diverso da entrambi ([32]).
5. Secondo l'Assioma I, gli insiemi elementari $\{a\}$ e $\{a, b\}$ sono sempre univocamente determinati, ed esiste un solo insieme vuoto. La domanda se $a = b$ o no è sempre definita (No. 4), perché è equivalente alla domanda se $a \,\varepsilon\, \{b\}$ o no.
6. L'insieme vuoto è un sottoinsieme di ogni insieme M: $0 \Subset M$. Un sottoinsieme di M che sia diverso sia da M che da 0 è detto una *parte* [*Teil*] di M ([33]). Gli insiemi 0 e $\{a\}$ non hanno parti.

Finalmente veniamo all'assioma principale, e originale, del sistema di Zermelo, rispetto all'intenzione di evitare le contraddizioni:

Assioma III. (Assioma di separazione [*Axiom der Aussonderung*]) Se la funzione proposizionale $\mathfrak{E}(x)$ è *definit* per tutti gli elementi di un insieme M, M possiede un sottoinsieme $M_{\mathfrak{E}}$ che contiene come elementi esattamente quegli elementi x di M per cui $\mathfrak{E}(x)$ è vera ([34]).

([28]) [Usiamo "funzione proposizionale" perché questa è la versione adottata nelle traduzioni inglesi, anche se fa apparire Zermelo troppo influenzato da Russell; letteralmente *Klassenaussage* potrebbe significare "una proposizione che determina una classe", quindi essere vicino alle nostre formule con una variabile libera. NdA]

([29]) Dal contesto occorre distinguere, ma non ci sono difficoltà, quando "definita" è usata nel senso di *definit*, e quando invece significa "introdotta con una definizione".

([30]) [Si noti che l'assioma di estensionalità è formulato solo per insiemi. Infatti due oggetti che non siano insiemi e siano diversi hanno tuttavia gli stessi elementi, cioè nessuno. NdA]

([31]) [*Nullmenge*, così detto inizialmente per la sua analogia con lo zero rispetto alle operazioni di unione e intersezione (si veda oltre); $\emptyset$ in notazione moderna. L'insieme vuoto è l'eccezione prevista al punto 2, è come gli altri individui che non sono insiemi, ma è dichiarato essere un insieme. NdA]

([32]) [L'insieme $\{a, b\}$ si chiama coppia (non ordinata) di a e b; l'insieme $\{a\}$ che non ha nome in Zermelo si chiama ora singoletto di a (o insieme unitario). Si noti che Zermelo non può considerare $\{a\}$ come caso particolare di $\{a, b\}$ perché ha definito la coppia a partire da *due* oggetti del dominio. Se si formalizza l'assioma della coppia scrivendo $\forall x \forall y \exists z \forall u (u \in z \leftrightarrow z = x \vee z = y)$, allora il singoletto è un caso particolare della coppia quando x e y sono interpretate sullo stesso elemento. Se Zermelo avesse detto: "se a e b sono due simboli per oggetti del dominio" (vedi nota 23 *supra*) si sarebbe avvicinato alla versione moderna, che non considera l'assioma del singoletto come un assioma indipendente. NdA]

([33]) [Questa definizione, che talvolta Zermelo precisa con *echter Teil*, non è più in uso. Si dice "sottoinsieme proprio" di M per indicare un sottoinsieme N di M diverso da M, $N \subset M$, ma possibilmente vuoto. In francese *partes* è usato per "sottoinsiemi". NdA]

([34]) [Quando si separa un insieme X da un insieme U mediante la condizione definita $\varphi(x)$, l'insieme X ora è denotato da

$$\{x \in U \mid \varphi(x)\}.$$

La notazione per l'applicazione del principio di comprensione non ristretto sarebbe invece $\{x \mid \varphi(x)\}$. La si può usare per insiemi garantiti dagli assiomi, come nella nota 40 *infra*. NdA]

Il commento di Zermelo è il seguente:

> Nel garantirci ampi spazi di libertà per la definizione di nuovi insiemi, l'Assioma III in un certo senso rappresenta un sostituto alla definizione generale di insieme che è stata citata nell'introduzione e rifiutata come insostenibile. Esso differisce da quella definizione per il fatto di contenere le seguenti restrizioni. In primo luogo, gli insiemi non possono mai essere *definiti in modo indipendente* per mezzo di questo assioma, ma devono sempre essere *separati* come sottoinsiemi da insiemi già dati; quindi concetti contraddittori come quello di "l'insieme di tutti gli insiemi" o " l'insieme di tutti i numeri ordinali", e con loro i "paradossi ultrafiniti", per usare l'espressione di Hessenberg (1906, cap. 24)), vengono esclusi. In secondo luogo inoltre, il criterio di definizione deve essere sempre definito, nel senso della definizione in No. 4 (cioè, per ogni singolo elemento x di M le relazioni fondamentali del dominio devono determinare se [il criterio] vale o no), con il risultato che, dal nostro punto di vista, tutti i criteri del tipo "definibile per mezzo di un numero finito di parole", quindi l'"antinomia di Richard" e il "paradosso della denotazione finita" scompaiono ([35]). Ma ne segue anche che, prima di ogni applicazione del nostro Assioma III, se vogliamo essere rigorosi noi dobbiamo provare che il criterio usato $\mathfrak{E}(x)$ è definito; nelle considerazioni successive questo sarà in effetti dimostrato tutte le volte che non è evidente.

Il lavoro prosegue nei punti 7, 8, e 9 con la definizione (per mezzo dell'Assioma III) di "complemento" rispetto a un insieme ([36]), e quella di "intersezione" (o "componente comune"), non solo per due insiemi ma per un insieme di insiemi ([37]).

Quindi il primo teorema è dedicato a una questione fondazionale:

> 10. Teorema. Ogni insieme M possiede almeno un sottoinsieme M_0 che non è un elemento di M.
> *Dimostrazione*. Per ogni elemento x di M è definito se $x \,\varepsilon\, x$ o no; la possibilità che $x \,\varepsilon\, x$ non è esclusa dai nostri assiomi. Se ora M_0 è il sottoinsieme di M che, in accordo con l'Assioma III, contiene tutti gli elementi di M per cui non vale che $x \,\varepsilon\, x$, allora M_0 non può essere un elemento di M. Infatti o $M_0 \,\varepsilon\, M_0$ o no. Nel primo caso, M_0 conterrebbe un elemento $x = M_0$ per cui $x \,\varepsilon\, x$, e questo contraddirebbe la definizione di M_0. Quindi M_0 non è sicuramente un elemento di M_0, e di conseguenza M_0, se fosse un elemento di M, dovrebbe essere anche un elemento di M_0, che abbiamo appena escluso ([38]).
> Segue dal teorema che non tutti gli oggetti x del dominio $\mathfrak{B}$ possono essere elementi di uno e uno stesso insieme; vale a dire, *il dominio* $\mathfrak{B}$ *non è esso stesso un insieme*, e questo ci libera dall'antinomia di Russell, per quel che ci riguarda.

Il primo teorema ha attirato le critiche di Schoenflies [1911]. In realtà Schoenflies si riferisce al corollario informale che afferma che "il dominio $\mathfrak{B}$ non è esso stesso un insieme" come se si trattasse dell'enunciato del teorema. Schoenflies osserva che nessuno dei primi assiomi si riferisce a $\mathfrak{B}$, e quindi il termine *Bereich* non dovrebbe comparire negli assiomi, perché non è implicitamente definito dagli stessi ([39]); nello spirito dell'assiomatica non è lecito né possibile dimostrare qualcosa su $\mathfrak{B}$, neanche scrivere $\mathfrak{B} \,\varepsilon\, \mathfrak{B}$, sia pure per negarlo. Ma il difetto, puramente di esposizione, è facilmente rimediabile e Schoenflies fa vedere come si possa evitare con una diversa formulazione delle frasi che vi si riferiscono.

([35]) [Qui Zermelo rinvia a [Hessenberg 1906, cap. 23] e a [König 1905]. Sono le antinomie che Frank P. Ramsey (1903-1930) porrà nel gruppo B, caratterizzate dal fatto di dipendere da elementi epistemici e che in seguito sono state chiamate epistemologiche. Già Zermelo (con Peano che nel 1906 le considerava linguistiche, e non matematiche) aveva ben chiara tale distinzione. NdA]

([36]) Il complemento di X rispetto a U è l'insieme $\{x \in U \mid x \notin X\}$, $U \setminus X$ in notazione moderna, $U - X$ in Zermelo.

([37]) L'intersezione di X e Y è l'insieme

$$X \cap Y = \{x \in X \mid x \in Y\}.$$

La notazione di Zermelo per l'intersezione di M ed N è $[M, N]$, e $[M, N, P, \ldots]$ quella per un insieme di insiemi, ma anche talvolta $\mathfrak{D}T$, se T è un insieme con elementi $M, N, P, \ldots$.

L'intersezione $\bigcap X$ dell'insieme di insiemi X è definita da Zermelo assumendo implicitamente che X non sia vuoto, A un suo elemento, e ponendo $\bigcap X = \{x \in A \mid \forall Y \in X(x \in Y)\}$. Un pignolo potrebbe chiedere che si dimostrasse che la definizione non dipende dall'elemento A (non è difficile), e si chiederebbe anche cosa succede se X è vuoto. Non si può certo definire $\bigcap \emptyset$ con la condizione $x \in \bigcap \emptyset \leftrightarrow \forall Y \in \emptyset(x \in Y)$, perché per la definizione di $\emptyset$ e per ragioni puramente logiche si avrebbe che $\forall x(x \in \bigcap \emptyset)$, e $\bigcap \emptyset$ dovrebbe essere $\mathfrak{B}$, ma si veda il prossimo teorema.

([38]) [Nel teorema rientra il caso $M = \emptyset$, perché questo ha un solo sottoinsieme, $\emptyset$. La dimostrazione si applica anche a questo caso, fino alla decisione se $M_0 \,\varepsilon\, M_0$, che non vale perché $M_0 = \emptyset$ non ha elementi, e $M_0 \notin M$. NdA]

([39]) [Shoenflies 1911].

Schoenflies modifica gli assiomi per ε, interpretando il corollario del primo teorema di Zermelo come dovuto alla volontà di evitare $a\,\varepsilon\,a$, una preoccupazione a suo parere di origine filosofica; lo si può fare esplicitamente (con una formula insiemistica), e Schoenflies esclude addirittura con un assioma la congiunzione di $a\,\varepsilon\,b$ e $b\,\varepsilon\,a$.

Nel testo di Zermelo seguono i restanti assiomi, prima dello sviluppo della teoria. Gli assiomi IV e V sono i non problematici assiomi dell'insieme potenza e dell'unione. Tali assiomi non richiedono spiegazioni perché regolano operazioni sugli insiemi che venivano regolarmente considerate legittime (a parte il ritardo dei padri fondatori nel riconoscimento dell'insieme potenza). Occorrono peraltro assiomi appositi perché, per esempio nel caso dell'unione di X e Y, non c'è un insieme ambiente che li contenga entrambi come sottoinsiemi, e dal quale si possa ritagliare l'unione con l'Assioma III, come si fa per per il complemento. Tale insieme ambiente è fornito appunto da un assioma ([40]).

Gli altri due assiomi sono l'assioma di scelta e quello dell'infinito. Il punto 13 è dedicato al prodotto, di cui è data la definizione nel caso generale, chiamato *Verbindungsmenge* (insieme di connessione) con la terminologia di Cantor, ma anche "prodotto". Esso è definito per un insieme T di insiemi a due a due disgiunti come l'insieme dei sottoinsiemi dell'unione di T che hanno un solo elemento in comune con ciascun elemento di T, e indicato con $\mathfrak{P}T$ o MN se $T = \{M, N\}$, e qualche volta $M \cdot N$.

Quindi:

> Per poter ora ottenere il teorema che *il prodotto di diversi insiemi si può annullare* (cioè essere uguale all'insieme nullo) *solo se un fattore si annulla* abbiamo bisogno di un ulteriore assioma:
>
> Assioma VI. (Assioma di scelta [*Axiom der Auswahl*]) Se T è un insieme i cui elementi sono tutti insiemi diversi da 0 e a due a due disgiunti, la sua unione $\mathfrak{S}T$ contiene almeno un sottoinsieme S_1 che ha uno e un solo elemento in comune con ciascun elemento di T.
> Possiamo anche esprimere questo assioma dicendo che è sempre possibile *scegliere* un solo elemento da ogni elemento $M, N, R, \ldots$ di T e combinare tutti gli elementi scelti $m, n, r, \ldots$ in un insieme S_1 ([41]).

Il precedente assioma basta, come vedremo, per la derivazione di tutti i teoremi essenziali della teoria generale degli insiemi.

Ma al fine di assicurare l'esistenza di un insieme infinito,

> abbiamo bisogno ancora del seguente assioma, che è essenzialmente dovuto a Dedekind ([42]).
> Assioma VII. (Assioma dell'infinito [*Axiom des Unendlichen*].) Esiste nel dominio almeno un insieme Z che contiene l'insieme vuoto come elemento, ed è tale che a ciascuno dei suoi elementi a corrisponde un ulteriore elemento della forma $\{a\}$, in altre parole, che con ogni suo elemento a contiene anche il corrispondente insieme $\{a\}$ come elemento.
> 14_{VII} Se Z è un qualunque insieme formato come richiesto dall'Assioma VII, è definito per ciascuno dei suoi sottoinsiemi Z_1 se esso possiede la stessa proprietà. [...] Così tutti i sottoinsiemi Z_1 di Z che hanno questa proprietà sono gli elementi di un sottoinsieme T di $\mathfrak{U}Z$ e la loro intersezione (No. 9) $Z_0 = \mathfrak{D}T$ è ancora un insieme formato nello stesso modo. [...]
> Ora se Z' è un altro insieme formato come richiesto dall'assioma, gli corrisponde un più piccolo sottoinsieme Z'_0 che ha la stessa proprietà, esattamente come Z_0 corrisponde a Z. Ma ora l'intersezione $[Z_0, Z'_0]$ che è un sottoinsieme comune a Z e a Z', deve essere formato nello stesso modo come Z e Z'; e come essendo un sottoinsieme di Z

([40]) L'Assioma V dell'unione [*Axiom der Vereinigung*] è formulato per un insieme X di insiemi: l'unione $\bigcup X$ è l'insieme $\{x \mid \exists Y \in X(x \in Y)\}$. La notazione per $\bigcup$ è $\mathfrak{S}$.

L'unione di X e di Y si ottiene come $\bigcup\{X, Y\}$: $X \cup Y$ è l'insieme tale che $\forall z(z \in X \cup Y \leftrightarrow z \in X \vee z \in Y)$. La notazione per $\cup$ è $+$.

L'insieme potenza di X, *Potenzmenge*, è l'insieme $\mathscr{P}(X)$ tale che $\forall z(z \in \mathscr{P}(X) \leftrightarrow z \subseteq X)$. La notazione per $\mathscr{P}$ è $\mathfrak{U}X$. Solo il semiintuizionista René-Louis Baire (1874-1932) mosse obiezioni all'assioma IV.

([41]) [In nota Zermelo rimanda al suo "Neuer Beweis", dove in § 2, pp. 111-28 è discussa la letteratura rilevante. NdA]

([42]) [In nota, Zermelo rimanda al lavoro di Dedekind del 1888 per la definizione di "infinito", ma il tentativo di dimostrare ivi tale principio non è ritenuto da lui soddisfacente, in quanto il punto di partenza è l' "insieme di ogni cosa pensabile", che non è accettabile dal punto di vista del dominio $\mathfrak{B}$ perché esso per il teorema 10 *supra* non forma un insieme. NdA] deve contenere la componente Z_0, così in quanto sottoinsieme di Z' deve contenere la componente Z'_0. Per l'Assioma I ne segue necessariamente $[Z_0, Z'_0] = Z_0 = Z'_0$, e che Z_0 così è la *componente comune di tutti i possibili insiemi formati come* Z, benché questi non siano necessariamente gli elementi di un insieme. L'insieme Z_0 contiene gli elementi $\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}$, e così via, e può essere chiamato la *successione numerica*, perché i suoi elementi possono giocare il ruolo dei numerali. Si tratta del più semplice esempio di un insieme infinito numerabile (oltre, No. 36) (43).

La seconda parte delle "Untersuchungen" è dedicata alla teoria dell'equivalenza. Due insiemi disgiunti N e M sono definiti equivalenti, $N \sim M$, se esiste una corrispondenza uno-uno tra essi; la corrispondenza è definita come un sottoinsieme del prodotto. Il concetto è poi esteso a insiemi non disgiunti mediante l'idea della equivalenza mediata (da un terzo insieme disgiunto da entrambi i dati). In seguito l'equivalenza tra insiemi non disgiunti è discussa anche per insiemi infiniti di insiemi in modo da poter introdurre le operazioni di somma e prodotto generalizzati.

Il Teorema 25 è quello che abbiamo chiamato il lemma chiave per il teorema di Cantor-Bernstein (se un insieme è equivalente a un suo sottoinsieme proprio, allora è equivalente a ogni sottoinsieme intermedio).

Questo, il 27, è chiamato Teorema di equivalenza: Se due insiemi N e M sono ciascuno equivalente a un sottoinsieme dell'altro, allora sono equivalenti.

Segue la definizione di avere cardinalità minore: $N < M$ se N è equivalente a un sottoinsieme di M ma non viceversa; la tricotomia viene dunque espressa affermando che "Le tre relazioni $N < M, N \sim M$ e $M < N$ sono mutuamente esclusive".

Il Teorema 32 è il teorema di Cantor del 1891 che afferma, in notazioni moderne, che sempre $M < \mathscr{P}(M)$.

Il Teorema 33 dimostra il cosiddetto teorema di König che in notazioni moderne per somma e prodotto afferma: se per ogni $i \in I$ $N_i < M_i$ allora $\bigcup_{i\in I} N_i < \Pi_{i\in I} M_i$. Il teorema di König era ed è ritenuto importante perché ha permesso di ottenere il primo risultato sulla cardinalità del continuo, e risulterà che non ce ne sono altri che permettano di restringere il campo dei possibili valori della sua cardinalità dimostrabili nella teoria ZF. La disuguaglianza del teorema è la parte che si salva di una più complicata, ma errata, relazione in base alla quale Julius König (1849-1913) al congresso internazionale di Heidelberg del 1904 aveva creduto di poter dimostrare che il continuo non può essere un aleph (44).

La prima parte dell'argomento di König sopravvisse peraltro permettendo di dimostrare che $2^{\aleph_0}$ non può essere un cardinale di cofinalità ω (45). Se fosse $2^{\aleph_0} = \aleph_\beta$, β limite, e $\aleph_\beta$ somma di una successione crescente di tipo ω di cardinali minori di $\aleph_\beta$, si otterrebbe $\aleph_\beta < \aleph_\beta^{\aleph_0}$. Ma $\aleph_\beta^{\aleph_0} = (2^{\aleph_0})^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0 \times \aleph_0} = 2^{\aleph_0}$, contraddizione.

Zermelo dimostra infine che Z_0, come in 14_{VII}, è infinito nel senso di Dedekind, cioè è equivalente a un suo sottoinsieme proprio, e che ogni insieme infinito contiene un sottoinsieme numerabile, ovvero equivalente a Z_0.

3. – Dal 1908 al 1922

Dopo la pubblicazione di [Zermelo 1908b], la sua teoria che oggi è indicata con Z è diventata un riferimento-quadro per le ulteriori ricerche, anche per coloro che non la assumevano esplicitamente, come vedremo a proposito di Schoenflies e Hausdorff.

Qualche insoddisfazione per la soluzione di Zermelo fu espressa solo da parte di Gerhard Hessen-

(43) [Gli elementi $\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \ldots$ di Z_0 sono chiamati ordinali, o numeri, di Zermelo. NdA]

(44) L'errore dipendeva da una errata interpretazione troppo generale di una uguaglianza aritmetica di Felix Bernstein, e provocò uno spavento a Cantor, presente. La correzione e il ridimensionamento furono dovuti quasi subito a Zermelo, o a Hausdorff poco dopo secondo differenti ricostruzioni dei presenti. Ma lo stesso König se ne era accorto, preparando il manoscritto per la pubblicazione. Si veda [Moore 2011].

(45) La cofinalità di un cardinale k è il più piccolo ordinale α tale che k sia uguale al limite di una successione di lunghezza α di cardinali minori di k. In modo equivalente, è il più piccolo cardinale h tale che k sia la somma di h cardinali minori di k.

berg (1874-1925), il quale citava il compito attribuito alla teoria in apertura di [Zermelo 1908b], di indagare matematicamente i concetti fondamentali di "numero", "ordine", e "funzione", per notare come subito fosse tradito, perché nella trattazione la funzione appare come *Belegung* (ricoprimento) e questo è un insieme. Egli pensava invece che il termine *Funktion* dovesse essere primitivo, non riducibile a quello di insieme. L'impostazione di Hessenberg influenzerà il formalismo di [von Neumann 1925], dove tuttavia insiemi e funzioni non sono indipendenti.

Hessenberg riteneva che il termine *Funktion* debba denotare corrispondenze con la proprietà che l'immagine della loro restrizione a un insieme è sempre un insieme (46). Per Hessenberg, noto soprattutto come geometra proiettivo, "[i]l concetto generale di *Zuordnung* [assegnazione], una volta che si sia limitato assiomaticamente il concetto di insieme, va oltre quello di *Belegung* e si colloca indipendente a fianco di quello di insieme appena intraprendiamo la ricerca delle proprietà dei simboli di operazione [$\mathfrak{E}, \mathfrak{S}, \mathfrak{U}, \mathfrak{D}$, rispettivamente singoletto, unione, intersezione, prodotto] da un punto di vista generale". Più precisamente: "La 'funzione' $\mathfrak{E}(x)$ è definita per ogni oggetto del dominio", e analogamente per le altre operazioni indicate: "Non si dà alcun caso in cui l'assortimento di argomenti sia un insieme, così come quello dei valori. Vale tuttavia l'affermazione che a ogni insieme di argomenti corrisponde un insieme di valori, e noi vogliamo conservare questa proprietà in generale per una assegnazione [*Zuordnung*] quando vogliamo chiamarla 'funzione'. In questo modo anche questo concetto di funzione che va oltre quello di *Belegung* riesce a essere dominato per mezzo della teoria degli insiemi assiomaticamente ristretta" (47).

Hessenberg intervenne nel 1909 anche su un aspetto minore: "Mentre i 'domini' delle altre discipline sono *insiemi*, il 'dominio di cose' di cui la teoria degli insiemi tratta non può essere a sua volta un insieme, a prezzo di ricadere nei noti paradossi" (48). Presentava comunque un sistema di assiomi che non si discostava molto da quello di Zermelo, e all'interno del quale sviluppava una teoria degli insiemi ordinati e bene ordinati sulla base del concetto di catena di origine dedekindiana. Se avesse precisato in modo più esteso il concetto di "Funktion", invece di limitarsi agli esempi delle operazioni fondamentali, avrebbe forse riconosciuto la inevitabilità dell'assioma di rimpiazzamento.

I testi a maggior contenuto matematico accettavano le restrizioni di Zermelo ma non adottavano la sua assiomatizzazione. Schoenflies, ripubblicando nel 1913 insieme il suo rapporto del 1900 e la seconda parte del 1908, dichiarava nella prefazione che la teoria degli insiemi era cresciuta in contenuto, struttura e sfera d'influenza; forse rispetto all'inizio del secolo aveva perso un po' d'interesse, ma certo non di significato: nell'analisi e nella geometria non c'era ormai alcuna idea che non avesse strette relazioni insiemistiche e non avesse goduto della fruttuosità del pensiero insiemistico; egli aveva dovuto chiedere la collaborazione di Hans Hahn per la nuova parte riguardante le funzioni reali. Spiegava anche che nel rapporto non era previsto spazio per la logica o i paradossi; la logica con i suoi insiemi, o classi nel linguaggio di Peano, considera inevitabilmente i loro complementi, e attraverso l'unione perviene al tutto, cioè a un oggetto che non può essere sottoposto a analisi logiche non contraddittorie. Al contrario il matematico opera sempre in modo che un'affermazione negativa si manifesti sempre all'interno di un dominio che è stato introdotto come un oggetto matematico. Comunque "[i]n accordo con Zermelo il Principio di Separazione sarà usato sempre e solo su qualcosa che si è già dimostrato essere un insieme matematico o sarà introdotto assiomaticamente come tale".

(46) Già in [Hessenberg 1906].

(47) [Hessenberg 1909, pp. 90-1]. $\mathfrak{E}$ non è usato da Zermelo. Per le assegnazioni univoche $\mathfrak{F}$ Hessenberg introduce concetti simili a dominio e immagine: ogni insieme di argomenti è un *campo* (*Feld*) e l'insieme dei valori corrispondenti a un campo α è chiamato immagine (*Bild*) di α, indicato con $\mathfrak{F}_1(\alpha)$.

(48) [Hessenberg 1909, p. 81]. Zermelo tuttavia aveva evitato i paradossi dimostrando nel primo teorema che $\mathfrak{B}$ non è un insieme. Anche secondo [Shoenflies 1911], come abbiamo visto nel precedente capitolo, il termine *Bereich* non dovrebbe comparire negli assiomi.

Analogamente nel testo [Hausdorff 1914] che discuteremo *infra*, forse il primo manuale di teoria degli insiemi, era dichiarato che questa è il fondamento di tutta la matematica, "*das Fundament der gesamten Mathematik*": il calcolo differenziale e integrale, l'analisi e la geometria non possono farne a meno dovendo sempre trattare con l'infinito. Ma "il fondamento di questo fondamento" a parere di Hausdorff non era ancora stato raggiunto. Le ricerche di Zermelo per delimitare il processo di costruzione di insiemi con le appropriate condizioni non si potevano ancora dire concluse, e inserirle nella didattica sarebbe stato troppo pesante, ragion per cui nel volume ci si sarebbe riferiti al concetto intuitivo di insieme, *den naiven Mengenbegriff*, rispettando però le restrizioni che bloccano il percorso che arriva ai paradossi.

L'unico concetto nuovo, prima del 1920, a parte i cardinali esorbitanti, di cui diremo, è quello degli insiemi che saranno detti ben fondati, dovuto a Dimitri Mirimanoff (1861-1945). Mirimanoff studiava gli insiemi che chiamava *ordinari*, insiemi x tali che ogni catena discendente $\ldots \in x_n \in \ldots x_1 \in x$ fosse finita, e terminasse con individui che non sono insiemi, gli *Urelemente*. A lui si deve la dimostrazione di diverse proprietà degli insiemi ben fondati e della struttura della loro collezione; forse vi si può trovare anche la prima idea di quelli che diventeranno i modelli interni ([49]).

Dal punto di vista matematico, la teoria degli ordinali e dei buoni ordini risulta faticosa nel quadro zermeliano, come anche nell'ampio studio su ordini e buoni ordini del 1908 di Hausdorff. Il solo risultato notevole del periodo è il teorema di Friedrich Hartogs (1874-1943) del 1915 che dimostra che per ogni insieme x esiste un y bene ordinato non iniettabile in x; riesce a farlo senza principio di scelta e anche ovviamente senza rimpiazzamento, come ora si usa normalmente per darne una agevole dimostrazione, ma lamenta che Zermelo non abbia sviluppato la teoria dei buoni ordini ([50]). Il teorema di Hartogs non dipendendo dalla scelta permette di dedurre dalla tricotomia il principio del buon ordinamento in modo diretto.

Felix Hausdorff (1868-1942), attivo a Leipzig e a Bonn, è noto soprattutto per i contributi alla topologia, ma approfondì anche la teoria degli insiemi ordinati ([51]).

Nel primo capitolo del suo libro del 1914 sono presentate come assunzioni il *Nullmenge* 0, il concetto di sottoinsieme, le operazioni di differenza, unione $\mathfrak{S}$ (+ se gli insiemi sono disgiunti), intersezione $\mathfrak{D}$, con le loro proprietà algebriche; ampio spazio è dedicato a sistemi di insiemi, in particolare anelli e corpi di insiemi, che si presentano in modo naturale nella teoria della misura, e a successioni di insiemi e di funzioni, e in generale alle operazioni insiemistiche generalizzate.

Nel secondo capitolo, Hausdorff è il primo a definire le funzioni come insiemi di coppie ordinate, con l'introduzione della coppia ordinata $\langle a, b\rangle = \{\{a, 1\}, \{b, 2\}\}$, per quanto questa lasci a desiderare presupponendo la definizione dei numeri; ed è trattata la relazione di equipotenza. Il terzo capitolo è dedicato alla cardinalità. Hausdorff ricorda e rifiuta la definizione per astrazione dei cardinali di Cantor, cioè quel qualcosa che resta facendo astrazione dalla natura e dall'ordine degli elementi, come pure quella di Russell, con le classi di equivalenza di tutti gli insiemi tra loro equivalenti, che sono classi impossibili. Esprime qualche perplessità anche sul considerare astrazioni le classi di equivalenza introdotte in altri campi della matematica, ove tali costruzioni di solito possono essere definite in modo più chiaro, o eliminate, in termini dei concetti elementari; per questo Hausdorff adotta un punto di vista formalistico, e sviluppa la teoria

([49]) [Mirimanoff 1917a] e [Mirimanoff 1917b]. L'assioma di fondazione sarà espresso in seguito come $\forall x \exists y \in x \forall u (u \in y \to u \notin x)$, dove l'$y$ richiesto è tipicamente $\emptyset$ o un atomo; esso, con l'assioma di scelta numerabile, è equivalente a quello chiamato di regolarità, che è lo schema $\neg\exists x_1, \ldots, x_n (x_1 \in x_2 \in \ldots \in x_n \in x_1)$ che nega l'esistenza di cicli, o l'affermazione della non esistenza di catene discendenti infinite con $\forall x \neg\exists \{x_n\}_{n\in N}(x_0 = x \wedge \forall n \in N(x_{n+1} \in x_n))$, ma è preferibile rinviare l'assenza delle catene discendenti a dopo l'introduzione delle successioni.

([50]) [Hartogs 1915].

([51]) Scrisse anche opere teatrali e filosofiche con lo pseudonimo Paul Mongré.

della cardinalità solo in base alla relazione "avere la stessa cardinalità", immaginando che a ogni insieme sia associata la sua potenza, nel rispetto dell'equivalenza: a insiemi equivalenti la stessa cardinalità. Svolge quindi la teoria dell'equivalenza, e presenta varie leggi sugli aleph, il teorema di Cantor e quello di König. Sono trattate le proprietà degli insiemi numerabili, e le proprietà del continuo indicato con $\aleph$: si sofferma su $\aleph_0, \aleph$ e $2^{\aleph}$.

Tre capitoli sono dedicati a insiemi ordinati e bene ordinati, e alla cardinalità di questi ultimi (circa 140 pagine). Il resto (circa 240 pagine) a insiemi di punti in spazi generali, topologia, spazi metrici, insiemi di Borel ([52]), spazi completi, il piano euclideo, funzioni continue, curve, classi di funzioni, teoria della misura, la misura di Peano-Jordan, quella di Lebesgue, la teoria dell'integrazione.

L'aritmetica cardinale fa passi avanti; grazie alla trattazione estesa degli ordinali gli aleph possono essere definiti in modo soddisfacente, come ordinali iniziali, cioè ordinali infiniti non equipotenti a alcun loro segmento iniziale. Il teorema del buon ordine consente di identificarli con i cardinali infiniti.

La cofinalità permette di distinguere cardinali regolari e cardinali singolari ([53]). Hausdorff dimostra che i cardinali successori, cioè gli $\aleph_{\alpha+1}$, sono regolari, quindi discute i cardinali limite, $\aleph_\lambda$, λ limite, senza poter dimostrare che ne esistono di regolari. Già in [Hausdorff 1908] erano stati messi in evidenza questi cardinali, che in seguito saranno chiamati debolmente inaccessibili, e che erano ritenuti da Hausdorff "esorbitanti", perché:

> Se esistono cardinali regolari con indice limite (e finora non è riuscito di scoprire alcuna contraddizione in tale assunzione) il più piccolo di essi è di una tale esorbitante grandezza che mai interverrà delle considerazioni degli scopi usuali della teoria degli insiemi ([54]).

Curiosamente Hausdorff non si accorge che neanche $\aleph_\omega$ può essere dimostrato esistente nella teoria di Zermelo, osservazione che invece risulterà immediata sia a Fraenkel, sia a Skolem.

Nella seconda edizione del 1927 sarà eliminata la maggior parte della teoria degli insiemi ordinati, come anche la teoria di Lebesgue, gran parte della topologia (lasciando solo gli spazi metrici) e tutta la trattazione di poliedri e poligoni; al loro posto cresce l'attenzione per insiemi di Borel, insiemi di Suslin e funzioni di Baire.

Nella terza edizione, del 1937, tradotta in inglese, ancora più sbilanciata verso le applicazioni, circa 90 pagine sono dedicate alle operazioni elementari, ai cardinali, ai tipi d'ordine e agli ordinali; circa 180 a insiemi di Borel, di Suslin, topologia, funzioni di variabile reale. Hausdorff mantiene sempre la topologia all'interno della teoria degli insiemi, a differenza di chi la voleva autonoma o sotto la geometria. La parte introduttiva, o fondazionale come si vede si riduce e aumenta quella puramente matematica. Resteranno le prudenti riserve della prima edizione e la fedeltà alla presentazione naïve.

Un altro testo del periodo è *Einleitung in die Mengenlehre* di A. A. Fraenkel, del 1919; questo, superato dalla seconda edizione ampliata del 1923, è più attento alle questioni dell'assiomatica, visti gli interessi dell'autore, di cui diremo sotto, e rimarrà a lungo il testo introduttivo di riferimento per chi è interessato anche alle questioni fondazionali.

Anche Paul Mahlo (1883-1971) nel 1911 inizia lo studio dei cardinali inaccessibili e di limiti di inaccessibili, e di cardinali più grandi, che saranno chiamati "di Mahlo". Un ordinale k si dice ora di Mahlo se ogni funzione $f : k \longrightarrow k$ continua e strettamente crescente ha punti fissi che sono cardinali

---

([52]) Gli insiemi di Borel o boreliani sono definiti inizialmente come sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ o di uno spazio metrico da Émile Borel, poi generalizzati a uno spazio topologico, per iterazione di unione generalizzata e complemento: oggi sono definiti come la più piccola σ-algebra che contiene gli insiemi aperti. Raccogliendo molti contributi francesi, Hausdorff incomincia a creare il nucleo di quella che diventerà la teoria descrittiva degli insiemi, studio dei sottoinsiemi definibili di $\mathbb{R}$.

([53]) La cofinalità $cof(k)$ di un cardinale k, vedi nota 45, per definizione è $cof(k) \leq k$. Un cardinale k è regolare se è $cof(k) = k$, altrimenti è singolare. Hausdorff dà queste definizioni prima per ordinali, e la trattazione è più complicata.

([54]) [Hausdor 1914, p. 131]. I cardinali (fortemente) inaccessibili sono definiti invece come cardinali k regolari e tali che per ogni cardinale $h < k$ si ha $2^h < k$.

regolari, e fortemente Mahlo se i punti fissi sono fortemente inaccessibili ([55]). Un ordinale di Mahlo k è un cardinale inaccessibile, e anzi esistono k inaccessibili minori di k. Mahlo apre la strada allo studio dei grandi cardinali, e la profezia di Hausdorff sarà smentita quando nel decennio successivo Alfred Tarski (1902-1983) e la scuola polacca, che si raccoglie intorno alla rivista *Fundamenta mathematicae*, inizieranno a studiare gli inaccessibili.

Rare sono le anticipazioni dell'assioma di rimpiazzamento. A parte la proposta di Cantor, sepolta nelle lettere, ne esistono forse due, che ne ricalcano la formulazione; la prima, passata inosservata, risale al 1905 a opera di A. E. Harward che lo ripete nella forma di Cantor, anche se personalmente ritiene che non siano necessari assiomi: "Ogni classe i cui individui possono essere correlati uno-uno con gli elementi di un aggregato è essa stessa un aggregato" ([56]).

Più esplicito ma oscuro Mirimanoff, che per le sue ricerche assumeva gli assiomi dell'unione, della potenza e uno che assomiglia a o evoca quello di rimpiazzamento, nella forma: se un insieme esiste, esiste pure ogni insieme ordinario cardinalmente equivalente a esso; oppure: due insiemi ordinari esistono entrambi o non esistono se sono in corrispondenza biunivoca. Mirimanoff precisava che la corrispondenza deve essere definita senza ambiguità, ma a meno che non intendesse qualcosa di diverso, ma non precisato, da una funzione – e non è chiaro – questo non è il rimpiazzamento, perché se è data una funzione insiemistica il suo dominio e la sua immagine sono insiemi.

Il problema serio rimasto aperto per Z era il concetto di *definit*, la cui vaghezza era stata rilevata subito da molti, in particolare da Russell e da Schoenflies. Questi, coerente con il suo disinteresse per le preoccupazioni filosofiche, dichiarava:

> Una dettagliata precisazione del concetto espresso dalla parola "definito" (= univocamente determinato), del tipo di quella che costruisce Zermelo [...] risulta del tutto superflua [...]. Non può che ridursi a una formulazione con altre parole equivalenti ([57]).

Zermelo aveva dato per ovvio che la relazione di appartenenza fosse definita. La definitezza è relativa all'appartenenza. Nello sviluppo della sua indagine, come abbiamo visto, si faceva carico di affermare sempre, per ogni nuovo concetto, se non dimostrare, che esso fosse definito, ricordando come fosse collegato a altri precedentemente riconosciuti come tali (salvo nel caso $M \not\in N$ trattato subito come $a\,\varepsilon\,b$), a cominciare dalla differenza, o complemento, dall'unione e dall'intersezione; la verifica comporta di fare appello tacitamente alle "leggi universalmente valide della logica", peraltro non precisate, e fare attenzione alle definizioni delle condizioni, cioè ripetendole come diceva Schoenflies con altre parole equivalenti.

D'altra parte il riconoscimento che la condizione di definitezza è soddisfatta appesantisce molto lo sviluppo degli argomenti matematici, per la necessità di ricordare sempre che le relazioni o le proprietà in questione sono *definit*, prima di usarle negli enunciati; per fare un esempio, al punto 16 Zermelo deve svolgere la seguente cascata di osservazioni: se Φ è un sottoinsieme di MN e x un elemento di $M+N$ è sempre definito se gli elementi di Φ che contengono x formano un insieme con un unico elemento; quindi è definito se tutti gli x di $M+N$ posseggono questa proprietà, cioè se Φ rappresenta o no un'applicazione di M su N; allora tutte le applicazioni Φ sono gli elementi di un sottoinsieme Ω di $\mathfrak{U}(MN)$ ed è definito se Ω sia diverso da 0 o no; "*Dunque è sempre definito se due insiemi disgiunti M e N sono equivalenti o no*". Per un altro esempio, al punto 18 considera insiemi non disgiunti M ed N, definendo che M è equivalente a N se entrambi sono equivalenti a un terzo insieme R disgiunto sia da M che da N; ma deve provare che, se $M \sim R, R \sim R'$ e $R' \sim N$, dove si assume che ciascuna di queste coppie siano di insiemi disgiunti, allora si ha sempre anche $M \sim N$: per questo,

([55]) [Mahlo 1911]. Anche Mahlo ha ancora qualche riserva sull'assioma di scelta, si veda [Moore 1976, p. 184].

([56]) In [Harward 1905], cit. da [Kanamori 2012, p. 56]; si veda [Moore 1976]. Harward è un personaggio poco conosciuto, funzionario inglese, matematico dilettante, legato a Philip E. B. Jourdain (1879-1919), che non aveva letto Cantor ma Russell e Jourdain, e aveva indipendentemente proposto la distinzione tra aggregati e classi illimitate.

([57]) [Shoenflies 1911, nota 2, p. 227].

assumendo che siano date tre applicazioni rispettivamente di M sopra R, di R sopra R' e di R' sopra N, quindi tre sottoinsiemi Φ di MR, X di RR', Ψ di $R'N$, per ogni elemento $\{m, n\}$ di MN è definito se esistono un elemento r di R e un elemento r' di R' tali che $\{m, r\} \,\varepsilon\, \Phi, \{r, r'\} \,\varepsilon X, \{r', n\} \,\varepsilon\, \Phi$; quindi si può formare l'insieme di tutti gli elementi $\{m, n\}$ per cui si dà il caso suddetto e si ha un sottoinsieme Ω di MN che rappresenta un'applicazione di M su N, e allora $M \sim N$.

Nel 1910 venne presentata la prima proposta di precisazione del concetto di *definit*, da parte di Hermann Weyl (1885-1955) (58). Weyl faceva uso delle nozioni di logica ormai conosciute, grazie a Peano e a Russell, anche senza riferimento a un sistema logico preciso ma per lo meno agli ingredienti di un linguaggio logico. Weyl proponeva di considerare solo le condizioni che si possono scrivere partendo da condizioni di base e iterando un numero finito di volte le operazioni logiche. Le formule atomiche erano $x = y$ e $x \in y$, le operazioni logiche indicate come sufficienti la negazione, la congiunzione, la disgiunzione, il quantificatore esistenziale e la sostituzione di costanti a variabili.

La proposta di Weyl non ebbe un impatto immediato, o perché poco conosciuta, e sfuggì anche a Skolem, come vedremo, o perché lo stesso Weyl inizialmente non era convinto della propria soluzione, perché aveva la sensazione che dipendesse dal concetto preliminare di iterazione, cioè di numero naturale. In seguito, nel 1917, si convinse che non sia possibile evitare questo passo, e arrivò a ritenere perciò che fosse la teoria degli insiemi a dover essere fondata sui numeri naturali e non viceversa. In *Das Kontinuum* Weyl presentava "schemi di giudizio" formati, a partire da proprietà e relazioni date, originarie, applicando "quante volte si vuole" la negazione, la congiunzione, la disgiunzione, il quantificatore universale, la sostituzione di costanti a variabili e l'identificazione di variabili. Mostrava come esercizio come si possa scrivere la definizione di funzione f uniformemente continua (59).

4. – Fraenkel

Adolf Abraham Fraenkel era un matematico tedesco che insegnava inizialmente a Marburg e lavorava in algebra. Non fortunato nella carriera accademica, e convinto sionista, si trasferì nel 1929 definitivamente nella nuova università di Gerusalemme, di cui diventerà rettore; sarà il primo maestro di Abraham Robinson (1918-1974) a cui lascerà la sua cattedra quando andrà in pensione nel 1957. Di lui si racconta un divertente aneddoto: sbarcato all'aeroporto in Israele (provenendo forse dalla Germania) e dovendo prendere un autobus che doveva partire alle 9, ma alle 9.05 non si era ancora mosso, fece rilevare il ritardo all'autista; questi, infastidito, come un personaggio di Ephraim Kishon gli chiese: "Ma lei cosa è, un tedesco o un professore?" Al che Fraenkel rispose: "Usa la disgiunzione inclusiva o quella esclusiva?". La sua pignoleria risalta anche nelle revisioni alle molte edizioni dei suoi libri sulla teoria degli insiemi.

Nel 1919 Fraenkel scrisse l'introduzione citata alla teoria degli insiemi che diceva di aver concepito in trincea durante la guerra per spiegare la teoria ai suoi

(58) [Weyl 1910]. Si tratta di un lavoro svolto da Weyl su suggerimento di Hilbert proprio per affrontare la questione del *definit* in contesto geometrico. Weyl era stato impressionato da una conferenza tenuta da Henri Poincaré (1854-1912) a Göttingen su invito di Hilbert, nel corso della quale Poincaré aveva criticato la soluzione ritenuta sbrigativa di Zermelo e aveva espresso il suo interesse per la nozione di definibilità.

(59) [Weyl 1918]. *Das Kontinuum* è dedicato allo svolgimento dell'analisi in forma predicativa, mutuando da Poincaré sia l'idea della restrizione predicativista sia l'accettazione dei soli numeri naturali come fondamento della matematica. La restrizione predicativista era il rifiuto delle definizioni in cui si introduce un ente facendo riferimento a una totalità di enti alla quale risulta a posteriori appartenere quello definito. Senza voler mettere in discussione l'importanza storica del lavoro di Dedekind, "già per gli stessi concetti fondamentali della teoria degli insiemi occorre basarsi sull'intuizione dell'iterazione e della successione dei numeri naturali", [Weyl 1918, trad. it. p. 46]. Dedekind apparentemente non usava i numeri nella sua costruzione, perché usava al loro posto, anzi proprio per definirli, una definizione impredicativa: i numeri sono "la componente comune" di tutti gli insiemi che contengono un elemento speciale (lo 0) e sono chiusi rispetto a una funzione iniettiva (funzione successore) e non suriettiva (0 non è nell'immagine), come è dimostrato in 14_{VII} di Zermelo, *supra*.

commilitoni. L'impostazione non è assiomatica, ma per sua dichiarazione genetica, anche se sono introdotti come "principi" gli assiomi di Zermelo. Oltre che alla teoria degli insiemi l'esposizione è dedicata a questioni dei fondamenti, dove già si sente l'influsso delle discussioni alimentate dalla posizione di Luitzen Brouwer (1881-1966); contiene una parte sul metodo assiomatico, arricchita nelle successive edizioni, del 1923 e 1928, con informazioni sulle ricerche in corso nell'ambito del programma di Hilbert.

Fraenkel svolgeva indagini logiche sulla teoria assiomatica di Zermelo, ma senza usare alcuna logica; era interessato principalmente all'indipendenza degli assiomi e cercava in particolare di dimostrare l'indipendenza dell'assioma di scelta dagli altri assiomi, risultato che gli riuscì con un modello fondato su un'infinità numerabile di atomi, e automorfismi indotti dalle permutazioni degli individui. Il modello nel quale la scelta viene meno è costruito partendo da un insieme numerabile $a_1, \overline{a}_1, a_2, \overline{a}_2, \ldots$ di oggetti che non sono insiemi e aggiungendo all'insieme delle "celle" $\langle a_1, \overline{a}_1\rangle, \langle a_2, \overline{a}_2\rangle, \ldots$ gli insiemi ottenuti applicando un numero finito di volte gli assiomi di Zermelo. Il teorema fondamentale afferma che per ogni insieme M esiste un suo sottoinsieme A_M che contiene tutti salvo al più un numero finito di elementi di A ed è tale che A_M rimane invariato quando sono scambiati gli elementi a_k e $\overline{a}_k$ di tutte le celle di A_M. Questo contraddice il principio di scelta perché un insieme di scelta per A non sarebbe invariante ([60]).

Probabilmente nella sua riflessione sui modelli Fraenkel si accorse di una lacuna negli assiomi di Zermelo: notò che se si indica con Z_0 l'insieme dei numeri naturali e con Z_{n+1} l'insieme potenza di Z_n, non si riesce a dimostrare che l'insieme $\{Z_0, \ldots, Z_n, \ldots\}$ esiste, quindi che $\aleph_\omega$ (assumendo l'ipotesi generalizzata del continuo) esiste.

Scrisse al riguardo a Zermelo, che gli rispose:

> La sua osservazione su $Z^* = Z_0 + Z_1 + Z_2 + \ldots$ mi sembra giustificata, e il problema mi è sfuggito quando scrivevo il mio [1908b]. In effetti, è necessario qui un nuovo assioma, ma che tipo di assioma? Si potrebbe provare a formularlo come segue: Se gli oggetti $A, B, C, \ldots$ sono assegnati agli oggetti $a, b, c, \ldots$ da una relazione uno-uno, e i secondi formano un insieme, allora anche $A, B, C, \ldots$ sono elementi di un insieme M. Allora è sufficiente assegnare $Z_0, Z_1, Z_2, \ldots$ agli elementi dell'insieme Z_0, ottenendo così l'insieme $\Theta = \{Z_0, Z_1, Z_2, \ldots\}$ e $Z^* = \bigcup \Theta$. Tuttavia, non mi piace questa soluzione. Il concetto astratto di assegnazione che usa non mi sembra abbastanza "definito". Era proprio questa la ragione per cui ho cercato di sostituirlo con la mia "teoria dell'equivalenza" in [1908b]. Come vede, la difficoltà è ancora insoluta. A ogni modo, apprezzo il fatto che l'abbia portata alla mia attenzione ([61]).

Neanche a Fraenkel piaceva la formulazione di Zermelo. Nella seduta della Deutsche Mathematiker-Vereinigung del 22 settembre 1921 Fraenkel menzionava la necessità di nuovi assiomi (oltre a quello di rimpiazzamento anche un assioma di restrizione, su cui non ci soffermiamo) ([62]), e affermava che "di una precisazione abbisogna [anche] la caratterizzazione zermeliana del concetto di definitezza, che entra in gioco soprattutto in certi momenti dell'indagine sulla indipendenza". Il riassunto della seduta dello *Jahresbericht* aggiunge che nella discussione si è manifestato il sostanziale accordo di Zermelo: "solo sull'ampiezza delle richieste assunte nei due nuovi postulati restano alcune differenze di opinione tra Zermelo e il proponente".

Rimpiazzamento e definitezza si intersecano, complicandosi a vicenda. Nelle anticipazioni del rimpiaz-

([60]) [Fraenkel 1922b]. Fraenkel si ispirava forse all'esempio dato da [Russell 1906] dell'impossibilità di definire un insieme di scelta per un insieme numerabile di paia di calze, a differenza di quanto succederebbe con gli stivali.

([61]) Lettera di Zermelo a Fraenkel del 9 maggio 1921, citata in [Ebbinghaus 2007, p. 137].

([62]) Tuttavia è molto interessante per la storia dell'assiomatica e il miraggio della categoricità. L'assioma di restrizione è un tardo analogo, nel verso opposto, di quello che Hilbert aveva usato per la continuità dei numeri reali; chiede che non esistano sottodomini propri che soddisfano gli assiomi; l'assioma complica ulteriormente la riflessione di Fraenkel in quanto interferisce con quello di scelta. Esso può anche essere considerato un'anticipazione della richiesta di modelli minimali. Anche la proposta duale, di garantire la massima ampiezza dell'universo, venne avanzata in quegli anni, da Paul Finsler (1894-1970), in un lavoro interessante per l'uso degli insiemi transitivi; ma il suo assioma di completezza, in [Finsler 1926, p. 697], fu dimostrato contraddittorio da R. Baer (si veda [Lolli 1985, pp. 215-7]).

zamento che abbiamo ricordate, le due questioni non erano state accostate. Invece per Fraenkel e Zermelo si ponevano problemi di non facile soluzione.

In mancanza di una precisazione della definitezza, Fraenkel era in grado di dare solo la traccia della sua dimostrazione di indipendenza. Questa richiedeva la costruzione di un modello, che non poteva che essere ottenuto come la chiusura di un insieme dato di oggetti rispetto alle operazioni garantite dagli assiomi; non solo unione, coppia e potenza, ma anche quelle che si potevano definire con l'assioma di separazione (63). A questo punto, per la formulazione incerta, l'assioma di separazione si rivelava di difficile controllo, e la verifica nel modello costruito era problematica.

Fraenkel riteneva che non ci fossero altre strade se si voleva essere fedeli allo spirito dell'assiomatica, che concepiva nel seguente modo, che ribadiva nell'*Einleitung in die Mengenlehre* del 1923: si postulano alcuni insiemi iniziali come l'insieme vuoto o un insieme infinito, quindi si danno processi per costruire (*bilden*) nuovi insiemi o sottoinsiemi a partire da quelli già ottenuti. La sua concezione del metodo assiomatico non era quella che Hilbert aveva presentato nel 1900 quando aveva assiomatizzato la teoria dei numeri reali (64): non è dato un sistema chiuso e completo di cose.

Bisogna dire che non era facile rispettare in modo coerente le condizioni dell'assiomatica; lo stesso Zermelo aveva affermato, nelle risposte alle obiezioni alla scelta, che bisognava restringersi a "principi che ci permettono di formare insiemi iniziali e di derivare nuovi insiemi da quelli dati".

Fraenkel non riconosceva come Hilbert la superiorità del metodo assiomatico; lo accettava solo per le nozioni non riducibili a altre, e solo se poteva ottenere una caratterizzazione univoca data dalla costruzione, da cui l'assioma di restrizione (*supra*, nota 62).

Aveva comunque bisogno di sapere quali sono le operazioni rispetto a cui chiudere, le operazioni garantite dagli assiomi, e tutti gli assiomi devono introdurre operazioni, anche quello di separazione.

(63) Fraenkel le chiama funzioni, ma sono sempre operazioni definibili, come $x \mapsto \mathscr{P}(x)$.

(64) [Hilbert 1900].

In [Fraenkel 1922b] l'assioma di separazione è formulato mediante un concetto di funzione che non vuole essere un insieme di coppie ordinate; con "funzione" si intende "un regola del genere seguente: un oggetto $\varphi(x)$ sarà formato da un oggetto (variabile) x che varia sugli elementi di un insieme, ed eventualmente da altri oggetti (costanti) per mezzo di una prescritta applicazione (ripetuta naturalmente solo un numero finito di volte e denotata da φ) degli assiomi II-VI [quelli esistenziali]. Per esempio $\varphi(x) = \{\{\{x\}, \{0\}\}, \mathfrak{U}x + \{\{0\}\}\}$." Per quel che riguarda l'assioma di separazione, le funzioni associate sono quelle che a ogni M associano il sottoinsieme $M_{\varphi \circ \psi}$ di M costituito dagli $y \in M$ per cui $\varphi(y) \circ \psi(y)$, dove φ e ψ sono funzioni e $\circ$ è una delle relazioni $=, \neq, \varepsilon, \not\varepsilon$.

Questa definizione non descrive secondo Fraenkel un nuovo concetto di funzione o corrispondenza, né alcuna nuova nozione fondamentale. Il concetto di funzione è introdotto "*in modo definitorio* per mezzo delle relazioni di base dell'assiomatica di Zermelo", e senza far intervenire nozioni estranee di logica (65). Invece per il nuovo assioma di rimpiazzamento a Fraenkel sembra che il concetto di *Zuordnung* sia nuovo: inizialmente lo usa nel modo vago suggerito da Zermelo, con la seguente formulazione in [1922a, p. 231]: "se M è un insieme e ogni elemento viene rimpiazzato (*ersetz*) da una 'cosa del dominio', allora M si trasforma così ancora in un insieme".

Tuttavia Fraenkel è incerto, e sospetta che con la nozione generale di *Zuordnung* il suo nuovo assioma implichi l'assioma di scelta. Lo aveva già detto nella lettera di risposta a Zermelo del 19 maggio 1921: il nuovo assioma implicherebbe l'assioma di scelta, con l'assegnazione a ogni sistema di insiemi a due a due disgiunti di un elemento per ciascuno di essi; lo ripete in [1921] e ancora in [1922a, p. 233].

Utilizza allora il concetto di funzione a cui aveva fatto ricorso per la costruzione dei modelli di Z; in [1925, p. 134] presenta il seguente assioma: "se $\varphi(x)$ è una funzione, da un insieme M i cui elementi y siano sostituiti dagli insiemi $\varphi(y)$ si otterrà di nuovo un insieme N, ammesso che esista un insieme a cui appartengono tutti i $\varphi(y)$ come elementi".

(65) [Fraenkel 1922b, p. 101].

Il commento di Fraenkel è che se si lascia cadere "ammesso ..." si ottiene una nuova proposizione (l'assioma di rimpiazzamento) che è indipendente e necessaria per ottenere insiemi molto grandi. Non essendo interessato a questi, egli è riluttante a assumerlo e cerca di evitarne l'uso.

In realtà la definizione era carente, e più debole di quella di Skolem che vedremo, ma fu modificata e resa adeguata da von Neumann, che fu anche il primo a parlare di "assioma di Fraenkel" in [von Neumann 1923]. von Neumann aveva capito che l'assioma è necessario non solo per avere insiemi grandi come $\aleph_\omega$, ma per impostare in modo semplice e soddisfacente la teoria degli ordinali. Usando sistematicamente il rimpiazzamento, von Neumann si accorse del difetto della formulazione di Fraenkel: le funzioni sono determinate solo dagli assiomi di Z; nel 1925 spiega: "la definizione fraenkeliana di funzione si rivela troppo restrittiva; per poter fare un uso effettivo dell'assioma di rimpiazzamento dobbiamo essere in grado sostanzialmente di costruire più funzioni di quelle che è possibile nel sistema non modificato" ([66]).

L'assioma nella versione di von Neumann recita sempre: se M è un insieme e f una funzione, allora esiste un insieme M' i cui elementi sono esattamente gli $f(x)$ per $x \in M$. Ma le funzioni devono essere definite anche in riferimento al nuovo assioma.

Altrimenti, von Neumann dimostra che, se nell'assioma di rimpiazzamento intervengono solo le funzioni dimostrabili tali in Z, non si ha una rafforzamento della teoria.

Si ha dunque una evidente impredicatività, che complica ulteriormente la costruzione dei modelli, come già Fraenkel aveva paventato per quelli di Z. Tuttavia alla fine Fraenkel si lascia convincere da von Neumann in uno scambio epistolare; praticamente la teoria ZF è presentata con tutti i crismi solo nel 1928, in [von Neumann 1928]; Zermelo non accetterà invece la soluzione fraenkeliana (ne parleremo nelle conclusioni).

Riassumendo: il percorso di Fraenkel è confuso e faticoso; ma egli appartiene alla comunità degli insiemisti, ha all'inizio Zermelo come interlocutore, propone il nome di "rimpiazzamento", interagisce con von Neumann, che partecipa alla sua elaborazione e che prende lo spunto forse dalle sue idee, oltre che da quelle di Hessenberg, per la propria assiomatizzazione del 1925 con il concetto primitivo di funzione; è comprensibile che a Fraenkel venga concesso l'onore di accostare il suo nome a quello di Zermelo, nonostante l'abisso tra i due. von Neumann è il primo a usare il nome di Fraenkel per la teoria con rimpiazzamento. È anche comprensibile per le stesse contrarie ragioni, benché deplorevole, che non sia stato considerato il nome di Skolem.

([66]) [von Neumann 1925, p. 376].

5. – Skolem

Nel 1922 Thoralf Skolem pubblicò un lavoro di importanza epocale, per tanti aspetti; il suo intervento ha favorito una svolta nello sviluppo della logica e della teoria degli insiemi, per quest'ultima non tanto nel contenuto quanto nel modo di concepirla e di studiarla ([67]). Se su alcuni punti era stato preceduto, sua è stata la capacità di vedere le connessioni.

Skolem era allievo di Axel Thue (1862-1922) all'università di Oslo e nella sua carriera ha dato contributi a teoria dei numeri, algebra, combinatoria, calcolabilità e logica matematica.

In particolare sono contenute in [Skolem 1922] ([68]): la proposta dei linguaggi del primo ordine (nella terminologia di allora) per esprimere le proprietà definibili nella teoria degli insiemi; quella dell'assioma di rimpiazzamento come completamento degli assiomi di Zermelo; nuove tecniche di costruzione di modelli; l'osservazione della relatività dei concetti definiti nella teoria di Zermelo (nota come paradosso di Skolem). Quest'ultimo risultato dipende da un teorema logico dello stesso Skolem (il teorema di Löwenheim-Skolem).

Gli otto argomenti in cui è articolato il lavoro, che commenteremo nello stesso ordine, alcuni brevemente altri in dettaglio, con le parole di Skolem sono:

1. Il fatto curioso che, per trattare gli "insiemi", dobbiamo incominciare con "domini" fatti in un certo modo;

([67]) [Skolem 1922].

([68]) Una comunicazione al congresso dei matematici scandinavi.

2. Una definizione di cui si sente proprio il bisogno che rende precisa la nozione di Zermelo di "proposizione definita";
3. Il fatto che in ogni pur minuziosa assiomatizzazione i concetti della teoria degli insiemi sono inevitabilmente relativi;
4. Il fatto che il sistema di assiomi di Zermelo non è sufficiente a fornire una fondazione per la teoria degli insiemi corrente;
5. Le difficoltà causate dalle condizioni non predicative quando si voglia dimostrare la non contraddittorietà degli assiomi;
6. La non unicità [*Mehrdeutigkeit*] del dominio $\mathfrak{B}$;
7. La necessità dell'induzione matematica per l'indagine logica di sistemi di assiomi astrattamente dati;
8. Un'osservazione sul principio di scelta.

L'articolo inizia rilevando che, a seguito della scoperta delle antinomie, che nessuno è riuscito a chiarire in modo universalmente accettato, sono stati fatti tentativi di sviluppare la teoria sulla base di alcune assunzioni fondamentali, o assiomi. Skolem constata che solo uno di questi sistemi ha avuto un largo consenso, quello di Zermelo. I matematici non hanno invece mostrato molto interesse per il sistema di logica di Russell e Whitehead che voleva fornire una fondazione per la teoria degli insiemi. Quindi Skolem si riferirà a quello di Zermelo, usando la sua terminologia e notazioni.

1. La prima osservazione riguarda un problema che abbiamo visto discusso da Schoenflies e da Hessenberg: "Se adottiamo l'assiomatizzazione di Zermelo, dobbiamo, a rigore, avere una nozione generale dei domini per fornire una fondazione per la teoria degli insiemi. [...] Ma è chiaramente in qualche modo circolare ridurre la nozione di insieme a una nozione generale di dominio".

Hilbert parlava di tre insiemi di "cose" per la geometria, e di un sistema di "cose" per i suoi numeri reali: era l'usuale modo di esprimersi. Nel caso della teoria degli insiemi tuttavia si verifica la circolarità indicata; chi l'aveva notata precedentemente non aveva insistito più che tanto, ma Skolem è più radicale e questo si spiega con le sue convinzioni generali, che sono esplicitate nelle conclusioni. In esse Skolem ricorda che i risultati esposti, in particolare quelli che vedremo al punto 3, sono stati trovati da lui nell'inverno 1915-16 e comunicati a Felix Bernstein (allievo di Hilbert). Skolem non li aveva pubblicati anche perché gli sembrava evidente che una assiomatizzazione in termini di insiemi non potesse essere la fondazione definitiva soddisfacente della matematica, ed era convinto che i matematici non sarebbero stati nella loro maggioranza interessati. "Recentemente ho constatato che tanti matematici pensano che questi assiomi della teoria degli insiemi forniscono la fondazione ideale della matematica" e gli è sembrato opportuno pubblicare una critica.

Dalle successive osservazioni Skolem è sicuro che apparirà che non è possibile una indagine logica dei domini senza applicare a essi alcune considerazioni insiemistiche, "se si vuole seguire un metodo puramente insiemistico ed evitare di includere la nozione di numero tra quelle fondamentali".

Il punto 1 conclude che, impostata assiomaticamente, la teoria degli insiemi non può essere una teoria logica privilegiata, ma si colloca al livello di qualsiasi altra teoria assiomatica.

2. Il secondo argomento riguarda la nozione di *definit*.

> Un punto molto carente in Zermelo è la nozione "proposizione definita". Nessuno probabilmente troverà soddisfacenti le spiegazioni di Zermelo ([69]). Per quanto ne so, nessuno ha cercato di dare una formulazione rigorosa di questo concetto; è molto strano, dal momento che lo si può fare molto facilmente e, inoltre, in un modo molto naturale che si presenta spontaneamente alla mente. Per spiegarlo, e anche in vista di considerazioni successive, ricordo qui le cinque operazioni di base della logica, usando le notazioni di Schröder:
>
> ($1_\times$) Congiunzione, denotata da un puntino o dalla giustapposizione;
> (1_+) Disgiunzione, denotata dal segno $+$;
> (2) Negazione, denotata da un sopralineatura della espressione da negare;
> ($3_\times$) Quantificazione universale, denotata dal segno Π;
> (3_+) Quantificazione esistenziale, denotata dal segno Σ.
>
> [...]

([69]) [Vedi infatti per esempio Schoenflies sopra citato. NdA]

Con proposizione definita noi ora intendiamo una espressione finita costruita a partire dalle proposizioni elementari della forma $a\,\varepsilon\,b$ o $a = b$ per mezzo delle cinque operazioni menzionate. Questa è una nozione completamente chiara e sufficientemente comprensiva da permetterci di svolgere tutte le ordinarie dimostrazioni insiemistiche. Perciò la adotto qui come base.

Le espressioni così ottenute sono chiamate, nelle traduzioni moderne, "del primo ordine". Skolem usava un'altra terminologia, quella di "espressioni numeriche", *Zählausdrücke*, dalla tradizione dell'algebra della logica ([70]).

3. "[Il] terzo punto è il più importante". Esso è basato su un teorema che è stato fondamentale nella storia della logica, il teorema di Löwenheim-Skolem che afferma che ogni teoria in un linguaggio numerabile del primo ordine se ha un modello infinito ha anche un modello numerabile ([71]). Saltiamo perciò la discussione della dimostrazione e limitiamoci alla enunciazione del risultato, e al commento immediato di Skolem che ne spiega la ragione e gli toglie ogni aria di paradosso:

Se gli assiomi sono non contraddittori, esiste un dominio B in cui valgono gli assiomi e i cui elementi possono essere enumerati per mezzo degli interi finiti positivi.

Ne segue quello che nella letteratura è noto come paradosso di Skolem: "Per quanto ne so, nessuno ha richiamato l'attenzione su questo stato di cose peculiare e apparentemente paradossale. Grazie agli assiomi noi possiamo provare l'esistenza di cardinalità superiori, di classi di numeri superiori, e così via. Come può essere, allora, che l'intero dominio B possa essere già enumerato per mezzo degli interi finiti positivi? La spiegazione non è difficile da dare":

Nella assiomatizzazione, "insieme" non significa una collezione arbitraria; gli insiemi non sono altro che oggetti che sono connessi l'un l'altro per via di alcune relazioni espresse dagli assiomi. Quindi non c'è alcuna contraddizione se un insieme M del dominio B è non numerabile nel senso dell'assiomatizzazione; giacché questo significa soltanto che *all'interno* di B non occorre alcuna applicazione uno-uno Φ di M su Z_0 (la successione dei numeri di Zermelo). Tuttavia esiste la possibilità di enumerare tutti gli oggetti di B, e quindi anche gli elementi di M, per mezzo degli interi positivi; naturalmente, anche questa enumerazione è una collezione di certe coppie, ma questa collezione non è un "insieme" (cioè non appartiene al dominio B).

Analogamente l'insieme potenza $\mathscr{P}(Z_0)$ non può contenere sottoinsiemi di Z_0 arbitrari, perché tutti i sottoinsiemi possono essere enumerati, e "nel modo ben noto" (cioè probabilmente per diagonalizzazione) si può definire un nuovo sottoinsieme di Z_0; questo però non apparterrà a B.

Perfino i concetti di "finito", "infinito", "successione semplicemente infinita", e così via risultano essere meramente relativi nella teoria assiomatica degli insiemi. [...]
Dunque, *assiomatizzare la teoria degli insiemi porta alla relatività dei concetti insiemistici, e questa relatività è inseparabilmente legata a qualsiasi per quanto esauriente assiomatizzazione.*
La relatività è dovuta al fatto che essere un oggetto in B significa qualcosa di diverso e molto più restrittivo che essere in qualche modo definibile.

L'inevitabilità di tale situazione è dovuta per Skolem al fatto che essa dipende da un teorema generale di logica, che afferma:

Sia data una successione infinita $U_1, U_2, \ldots$ di proposizioni numeriche numerate dagli interi; se, ora, non è contraddittorio assumere che tutte queste proposizioni siano simultaneamente vere, esse possono essere simultaneamente soddisfatte nella successione infinita dei numeri interi positivi 1, 2, ... con una opportuna determinazione dei simboli di classe e relazione che occorrono nelle proposizioni.

([70]) Per avere un'idea del formalismo, si consideri la formula, di trasparente traducibilità,

$$\Pi_i(\overline{(i\,\varepsilon\,a)} + (i\,\varepsilon\,b))((i\,\varepsilon\,a) + \overline{(i\,\varepsilon\,b)})$$

che Skolem offre come definizione estensionale dell'uguaglianza. La i varia sugli elementi del dominio. Skolem precisa che bastano tre operazioni perché $(1_\times)$ e (1_+), come $(3_\times)$ e (3_+) sono mutuamente definibili usando (2).

([71]) Il teorema è stato dimostrato da Leopold Löwenheim (1878-1957) nel 1915 nella forma contorta, anche adottando una traduzione in terminologia moderna, che se una formula finitamente valida (cioè valida in tutti i domini finiti) non è valida, allora non è valida in un dominio numerabile; è stato perfezionato da Skolem stesso nel 1920, correggendo la dimostrazione di Löwenheim e generalizzandola da una a un insieme numerabile di formule. Nella prossima citazione Skolem riporta una versione del teorema pertinente alla discussione in corso.

Per ottenere esclusivamente modelli non numerabili, occorrerebbe o un numero infinito non numerabile di assiomi, o un assioma che avesse come sue conseguenze un numero più che numerabile di conseguenze del primo ordine. In ogni caso si avrebbe una circolarità nella introduzione delle cardinalità superiori.

4. Skolem mette in luce la debolezza del sistema di assiomi di Zermelo mostrando esempi non solo di un enunciato problematico ma anche di uno che non si può dimostrare, precisamente che per insiemi M qualunque

$$\{M, \mathscr{P}(M), \mathscr{P}(\mathscr{P}(M)), \mathscr{P}(\mathscr{P}(\mathscr{P}(M))), \ldots\}$$

è un insieme.

Allo scopo introduce il concetto di "livello" [*Stufe*]. Nel primo livello stanno gli insiemi M per cui esiste un n tale che $\cup^n M = \emptyset$ (72); un insieme del secondo livello è un insieme M che non è del primo livello ma per cui esiste un intero non negativo n per cui tutti gli elementi di $\cup^n M$ sono insiemi del primo livello. L'insieme dei numeri naturali Z_0 è un insieme del secondo livello (73). In modo simile si possono definire gli insiemi di livello tre, quattro e oltre; Skolem non ritiene di doversi pronunciare o discutere se ogni insieme venga ad avere un livello (problema che coinvolge il futuro assioma di fondazione).

Dato un dominio B per gli assiomi, Skolem considera gli insiemi in B che sono del primo o secondo livello; questi costituiscono un dominio B' che è ancora un dominio nel quale sono veri gli assiomi. Skolem non dà la dimostrazione, che è tuttavia è facile ricostruire.

Per esempio se x appartiene a B' anche $\{x\}$ vi appartiene: se x è di primo livello, e $\cup^n x = \emptyset$, allora $\cup^{n+1}\{x\} = \emptyset$; se x è di secondo livello e tutti gli elementi di $\cup^n x$ sono di primo livello, tutti gli elementi di $\cup^{n+1}\{x\}$ sono di primo livello. Siccome $Z_0 \in B'$, vale in B' l'assioma dell'infinito. Siccome $\cup\mathscr{P}(M) = M$, se M è di primo o secondo livello, anche $\mathscr{P}(M)$ è di primo o secondo livello: assioma della potenza. Analogamente gli altri assiomi.
Ora l'insieme Z_0 è in B'; la successione infinita

$$M = \{Z_0, \mathscr{P}(Z_0), \mathscr{P}(\mathscr{P}(Z_0)), \ldots\}$$

è del terzo livello: non è di secondo livello, perché per ogni n in $\cup^n M$ c'è Z_0 come elemento di un $\mathscr{P}^m(Z_0) \in \cup^n M$ con $m > n$; ma esiste un n per cui tutti gli elementi di $\cup^n M$ sono di secondo livello, precisamente $n = 0$. Quindi M non può essere nel dominio B', e la sua esistenza non può quindi essere dimostrata.

Stabilito che definite sono le proprietà espresse da formule del primo ordine il nuovo assioma recita:

> Per eliminare questo difetto del sistema di assiomi potremmo introdurre il seguente assioma: *Sia U una proposizione definita che vale per certe coppie (a, b) nel dominio B; si assuma inoltre che per ogni a esista al massimo un b tale che U sia vera. Allora, quando a varia sugli elementi di un insieme M_a, b varia su tutti gli elementi di un insieme M_b.*
> L'aggiunta di tale assioma non cambia nulla, naturalmente per quel che riguarda la relatività spiegata sopra.

Si tratta come è evidente dell'assioma di rimpiazzamento.

Dopo aver enunciato il nuovo assioma, Skolem si limita a indicare in nota una traccia per dimostrare, per mezzo di esso, l'esistenza degli insiemi

$$\{M, \mathscr{P}(M), \mathscr{P}(\mathscr{P}(M)), \ldots\}.$$

Dato M, si considerino gli insiemi $C = \{M, \mathscr{P}(M), \ldots, \mathscr{P}^n(M)\}$ al variare di n tra i numeri naturali; i C possono essere caratterizzati da tre condizioni dicendo che sono finiti, che $M \in C$ e che ogni elemento di C diverso da M è uguale alla potenza di un altro elemento di C. Si indichino con A i segmenti dell'insieme dei naturali Z_0 (si ricordi che in Z si usano i numeri naturali di Zermelo, e non è vero che ogni numero coincide con il suo segmento); si consideri ora la proposizione "C soddisfa le tre condizioni sopra enunciate; C è equipotente ad A; A è un segmento di Z_0". Tale proposizione è definita e del tipo contemplato dall'assioma; siccome esiste un insieme che contiene tutti i segmenti di Z_0, esiste un

(72) $\cup^n M$ è l'unione n-esima, definita da $\cup^{n+1} M = \cup(\cup^n M)$ e $\cup^0 M = M$. Per esempio, se $M = \{\{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$, allora $\cup^1 M = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$, $\cup^2 M = \{\emptyset\}$ e $\cup^3 M = \emptyset$. Skolem usa S invece di $\cup$, come usa U per $\mathscr{P}$, le stesse notazioni di Zermelo, se non per il gotico.

(73) Gli elementi di $\cup^0 Z_0 = Z_0 = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \ldots\}$, sono di primo livello, mentre $\cup^n Z_0 = Z_0$, per ogni n, per cui Z_0 non è di primo livello.

insieme che contiene gli insiemi C; sia T il loro insieme, ottenuto per separazione, e infine l'unione di T è l'insieme voluto. □

5. Skolem prevede quindi che la dimostrazione di non contraddittorietà degli assiomi di Zermelo sarà resa difficile dal carattere non predicativo delle regole di formazione degli insiemi; gli assiomi si possono pensare come principi di generazione degli insiemi, e la costruzione di un modello riuscirebbe agevole se gli insiemi si potessero ottenere ciascuno da un numero finito di insiemi precedentemente generati, ma per l'impredicatività si devono anche formare nuovi insiemi la cui esistenza dipende dall'esame della totalità degli insiemi. In nota cita l'esempio della intersezione di tutti gli insiemi che godono di una data proprietà.

Il sistema di Russell e Whitehead cerca di aggirare la difficoltà con l'assioma di riducibilità, ma questo di fatto è solo l'assunzione che le stipulazioni non predicative siano soddisfatte. Per costruire modelli che la soddisfino si devono comunque usare i numeri interi, come nella dimostrazione del teorema suo e di Löwenheim.

6. Nel punto successivo, Skolem dichiara di non sapere se qualcuno abbia dimostrato che il dominio B di Zermelo non è univocamente determinato, ma egli ritiene plausibile *a priori* che non lo sia. Tuttavia per dimostrarlo non gli basta pensare di aggiungere un elemento senza nessuna precauzione, come "nel caso di un corpo commutativo", e chiudere il nuovo dominio in modo da soddisfare gli assiomi, perché aggiungendo un elemento potrebbe succedere che si ottengano contraddizioni. Propone alcune "riflessioni" su tecniche che hanno attinenza con il problema di costruire nuovi domini a partire da un dominio B, che possono interessare i lettori specialisti.

Skolem chiama ε-catena discendente di M, insieme di B, una successione

$$\ldots \varepsilon M_2 \ \varepsilon M_1 \, \varepsilon M.$$

Considera quindi il dominio B' formato dagli elementi di B per cui ogni loro ε-catena termina dopo un numero finito di passi e afferma senza dimostrazione, dichiarata facile, che B' soddisfa ancora gli assiomi di Z.

Se B' risulta uguale a B, si può ancora considerare il sottodominio di quegli M per cui ogni ε-catena termina in un numero finito di passi a $\emptyset$, che è ancora un dominio nel quale valgono tutti gli assiomi; se è diverso da B si hanno due domini distinti (74).

Per allargare un dominio B invece, con un oggetto a che non appartiene a B, Skolem considera il sottodominio B' degli M tali che ogni loro ε-catena termina in un numero finito di passi a $\emptyset$, e a ogni M associa un ε-albero [*ε-Verzweigungssysteme*] che mostra come M sia formato dai suoi elementi, e questi a loro volta dai loro elementi e così via. L'albero può avere infiniti nodi, un nodo infiniti successori, ma ogni ramo dalla radice M a $\emptyset$ è finito.

Per ogni M, sia F l'albero associato a $(\cup^n M) \cup (\cup^{n-1} M) \cup \ldots \cup M \cup \{M\}$, n qualunque; se N è un sottoinsieme di M e G la parte di F che consiste dei nodi corrispondenti a N, allora si formi un albero F' "inserendo a tutti i nodi di G un successore a; vale a dire, aggiungiamo a come un nuovo elemento a ciascun elemento di N. Gli alberi così ottenuti possono essere considerati come gli insiemi di un dominio esteso".

Skolem osserva che si potrebbe dimostrare che nel dominio esteso valgono ancora gli assiomi di Zermelo, incontrando difficoltà solo nel caso dell'assioma di separazione, con complicazioni che tuttavia decide di non esporre. Ovviamente l'estensione riesce a Skolem con un oggetto a che non sia un insieme, come è chiaro dal fatto che si aggiunge solo un nodo con a e non ulteriori nodi sotto a.

Diverso è il problema di aggiungere a un dominio un insieme, in particolare un insieme di numeri naturali.

> Sarebbe in ogni caso di grande interesse se potessimo provare che si potrebbe aggiungere un nuovo sottoinsieme di Z_0 senza originare contraddizioni (75); ma questo probabilmente sarebbe molto difficile.

Si tratta della difficoltà che solo Paul Cohen (1934-2007) riuscirà a superare nel 1963 con il *forcing*. In nota, Skolem osserva che, non essendo il dominio univocamente determinato dagli assiomi di Zermelo, è molto improbabile che tutte le que-

(74) Considerazioni di questo genere, basate sugli insiemi ben fondati, erano state sviluppate in [Mirimanoff 1917b].

(75) Come spiegato sopra (in 3.) B, dopotutto, non è detto che contenga ogni sottoinsieme "definibile" di Z_0.

stioni di cardinalità siano decidibili in base a tali assiomi.

> La situazione può essere esattamente quella che si presenta in questo caso: è dato un non specificato campo commutativo, e si chiede se esso contenga un elemento x tale che $x^2 = 2$. Il problema non è determinato, perché il dominio non è unico.

Skolem congettura esplicitamente in base a queste considerazioni che l'ipotesi del continuo non sia risolvibile: "non è detto che si possa decidere nulla su di essa".

7. L'argomento di questo punto riguarda il fatto che nelle indagini logiche sulle teorie, nella definizione stessa di "conseguenza", che significa l'applicazione degli assiomi e delle regole un numero finito di volte, il concetto di numero intero e di induzione è presupposto.

Skolem aveva potuto vedere un estratto della conferenza del 1922 di Hilbert, nella quale questi aveva lanciato il suo programma, con la protesta nei confronti delle critiche di Poincaré all'uso dell'induzione nelle indagini sui numeri; Skolem è d'accordo con Poincaré e osserva in proposito che bisogna fare attenzione a non usare proprietà delle formule che dipendano dall'induzione o che siano equivalenti all'induzione; rileva in proposito criticamente per esempio il riferimento di Hilbert alla proprietà che se un simbolo occorre in una dimostrazione esiste un primo passo nel quale esso interviene.

Più in generale Skolem esprime la convinzione che non esistano concetti "più chiari, naturali e non soggetti a dubbi" di quelli di numero naturale, di dimostrazione per induzione e di definizione per ricorsione, se si cercano punti di partenza che non siano ulteriormente dimostrabili o definibili ([76]). Inoltre per Skolem l'uso dei numeri naturali non è una difficoltà da superare ma una condizione inevitabile, esso è necessario nella stessa logica, che funge da metateoria.

([76]) Nel 1923, Skolem proporrà una ricostruzione dell'aritmetica basata sul "modo di pensare ricorsivo", in [Skolem 1923]. Tale frammento dell'aritmetica è stata chiamata in seguito "aritmetica ricorsiva primitiva" e ha fornito lo strumento essenziale per la dimostrazione di Gödel.

8. Mentre nessuna obiezione si può muovere all'assioma di scelta come assioma del sistema di Zermelo, il motivo per cui molti matematici non lo accettano "è [che] non hanno una concezione assiomatica della teoria degli insiemi". I matematici pensano agli insiemi come a collezioni arbitrarie, e nello stesso tempo chiedono che ogni insieme sia definibile – pretese in verità contraddittorie.

Se un insieme non è definibile, la sua esistenza si riduce a un modo di parlare che produce solo proposizioni formali "magari costituite da *parole* molto belle su oggetti *chiamati* insiemi". Ma i matematici vogliono, alla fine, avere a che fare con operazioni di calcolo eseguibili, e non con proposizioni formali.

Nelle conclusioni, già riportate, Skolem ribadisce la sua contrarietà a considerare la teoria degli insiemi una teoria fondazionale.

La posizione un po' defilata di Skolem rispetto alla comunità degli insiemisti, il divario di conoscenze logiche tra lui e questi, il carattere prevalentemente negativo o relativistico delle osservazioni contenute nel lavoro esaminato, hanno fatto sì che il contributo sull'assioma di rimpiazzamento passasse in seconda linea; in seguito tuttavia, il crescere dell'ipoteca logica sulla teoria degli insiemi, l'importanza dei teoremi sulla cardinalità dei modelli e la partecipazione più intensa di Skolem alle discussioni, hanno portato quest'ultimo a essere una figura sempre più riconosciuta e influente nella storia della teoria degli insiemi.

6. – Conclusioni

Dopo il 1922 Zermelo continuò a rifiutare la soluzione di Fraenkel perché richiedeva il concetto di numero naturale, e quella di Skolem (e implicitamente quella di Weyl) perché inoltre contrario a ogni restrizione del linguaggio, e propose in alternativa di dare una definizione assiomatica di definitezza, in [Zermelo 1929]; non replicò quando Skolem gliela demolì dimostrando che non forniva più insiemi di quelli ottenibili con condizioni al primo ordine, e denunciando l'uso mascherato dei numeri naturali anche nella definizione assiomatica di Zermelo ([77]).

([77]) [Lolli 2011, Cap. 3.2, La logica del primo ordine e i suoi nemici].

Nel 1930 in *Grenzzahlen und Mengenbereiche* Zermelo rispose indirettamente con l'ultima zampata del leone: la descrizione non di un sistema di assiomi ma dell'universo degli insiemi, generato dalla iterazione della potenza, in notazione moderna quella che si chiama gerarchia cumulativa:

$$\begin{cases} V_0 &= A \\ V_{\alpha+1} &= V_\alpha \cup \mathscr{P}(V_\alpha) \\ V_\lambda &= \bigcup_{\alpha\in\lambda} V_\alpha \end{cases}$$

dove A è un dominio di atomi, o $\emptyset$, α e λ sono ordinali qualunque, λ limite, e $\mathscr{P}(X)$ è l'insieme dei sottoinsiemi di X.

Questa gerarchia, chiamata anche gerarchia di von Neumann se $A = \emptyset$, è intesa come luogo dei modelli V_k di una teoria che è ZF semplificata, senza l'assioma di scelta, che è considerato un principio logico, senza l'assioma dell'infinito perché questo è assunto come un concetto primitivo, e con l'assioma di fondazione. Zermelo è ancora tuttavia, come lo era nel 1908, contrario a ogni restrizione linguistica, e ribadisce che "la funzione proposizionale [nell'assioma di separazione] $f(x)$ può essere del tutto *arbitraria*, come anche la funzione di rimpiazzamento [...], e tutte le conseguenze che derivano da una loro restrizione a una particolare classe di funzioni vengono escluse dal presente punto di vista. Mi riprometto un ulteriore approfondimento della 'questione della definitezza' sulla base della mia ultima nota in questa rivista [...] e delle osservazioni critiche di Th. Skolem" ([78]).

A ogni ordinale inaccessibile, maggiore di ω, si ottiene, come pausa nel processo di estensione, quello che in seguito è stato chiamato un modello naturale della teoria ZF; i modelli dipendono da due parametri, la cardinalità degli *Urelemente* nella base, e gli ordinali contenuti nel modello:

> Entrambe le tendenze polarmente contrapposte dello spirito pensante, l'idea della prosecuzione creativa e quella delle pause riassuntive, che sono anche alla base delle antinomie kantiane, trovano la loro descrizione e rappacificazione simbolica nella serie transfinita dei numeri fondata sul concetto di buon ordine, serie che nella sua prosecuzione senza fine non ha un vero termine, ma solo momenti di arresto relativo, precisamente ogni "numero confine" che separa i tipi di modelli inferiori da quelli superiori ([79]).

Non c'è più alcuna preoccupazione per le antinomie perché il processo è continuo e senza fine, e le antinomie derivano solo dalla chiusura del processo di estensione.

Ma ormai la scena era occupata da chi possedeva lo strumento della logica matematica consolidata in quegli anni da Hilbert e da Gödel, anche con il contributo di Skolem. von Neumann oltre a sviluppare la teoria degli ordinali e a sistemare l'assioma di Fraenkel contribuì alla assiomatizzazione con la sua teoria riformulata da Paul Bernays, collaboratore di Hilbert, e perfezionata da Gödel nella teoria di insiemi e classi NGB. Le questioni affrontate dalla nuova logica erano metamatematiche, riguardavano le teorie, e una prima fase culminò con il successo della definizione di Gödel del modello interno degli insiemi costruibili, nel 1938, che permise di dimostrare la consistenza dell'assioma di scelta e dell'ipotesi del continuo.

Mentre la teoria assiomatica degli insiemi diventava un oggetto di studio dei logici, essa non riusciva a plasmare il modo di pensare dei matematici, neanche una volta perfezionata come ZF. Alcuni continuavano a riferirsi, informalmente, per sentito dire, come quadro teorico a una teoria con i tipi, pensando che fosse la soluzione più sicura per escludere le antinomie, oppure a prendere le distanze ([80]). Un esempio significativo è quello di Bartel L. van der Waerden (1903-1996); nella prima edizione di *Moderne Algebra*, nel 1930, nell'introduzione accenna al principio di comprensione e alla necessità di una stratificazione in tipi. Nella seconda edizione del 1937, nella Prefazione, dichiara di non voler affrontare le questioni dei fondamenti e di adottare un punto di vista *naive*;

([78]) [Zermelo 1930, p. 30]. La risposta a Skolem non sarà data, mentre Zermelo cercherà nel 1935 di esporre una logica dell'infinito, una logica infinitaria senza alcuna restrizione che nelle intenzioni dovrebbe sfuggire anche al teorema di incompletezza di Gödel.

([79]) [Zermelo 1930, p. 47].

([80]) Al contrario della prima impressione di Skolem, tanto è vero che Schoenflies concludeva polemicamente il suo articolo del 1911 con il motto: *Für den Cantorismus, aber gegen den Russellismus!*.

rimanda chi sia interessato a [Fraenkel 1928], la terza edizione della *Einleitung*. Quanto al contenuto, spiega di aver eliminato tutta la trattazione riguardante l'assioma di scelta e i buoni ordini; è consapevole dell'intervento della scelta nell'algebra, per esempio per la costruzione della chiusura algebrica di un campo, o per l'esistenza di una base negli spazi vettoriali, ma ritiene che se ne possa fare a meno dal momento che nel libro sono trattati quasi esclusivamente strutture numerabili, dove invece del buon ordine è sufficiente il conteggio, cioè la loro enumerazione con N; ma subito si rileva la solita vecchia fallacia, nella dimostrazione che puntualmente arriva che l'unione di insiemi numerabili è numerabile (che richiede, non riconosciuta, la scelta).

Le cose cambieranno solo con Bourbaki, quando il linguaggio insiemistico diventerà il linguaggio della matematica, ma senza aprire alle conoscenze teoriche; ancora Bourbaki riteneva sufficiente Z per i suoi *Eléments*. Quando scrisse la prima versione della teoria degli insiemi, essa fu sottoposta al logico John Barkley Rosser (1907-1989), che era amico di André Weil (1906-1998) (Rosser nel 1950 recensì anche l'intervento di Weil al meeting dell'ASL nel dicembre 1948, che era diventato [Bourbaki 1949]). Nell'occasione osservò che gli assiomi erano una versione debole del sistema originario di Zermelo (81).

Per quel che riguarda il metodo assiomatico, il suo radicamento nella teoria delle strutture fu dovuto soprattutto al lavoro di Emmy Noether (1882-1935); lo avrebbe riconosciuto Weyl nel discorso al suo funerale il 18 aprile 1935, quando dichiarò che Emmy aveva fatto del metodo assiomatico "un potente strumento di ricerca invece di un mero ausilio nella chiarificazione dei fondamenti della matematica, come era stato in precedenza". In una commemorazione della Noether dello stesso anno ricordava che "negli ultimi anni il metodo assiomatico ha dischiuso, nelle sue mani, nuovi, concreti, profondi problemi e mostrato la via per la loro soluzione" citando oltre alla precedente teoria degli ideali lo studio delle algebre non commutative, con la loro rappresentazione mediante trasformazioni lineari e le applicazioni all'aritmetica dei campi commutativi (82).

Lo sviluppo della ricerca matematica sugli insiemi avrà una svolta e un nuovo impulso nel 1946, con la proposta di Gödel del programma di studio dei grandi cardinali come risposta alla inevitabile incompletezza di ogni assiomatizzazione (83). Questa volta le competenze logiche e matematiche saranno fuse insieme nei ricercatori, come già lo erano nello studio della teoria descrittiva degli insiemi.

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

[Aczel 1988] P. Aczel "Non Well Founded Sets", CLSI Lecture Notes No 14, Stanford University, 1988.

[Boole 1854] G. Boole, *An Investigation of the Laws of Thought, On Which are founded the Mathematical Theories of Logic and Probabilities*, Walton and Maberley, London, 1854, Dover, New York, 1951; trad. it. *Indagini sulle leggi del pensiero, su cui sono fondate le teorie matematiche della logica e della probabilità* (a cura di M. Trinchero), Einaudi, Torino, 1976.

[Borel 1898] E. Borel, *Lecons sur la Théorie des Fonctions*, Gauthier-Villars, Paris, 1898.

[Bourbaki 1949] N. Bourbaki, "Foundations of Mathematics for the Working Mathematician", *Journal of Symbolic Logic*, 14 (1949), n. 1, pp. 1-8.

[Burali-Forti 1896] C. Burali-Forti, "Le classi finite", *Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino*, 32 (1896), pp. 34-52.

[Cantor 1874] G. Cantor, "Über eine Eigenschaft des Inbegriffes aller reellen algebraischen Zahlen", *Journal fur die reine und angewandte Mathematik* (*Crelle*), 77 (1874), pp. 258-62.

[Cantor 1878] G. Cantor, "Ein Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre", *Journal fur die reine und angewandte Mathematik* (*Crelle*), 84 (1878), pp. 242-58.

[Cantor 1879-84] G. Cantor, "Über unendliche, lineare Punktmannigfaltigkeiten", *Mathematische Annalen*, 15 (1879), pp. 1-7; 17 (1880), pp. 355-58; 20 (1882), pp. 113-21; 21 (1883), pp. 51-8 e 545-91; 23 (1884), 453-88.

[Cantor 1883] G. Cantor, *Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre*, Teubner, Leipzig, 1883, pubblicazione separata della parte 5 di [Cantor 1879-84].

(81) Notando anche che la definizione dell'unione di due insiemi valeva solo se entrambi erano sottoinsiemi di uno stesso insieme. Su Bourbaki e la logica si veda [Mathias 1992].

(82) [Weyl 1935]. Nonostante ancora nel 1932 Weyl esprimesse il dubbio che "la fecondità di questi metodi di astrazione" potesse "avviarsi all'esaurimento", in [Weyl 1932]. Il discorso al funerale si trova facilmente in rete, per esempio nella pagina Weyl on Emmy Noether in: https://mathhistory.st-andrews.ac.uk

(83) Siccome i V_k con $k > \omega$ inaccessibile sono modelli naturali di ZF, la loro esistenza, e quindi quella di k, è indecidibile in ZF, e lo stesso per cardinali maggiori che ne implichino l'esistenza.

[Cantor 1895-97] G. CANTOR, "Beiträge zur Begrundung der transfiniten Mengenlehre", *Mathematische Annalen*, 46 (1895), pp. 481-512 e 49 (1897), pp. 207-46; trad. ingl. *Contributions to the Founding of the Theory of Transfinite Numbers* (a cura di Ph. E. B. Jourdain), Dover, New York, 1915; trad. it. parziale in F. Arzarello (a cura di), *Matematica dell'infinito*, 2 voll. CLUE, Torino, 1980, pp. 273-333 e G. Cantor, *La Formazione della Teoria degli Insiemi (Scritti 1872-1899)* (a cura di G. Rigamonti), Sansoni, Firenze, 1992.

[Cellucci 1978] C. CELLUCCI (a cura di), *Il paradiso di Cantor*, Bibliopolis, Napoli, 1978.

[De Giorgi-Forti-Lenzi 1994] E. DE GIORGI, M. FORTI, e G. LENZI, "Una proposta di teorie base dei Fondamenti della Matematica", Atti della Accademia Nazionale dei Lincei, *Rendiconti Lincei. Matematica e Applicazioni* Serie 9 vol. 5 (1994), fasc. n.1, pp. 11-22.

[Dieudonné 1939] J. DIEUDONNÉ, "Les méthodes axiomatiques modernes et les fondements des mathématiques", *Revue Scientifique*, LXXVI, 1939, pp. 224-232; ristampato in [LE LIONNAIS 1962, pp. 543-55].

[Ebbinghaus 2007] H.-D. EBBINGHAUS (con V. Peckhaus), *Ernst Zermelo*, Springer, Berlin, 2007.

[Ewald 1996] W. B. EWALD, *From Kant to HILBERT*, 2 voll., Oxford Univ. Press, Oxford, 1996.

[Ferreirós 2007] J. FERREIRÓS, *Labyrinth of Thought*, Birkhäuser, Basel, 2007.

[Finsler 1926] P. FINSLER, "Über die Grunglegung der Mengenlehre. Erste Teil", *Mathematische Zeitschrift*, 25 (1926), pp. 683-713.

[Fraenkel 1919] A. A. FRAENKEL, *Einleitung in die Mengelehre*, Springer, Berlin, 1919, 1923^2, 1928^3.

[Fraenkel 1921] A. A. FRAENKEL, "Über die Zermelosche Begründung der Mengenlehre", *Jahresbericht der DMV*, 30 (1921), pp. 97-8.

[Fraenkel 1922a] A. A. FRAENKEL, "Zu der Grundlagen der Mengenlehre", *Jahresbericht der DMV* , 31 (1922), pp. 101-2.

[Fraenkel 1922b] A. A. FRAENKEL, "Der Begriff 'definit' und die Unabhangigkeit des Auswahlsaxiom", *Sitzungsberichte der Prussischen Akademie der Wissenschaften, Physikalischmathematische Klasse*, 1922, pp. 253-7; trad. ingl. in [van Heijenoort 1967, pp. 284-9].

[Fraenkel 1928] A. A. FRAENKEL, *Einleitung in die Mengenlehre*, Springer, Berlin, 1928^3.

[Gödel 1938] K. GÖDEL, "The consistency of the axiom of choice and of the generalized continuum hypothesis", *Proceedings of the National Academy of Science, U.S.A. 24*, 1938, pp. 556-7, trad. it. in [Gödel 2002, pp. 28-9].

[Gödel 1946] K. GÖDEL, "Remarks before the Princeton bicentennial conference on problems in mathematics", in *Collected works*, vol. II, Oxford Univ. Press, New York, 1990, pp. 150-3.; trad. it. "Osservazioni svolte al convegno del bicentenario di Princeton sui problemi della matematica", in [Gödel 2002, pp. 152-6].

[Gödel 2002] K. GÖDEL, *Opere*, vol. 2, Bollati Boringhieri, Torino, 2002. [GRASSMANN 1844] H. G. GRASSMANN, *Die Lineale Ausdehnungslehre*, Teubner, Leipzig, 1844.

[Hankel 1967] H. HANKEL, *Theorie der complexen Zahlensysteme*, L. Voss, Leipzig, 1867.

[Hartogs 1915] F. HARTOGS, "Über das Problem der Wohlordnung", *Mathematische Annalen*, 76 (1915), pp. 438-43.

[Harward 1905] A. E. HARWARD, "On the transfinite numbers", *Philosophical Magazine*, 6 (1905), n. 10, pp. 439-60.

[Hausdorff 1908] F. HAUSDORFF, "Grundzüge einer Theorie der geordneten Mengen", *Mathematische Annalen*, 65 (1908), pp. 435-505.

[Hausdorff 1914] F. HAUSDORFF, *Grundzüge der Mengenlehre*, Veit, Leipzig, 1914; seconda edizione rivista *Mengenlehre*, Gruyter, Berlin, 1927; trad. ingl. della terza edizione del 1937, *Set Theory* , Chelsea, New York, 1957.

[Hessenberg 1906] G. HESSENBERG, "Grundbegriffe der Mengenlehre", *Abhandlungen der Fries'schen Schule*, nuova serie, 1 (1906), pp. 479-706.

[Hessenberg 1909] G. HESSENBERG, "Kettentheorie und Wohlordnung", *Journal für die reine und angewandte Mathematik* (*Crelle*), 135 (1909), pp. 81-133.

[Hilbert 1900] D. HILBERT, "Über den Zahlbegriff", *Jahresbericht der DMV* , 8 (1900), pp. 180-4; trad. it. in [HILBERT 1978, pp. 139-43].

[Hilbert 1978] D. HILBERT, *Ricerche sui fondamenti della matematica* (a cura di M. V. Abrusci), Bibliopolis, Napoli, 1978.

[Kanamori 2004] A. KANAMORI, "Zermelo and set theory", *Bulletin of Symbolic Logic*, 10 (2004), n. 4, pp. 489-553.

[Kanamori 2012] A. KANAMORI, "In Praise of Replacement", *Bulletin of Symbolic Logic*, 18 (2012), n. 1, pp. 46-90.

[König 1905] J. KÖNIG, "Über die Grundlagen der Mengenlehre und das Kontinuumproblem", *Mathematische Annalen*, 61 (1905), pp. 156-60; trad. ingl. in [van Heijenoort 1967, pp. 145-9].

[Le Lionnais 1948] F. LE LIONNAIS (a cura di), *Les grands courants de la pensée mathématique*, Cahiers du Sud, 1948.

[Le Lionnais 1962] F. LE LIONNAIS (a cura di), *Les grands courants de la pensée mathématique*, A. Blanchard, Paris, 1962, second augmented edition of [LE LIONNAIS 1948].

[Lolli 1985] G. LOLLI, *Le ragioni fisiche e le dimostrazioni matematiche*, il Mulino, Bologna, 1985.

[Lolli 2011] G. LOLLI, *La guerra dei trent'anni (1900-1930)*, ETS, Pisa, 2011.

[Lolli 2013] G. LOLLI, *Nascita di un'idea matematica*, Edizioni della Normale, Pisa, 2013.

[Mahlo 1911] P. MAHLO, "Über lineare transfinite Mengen", *Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig, Math.-Phys. Klasse, Sitzungsberichte*, 63 (1911), pp. 187-225.

[Mathias 1992] A. R. D. MATHIAS, "The Ignorance of Bourbaki", *Mathematical Intelligencer*, 14 (1992), pp. 4-13.

[Mirimanoff 1917a] D. MIRIMANOFF, "Les antinomies de Russell et de Burali-Forti et le probléme fondamental de la théorie des ensembles", *L'Enseignement mathématique*, vol. 19, 1917, pp. 37-53.

[Mirimanoff 1917b] D. MIRIMANOFF, "Remarques sur la théorie des ensembles et les antinomies cantoriennes", *L'Enseignement mathematiques*, vol. 19, 1917, pp. 209-17.

[Moore 1976] G. H. MOORE, "Ernst Zermelo, A. E. Harward, and the axiomatization of set theory", *Historia Mathematica* 3 (2) (1976), pp. 206-209.

[Moore 1982] G. H. MOORE, *Zermelo's Axiom of Choice. Its Origin, Development, and Influence*, Springer, New York, 1982.

[Moore 2011] G. H. MOORE, "Early History of the Generalized Continuum Hypothesis: 1878-1938", *The Bulletin of Symbolic Logic* 17 (2011), n. 4, pp. 489-532.

[Pieri 1898] M. PIERI, "I principi della geometria di posizione composti in un sistema logico deduttivo", *Memorie della R. Accademia delle Scienze di Torino*, (2), 48, 1897-98, pp. 1-62.

[Pieri 1906] M. PIERI, "Sur la compatibilité des axiomes de l'arithmetique", *Revue de Métaphysique et de Morale*, 13 (1906), pp. 196-207, ristampato in [PIERI 1980, pp. 377-88].

[Pieri 1980] M. PIERI, *Opere scelte*, Cremonese, Roma, 1980.

[Riemann 1868] B. RIEMANN, *Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen*, Habilitationsvortrag, *Abhandlungen der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen*, 13 (1868) (a cura di Dedekind); ristampata in [RIEMANN 1953, pp. 272-87]; trad. ingl. in [Ewald 1996, vol. 2, pp. 652-61].

[Riemann 1953] B. RIEMANN, *Gesammelte mathematische Werke* (a cura di H. Weber), Dover, New York, 2^a ed., 1953.

[Rosser 1950] J. BARKLEY ROSSER, recensione di [Bourbaki 1949], *Journal of Symbolic Logic*, 14 (1950], pp. 258-9.

[Russell 1903] B. RUSSELL, *The principles of mathematics*, Allen and Unwin, London, 1903; trad it. [RUSSELL 1951].

[Russell 1906] B. RUSSELL, "On some difficulties in the theory of transfinite numbers and order types", *Proc. of the London Math. Soc.* (2) 4, 1906, pp. 29-53, rist. in [RUSSELL 1973, pp. 135-64].

[Russell 1951] B. RUSSELL, *I principi della matematica*, Longanesi, Milano, 1951.

[Russell 1973] B. RUSSELL, *Essays in Analysis* (a cura di D. Lackey), George Allen&Unwin, London, 1973.

[Salkowski 1910] E. SALKOWSKI, recensione di [WEYL 1910], in *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik* , 41 (1910), pp. 89-90.

[Schoenflies 1900] A. SCHOENFLIES, "Die Entwickelung der Lehre von den Punktmannigfaltigkeiten", *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, 8 (1900), pp. 1-251.

[Schoenflies 1908] A. SCHOENFLIES, "Die Entwickelung der Lehre von den Punktmannigfaltigkeiten. Zweiten Teil", *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, 2 (1908), pp. 1-331.

[Schoenflies 1911] A. SCHOENFLIES, "Über die Stellung der Definition in der Axiomatik", *Jahresberichte der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, 20 (1911), pp. 222-55.

[Skolem 1920] T. SKOLEM, "Logisch-kombinatorische Untersuchungen über die Erfüllbarkeit oder Beweisbarkeit mathematischer Sätze nebst einem Theoreme über dichte Mengen", *Videnkapsselkapets skrifter, I. Matematisk-naturvidenskabelig klasse*, 4 (1920), 36 pp.; trad. inglese del primo paragrafo in [van Heijenoort 1967, pp. 254-63].

[Skolem 1922] T. SKOLEM, "Einige Bemerkungen zur axiomatischen Begründung der Mengenlehre", *Mathematikerkongressen i Helsingfors den 4-7 Juli 1923, Den femte skandinaviska matematikerkongressen, Redogörelse*, Akademiska Bokhandeln, Helsinki, 1923, pp. 217-232; trad. ingl. in [van Heijenoort 1967, pp. 290-301].

[Skolem 1923] T. SKOLEM, "Begründung der elementaren Arithmetik durch die rekurrierende Denkweise ohne Anwendung scheinbarer Veränderlichen mit unendlichem Ausdehnungsbereich", *Videnkapsselkapets skrifter, I. Matematisk-naturvidenskabelig klasse*, 6 (1923); trad. inglese in [van Heijenoort 1967, pp. 302-33].

[van der Waerden 1930-31] B. L. VAN DER WAERDEN, *Moderne Algebra*, 2 voll., Springer, Berlin, 1930-31, 1937^2.

[van Heijenoort 1967] J. VAN HEIJENOORT (a cura di), *From Frege to Gödel* , Harvard Univ. Press, Cambridge MA, 1967.

[von Neumann 1923] J. VON NEUMANN, "Zür Einführung der transfiniten Zahlen", *Acta Litterarum ac Scientiarum Regiae Universitatis Hungaricae Francisco-Josephine (szeged), sectio scientiaturm mathematicarum*, vol. I, 1923, pp. 346-54.

[von Neumann 1925] J. VON NEUMANN, "Eine Axiomatisierung der Mengenlehre", *Journal für die reine und angewandte Mathematik* (*Crelle*), 154 (1925), pp. 219-40; trad. ingl. in [van Heijenoort 1967, pp. 393-413].

[von Neumann 1928] J. VON NEUMANN, "Über die Definition durch transfinite Induktion und verwandte Fragen der allgemeinen Mengelehre", *Mathematische Annalen*, 99 (1928), pp. 373-91.

[Weyl 1910] H. WEYL, "Über die definitionen der mathematischen Grundbegriffe", *Math. naturwiss. Blätter*, 7 (1910), pp, 93-5 e 109-13, ristampato in [WEYL 1968, vol. 1, pp. 298-304].

[Weyl 1918] H. WEYL, *Das Kontinuum. Kritische Untersuchgungen über die Grundlagen der Analysis*, Veit, Leipzig, 1918; trad. it. *Il continuo* (a cura di Anna Barbara Veit), Bibliopolis, Napoli, 1977.

[Weyl 1932] H. WEYL, "Topologie und abstrakte Algebra als zwei Wege mathematischen Verständnisses", *Unterrichtsblätter für Mathematik und Naturwissenschaften*, 38 (1932), pp. 177-188.

[Weyl 1935] H. WEYL, "Emmy Noether", *Scripta Mathematica* 3 (3) 1935, pp. 201-20.

[Weyl 1968] H. WEYL, *Gesammelte Abhandlungen* (a cura di K. Chandrasekharan), 4 voll., Springer, Berlin, 1968.

[Zermelo 1904] E. ZERMELO, "Beweis, dass jede Menge wohlgeordnet werden kann (Aus einem an Herrn Hilbert gerichteten Briefe)", *Mathematische Annalen*, 59 (1904), pp. 514-6; trad. ingl. in [van Heijenoort 1967, pp. 139-41].

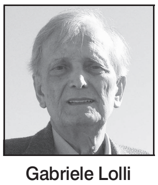
[Zermelo 1908a] E. ZERMELO, "Neuer Beweis für die Möglichkeit einer Wohlordnung", *Mathematische Annalen*, 65 (1908), pp. 107-28; trad. ingl. in [van Heijenoort 1967, pp. 183-98].

[Zermelo 1908b] E. ZERMELO, "Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre I", *Mathematische Annalen*, 65 (1908), pp. 261-81; trad. ingl. in [van Heijenoort 1967, pp. 199-215].

[Zermelo 1913] E. ZERMELO, "Über eine Anwendung der Mengenlehre auf die Theorie des Schachspiels" (1913), trad. ingl. "On an Application of Set Theory to the Theory of the Game of Chess" in Rasmusen E. (a cura di), *Readings in Games and Information*, Wiley-Blackwell, 2010, pp. 79-82.

[Zermelo 1929] E. ZERMELO, "Über den Begriff der Definitheit in der Axiomatik", *Fundamenta Mathematicae*, 14 (1929), pp. 339-44.

[Zermelo 1930] E. ZERMELO, "Über Grenzzahlen und Mengenbereiche", *Fundamenta mathematicae*, 21 (1930), pp. 29-47; trad. it. "Numeri confine e domini di insiemi", in [Cellucci 1978, pp. 178-95].



Gabriele Lolli

Gabriele Lolli (1942) ha insegnato a lungo Logica matematica nelle università di Salerno, Genova e Torino; dal 2008 al 2015 è stato professore di Filosofia della matematica presso la Scuola Normale Superiore di Pisa.
Ha pubblicato diversi libri su aspetti logici e filosofici della matematica, in particolare sulla dimostrazione.