

---

# *Matematica, Cultura e Società*

RIVISTA DELL'UNIONE MATEMATICA ITALIANA

---

ALBERTO ALZATI, MICHELE ROSSI, CRISTINA TURRINI

## **La geometria dell'Apparecchio per la Ricerca di Travolti in Valanga (ARTVa)**

*Matematica, Cultura e Società. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. 7* (2022), n.1, p. 53–68.

Unione Matematica Italiana

[http://www.bdim.eu/item?id=RUMI\\_2022\\_1\\_7\\_1\\_53\\_0](http://www.bdim.eu/item?id=RUMI_2022_1_7_1_53_0)

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

---

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma  
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)*

*SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>



# La geometria dell’Apparecchio per la Ricerca di Travolti in Valanga (ARTVa)

ALBERTO ALZATI

Università degli Studi di Milano

E-mail: alberto.alzati@unimi.it

MICHELE ROSSI

Università degli Studi di Torino

E-mail: michele.rossi@unito.it

CRISTINA TURRINI

Università degli Studi di Milano

E-mail: cristina.turrini@unimi.it

**Sommario:** *In questo articolo si vogliono esporre alcune osservazioni, di natura algebro-geometrica, relativamente alle linee di campo magnetico generate da un ARTVa (Apparecchio per la Ricerca di Travolti in Valanga), con possibili conseguenze positive sulla metodologia di ricerca dei travolti attualmente in uso e sulle caratteristiche costruttive di un ARTVa stesso.*

**Abstract:** *The present paper is devoted to describing suitable algebraic geometric properties of the field lines of a magnetic field generated by an avalanche beacon (ARTVa device). Moreover, we will explain how these properties may improve the current search strategy of people overwhelmed by an avalanche and the technical features of the ARTVa device itself.*

## 1. – Introduzione

Nella pratica scialpinistica, ovvero quell’arte di andare per monti con gli sci, l’utilizzo di un ARTVa (Apparecchio per la Ricerca di Travolti in Valanga) è diventato un’abitudine abbastanza consolidata. Ogni scialpinista sa di dover portare nello zaino una pala e una sonda e, ben ancorato addosso, sotto gli indumenti, un ARTVa. Quest’ultimo è un apparecchio rice-trasmittente, tenuto durante l’escursione in modalità trasmittente, ma immediatamente commutabile in modalità ricevente non appena ci si trovi nella necessità di ricercare qualcuno che sia stato travolto da una slavina. Questa semplice circo-

stanza, per certi versi dettata dall’ovvia esigenza etica di poter essere in grado di prestare soccorso a chiunque si trovi in difficoltà sul proprio cammino, e che ha il non trascurabile valore aggiunto di poter ben sperare che qualcuno soccorra noi nel malaugurato caso di essere noi i travolti, sottende in realtà i seguenti aspetti, tutt’altro che irrilevanti,

- (1) che gli apparecchi ARTVa di soccorritore e travolto si parlino,
- (2) che il soccorritore sia in grado di utilizzare nel modo più efficiente possibile un apparecchio ARTVa, per scongiurare la morte per asfissia del malcapitato che, dalle statistiche, subentra nell’ambito dei primi 15 minuti dal travolgimento.

*15 maledetti minuti per trovare il sepolto e dissepellirlo al punto da potergli almeno liberare le vie respiratorie!*

*Accettato: il 21 febbraio 2022.*

## 1.1 – Problemi legati alla frequenza di trasmissione

Il punto (1) ha in realtà costituito la questione cruciale di una diatriba durata decenni e in conclusione normata da organismi internazionali come la Commissione Internazionale del Soccorso Alpino CISA-IKAR nel 1984 e, molto più tardi, la Commissione Europea con la regolamentazione delle bande di frequenza, tra il 2006 e il 2009 [1]. Per farla breve, se si escludono alcuni tentativi di Bachler, ufficiale dell'Esercito Svizzero, risalenti addirittura al 1940, il primo prototipo di ARTVa fu quello elaborato dallo statunitense Lawton nel 1966 e da lui denominato SKADI, funzionante sulla bassa frequenza di 2,275 KHz. Sulla linea di questo prototipo, la ditta austriaca Motronic realizzò apparecchi funzionanti sulla medesima bassa frequenza (Pieps 1 e 2). D'altra parte, nel 1969 l'Esercito Svizzero riprese le idee di Bachler, con il proposito di dotare tutti i propri militari di un apparecchio che consentisse il ritrovamento di un sepolto da parte dei suoi stessi commilitoni, senza alcun intervento di soccorso esterno. Fu pertanto condotta un'accurata ricerca su quale fosse la banda più indicata a tale scopo, considerando, oltre all'efficienza in ambiente innevato, anche l'eventualità di interferenze con bande già occupate. Ne risultò l'individuazione della banda ad alta frequenza di 457 KHz. Quindi la ditta svizzera Autophon cominciò a costruire apparecchi funzionanti su questa alta frequenza (Barrivox VS 68). Ne seguirono una quindicina di anni di sperimentazioni e produzioni selvagge, che culminarono con apparecchi funzionanti in doppia frequenza (in Germania Ortovox e Ruf 2, in Austria il Pieps 3, in Francia l'ARVA 4000), ma che furono soprattutto caratterizzati dalla produzione di apparecchi funzionanti in monofrequenze distinte e tra loro non compatibili.

Nel 1983, la CISA-IKAR cominciò a svolgere dei test su base internazionale concludendo, nel 1984, con l'emissione di un comunicato nel quale veniva raccomandato l'utilizzo della sola alta frequenza di 457 KHz, risultata di gran lunga la più efficace per le specifiche esigenze. Questa indicazione, poi ratificata, come già detto, dalle normative europee sulle allocazioni di frequenze, la cui importanza, in termini di risoluzione della Babele degli anni '70, risulta ben

chiara dalle brevi note storiche riportate, rischia tuttavia di costituire un limite nei confronti degli sviluppi offerti dalle nuove tecnologie, in gran parte funzionanti ad altissime frequenze.

Recentemente si sono manifestate due significative eccezioni nei confronti di tale direttiva. La prima è costituita dalle frequenze *W-link*, introdotte in alcuni apparecchi di alta gamma come frequenze secondarie supplementari dedicate, da una parte alla trasmissione di dati relativi al movimento del sepolto, tra cui anche parametri vitali come il battito cardiaco o la respirazione, dall'altra al miglioramento della ricerca di più sepolti nella risoluzione di problemi di sovrapposizione di segnali. Le frequenze *W-link* non sono normate, con il risultato che, attualmente funzionano sulla frequenza di 869,8 MHz nell'Unione Europea e di 916-926 MHz negli Stati Uniti e in Canada. Peraltro, la loro introduzione ha aperto un dibattito etico relativo all'opportunità o meno, in fase di ricerca, che il soccorritore sia indotto a scegliere un sepolto rispetto a un altro, determinando caratteristiche supplementari dei sepolti, attraverso i dati inviati via *W-link*.

La seconda, e ben più preoccupante, eccezione alla direttiva CISA-IKAR del 1984 è costituita dalla comparsa di app per smartphone dedicate alla ricerca di travolti in valanga e funzionanti mediante wi-fi, bluetooth e localizzazione GPS. Il punto sostanziale è che wi-fi e bluetooth funzionano su altissime frequenze che, da una parte non possono essere compatibili con la frequenza di 457 KHz degli ARTVa in circolazione, e dall'altra risultano avere notevoli riduzioni di efficacia per l'azione dell'umidità [7]. Certamente, il bassissimo costo di un app per smartphone confrontato con l'alto costo di un ARTVa costituisce una tentazione di notevole entità, soprattutto nei confronti dei neofiti e dei più giovani.

Riprenderemo nel corso di questo articolo l'importanza della possibilità di disporre di frequenze *W-link*, eventualmente opportunamente normate e criptate per ovviare ai problemi di incompatibilità ed etici, di cui si è detto.

Ricordiamo infine che buona parte del contenuto di questo articolo è una rielaborazione estesa del testo di un Poster presentato al convegno MEGA di Nizza nel 2017 [4].

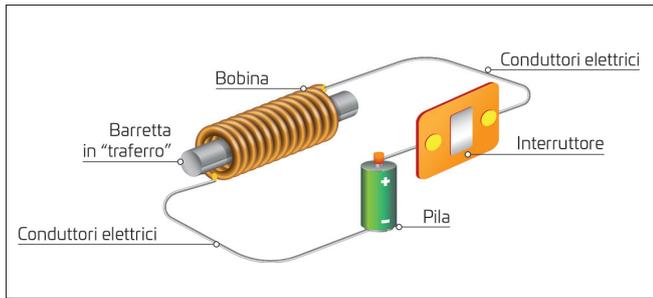


FIGURA 1 – Rappresentazione schematica del dipolo costituito da un'antenna in ferrite.

## 1.2 – Uso efficiente dell'apparecchio ARTVa.

L'argomento di questo articolo è invece molto più connesso all'aspetto (2) sopra riportato, ovvero all'utilizzo efficace di un ARTVa. A questo proposito va aperta una parentesi relativa alle caratteristiche di funzionamento di questo apparecchio. In realtà, dai primi prototipi ci sono state molte evoluzioni, per cui dire ARTVa non è sufficiente a individuare le peculiarità costruttive di quest'oggetto. Per grandi linee diciamo che è possibile distinguere tre categorie di ARTVa, in base al numero delle antenne di cui è dotato (una, due o tre). In trasmissione tutti gli ARTVa funzionano con una antenna, che è generalmente quella più lunga per aumentare al massimo la potenza del campo in uscita e quindi la *portata massima*<sup>(1)</sup> della ricerca. Il campo elettromagnetico generato da un ARTVa in trasmissione è caratterizzato dall'oscillazione di un dipolo, del tipo schematicamente rappresentato in Fig. 1, le cui linee di forza vengono a distribuirsi su superfici che, al di fuori di un intorno dell'asse del dipolo, assomigliano a quelle di *zucche*, generate dalla rotazione lungo tale asse del dipolo di linee di campo simili a quelle rappresentate in Fig. 2.

Queste linee sono state studiate in dettaglio nel caso analogo del campo elettrico e nell'ipotesi che il dipolo possa essere rappresentato da un punto, in

<sup>(1)</sup> La *portata massima* di un ARTVa è convenzionalmente definita, per un apparecchio analogico a un'unica antenna, come la massima distanza a cui questo riceve un segnale di un ARTVa sepolto, avendo l'accortezza di mantenere le antenne dei due apparecchi in posizione *coassiale*; per gli apparecchi digitali a più antenne, la definizione viene traslata sull'antenna più potente.

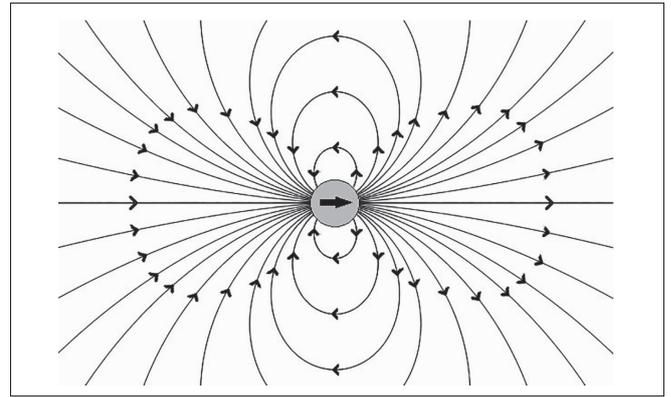


FIGURA 2 – Sezione planare del campo elettromagnetico generato da un dipolo.

[2], formula (13), ottenendo una semplice parametrizzazione delle linee di campo e quindi delle superfici da esse generate per rotazione. Nei capitoli 3 e 4 partiremo dalla rappresentazione parametrica delle linee di campo per dimostrare con semplici ragionamenti che le curve così ottenute sono *algebriche* e manifestano proprietà geometriche particolari ed estremamente interessanti per il miglioramento delle tecniche di ricerca attualmente in uso, e brevemente riassunte nel seguente capitolo 2.

## 2. – Le tre fasi della ricerca di un travolto

In questo capitolo vogliamo descrivere l'attuale metodo, pressoché universalmente riconosciuto come il migliore e applicato, per la ricerca di un travolto da valanga mediante un apparecchio ARTVa. Per schematizzare meglio il metodo, ci concentreremo sul caso di un solo sepolto, accennando durante la spiegazione alle cautele da osservare nel caso di più sepolti.

Per quel che è lo scopo di questo articolo, la seguente trattazione sintetica è più che sufficiente. Chi fosse interessato a un approfondimento di questi metodi di ricerca è rimandato, ad esempio, al Manuale del Club Alpino Italiano [6].

Il metodo di ricerca si compone di tre fasi.

### 2.1 – Fase 1: ricerca del primo segnale

Appena avvenuto l'incidente, il ricercatore si avvicina alla slavina ricercando un segnale proveniente dal

sepolto. Il soccorritore percorre la slavina in modo opportuno e dipendente anche dal numero degli altri eventuali soccorritori presenti, con l'obiettivo di captare un segnale dal sepolto. In questa fase sono generalmente avvantaggiati gli ARTVa di vecchia generazione, analogici a una antenna, perché generalmente dotati di una portata maggiore. Una volta percepito un segnale, comincia la seconda fase della ricerca.

## 2.2 – Fase 2: ricerca per linee di campo

Percepito il primo segnale, l'unico metodo attualmente in uso è quello di *percorrere le linee di campo* fino alla sorgente, naturalmente per quanto possibile, tenendo conto della natura del terreno. In questa fase risultano più vantaggiosi gli ARTVa digitali a più antenne, perché dotati di un processore che esegue in tempo reale la valutazione dell'intensità del segnale percepito dalle differenti antenne e quindi la determinazione della corretta direzione tangenziale alla linea di campo passante per il punto in cui si trova il ricercatore secondo il metodo che illustreremo in § 2.4. È in questa fase che le considerazioni svolte nei seguenti capitoli 3 e 4 vanno a inserirsi, *proponendo percorsi più diretti* per il raggiungimento della sorgente del segnale e quindi del travolto. Tali accorgimenti consentono di guadagnare al massimo alcune decine di secondi (o anche di più nel caso di terreno di ricerca molto sconnesso come spesso accade per le slavine), che però sono un lasso di tempo significativo nell'arco di 15 minuti.

Nel caso di più sepolti, in questa fase il ricercatore riceverà o un avvertimento dall'apparecchio ARTVa, se digitale e dotato di questa opzione, oppure un ulteriore segnale sonoro che tende a sovrapporsi a quello già esistente. Gli apparecchi di ultima generazione compiono automaticamente la scelta di uno tra i vari sepolti, ritornando sui rimanenti dopo avere escluso dalla ricerca il primo. Per quelli più datati invece, occorre che il ricercatore compia la scelta, prendendo opportune precauzioni per ritrovare gli ulteriori segnali una volta conclusa la ricerca del primo.

## 2.3 – Fase 3: ricerca fine o modulo a croce

A due/tre metri dal sepolto inizia la ricerca fine che deve condurre alla determinazione del punto preciso

di seppellimento. Dato l'accumularsi delle linee di campo, la tecnica di ricerca seguita nella Fase 2 non risulta più conveniente, potendo portare a sensibili errori. Si abbandonano quindi le linee di campo per abbassare l'ARTVa a livello della superficie nevosa e procedere rettilineamente fino a percepire un *massimo* nella ricezione: questo è determinato o dalla lettura di una distanza minima sul display di un ARTVa digitale o dalla percezione di un massimo del volume di emissione del segnale ricevuto da un ARTVa analogico di vecchia generazione. Si procede quindi sempre in modo rettilineo, ma ortogonalmente rispetto alla linea precedente, avendo cura di non ruotare lo strumento, fino alla percezione del massimo successivo e così via fino a posizionarsi in corrispondenza della sorgente.

La ricerca si conclude mediante l'utilizzo di una sonda per la determinazione del corpo del sepolto e quindi cominciando lo scavo, usando un'apposita pala, con l'obiettivo di arrivare a liberare le vie respiratorie innanzitutto.

## 2.4 – La determinazione delle direzione tangente utilizzata nella fase 2

Vogliamo qui spiegare, dal punto di vista fisico-matematico, il procedimento che un ARTVa attuale, fornito di processore e almeno due antenne, esegue per la determinazione della direzione da seguire nella ricerca per linee di campo illustrata in § 2.2. Inoltre spiegheremo come sarebbe possibile utilizzare la presenza di una terza antenna ricevente per le varianti del metodo di ricerca da noi proposte.

**2.4.1 – Il campo magnetico generato da un dipolo.** Fissiamo l'origine di un riferimento ortonorale nel punto di percezione del primo segnale nel modo seguente: asse delle ordinate diretto nella direzione e nel verso Sud-Nord (magnetico); asse delle ascisse diretto nella direzione e verso Ovest-Est; asse verticale diretto nella direzione e verso Nadir-Zenith. Tale scelta è possibile in quanto i più moderni ARTVa in commercio sono dotati di un magnetometro e di un accelerometro. In questo modo il piano  $z = 0$  coincide con il piano determinato dal palmo della mano che sorregge l'apparecchio in fase di ricerca. I modelli più recenti sono programmati per avvisare il ricercatore di riportare

l'apparecchio *orizzontale* non appena la rilevazione accelerometrica esca da uno spettro di valori prefissato.

Il dipolo che genera il campo magnetico, posto nell'apparecchio sepolto, è formato da una bobina, composta da  $N$  spire, arrotolata intorno a un materiale metallico (*traferro*, cfr. Fig. 1). Se la bobina è percorsa da una corrente continua di intensità  $I$  allora, per la legge di Biot-Savart, il campo magnetico generato ha direzione tangente alle linee di campo che passano tutte per il traferro del dipolo e intensità pari a  $B = kI/d$ , essendo  $d$  la distanza dal dipolo e  $k$  la costante fisica

$$k = \mu_r N \mu_0 / 2\pi = \mu_r N (2\pi \cdot 10^7)^{-1} H/m$$

dove  $\mu_r$  è la costante di correzione della costante magnetica nel vuoto  $\mu_0$ , ed è relativa al mezzo in considerazione, mentre  $H$  rappresenta l'unità di misura *Henry*, dimensionalmente definita nel Sistema Internazionale da

$$[H] = \left[ \frac{\text{Volt} \cdot \text{Secondo}}{\text{Ampere}} \right] = \frac{kg \ m^2}{s^2 A^2}$$

La linea di campo passante per il punto di ricezione del segnale, ovvero l'origine del nostro riferimento, avrà direzione tangente individuata da un opportuno valore di coordinate sferiche  $0 \leq \varphi \leq \pi/2$  e  $0 \leq \theta < 2\pi$ . Precisamente:  $\varphi$  (angolo di latitudine) è misurato a partire dal piano orizzontale, quindi  $\varphi = 0$  se e solo se la direzione tangente è parallela al piano  $z = 0$ ;  $\theta$  (angolo di longitudine) è misurato a partire dal vettore Sud-Nord, quindi  $\theta = 0$  o  $\theta = \pi$  se e solo se la proiezione ortogonale sul piano  $z = 0$ , della direzione tangente in oggetto, è parallela all'asse magnetico. Si noti che queste coordinate, con queste limitazioni, individuano soltanto una direzione e non anche un verso, ma ciò è sufficiente, come vedremo in seguito. Siano quindi  $\varphi = \varphi_t$ ,  $\theta = \theta_t$  le coordinate sferiche che individuano la direzione della retta tangente alla linea di campo passante per il punto di ricezione.

In dipendenza dagli angoli  $\varphi$ ,  $\theta$  che individuano la direzione di un'antenna che rilevi il segnale trasmesso, l'intensità del campo magnetico rilevato dal ricercatore varia secondo la legge

$$B(\varphi, \theta) = k \frac{I}{d} \cos(\varphi - \varphi_t) \cos(\theta - \theta_t)$$

La precedente espressione può assumere anche valori negativi. Si intende che l'intensità del campo corrisponde al valore assoluto di  $B(\varphi, \theta)$ .

Nella realtà la bobina di un ARTVA è percorsa da una corrente oscillante, ma le considerazioni appena svolte rimangono ugualmente valide poiché l'oscillazione causa solamente la variazione del verso del campo.

**2.4.2 – La misura dell'intensità del campo magnetico.** La rilevazione del campo magnetico, da parte di un'antenna dell'apparecchio ricevente, è fortemente direzionale, nel senso che risulta massima allorché l'antenna ricevente è parallela alla direzione tangente alla linea di campo nel punto di ricezione; non è comunque possibile escludere una misura spuria lungo le altre direzioni. In generale quindi la misura dell'intensità del campo, effettuata da una singola antenna, viene ad avere la seguente espressione empirica

$$\begin{aligned} B_x(\varphi, \theta) &= \alpha B(\varphi, \theta) = \alpha (B_0 + \cos(\varphi - \varphi_t) \cos(\theta - \theta_t) B_v) \\ &= \alpha \frac{I}{d} (k_0 + (k - k_0) \cos(\varphi - \varphi_t) \cos(\theta - \theta_t)) \end{aligned}$$

dove:

- $0 \leq \alpha \leq 1$  è una variabile dipendente dallo stato di carica delle batterie dei due apparecchi;
- $B_0 = k_0 I/d$  è la minima intensità registrabile, a distanza  $d$ , allorché  $\varphi = \varphi_t + \pi/2$  o  $\theta = \theta_t + \pi/2$  oppure  $\theta = \theta_t + 3\pi/2$ ; la costante  $k_0$  dipende dalle caratteristiche costruttive dell'apparecchio ricevente ed è sperimentalmente determinabile, quindi assumibile come nota;
- $\cos(\varphi - \varphi_t) \cos(\theta - \theta_t) B_v$  definisce la variabilità direzionale della rilevazione dell'intensità del campo magnetico, con  $B_v = (k - k_0) I/d$ , in quanto anch'esso direttamente proporzionale all'intensità  $I$  e inversamente proporzionale alla distanza  $d$ ; da notare che, allorché  $\varphi = \varphi_t$  oppure  $\theta = \theta_t$ ,  $\theta = \theta_t + \pi$ , si ha:

$$\begin{aligned} \alpha(k_0 + k - k_0) \frac{I}{d} &= B_x(\varphi_t, \theta_t) = \\ &= \alpha B(\varphi_t, \theta_t + \pi) = \alpha k \frac{I}{d} \end{aligned}$$

come deve essere.

A una distanza sufficientemente elevata  $d \gg 0$ ,  $B_0$  risulta assolutamente trascurabile, cioè  $k_0/d \sim 0$ .

**2.4.3 – La proiezione sul piano  $z = 0$  della direzione tangente alla linea di campo.** Supponendo che siano in funzione almeno due antenne ( $A$  e  $B$ ) dell'apparecchio ricevente si otterranno due misurazioni simultanee dell'intensità  $B_x$ . Il confronto di queste misurazioni consente di determinare sperimentalmente l'angolo  $\theta_t$  che caratterizza la longitudine della direzione tangente. Per semplificare questo confronto, poniamo alcune ipotesi coerenti con le caratteristiche costruttive di un ARTVa.

Innanzitutto le due antenne  $A$  e  $B$  risultano essere montate nel dispositivo con un angolo fisso  $\theta_0$  tra loro. Tale angolo spesso, ma non sempre, è dato da  $\theta_0 = \pi/2$ . Facendo l'ipotesi che l'ARTVa sia mantenuto in modo che il piano individuato dalle antenne sia parallelo al piano  $z = 0$ , tale angolo è anche la differenza di longitudine tra le direzioni delle due antenne, mentre queste vengono ad avere medesima latitudine. Nei modelli più recenti di ARTVa il mantenimento di questa posizione è facilitata dalla presenza di un accelerometro per la rilevazione della direzione Nadir  $\rightarrow$  Zenith. In quelli di precedenti generazioni è invece la sensibilità del ricercatore a dover garantire questo aspetto. Con queste ipotesi, l'intensità del campo magnetico rilevato dalle due antenne è riassunta dalle seguenti funzioni

$$b_A(\varphi, \theta) = \alpha \frac{I}{d} (k_0 + (k - k_0) \cos \varphi' \cos \theta') \sim \\ \sim \alpha k \frac{I}{d} \cos \varphi' \cos \theta'$$

$$b_B(\varphi, \theta) = \alpha \frac{I}{d} (k_0 + (k - k_0) \cos \varphi' \cos(\theta' + \theta_0)) \sim \\ (1) \quad \sim \alpha k \frac{I}{d} \cos \varphi' \cos(\theta' + \theta_0)$$

dove si è posto, per brevità,  $\varphi' = \varphi - \varphi_t$  e  $\theta' = \theta - \theta_t$ . Passando al rapporto delle due misurazioni si ottiene:

$$b := \frac{b_B}{b_A} \sim \frac{\cos(\theta' + \theta_0)}{\cos \theta'} = \cos \theta_0 - \sin \theta_0 \tan \theta' \implies \\ (2) \quad \implies \theta' = \arctan\left(\frac{\cos \theta_0 - b}{\sin \theta_0}\right)$$

Questa relazione consente di determinare  $\theta = \theta_t$  allorché  $\theta' = 0$ , ovvero azzerando l'espressione  $(\cos \theta_0 - b)/\sin \theta_0$ . Si osservi che se  $\theta_0 = \pi/2$ , la relazione che esprime  $\theta'$  nelle (2) si riduce a  $\theta' = \arctan(-b)$  e quindi  $\theta = \theta_t$  allorché  $b = 0$ , ovvero l'antenna  $B$  ha una ricezione nulla (nella nostra approssimazione a distanza  $d \gg 0$ ) del campo magnetico. In questo modo si determina la proiezione sul piano  $z = 0$  della direzione della retta tangente alla linea del campo magnetico passante per il punto ove si trova il ricercatore, ossia nell'origine del riferimento che è coincidente con la posizione del ricercatore stesso. Questa è la direzione effettiva lungo la quale procedere nella ricerca per linee di campo, ovviamente per quanto è consentito dalla natura del terreno, che negli apparecchi digitali ad almeno due antenne è direttamente indicata in display. La misurazione sopra descritta viene ripetuta più e più volte man mano che il ricercatore si muove.

**2.4.4 – La direzione tangente alla linea di campo.** Se, inoltre, risultasse essere in funzione anche una terza antenna  $C$  dell'apparecchio ricevente, si potrebbe ottenere anche una terza misurazione che sarà essenziale, come vedremo, per i metodi di ricerca da noi proposti. Gli ARTVa di più recente costruzione sono effettivamente dotati di tre antenne. In particolare, la terza antenna è stata introdotta innanzitutto per eliminare il problema dei *falsi massimi* per i seppellimenti profondi, che non vogliamo considerare in questa sede in quanto non inerente all'oggetto della presente trattazione. Pertanto l'antenna  $C$  deve essere necessariamente ortogonale al piano individuato dalle altre due antenne  $A$  e  $B$ . Se inoltre l'apparecchio è mantenuto in modo tale che l'asse  $z$  sia sempre contenuto nel piano individuate dalle antenne  $A$  e  $C$  possiamo affermare che le direzioni delle due antenne avranno medesima longitudine e differiranno di un'angolo fissato  $\varphi_0 = \pi/2$  in latitudine. Quindi la rilevazione della terza antenna sarà riassunta dalla seguente funzione

$$b_C(\varphi, \theta) = \alpha \frac{I}{d} (k_0 + (k - k_0) \cos(\varphi' + \varphi_0) \cos \theta') \sim \\ \sim \alpha k \frac{I}{d} \cos\left(\varphi' + \frac{\pi}{2}\right) \cos \theta'$$

Procedendo, come sopra, al rapporto delle misurazioni delle due antenne  $C$  e  $A$ , si ottiene:

$$b' := \frac{b_C}{b_A} \sim \frac{\cos(\varphi' + \varphi_0)}{\cos \varphi'} = -\tan \varphi' \implies \implies \varphi' = \arctan(-b'). \quad (3)$$

Ovvero, l'inclinazione  $\varphi = \varphi_t$  viene individuata azzerando  $\varphi'$  e quindi imponendo una ricezione nulla del campo da parte dell'antenna  $C$ , sempre nella solita approssimazione a distanza  $d \gg 0$ : questo può essere fatto inclinando opportunamente l'ARTVa rispetto al piano  $z = 0$ . Ad esempio, nel caso in cui l'antenna  $B$  sia perpendicolare all'antenna  $A$ , dopo aver operato come sopra per determinare  $\theta_t$ , è sufficiente ruotare l'apparecchio attorno alla direzione dell'antenna  $B$ , fino ad azzerare la ricezione dell'antenna  $C$ .

Si noti che, come sarà necessario in seguito, i due angoli  $\theta_t$  e  $\varphi_t$  sopra determinati sono del tutto sufficienti, nel sistema di riferimento scelto, a individuare le tre coordinate, a meno del verso, di un vettore tangente alla linea del campo magnetico passante per il punto in cui si trova il ricercatore.

### 3. – La ricerca di un travolto: il caso piano

In questo capitolo supporremo che il travolto sia sepolto a profondità zero e che inoltre la ricerca avvenga su un terreno assimilabile a un piano, su cui sia fissato un unico sistema di riferimento valido sia per il ricercatore che per il travolto; questa situazione è ovviamente del tutto irrealistica, ma serve a comprendere meglio il caso reale che sarà trattato nella sezione successiva.

#### 3.1 – Proprietà geometriche della curva che descrive le linee del campo magnetico nel caso piano

Com'è noto (si veda ad esempio [2], [5], [8], [9]), le linee del campo elettromagnetico generato nel piano da un dipolo puntiforme posto nell'origine e orientato come l'asse delle ascisse sono descritte dalla seguente famiglia di equazioni in coordinate polari standard  $(\rho, \theta)$  dipendenti da un parametro reale  $\sigma > 0$ :

$$\rho = \sigma \cos^2 \theta.$$

Qui utilizzeremo l'espressione equivalente che si ottiene quando il dipolo è orientato come l'asse delle ordinate:

$$\rho = \sigma \cos^2 \theta,$$

in cui si assume  $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ .

A partire da questa espressione, ponendo  $x = \rho \cos \theta, y = \rho \sin \theta, k = \sigma^2$ , si arriva alla seguente famiglia di equazioni cartesiane  $\mathcal{F}_k$  per le linee del campo:

$$(x^2 + y^2)^3 - kx^4 = 0 \quad (4)$$

che descrivono le curve parametriche precedenti e le loro simmetriche rispetto all'asse delle ordinate.

Per il seguito è utile osservare alcune proprietà della famiglia  $\mathcal{F}_k$ , che si ottengono direttamente dall'equazione cartesiana (4) calcolando le derivate parziali del polinomio al primo membro.

- Ogni  $\mathcal{F}_k$  è una sestica razionale dotata di un unico punto singolare reale quadruplo nell'origine in cui l'unica tangente principale è l'asse delle ordinate.
- Ciascuna di queste curve interseca l'asse delle ordinate solo nell'origine e per ogni punto al di fuori dell'asse delle ordinate passa una e una sola curva della famiglia (si veda Fig. 3 ove l'intera linea di campo, orientata, passante per  $\bullet$  è colorata in rosso e denotata con  $\Gamma$ ).

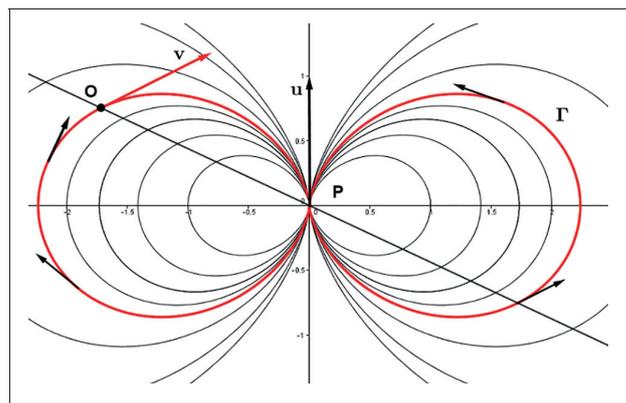


FIGURA 3 – Linee di un campo magnetico generato da un dipolo puntuale.

- Per ogni retta  $L_h$  di equazione  $y = hx$ , con  $h$  parametro reale fissato, il vettore tangente alla curva  $\mathcal{F}_k$  passante per un qualunque punto di

$L_h$ , diverso dall'origine, ha direzione parallela a quella del vettore  $(6h, 2 - 4h^2)$ , pertanto tutti questi vettori tangenti sono paralleli tra loro (si veda Fig. 4).

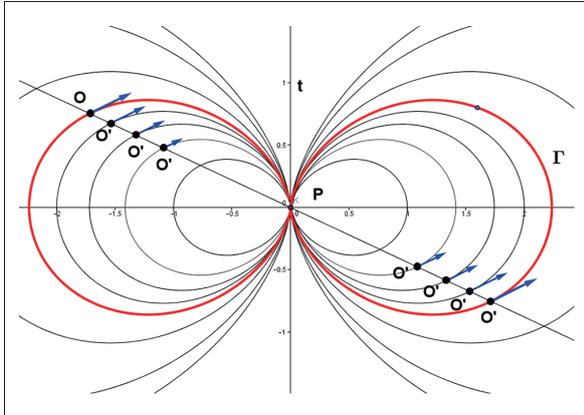


FIGURA 4 – Proprietà di parallelismo dei vettori tangenti alle linee di campo.

- d) Per ogni vettore di direzione  $(\alpha, \beta)$  e per ogni curva  $\mathcal{F}_k$ , con  $k$  fissato, esistono solo 4 punti su tale curva il cui la direzione tangente a  $\mathcal{F}_k$  è  $(\alpha, \beta)$ . Tali punti sono i punti di intersezione di  $\mathcal{F}_k$  con le due rette  $L_h$  per le quali  $h$  soddisfa la seguente equazione di secondo grado

$$(5) \quad 2\alpha h^2 + 3\beta h - \alpha = 0$$

(si veda Fig. 5).

### 3.2 – La ricerca nel caso piano

Consideriamo la Fig. 3 in cui si suppone che il travolto si trovi nel punto **P** origine del sistema di riferimento e che il suo apparecchio ARTVa trasmetta tramite un'antenna diretta e orientata come l'asse delle ordinate (vettore **u**). Si osservi che, in questa figura, le linee di campo sono orientate in direzione Sud-Nord (escono dal polo Sud del dipolo e rientrano dal polo Nord; si vedano le formule all'inizio di questo capitolo). Il ricercatore si trova nel punto **O** della figura, per cui passa la linea di campo  $\Gamma$  disegnata in rosso. L'apparecchio del ricercatore rileva la direzione del vettore **v** tangente alla  $\Gamma$  passante per **O**, seguendo la procedura descritta in § 2.4.4. Non è possibile, invece, rilevare anche il verso di **v** in quanto il campo magnetico continua a oscillare e di conseguenza il verso di **v** cambia continuamente. Usando il primo dei nuovi metodi

di ricerca che qui vogliamo descrivere, l'informazione sul verso di **v**, purtroppo non disponibile, sarebbe importante ai fini di determinare la corretta direzione rettilinea di marcia da **O** a **P**. La sua mancanza conduce a una dicotomia che può indurre a scegliere inizialmente una direzione sbagliata, scelta che però può essere corretta tramite un algoritmo di auto-correzione, come vedremo tra poco.

Come descritto in § 2.2, la tecnica di ricerca attuale prevede che il ricercatore si muova lungo la linea di campo, seguendo via via la direzione del vettore tangente fino ad arrivare in prossimità del punto **P**.

Si noti che, data la forma geometrica delle linee di campo, non è detto che il ricercatore segua l'unica linea di campo passante per **O** percorrendo l'arco più breve tra **O** e **P**. Si veda, per esempio, la Fig. 3: il ricercatore posto in **O**, seguendo le varie direzioni tangenti a  $\Gamma$  rilevate dal suo apparecchio, potrebbe muoversi sia lungo l'arco di lunghezza minore sia lungo quello di lunghezza considerevolmente maggiore. Nella pratica si deve tener conto della distanza di **O** da **P**, che viene indicata dall'apparecchio (se digitale) o che viene rilevata dall'intensità sonora del segnale: se il ricercatore si accorge che si sta allontanando da **P** cambia il suo verso di marcia. È facile capire, però, che così si perde comunque tempo prezioso.

I sistemi di cui parleremo tra poco consentono di muoversi direttamente lungo la retta **OP**.

Il primo che introdurremo è coperto da un brevetto ([3], presentato il 29-8-2016 all'Ufficio Italiano Brevetti e Marchi e accettato il 28-9-2019).

Tale metodo si basa sull'osservazione d) del paragrafo 3.1. L'apparecchio del ricercatore, oltre a rilevare il vettore **v**, ne determina le coordinate  $(\alpha, \beta)$  rispetto al sistema di riferimento fissato nel piano e risolve la corrispondente equazione di secondo grado (5), calcolando i due possibili valori per  $h$  e individuando così due possibili direzioni di ricerca, una delle quali corretta, l'altra no.

Individuata una direzione di marcia, il verso di percorrenza viene sempre scelto sulla base alla variazione dell'intensità del segnale percepito.

Nella Fig. 5 sono indicate quattro possibili posizioni (**A**, **B**, **C**, **D**), dove può trovarsi il ricercatore **O**, rilevando un vettore, indicato in nero nella figura, tangente alla linea di campo  $\Gamma$ . In realtà due di queste posizioni potrebbero essere escluse, se si conoscesse il verso di  $\Gamma$ , cosa però impossibile, come già spiegato,

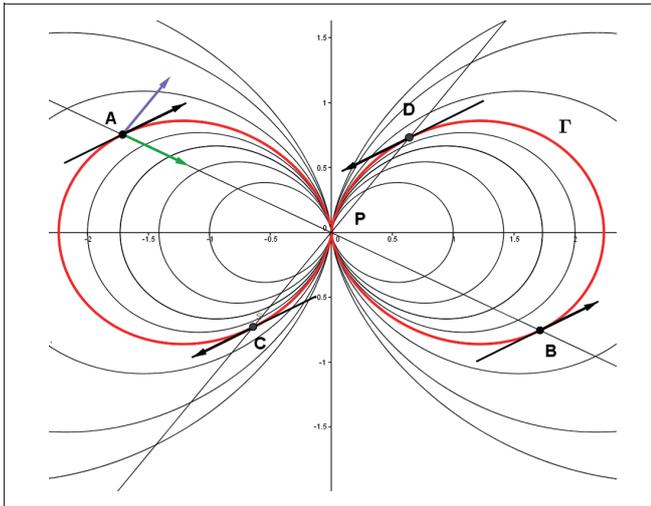


FIGURA 5 – Quattro punti con direzioni tangenti parallele.

a causa del continuo variare del verso del dipolo. Più precisamente: la conoscenza del verso permetterebbe al ricercatore di sapere se si trova in una delle due posizioni **A**, **B** oppure in una delle due posizioni **C**, **D** e quindi di scegliere la radice corretta fra le due di (5): è possibile infatti collegare ciascun verso di  $\mathbf{v}$  a una delle due radici. Una volta individuata la corretta direzione di marcia, il verso di percorrenza viene comunque individuato in base alla variazione del segnale percepito, quindi non è rilevante l'ambiguità, per esempio, che rimarrebbe tra **A** e **B**. In Fig. 5, supponendo che il ricercatore sia nella posizione **A**, sono indicate le due direzioni che risultano dal calcolo delle radici di (5): la direzione corretta è indicata in verde e quella errata indicata in viola. Come si vede, la direzione errata è quella della retta **C**, **P**, **D**.

Nel caso in cui un ricercatore si muova inizialmente lungo la direzione sbagliata è possibile accorgersene e modificare la propria scelta grazie alla proprietà c) del paragrafo 3.1: a ogni passo si può controllare che la direzione lungo cui ci si muove (una delle due determinate dal calcolo delle radici di (5)) formi un angolo di misura costante con la direzione tangente alle linee di campo via via incontrate e rilevate dall'apparecchio ARTVa. Se questo accade si prosegue allo stesso modo, se questo non accade, e bastano pochi passi per rendersene conto, si passa all'altra radice, scegliendo così la direzione corretta. Si noti che le due radici corrispondono alle due determinazioni di una funzione analitica, quindi è possibile distinguerle senza ambiguità.

È opportuno ricordare che, in questo contesto, quando si parla di “muoversi in modo da mantenere costante la misura di un certo angolo” si intende in realtà che le variazioni di tale misura devono restare all'interno di una certa soglia di tolleranza. Non è possibile infatti ottenere comunque una misura costante a causa degli errori di misurazione inevitabilmente commessi dagli strumenti. Le soglie di tolleranza sono talvolta fornite dai costruttori degli strumenti stessi oppure sono fornite da una serie di esperimenti di laboratorio. In questo caso si è tenuto conto sia delle specifiche degli attuali apparecchi ARTVa, sia delle elaborazioni numeriche a cui vanno soggetti i dati inseriti nell'algoritmo di autocorrezione.

Naturalmente il test di autocorrezione va ripetuto nel tempo, in modo da garantire la corretta scelta anche in seguito. Talvolta può accadere che, avvicinandosi rapidamente a **P**, il calcolo riproduca una direzione ancora errata, ma l'algoritmo di autocorrezione è sempre in grado di riportare il ricercatore lungo la direzione corretta. Nel brevetto prima citato questo meccanismo di autocorrezione è spiegato in dettaglio.

Nella Fig. 6 viene illustrato un caso tipico: in Exp.1 il ricercatore non commette errori. In Exp.1bis la direzione di ricerca iniziale è sbagliata, ma in breve l'autocorrezione riporta il ricercatore nella direzione corretta. In questo esempio è stata sufficiente una sola autocorrezione. Nella Fig. 6 la linea gialla indica la direzione dell'asse del dipolo, la linea blu rappresenta il percorso ideale di ricerca, la curva rossa rappresenta il percorso seguito da un ricercatore dotato di un ARTVa modificato in modo da poter eseguire la ricerca seguendo il procedimento descritto nel brevetto [3]; le curve verde e nera, che vengono disegnate contemporaneamente alla linea rossa e quindi sono “lunghe” lo stesso numero di passi (dove un passo equivale al ciclo di un algoritmo), rappresentano invece i due possibili percorsi seguiti da un ricercatore dotato di un ARTVa normale. Quando la curva rossa incontra la linea gialla il disegno di tutte le curve viene interrotto, quindi la parte mancante dei percorsi verde e nero verso il giallo indica, nei due casi, il guadagno conseguito dal metodo proposto.

È naturale chiedersi se, in caso siano necessarie più autocorrezioni, alla fine, il tempo impiegato a percorrere tutto il tragitto risulti inferiore a quello

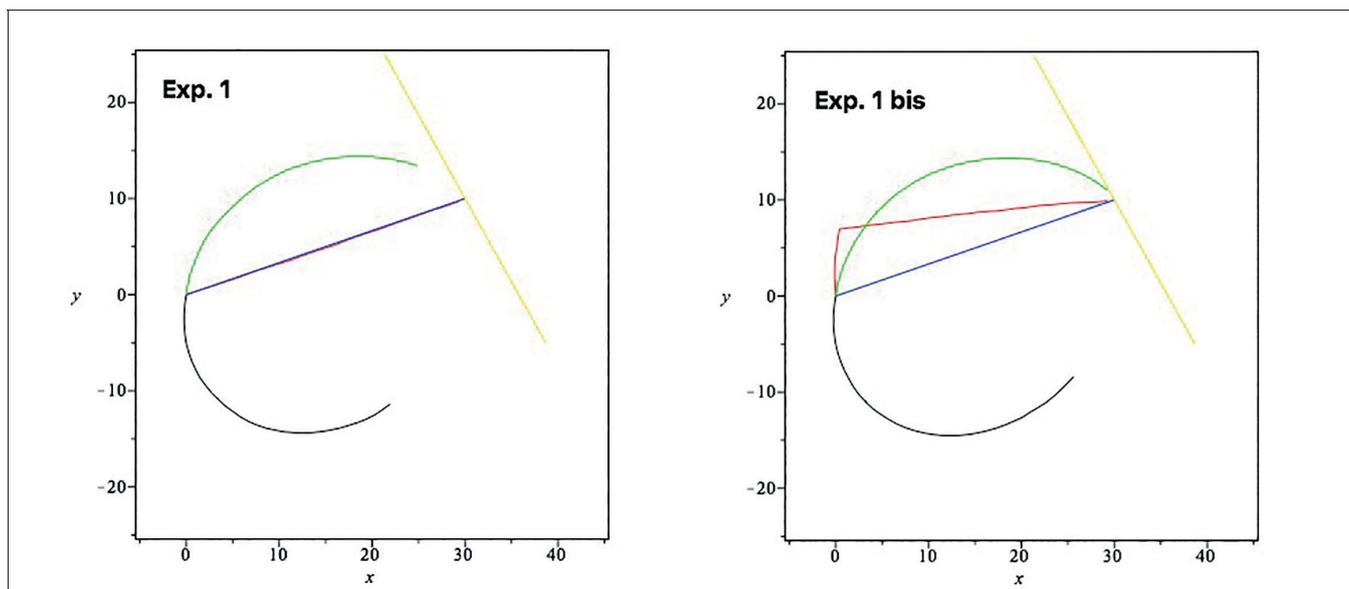


FIGURA 6 – Ricerca senza e con autocorrezione.

impiegato usando il metodo tradizionale. Una serie di esperimenti statistici virtuali dimostra che quasi sempre è così, eccetto quando il ricercatore si trova relativamente vicino all'asse del dipolo. In tali casi i due metodi si equivalgono e talvolta quello tradizionale risulta migliore. È facile capire però che tale possibilità non è molto probabile.

Diamo qui alcune informazioni sugli esperimenti statistici di cui sopra.

In un ambiente virtuale 2D abbiamo simulato (utilizzando il software Maple14) la ricerca di un sepolto posto in un punto **P** da parte di un ricercatore posto in un punto **O** a distanza di circa 30 metri. Abbiamo considerato diverse posizioni di **O** sulla linea di un campo magnetico generato in **P**, alcune posizioni vicine all'asse di simmetria del campo, altre a distanza intermedia dall'asse e altre ancora a distanza massima dall'asse. Per ciascuna di tali posizioni abbiamo realizzato numerose serie di 100 esperimenti supponendo che le coordinate del vettore **u** siano note, di volta in volta, con un errore casuale al massimo del 10%. Abbiamo poi ricavato il vettore **v** e lo abbiamo perturbato assegnandogli un verso casuale e uno sbandamento casuale di al massimo 15 gradi. Gli errori che abbiamo previsto tanto per **u** quanto per **v** sono coerenti con quelli che ci sono stati suggeriti da una nota casa costruttrice di ARTVa. Di conseguenza nel corso delle autocorrezioni abbiamo ritenuti paralleli vettori che

formassero fra loro un angolo di meno di 15 gradi. Per ogni esperimento abbiamo calcolato il numero di passi (dove un passo corrisponde a un metro) effettuati sul terreno dal ricercatore fino ad arrivare a un metro e mezzo dal sepolto, prima col nuovo metodo e poi col metodo tradizionale, mettendoli a confronto. Analoghi esperimenti sono stati effettuati anche nelle condizioni realistiche descritte nel capitolo successivo. In essi abbiamo ipotizzato un dislivello tra ricercatore e sepolto variabile da 1 a 3 metri.

A titolo di esempio, in Fig. 7 si riporta l'esito statistico di una serie di 100 esperimenti virtuali effettuati nella situazione illustrata dalla Fig. 6. La retta orizzontale verde corrisponde alla distanza effettiva da **O** a **P** (31 metri). La retta orizzontale rossa indica la media (35 metri) delle lunghezze dei 100 itinerari percorsi utilizzando il metodo di ricerca da noi proposto. Come si vede la lunghezza massima dei cammini è stata di 42 metri e in molti casi la lunghezza è stata pari alla distanza effettiva. La moda è stata 36. In nessuno di questi 100 casi il metodo tradizionale ha prodotto un risultato migliore. Va osservato, però, che la situazione rappresentata nella Fig. 6 è quella ottimale per il nostro metodo in quanto **O** è ben lontano dalla retta gialla.

Il secondo metodo suggerito, si basa sull'osservazione *c)* del paragrafo 3.1 ossia sulla proprietà che, nel precedente metodo, era stata usata solo per l'algoritmo di autocorrezione. Anche in questo caso

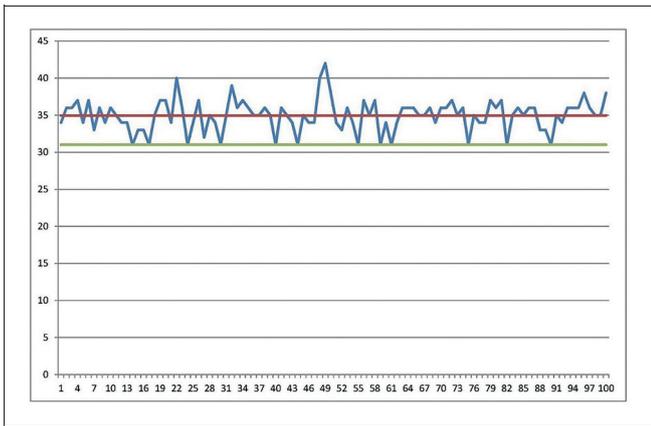


FIGURA 7 – Statistica di 100 esperimenti virtuali.

l'apparecchio del ricercatore rileva il vettore  $\mathbf{v}$  tangente alla linea di campo  $\Gamma$  che passa per il punto in cui si trova, ma ora si procede in modo tale da mantenere costante l'angolo tra la direzione di marcia e la direzione del vettore tangente alle varie linee di campo che l'apparecchio ARTVa rileva via via. Il verso è sempre determinato sulla base della variazione dell'intensità del segnale; si veda la Fig. 4 dove sono indicate alcune posizioni  $\mathbf{O}'$  in cui il ricercatore si trova durante la sua marcia. Con questo secondo metodo non esistono ambiguità e anche in questo caso il metodo è tanto più efficiente quanto più il ricercatore si trova lontano dall'asse del dipolo.

Si direbbe quindi che questo secondo nuovo metodo sia più efficiente del primo e in effetti è così nel caso ideale piano trattato all'inizio del presente capi-

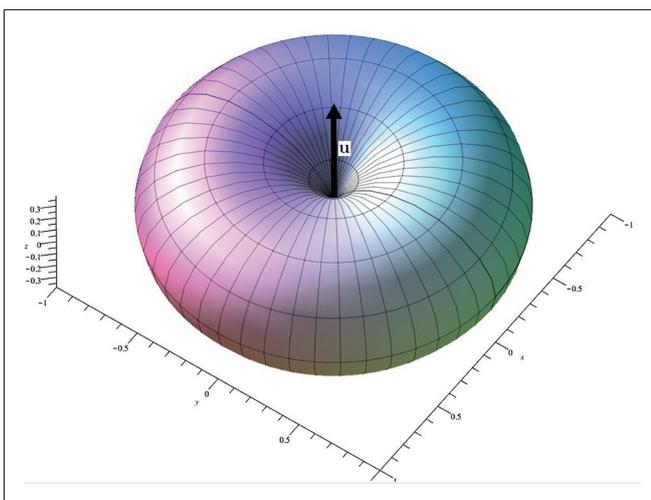


FIGURA 8 – Superficie di rotazione generata da una linea di campo e di equazione cartesiana data dalla (6) per  $k = 1$ .

tolo. Situazione del tutto irrealistica. Come vedremo, quando si dovrà procedere alla ricerca in un ambiente spaziale le cose cambieranno. A questo secondo metodo non corrisponde alcun brevetto, ossia non è stato studiato in dettaglio un modello di apparecchio ARTVa in grado di metterlo in pratica; si sono solo effettuati esperimenti virtuali oppure test reali in laboratorio utilizzando ARTVa attuali adattati ad hoc.

#### 4. – La ricerca di un travolto in condizioni realistiche

##### 4.1 – Linee di campo nel caso dello spazio

Un dipolo magnetico puntiforme posto in un punto  $\mathbf{P}$  dello spazio genera un campo a simmetria rotatoria rispetto all'asse del dipolo individuato da un vettore  $\mathbf{u}$ , (si veda Fig. 8).

Questo significa che su ogni piano del fascio passante per la retta per  $\mathbf{P}$  di direzione  $\mathbf{u}$  le linee di campo si comportano come descritto nel capitolo precedente, il che spiega come mai il caso piano vada preventivamente studiato a fondo. Ne segue che, fissato un punto  $\mathbf{O}$  diverso da  $\mathbf{P}$ , esiste un'unica superficie generata per rotazione dalla linea di campo passante per  $\mathbf{O}$  e giacente sul piano del fascio che passa per tale punto (si veda la Fig. 9). Nell'ipotesi che l'asse del dipolo coincida con l'asse  $z$ , tale superficie ha equazione cartesiana

$$(6) \quad (x^2 + y^2 + z^2)^3 - k(x^2 + y^2)^2 = 0$$

per un opportuno valore di  $k$ .

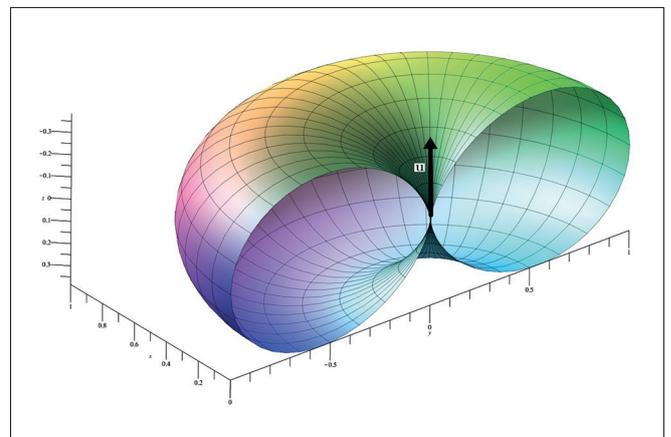


FIGURA 9 – Sezione della superficie precedente, per  $k = 1$ , con un piano contenente  $\mathbf{u}$ .

Conseguenza di questo fatto è che, per certi versi, ci si può ricondurre al caso piano trattato in precedenza.

#### 4.2 – Descrizione del primo metodo di ricerca nel caso dello spazio

La procedura può essere schematicamente così riassunta:

A) L'ARTVa del ricercatore, che si suppone dotato di tre antenne, posto nel punto  $\mathbf{O}$ , rileva la direzione del vettore  $\mathbf{v}$  tangente alla linea del campo magnetico generato dall'apparecchio del travolto posto in  $\mathbf{P}$  e passante per  $\mathbf{O}$ , come descritto in § 2.4.4. Tale direzione viene codificata nelle tre coordinate di  $\mathbf{v}$  rispetto a un sistema di riferimento ortonormale destrorso  $\mathcal{E}$ . Ovviamente tali coordinate indicano anche un verso per  $\mathbf{v}$  che però non si può sfruttare per i motivi prima spiegati.

B) L'ARTVa del ricercatore riceve dall'apparecchio del travolto la direzione del versore  $\mathbf{u}$  individuato dal dipolo dell'antenna trasmittente da  $\mathbf{P}$ . Tale direzione viene individuata tramite l'accelerometro e il magnetometro di cui supponiamo l'apparecchio sepolto sia dotato. Anche questa direzione viene codificata nelle tre coordinate di  $\mathbf{u}$  rispetto a  $\mathcal{E}$ . Come per  $\mathbf{v}$ , il verso di  $\mathbf{u}$  cambia continuamente e quindi non si può sfruttare. Si noti che per ottenere la ricezione delle coordinate di  $\mathbf{u}$ , in un dato momento, è necessario che gli attuali ARTVa siano modificati predisponendo un secondo canale di trasmissione tra l'apparecchio del sepolto e quello del ricercatore. Ciò può essere fatto utilizzando le antenne già presenti grazie a un accorgimento tecnico spiegato nel brevetto [3]. Oppure usando le frequenze W-link, di cui si è detto nell'introduzione, dopo aver risolto i problemi etici lì citati.

C) Poiché i due vettori giacciono nello stesso piano  $\Pi$  individuato dal vettore  $\mathbf{u}$  e dai punti  $\mathbf{P}$  e  $\mathbf{O}$  (a causa della simmetria assiale del campo magnetico generato dal dipolo), l'unità di calcolo dell'ARTVa del ricercatore è in grado di eseguire le operazioni citate nel capitolo precedente (caso piano) e fornire, sempre rispetto a  $\mathcal{E}$ , la direzione di marcia ( $\mathbf{OP}$ ). Anche in questo caso occorre predisporre una modifica degli attuali ARTVa, aggiungendo una unità di calcolo in grado di effettuare quanto richiesto. Ciò però non è un problema tecnico in quanto l'unità

sarebbe di dimensioni trascurabili e assorbirebbe poca energia.

I punti A), B), e C) sopra elencati illustrano chiaramente il metodo effettivo proposto e alcuni problemi di natura ingegneristica da affrontare sono stati citati ed è stata presentata la relativa soluzione. Restano però tre questioni di varia natura che qui elenchiamo e poi discutiamo.

- i) ricercatore e travolto devono potersi dotare di un unico sistema di riferimento  $\mathcal{E}$ ;
- ii) occorre scegliere sul piano  $\Pi$  un sistema di riferimento opportuno nel quale effettuare i calcoli e le considerazioni descritte nel capitolo precedente;
- iii) la ricerca effettiva non potrà quasi mai effettuarsi nel piano  $\Pi$  perché il ricercatore si muove sul terreno, che è disposto in maniera a priori casuale rispetto all'asse del dipolo.

Per quanto riguarda il punto i) il problema si supera dotando ogni apparecchio ARTVa di due strumenti che sono attualmente in commercio a costi contenuti e opportunamente miniaturizzati: un magnetometro che indichi la direzione Sud  $\rightarrow$  Nord magnetico e un accelerometro che indichi la direzione Nadir  $\rightarrow$  Zenith. Si noti che, come già anticipato nel secondo capitolo, tali strumenti sono già presenti nei modelli di ARTVa più recenti a tre antenne. In ogni punto  $\mathbf{O}$  della superficie terrestre questi due apparecchi, accoppiati, sono in grado di definire due versori perpendicolari e di conseguenza un sistema ortonormale destrorso  $\mathcal{E}$ , con origine in  $\mathbf{O}$ , rispetto al quale determinare le coordinate di un qualunque vettore rilevato dall'ARTVa, sia esso l'asse del dipolo trasmittente oppure il vettore tangente a una linea di campo magnetico passante per  $\mathbf{O}$ . Tenuto conto del fatto che ricercatore e travolto sono in posizioni non troppo lontane, la coppia di versori, perpendicolari fra loro, individuata in  $\mathbf{P}$  può ritenersi identica a quella individuata in  $\mathbf{O}$  e pertanto consente di definire due sistemi di riferimento ortonormali destrorsi, uno di origine in  $\mathbf{O}$  e l'altro in  $\mathbf{P}$  i cui versori sono paralleli ed equiversi. Il che permette ai due apparecchi di trasmettersi coordinate di vettori senza ambiguità ed è per questo che, con un piccolo abuso di linguaggio, possiamo parlare di un unico sistema di riferimento ortonormale destrorso  $\mathcal{E}$ .

Per quanto riguarda il punto ii) occorre premettere che la scelta del sistema di riferimento su  $\Pi$  deve essere fatta in modo che si possano usare i calcoli descritti nel capitolo precedente così come sono stati presentati, in particolare per il significato delle due radici dell'equazione (5). Questa scelta è possibile. Ci limitiamo qui a indicarla senza dare la dimostrazione che tale scelta sia corretta: un minimo di riflessione convincerà il lettore della bontà di questa scelta.

Si considera il versore ottenuto normalizzando il vettore  $\mathbf{u}$  (si ricordi la Fig. 3) che, per comodità, continueremo a chiamare  $\mathbf{u}$ ; poi si determina il prodotto vettoriale di  $\mathbf{u}$  con  $\mathbf{v}$  (in quest'ordine) e lo si normalizza; si indica questo secondo versore con  $\mathbf{w}$ ; come terzo versore si sceglie il versore  $\mathbf{z}$  tale che  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{z}$  e  $\mathbf{w}$  formino una terna destrorsa, in quest'ordine, nel senso che l'asse  $x$  citato nel capitolo precedente sarà quello individuato dal versore  $\mathbf{z}$ , mentre l'asse  $y$  sarà quello individuato dal versore  $\mathbf{u}$ . In questo modo la coppia di versori da usare nel piano  $\Pi$  risulta essere data da  $\mathbf{z}$  e  $\mathbf{u}$ , in quest'ordine; nel senso che l'asse  $y$  citato nel capitolo precedente sarà quello individuato dal versore  $\mathbf{u}$ , ecc.

Il problema citato al punto iii) è irrisolvibile: non è pensabile che il ricercatore possa muoversi lungo il piano  $\Pi$ , sul quale ha individuato la corretta direzione di marcia, in quanto il ricercatore è costretto a muoversi sul terreno, ovvero su un piano (nella migliore delle ipotesi, ma potrebbe essere anche su un terreno molto accidentato) posto casualmente rispetto a  $\mathcal{E}$ . Del resto questo è un problema che si ha anche con gli apparecchi attuali. Una volta individuata la direzione corretta ( $\mathbf{OP}$ ) il ricercatore non può che muoversi lungo la direzione che è la proiezione di ( $\mathbf{OP}$ ) sul terreno di ricerca che ha a disposizione e che in generale, anche se fosse assimilabile a un piano, non sarà perpendicolare alla direzione Nadir  $\rightarrow$  Zenith). Il verso di marcia viene sempre individuato in funzione dell'intensità del segnale ricevuto.

Visto che la direzione di ricerca effettiva non è quella esatta ( $\mathbf{OP}$ ), il ricercatore dovrà periodicamente ripetere il procedimento, cosa che peraltro non crea alcun problema, dal momento che l'unità di calcolo dell'ARTVa è in grado di farlo molto rapidamente.

Ovviamente, quanto detto nel caso piano a proposito della necessità di un'eventuale autocorrezione,

continua a valere, a maggior ragione, in questa situazione tridimensionale. Nella pratica, ma ciò accade anche attualmente, il ricercatore ottiene dall'ARTVa una indicazione alla quale cerca di attenersi compatibilmente con le asperità del terreno innevato che lo circonda; l'indicazione si aggiorna continuamente in base alle varie posizioni assunte dal ricercatore nella sua marcia di avvicinamento a  $\mathbf{P}$ .

Concludiamo il paragrafo dicendo che, statisticamente, con esperimenti virtuali, si rileva che questo nuovo metodo proposto risulta essere tanto più efficace quanto più il versore  $\mathbf{u}$  è vicino a essere perpendicolare alla direzione Nadir  $\rightarrow$  Zenith e, come già rilevato nel caso piano, quanto più il punto  $\mathbf{O}$  è lontano dall'asse del dipolo. È da notare che la prima condizione citata è molto comune, infatti la direzione del versore  $\mathbf{u}$  tende a coincidere con quella {piedi-testa} dell'infortunato, tenendo conto di come sono costruiti gli ARTVa e di come vengono abitualmente indossati. Solitamente, anche se sono sempre possibili casi particolari, la direzione {piedi-testa} di un travolto da valanga tende a essere molto discosta dalla direzione Nadir  $\rightarrow$  Zenith.

Tutte le modifiche da apportarsi agli attuali apparecchi ARTVa per svolgere il procedimento sopra descritto sono l'oggetto del brevetto [3].

#### 4.3 – Descrizione del secondo metodo di ricerca nel caso dello spazio

Il secondo metodo di ricerca si svolge come il primo fino alla determinazione del piano  $\Pi$ : anche in questo caso l'ARTVa del ricercatore, posto nel punto  $\mathbf{O}$ , rileva la direzione del vettore  $\mathbf{v}$ , tangente alla linea del campo magnetico generato dall'apparecchio del travolto posto in  $\mathbf{P}$  e passante per  $\mathbf{O}$ , ecc.

Una volta individuato il piano  $\Pi$ , dopo avervi fissato il sistema di riferimento sopra citato, il ricercatore dovrebbe ora muoversi lungo questo piano in maniera tale che tutte le direzioni tangenti rilevate, via via che si sposta, si mantengano parallele tra loro.

Come detto, però, ciò è impossibile e, poiché il ricercatore si sposta inevitabilmente su altri piani del fascio di piani che ha per asse la retta individuata dal dipolo trasmittente, non ha più senso muoversi cercando di mantenere sempre parallele fra loro le direzioni tangenti alla varie linee di campo incontrate via via. Lo si può fare solo per brevissimi tratti,

poi occorre sempre ricalcolare il tutto, anche in situazioni ottimali per quanto riguarda la natura e l'inclinazione del terreno.

Statisticamente, con esperimenti virtuali, si rileva che questo secondo metodo, contrariamente al caso precedente, risulta essere tanto più efficace quanto più il versore  $\mathbf{u}$  è vicino a essere parallelo alla direzione Nadir  $\rightarrow$  Zenith e il punto  $\mathbf{O}$  è lontano dall'asse del dipolo.

Quando è soddisfatta la prima di queste due condizioni anche il metodo attuale funziona al meglio.

Al momento non sono state studiate le modifiche che dovrebbero essere apportate a un apparecchio ARTVa per poter funzionare secondo questo principio.

#### 4.4 – Considerazioni ulteriori

1) Una lunga serie di esperimenti virtuali svolti nel caso spaziale mostra che, statisticamente, il primo metodo proposto e quello attuale sono i migliori rispettivamente in queste due situazioni:

- a) versore  $\mathbf{u}$  perpendicolare alla direzione Nadir  $\rightarrow$  Zenith, punto  $\mathbf{O}$  lontano dall'asse del dipolo;
- b) versore  $\mathbf{u}$  parallelo alla direzione Nadir  $\rightarrow$  Zenith, oppure, qualunque sia la direzione di  $\mathbf{u}$ , se il punto  $\mathbf{O}$  è vicino all'asse del dipolo.

Si potrebbe pensare a un'ulteriore versione dell'apparecchio ARTVa in grado di realizzare uno "switch" passando da un metodo all'altro in base alla direzione di  $\mathbf{u}$  rispetto alla Nadir  $\rightarrow$  Zenith, dato che è possibile misurare l'angolo fra le due direzioni in gioco. Purtroppo non è possibile determinare con sicurezza una soglia assoluta (per esempio 45 gradi) in relazione alla quale impostare lo switch. Gli esperimenti virtuali svolti mostrano che tale soglia dipende molto dal punto della linea di campo in cui il ricercatore si trova, che naturalmente cambia da situazione a situazione e non è nota. È possibile stabilire una soglia statisticamente ragionevole per ogni posizione, ma naturalmente ciò non è di nessun aiuto nella realtà.

2) Da un punto di vista puramente teorico sarebbero possibili diversi altri metodi per determinare direttamente la direzione di ricerca ottimale, nonché addirittura le coordinate del punto  $\mathbf{P}$  nel sistema di riferimento  $\mathcal{E}$  centrato in  $\mathbf{O}$ . Ad esempio, si può

richiedere al ricercatore di effettuare la rilevazione del vettore tangente in altre due diverse posizioni di coordinate note, vicine a  $\mathbf{O}$ , facilmente individuabili. Per esempio, basterebbe rilevare il dato in  $\mathbf{O}$ , in un punto un metro a Nord di  $\mathbf{O}$ , in un punto un metro a Est di  $\mathbf{O}$ . Le due direzioni possono essere indicate dall'ARTVa, un metro corrisponde a circa un passo e si può supporre che attorno al ricercatore il terreno sia piatto almeno per un mq.

Con questi dati è possibile impostare un sistema di equazioni algebriche non lineari, a partire dalle equazioni delle superfici di rotazione delle linee di campo, con cui determinare le coordinate di  $\mathbf{P}$  e, come sottoprodotto, la direzione di ricerca ottimale. Si noti che la quota di  $\mathbf{P}$  rispetto a  $\mathbf{O}$  fornirebbe un'informazione molto importante per la ricerca. Purtroppo questo metodo funziona perfettamente solo nel caso in cui i dati sono esatti, mentre non offre sufficienti garanzie nel caso di dati con rumore, il che è però inevitabile a causa degli errori di misurazione, della distorsione nelle trasmissioni, ecc. Il motivo di questo fallimento è stato oggetto di un'attenta analisi ed è dovuto al fatto che i rilevamenti si svolgono troppo vicini gli uni agli altri. D'altra parte non è possibile pensare che il ricercatore possa muoversi di parecchi metri verso Nord o verso Est rimanendo su uno stesso piano, come sarebbe necessario per la risoluzione del sistema. Un'eventuale alternativa potrebbe essere offerta nel caso ci fossero due ricercatori intenti alla ricerca dello stesso infortunato, dotati entrambi di ARTVa in grado di effettuare i suddetti calcoli e di comunicarsi i dati l'un l'altro, ma si entrerebbe in un ambito del tutto estraneo a questo articolo che riguarda la ricerca di un disperso da parte di un solo soccorritore. Del resto, in presenza di un numero elevato di soccorritori, le attuali tecniche di ricerca differiscono da quelle che qui abbiamo trattato.

## 5. – Conclusione

In questo breve articolo abbiamo voluto illustrare come la geometria delle linee di campo generate da un apparecchio ARTVa, che in buona approssimazione (dipolo puntuale) risultano essere algebriche, possa consentire di determinare nuovi metodi di ricerca di un travolto da valanga che vadano a

migliorare quella che, nel metodo di ricerca attualmente in uso, viene definita come *fase 2* o *ricerca per linee di campo* (cfr. § 2.2).

A tal proposito, va detto che questi miglioramenti risultano poco significativi se la ricerca è condotta da un esperto che periodicamente si alleni nell'uso di un apparecchio ARTVa: infatti al momento, gli studi per diminuire ulteriormente i tempi di disseppellimento si stanno principalmente concentrando sui tempi di scavo, finalizzando tecniche più efficaci, dal momento che gli ARTVa di ultima generazione consentono di determinare uno o più sepolti in tempi difficilmente migliorabili. Altra questione però, se ci si rivolge alla gran massa dei frequentatori della montagna invernale, che difficilmente dedicano il loro tempo allo studio e all'affinamento delle tecniche di ricerca. In questo caso, i metodi qui proposti presentano due sensibili vantaggi:

- minimizzare la lunghezza del percorso di ricerca,
- rendere il percorso di ricerca il più possibile *rettilineo*.

Questi aspetti presentano due conseguenze significative: la prima è quella di proporre un percorso di avvicinamento al travolto più *semplice* se si considera che la superficie di una slavina si presenta spesso molto disconnessa e costituita da blocchi di neve più o meno grandi da superare; la seconda è il vantaggio *psicologico* di essere condotti direttamente sul punto di travolgimento, piuttosto che essere condotti lungo una curva piuttosto ampia sul piano di ricerca, con il conseguente eventuale sconforto del soccorritore non allenato.

In questa breve conclusione vogliamo anche sottolineare come l'arricchimento delle frequenze di comunicazione tra gli apparecchi del soccorritore e del travolto risulti un punto di grande importanza se si vuole ulteriormente migliorare l'efficacia di un ARTVa. Non nel senso di mettere in discussione la normativa in atto [1], piuttosto nel senso di una standardizzazione delle frequenze W-link già in uso nei moderni apparecchi. Abbiamo infatti visto in § 4.2 (B) come sia importante che l'apparecchio sepolto comunichi l'inclinazione del proprio dipolo all'apparecchio in ricerca, consentendo in tal modo di affinare quello che abbiamo chiamato *primo metodo* di ricerca e materia del brevetto [3]. In linea di

principio, migliorare la comunicazione tra gli apparecchi in gioco consentirebbe addirittura la determinazione puntuale delle coordinate nello spazio del sepolto, come si è osservato in § 4.4 (2), con tutti i vantaggi che ne possono derivare, una volta eliminati i problemi connessi con il *rumore* con cui i dati utili vengono ricevuti. Quest'ultima è certamente una direzione di sviluppo su cui concentrarsi ulteriormente.

Aggiungiamo che la standardizzazione delle frequenze W-link consentirebbe di migliorare anche un aspetto che rimane ancora un punto cruciale per gli apparecchi ARTVa coinvolti nella ricerca di più sepolti (*ricerca multipla*) anche di ultima generazione, che è quello della *sovrapposizione periodica* dei diversi segnali provenienti dagli apparecchi sepolti. La trasmissione in W-link di una marcatura dell'apparecchio sepolto, opportunamente criptata per evitare problemi di natura etica connessi al riconoscimento del travolto, risolverebbe definitivamente questo annoso problema.

**Ringraziamenti.** Ringraziamo i coautori del poster [4], per averci concesso di utilizzare parte del materiale in esso presentato. Ringraziamo inoltre gli ignoti revisori per i loro numerosi suggerimenti che hanno migliorato l'esposizione del presente articolo.

## RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

- [1] Decisione della commissione, del 13 maggio 2009, recante modifica della decisione 2006/771/ce relativa all'armonizzazione dello spettro radio per l'utilizzo da parte di apparecchiature a corto raggio. *Gazzetta Ufficiale dell'Unione Europea*, 2009.
- [2] ZAFAR AHMED and ADITYA NANDAN SAVITA. Lines of force of the electric point dipole. *Eur.J.Phys.*, 34, 2013.
- [3] A. ALZATI, C. TURRINI, I. FROSIO, G. VENTURINO, and G. ROTONDO. Un nuovo tipo di apparecchio ARTVA basato sulla geometria delle linee del campo magnetico. *Brevetto n. IT201600087706 (A1)*, del 29-8-2016.
- [4] A. ALZATI, C. TURRINI, I. FROSIO, G. VENTURINO, and G. ROTONDO. A new model of avalanche transceiver. *Poster presentato al Congresso M.E.G.A. 2017 di Nizza*, <https://mega2017.inria.fr/accepted-presentation/>.
- [5] ALESSANDRO BETTINI. *Elettromagnetismo*. Zanichelli, Bologna, IT, 2001.

[6] C.N.S.A.S.A. *Scialpinismo*, volume 13 of *Manuali del Club Alpino Italiano. Club Alpino Italiano, Milano, IT, 2013.*

[7] JAMES FLOYER. App di ricerca in valanga per smartphone. *Neve e Valanghe*, 80, 2013.

[8] PAOLO MAZZOLDI, MASSIMO NIGRO, and CESARE VOCI. *Elementi di Fisica. Elettromagnetismo e Onde*. EdiSES, Napoli, IT, 1998.

[9] EZIO MENICHETTI. Potenziali e campi di dipoli elettrici e magnetici.

<http://www.ph.unito.it/ccl/docenti/menichetti/Elettromagnetismo/Dipoli.pdf>.



Alberto Alzati

*Alberto Alzati è professore associato di Geometria presso il Dipartimento di Matematica "Federigo Enriques" dell'Università degli Studi di Milano. I suoi principali interessi di ricerca riguardano la Geometria Algebrica Complessa: sottovarietà di piccola codimensione, varietà speciali, mappe razionali,  $k$ -normalità, teoremi tipo Lefschetz. Negli ultimi anni si è anche dedicato ad applicazioni della Geometria Algebrica, sia alla Computer Vision che ad altri ambiti. È autore o coautore di circa settanta lavori di ricerca e di alcuni eserciziari. È anche un appassionato di escursioni in montagna.*



Michele Rossi

*Michele Rossi è professore associato di Geometria presso il Dipartimento di Matematica "Giuseppe Peano" dell'Università degli Studi di Torino. I suoi principali interessi di ricerca riguardano la Geometria Algebrica (teoria di Hodge e geometria torica) connessa ad aspetti di fisica teorica (teoria delle stringhe, transizioni geometriche, mirror symmetry) con alcune applicazioni anche in fisica sperimentale (misurazione della costante di gravitazione universale e dell'accelerazione di gravità). È autore o coautore di circa quaranta lavori di ricerca e di alcune note a scopo didattico. Al di fuori dell'ambito accademico si è dedicato per anni all'alpinismo e alla sua didattica: è Istruttore Nazionale di Alpinismo (INA) e Istruttore Nazionale di SciAlpinismo (INSA) del Club Alpino Italiano.*



Cristina Turrini

*Cristina Turrini è professoressa associata di Geometria presso il Dipartimento di Matematica "Federigo Enriques" dell'Università degli Studi di Milano. I suoi interessi riguardano la Geometria Algebrica classica e, da diversi anni, si occupa principalmente delle sue applicazioni alla Computer Vision (tensori di Grassmann, varietà algebriche da essi descritte, varietà critiche per la ricostruzione di scene statiche e dinamiche). È co-autrice di una cinquantina lavori di ricerca e co-editor di volumi nell'ambito della divulgazione matematica.*