Matematica, Cultura e Società

Rivista dell'Unione Matematica Italiana

Nicola Durante, Antonio Restaino

La nascita degli spazi di Galois

Matematica, Cultura e Società. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **6** (2021), n.3, p. 231–239.

Unione Matematica Italiana

¡http://www.bdim.eu/item?id=RUMI_2021_1_6_3_231_0¿

Matematica, Cultura e Società. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2021.

Matematica, Cultura e Società – Rivista dell'Unione Matematica Italiana
Serie I, Vol. 6, N. 3, dicembre 2021, 231-239

La nascita degli spazi di Galois

Nicola Durante
Università di Napoli "Federico II"
E-mail: ndurante@unina.it

Antonio Restaino
Liceo Scientifico Carlo Pisacane – Padula (SA)
E-mail: to.restaino@gmail.com

Sommario: *In questo articolo ricostruiremo accuratamente gli episodi che accompagnarono la nascita e i primi passi degli spazi di Galois. Si tratta di spazi proiettivi costruiti su campi finiti, e costituiscono un importante settore di studi della Combinatoria che a sua volta include altri ambiti disciplinari come la Teoria dei Grafi, la Teoria dei Codici, la Teoria Combinatoria dei Gruppi e la Teoria dei Disegni. Conosceremo i protagonisti di questa vicenda e segnaleremo alcuni tra i momenti più importanti della breve storia degli spazi di Galois, e più in generale della Combinatoria, arrivando fino ai nostri giorni. Il matematico che inaugurò questi spazi con un numero finito di punti era italiano. Si chiamava Gino Fano (1871-1952).*

Abstract: *This article is a detailed reconstruction of the episodes that accompanied the birth and the first steps of Galois spaces. These are projective spaces built on finite fields, and represent an important common ingredient used in Combinatorics, as well as in other fields like Graph Theory, Coding Theory, Combinatorial Group Theory and Design Theory. We name the protagonists of this story and identify some of the most important moments in the short history of Galois spaces, and more generally of Combinatorics, up to the present days. The mathematician who inaugurated these spaces with a finite number of points was Italian. His name was Gino Fano (1871-1952).*

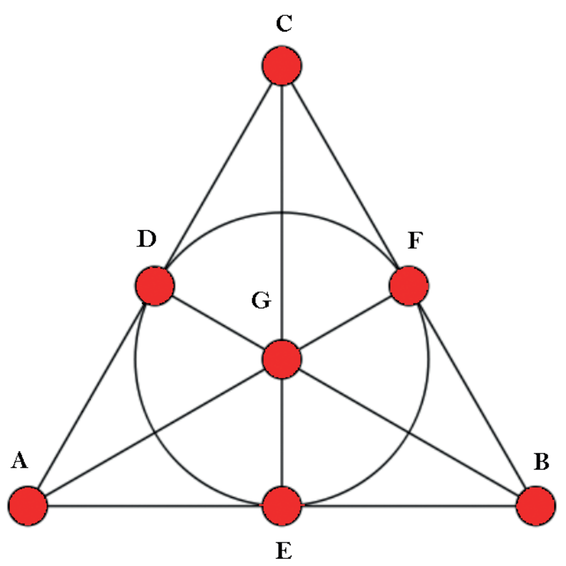
Nell'anno accademico 1890-91 il professor C. Segre (1863-1924), titolare della cattedra di Geometria Superiore all'Università di Torino, teneva il corso di *"Geometria sopra un ente algebrico"*. Durante il corso il professore propose ai suoi studenti un problema a cui teneva molto: "Determinare un sistema di assiomi su cui fondare la geometria proiettiva iperspaziale". Gli iperspazi, spazi di dimensione maggiore di tre, erano già stati introdotti e studiati in modo analitico in [6] da A. Cayley (1821-1895). Con la nozione di determinante la geometria analitica in dimensione due e tre veniva estesa comodamente agli spazi n-dimensionali. Il desiderio di Segre era dare una fondazione assiomatica alla geometria proiettiva di questi spazi. Tra gli allievi del corso c'era un ragazzo veramente in gamba, il quale decise di dare soddisfazioni al Maestro e un anno dopo presentò la lista degli assiomi richiesti. Il ragazzo era G. Fano, e nel 1892 uscì il suo articolo: *Sui postulati fondamentali delle geometrie in uno spazio lineare ad un numero qualunque di dimensioni* [14].

Nell'articolo Fano elencava e discuteva i suoi postulati. Parliamone brevemente. Si fa riferimento ad una *varietà di enti* detti *punti*, in modo che valgano le proprietà seguenti:

(1) Due punti qualsiasi determinano univocamente un *sistema di punti*, detto *retta*, indicato con S_1.
(2) La retta per due punti di un piano giace tutta nel piano. (Un *piano* S_2 è definito come l'insieme di tutti i punti che proiettano quelli di una retta, da un punto che non le appartiene).
(3) Due rette in uno stesso piano hanno sempre un punto in comune.
(4) Ogni retta contiene più di due punti.

Accettato: il 2 novembre 2021.

Dalle proprietà del piano si passa a definire lo spazio tridimensionale: S_3. Esso si ottiene come proiezione di un S_2 da un punto che non gli appartiene. Allo stesso modo si procede con i successivi S_k. Fano commentava ogni postulato che introduceva e facendo ciò aggiungeva anche nuove nozioni. Troviamo così le nozioni di triangolo e quadrangolo, il teorema di Desargues, la nozione di gruppo armonico e di trasformazione proiettiva, il principio di dualità. Mentre commentava, Fano confrontava i suoi assiomi con quelli di F. Amodeo (1859-1946), che come lui era studente di Segre e si era occupato della stessa questione. Amodeo e Fano avevano sviluppato il discorso in modo simile per buona parte ma c'era anche una parte del discorso di Fano che l'altro non aveva toccato. Anche G. Veronese (1854-1917) aveva studiato il problema degli assiomi, ma Fano non prendeva in considerazione il lavoro di Veronese perché le due impostazioni erano diverse e non riteneva utile un confronto. Analoga sistemazione assiomatica della geometria degli iperspazi sarà data qualche anno più tardi nel 1899 da M. Pieri (1860-1913). Ad un certo punto dell'articolo Fano ottiene una configurazione di 7 punti e 7 rette per la quale tutti i postulati relativi al piano erano verificati: due punti determinano una retta, che contiene un terzo punto; due rette hanno un punto in comune, per cui passa una terza retta. Era nato il *piano di Fano*.



Piano di Fano

Questo piano viene proiettato da un punto esterno. Si giunge ad una configurazione di 15 punti, 15 piani e 35 rette che soddisfa le proprietà di un S_3. Noi scriveremmo $S_{3,2}$: *spazio di dimensione* 3 *e ordine* 2. Per ogni punto passano 7 rette e 7 piani; in ogni piano ci sono 7 rette e 7 punti; ogni retta contiene 3 punti (*ordine* + 1), e per ciascuna passano tre piani. Si potrebbe immaginare di costruire un $S_{r,2}$, con $2^{r+1} - 1$ punti. Fano, in una nota, valuta il numero dei sottospazi S_k di $S_{r,2}$. Poco più avanti nell'articolo ottiene una nuova configurazione: 13 punti, 13 rette. Anche qui sono verificati gli assiomi del piano: è un $S_{2,3}$. Ragionando come sopra, per proiezione, arriva ad un $S_{3,3}$. E generalizzando arriva ad un $S_{r,3}$. La costruzione dei vari spazi qui accennati è effettivamente solo indicata dall'autore. Invece viene costruito sviluppando ogni passaggio un piano con $n^2 + n + 1$ punti e altrettante rette. Su ogni retta $n + 1$ punti e per ogni punto $n + 1$ rette. Si tratta di un $S_{2,n}$, con n supposto primo. Anche in questo caso si opera una generalizzazione che conduce ad un $S_{r,n}$. Il lavoro di Fano contiene naturalmente altri spunti interessanti, ma non ne parleremo qui. È con questo lavoro di Fano che nascono di fatto gli spazi di Galois $\mathrm{PG}(r, p)$, con p numero primo. Un po' di tempo dopo O. Veblen e W.H. Bussey, di cui ora diremo, dimostreranno che se la dimensione è maggiore di due gli spazi $\mathrm{PG}(r, p^n)$ sono unici a meno di isomorfismi. Nel caso di dimensione due si distinguerà tra piano desarguesiano $\mathrm{PG}(2, p^n)$ e piani non desarguesiani.

Veblen e Bussey, nel 1906, pubblicarono un articolo dal titolo *Finite projective geometries* [39]. In questo lavoro i due autori introducevano gli spazi proiettivi finiti con alcuni assiomi. Subito dopo definivano analiticamente gli spazi che indicavano con $\mathrm{PG}(r, p^n)$. È la nostra attuale notazione, che quindi è rimasta quella di sempre. Questi spazi proiettivi hanno punti con coordinate omogenee nel campo di Galois $\mathrm{GF}(p^n)$, e in essi si può sviluppare una geometria proiettiva che conserva le principali proprietà di quella ordinaria. Ad un certo punto i due autori discutono il caso di dimensione due, cioè $\mathrm{PG}(2, p^n)$, e più avanti troviamo il fatto importante: dimostrano, come dicevamo, che se $r > 2$ esiste un'unica geometria di ordine p^n, a prescindere da come sia introdotta. Per $r = 2$ va fatta la distinzione di cui abbiamo detto prima. Nell'articolo di Veblen e Bussey viene studiato il gruppo delle collineazioni associato allo spazio $\mathrm{PG}(r, p^n)$ ed altre cose interessanti. Alla fine gli autori citano tre studiosi che prima di loro avevano ottenuto risultati nello stesso settore. Citano Fano, G. Hessenberg, E.H. Moore. In particolare a pag. 258 essi riconoscono la priorità dei lavori di Fano ed Hessenberg. Di Fano abbiamo già parlato, di Hessenberg diremo tra poco. Moore (1862-1932) era un matematico statunitense, studioso di gruppi, che diede dei contributi di geometria proiettiva finita. Quando fu pubblicato l'articolo di Veblen e Bussey, un matematico italiano, B. Levi, noto anche per il teorema della convergenza monotona di Analisi Matematica, scrisse alla rivista su cui era apparso il lavoro. Usò toni molto decisi rivendicando la priorità di un suo lavoro rispetto a quello di Veblen e Bussey. Levi scrisse alla Reale Accademia delle Scienze di Torino, siamo nel 1906, un breve articolo dal titolo *Geometrie proiettive di congruenza e geometrie finite* [21]. Cita il lavoro di Veblen e Bussey e aggiunge: "Pare che sia sfuggito agli autori un cenno assai rapido, ma sufficientemente esplicito, che sopra queste geometrie, e sopra altre assai più generali, io diedi fin dal 1904 una memoria sopra i *Fondamenti della metrica proiettiva* [20]. Quindi chiedo alla Società il permesso di ricordare i punti della mia memoria che si riferiscono alla questione, aggiungendo ancora alcuni sviluppi interessanti". Levi riprendeva quello che aveva fatto nel 1904, due anni prima di Veblen e Bussey, mostrando che il suo punto di vista incorporava come caso particolare quello di Veblen e Bussey. L'impostazione di Levi era da lui chiamata geometria di congruenza; utilizzava polinomi e si basava sulla teoria dei numeri algebrici di L. Kronecker (1823-1891). Il linguaggio di Levi era un bel po' complicato e l'approccio che aveva utilizzato forse aveva fuorviato i suoi lettori; da qui poteva essere derivato il mancato riconoscimento di quello che aveva fatto. Questa cosa la dice lui stesso in una nota. Comunque sia, c'è da parte di Levi un'esplicita rivendicazione di priorità. Poi correttamente Levi riconosceva a Veblen e Bussey il merito di essersi posti il problema di definire tutti gli spazi proiettivi finiti e di averlo risolto caratterizzandoli nei $\mathrm{PG}(r, p^n)$. In tutto questo non abbiamo detto una cosa importante. E cioè che dopo Fano la priorità non era né di Levi, né di Veblen e Bussey. Sempre Levi nel suo articolo di protesta, in una nota, dice che solo dopo avere scritto il suo lavoro era venuto a conoscenza di quello di Hessenberg del 1903: *Über die projective geometrie* [16]. Qui venivano introdotti i piani $\mathrm{PG}(2, p)$ e $\mathrm{PG}(2, p^2)$. Hessenberg (1874-1925) era un matematico tedesco, noto per avere dimostrato che il teorema di Desargues sui triangoli omologici è conseguenza del famoso teorema di Pappo. Levi riconosceva la priorità di Hessenberg, come anche Veblen e Bussey avevano fatto. Quindi ciò che lo fece arrabbiare fu essere stato del tutto ignorato. Ma come si era imbattuto Hessenberg in questi spazi? Nel citato articolo del 1903 Hessenberg dimostrava l'indipendenza della geometria proiettiva lineare dalla nozione di ordine. E metteva in luce il fatto che in geometrie proiettive in cui manca il concetto di ordine sono possibili configurazioni che nello spazio proiettivo ordinario non sono possibili. In questo contesto Hessenberg aveva costruito i piani $\mathrm{PG}(2, p)$ e $\mathrm{PG}(2, p^2)$. In definitiva la nostra ricostruzione ci permette di concludere che i primi ad occuparsi di spazi di Galois furono nell'ordine: Fano, Hessenberg, Levi, Veblen e Bussey.

Dopo qualche anno, nel 1910, il matematico G.M. Conwell riuscì, utilizzando gli spazi di Galois, a risolvere un problema del 1850 che era stato proposto da T.P. Kirkman (1806-1895). Il problema era noto, ma era relegato tra le curiosità matematiche di tipo combinatorio. Questo era vero al punto che fu pubblicato su una di quelle riviste che una volta le signore e i signori sfogliavano dal parrucchiere o dal dentista: "Lady's and Gentleman's Diary". Stiamo parlando del *Kirkman's schoolgirls problem.* Si chiedeva di stabilire se quindici ragazze che ogni giorno vanno a passeggio a tre a tre in cinque file, possono ogni giorno cambiare disposizione in modo che a fine settimana ciascuna sia stata in una terna con tutte le altre.

Il problema fu risolto da A. Cayley, dallo stesso Kirkman e da altri. Il risultato che si trovò fu che le disposizioni sono realizzabili per qualsiasi numero di ragazze congruo 3 modulo 6. Ma il problema ha una sua storia, con generalizzazioni di notevole interesse: sono coinvolti, per esempio, anche i sistemi di Steiner. Solo nel 1971 il problema ha avuto una definitiva sistemazione [29]. G.M. Conwell [9], come dicevamo, utilizzava gli spazi di Galois: nello spazio PG(3,2), attraverso una particolare configurazione di rette, riusciva a ottenere una soluzione del problema. E tra l'altro studiò anche la quadrica di Klein in PG(5,2). È opportuno ricordare, qui, che è con questo problema di Kirkman che si inaugurò la *teoria dei disegni*, su cui torneremo. Un altro problema dello stesso tipo è il noto *problema degli ufficiali* di cui si era occupato il grande L. Eulero (1707-1783) molto tempo prima. Ci sono 36 ufficiali di 6 gradi diversi e di 6 reggimenti diversi, uno per ogni grado e reggimento. È possibile sistemare i 36 ufficiali in un quadrato 6×6 in modo che in ogni riga e colonna vi sia un solo ufficiale per ogni grado e reggimento? Vale la pena dire che qui furono introdotti i *quadrati latini*, oggetti interessanti, legati all'esistenza di piani proiettivi. Quanto alla soluzione del problema degli ufficiali, Eulero congetturò che la risposta fosse negativa per $n = 4k + 2$. In effetti per $k = 1$, cioè per $n = 6$, Eulero aveva ragione [37]. La congettura risultò invece falsa per $k \geq 2$, come provò R.C. Bose (1901-1987), con altri, nel 1960.

Una cosa che va detta è che queste strutture geometriche finite agli inizi non furono accolte con particolare interesse. I motivi di questa diffidenza furono probabilmente i seguenti. Intanto sembra abbastanza naturale che serva del tempo prima che un nuovo indirizzo di studi si affermi e mostri le proprie potenzialità; poi c'è il fatto che molti matematici non consideravano vera matematica gli studi di natura combinatoria. La geometria finita era guardata con questi occhi.

Racconteremo adesso alcuni dei fatti decisivi che diedero una svolta allo studio delle geometrie su campi finiti. Nel 1921 un giovane matematico austriaco di nome E. Artin (1898-1962) discute la sua tesi di dottorato. Nel suo lavoro Artin si occupava di "Geometria Algebrica su un corpo finito". Il passaggio da un'equazione a coefficienti interi ad una a coefficienti in $\mathbf{Z}_p$, p primo, delineava un ampio indirizzo di indagine dalle prospettive molto interessanti e promettenti. Più in generale in quegli anni partiva un grande progetto di ricerca in Geometria Algebrica il cui obiettivo era quello di dare solide fondamenta alla disciplina, pensata in termini astratti: i coefficienti delle equazioni algebriche e le coordinate dei punti sono elementi di un campo qualsiasi, non più solo dei classici campi reale e complesso.

Questo ambizioso progetto coinvolgeva molti matematici di prim'ordine. Ne citeremo alcuni. B.L. Van der Waerden (1903-1996), matematico olandese autore del famoso trattato in due volumi "Modern Algebra" del 1930; E. Noether (1882-1935) la "mamma dell'algebra moderna", tedesca; H. Hasse (1898-1979), uno dei più importanti studiosi di Teoria dei Numeri del '900. Più avanti la sfida fu raccolta da O. Zariski (1899-1986) matematico bielorusso e A. Weil (1906-1998) francese, uno dei fondatori del gruppo Bourbaki. L'ipotesi di Riemann è, come noto, il problema matematico irrisolto più importante. È coinvolta la "funzione zeta" e i suoi zeri: tutti gli zeri non banali della funzione sono sulla retta $x = 1/2$. Questa congettura è legata alla distribuzione dei numeri primi ed è importante per molti altri motivi. Una versione dell'ipotesi di Riemann può essere formulata in relazione alle curve algebriche su campi finiti; Artin nel 1924 formulò a tal proposito una congettura che fu dimostrata nel 1940-41 proprio da Weil. Alcuni anni più tardi Weil realizzò una revisione della Geometria Algebrica ed estese la teoria classica della funzione zeta di Riemann. Propose anche lui alcune congetture che riguardavano le cosidette "funzioni zeta locali". Si tratta di funzioni che derivano dal conteggio di punti su varietà algebriche su campi finiti. I problemi che Weil propose segnarono la ricerca nei successivi decenni coinvolgendo studiosi del calibro di A. Grothendieck (1928-2014), Medaglia Fields 1966. Una delle congetture di Weil era un analogo dell'ipotesi di Riemann per varietà algebriche multidimensionali su campi finiti. Il matematico che ebbe l'onore di provare questa congettura, nel 1973, si chiama P. Deligne, classe 1944, belga. Questo risultato gli valse la Medaglia Fields nel 1978. Deligne ottenne il suo risultato sfruttando la "Teoria degli Schemi" e la "Coomologia" introdotte dal suo maestro Grothendieck negli anni '60. Sulla scia del risultato di Deligne nel 1983 fu dimostrata la nota "congettura di Mordell", dal matematico G. Faltings, tedesco, classe 1954. Infine nel 1995 A. Wiles, classe 1953, dimostrò l'Ultimo Teorema di Fermat.

B. Segre (1903-1977) che aveva lamentato una scarsa attenzione verso le geometrie finite, aveva intuito che esse potessero avere una importanza essenziale. Infatti nel giro di pochi anni ci fu una vera e propria esplosione di questo campo di studi. Altri momenti di svolta ci furono negli anni '40 del '900. Ora racconteremo questi fatti e ne seguiremo, per quanto possibile, alcuni sviluppi.

Nel 1942 nacquero in Statistica problemi collegati con quello di Kirkman. Autori di questi studi erano R.A. Fischer (1890-1962) e F. Yates (1902-1994). Questi due importanti studiosi di Statistica svilupparono una teoria chiamata *Design of Experiments*, cioè "Teoria della Progettazione di Esperimenti". In verità già prima, nel 1935, Fischer aveva pubblicato un libro fondamentale sulla progettazione di test statistici. Più tardi a Calcutta il matematico R.C. Bose, che di Fischer era stato allievo, sviluppò ulteriormente le idee del Maestro. Dal grande lavoro di R.C. Bose seguì un ulteriore slancio per le geometrie finite. Infatti Bose mise in luce i legami tra la teoria di Fischer e la *Teoria dei Codici* che andava sviluppandosi a seguito del lavoro [34] di C.E. Shannon (1916-2001), del 1948, che inaugurò la teoria dell'informazione. Di codici si era occupato già un po' prima [15] il matematico R.W. Hamming (1915-1998), che aveva fondato la *Teoria della Correzione degli Errori*, scoprendo una classe di codici correttori binari che portano il suo nome. La teoria dei *codici lineari* muove da qui, ed è strettamente legata allo studio di *archi* e *calotte* nei piani e negli spazi di Galois (sono insiemi intersecati in al più due punti dalle rette dello spazio). Ma i codici sono anche legati alla geometria algebrica sui campi finiti. Molte applicazioni di questa geometria algebrica consistono nella costruzione di codici correttori di errori nella trasmissione dei messaggi. In particolare, negli anni '70, fu la scuola russa a sviluppare il legame tra codici e geometria algebrica. Ma la teoria dei codici è strettamente legata anche alla teoria dei disegni, su cui vogliamo fermarci un po'.

Un *t-disegno* è un insieme di *punti* $\mathcal{P}$ con associata famiglia $\mathcal{B}$, di parti di $\mathcal{P}$ dette *blocchi* (tutti equipotenti), in modo che i sottoinsiemi con t punti siano contenuti in un numero fisso di blocchi. Il problema importante con queste strutture è quello della loro costruzione e descrizione a meno di isomorfismi. È una questione difficile e fino agli anni '80 del '900 non si era sicuri della esistenza di t-disegni con $t \geq 6$. Poi nel 1983 si costruì un 6-disegno non banale. Nel 1987 fu dimostrato, contro le attese, che un disegno non banale esiste per ogni t. Una questione importante in teoria dei disegni è l' esistenza o non esistenza di piani proiettivi di dato ordine. Chiaro che se un intero q è potenza di primo, allora un piano di tale ordine esiste: si prende $\mathrm{PG}(2, q)$. Ma negli altri casi non è semplice. C'è però un teorema del 1949 di R.H. Bruck e H.J. Ryser che ci assicura la non esistenza di un piano proiettivo di ordine q, quando q è congruo 1 oppure 2 modulo 4 e non è somma di due quadrati. Sicché se $q = 6$ il piano non esiste; e per tutti gli interi maggiori di 1, fino a 9, escluso 6, ovviamente si. Per $q = 10$ fino al 1988 non c'era risposta. Nel 1988 il risultato della non esistenza di un piano proiettivo di ordine 10 fu opera di tre matematici (C.W.H. Lam, L. Thiel, S. Swiercz) e un supercomputer. La non esistenza del piano proiettivo di ordine 10 si conseguì in più tappe, a cominciare dagli anni settanta, utilizzando anche tecniche di teoria dei codici. Quanto alla costruzione di disegni a partire dai codici lineari uno dei risultati più importanti risale al 1969 (E.F. Assmus-H.F. Mattson). Ma è possibile anche il processo inverso: partire da un disegno e costruire un codice. Una curiosità interessante da riportare è questa: c'è un solo 5-disegno con parametri $(24, 8, 1)$ (ossia con 24 punti, blocchi di cardinalità 8 e tale che per 5 punti passi un unico blocco). Si chiama *disegno di Mathieu* $\mathcal{M}_{24}$. Il codice binario associato al disegno $\mathcal{M}_{24}$, si indica con $\mathcal{G}_{24}$, ed è chiamato *codice binario di Golay esteso*. Il codice $\mathcal{G}_{24}$ è uno dei codici che la NASA utilizzò negli anni '80, nel programma spaziale *Voyager*, e fu usato per trasmettere sulla Terra immagini di Giove e Saturno.

Torniamo agli anni '40. Durante la Seconda guerra mondiale, siamo nel 1944, J. von Neumann (1903-1957) e O. Morgenstern (1902-1977) pubblicarono il famoso libro *Theory of games and economic behavior* [25]. Il libro suscitò grande interesse in molti studiosi di varie discipline. Uno di questi era L.S. Shapley (1923-2016), il quale agli inizi degli anni '50 si propose di generalizzare le teorie esposte nel libro. Sulla scia delle idee proposte da Shapley furono introdotti i *blocking sets* nei piani di Galois. Sono insiemi, non contenenti rette, a intersezione non vuota con ciascuna delle rette del piano e possono essere introdotti anche negli spazi di dimensione maggiore di due, affini o proiettivi e anche rispetto ad altri sottospazi, non solo rispetto alle rette. Questi insiemi all'inizio, nel 1956, furono studiati in connessione con la teoria dei giochi cooperativi e si chiamavano *blocking coalition*. Il primo articolo [31] sull'argomento era di M. Richardson (1911-1968). Nell'articolo l'autore poneva il problema di calcolare la cardinalità minima di questi insiemi e dimostrava che il minimo numero di elementi di una coalizione bloccante (blocking coalition) in $\mathrm{PG}(2,3)$ è 6. M. Richardson utilizzò per i piani $\mathrm{PG}(2,3)$ e $\mathrm{PG}(2,4)$ una rappresentazione ciclica presa da J. Singer, in un articolo [35] che risaliva al 1938. Nel 1970 A.A. Bruen iniziò lo studio approfondito di questi insiemi e introdusse, appunto, il termine blocking sets. Poi nel 1973 in un lavoro [4] di Bruen e J. C. Fisher, furono unificate la teoria dei k-archi e la teoria dei blocking sets. Negli stessi anni il matematico ungherese L. Rédei (1900-1980) studiava alcune classi di polinomi sui campi finiti: i *polinomi lacunosi* [30]. Rédei mostrava, tra l'altro, che questi polinomi potevano essere utilizzati per risolvere questioni algebriche e geometriche sui campi finiti. Un po' più tardi Bruen e J.A. Thas capirono che i risultati di Rédei potevano essere interpretati in termini di blocking sets. Da quel momento in poi le tecniche polinomiali diventarono un nuovo strumento per lo studio dei blocking sets: l'idea è quella di associare a un insieme di punti un polinomio, e poi studiando il polinomio si analizza la struttura dell'insieme di punti.

Una cosa che balza agli occhi dal racconto precedente è il legame tra i vari indirizzi coinvolti: Disegni, Statistica, Codici, Calotte, Teoria dei Giochi, Blocking Sets. Ma non è tutto. C'è ancora un altro punto importante da discutere. Si tratta del legame tra le Scienze Fisiche e le Strutture Discrete.

La Fisica nel corso della storia si era sviluppata sul concetto di continuo matematico, a seguito della nascita del calcolo differenziale e integrale. I grandi successi e la potenza del "calcolo" avevano portato alla convinzione che il mondo fisico potesse essere dominato dalle equazioni differenziali. Ma gli sviluppi della meccanica quantistica e le teorie corpuscolari, il principio di complementarietà di N. Bohr spalancavano le porte al discreto: la realtà fisica non era più inquadrabile nel solo dominio del continuo. Quindi una matematica discreta poteva avere una importanza di primo piano per la comprensione del mondo fisico. Un elemento a conferma di questo veniva dal fatto che due astronomi finlandesi avevano studiato e portato dei contributi notevoli allo studio delle geometrie sui campi di Galois. G. Järnefelt (1901-1989) e P. Kustaanheimo (1924-1997) in un articolo [17] del 1949 presentarono la seguente congettura: nel piano di Galois $\mathrm{PG}(2,q)$, con q dispari, ogni ovale è una conica. (Un *ovale* è un insieme di $q+1$ punti di cui mai tre allineati). L'articolo dei due astronomi arrivò sulla scrivania del matematico Marshall Hall Jr. (1910-1990), che doveva recensirlo per la rivista Mathematical Review. M. Hall Jr. lesse l'articolo e si pronunciò sulla congettura: "Il recensore ritiene che la congettura non sia plausibile". C'è una versione di un noto motto, attribuito ad Albert Einstein, secondo cui non bisognerebbe mai dire che una cosa è impossibile; perché se si dice, presto o tardi, qualcuno arriva e la fa. Infatti nel caso della congettura dei due astronomi arrivò B. Segre. Questi si appassionò al problema e si mise a lavoro. Nel 1954 per una rivista, e l'anno dopo per un'altra pubblicò l'articolo [32] in cui dimostrava che la congettura dei finlandesi era vera. A recensire l'articolo di Segre per Mathematical Review c'era anche questa volta M. Hall Jr. Possiamo immaginare l'imbarazzo di M. Hall Jr., che comunque se la cavò con ironia: "Il fatto che la congettura sembrasse non plausibile al recensore, pare sia stato un parziale stimolo per l'autore ad intraprendere il lavoro. Sarebbe molto gratificante se anche in futuro espressioni di dubbio si rivelassero cosi fruttuose".

Segre annunciò il suo teorema al Congresso Internazionale di Matematica del 1954, che si tenne ad Amsterdam. Poi nel 1957 a Palermo e Messina si tenne un importante Convegno Internazionale sui Reticoli e le Geometrie Proiettive. Nel 1963 a Roma si svolse il Simposio internazionale sulle geometria finite. Naturalmente questi incontri, ed altri di cui diremo, erano anche un chiaro segnale di grande vitalità e progressi della ricerca nel settore.

Con il risultato importante ottenuto da Segre, che caratterizzava con una semplice proprietà geometrica le coniche, si inaugurò un nuovo campo di ricerche che in termini generali può essere così descritto: caratterizzare con proprietà di incidenza varietà algebriche notevoli. Cerchiamo di seguire un po' gli sviluppi di questa linea di ricerca. I maggiori esponenti che raccolsero la sfida furono A. Barlotti (1923-2008) e G. Tallini (1930-1995) e successivamente J.A. Thas e G. Korchmàros. Il lavoro di questi maestri diventò poi il punto di partenza per molti loro allievi. Desideriamo in special modo menzionare, perché legati alla nostra personale esperienza, i principali allievi del periodo napoletano di Tallini: F. Mazzocca, N. Melone, D. Olanda; l'allievo di Barlotti: G. Lunardon; e il primo allievo di Thas: F. De Clerck.

Uno dei primi risultati del campo di ricerche aperto da B. Segre, fu la caratterizzazione delle quadriche ellittiche di $\mathrm{PG}(3, q)$, con q dispari. Sono tutte e sole le (q^2+1)-calotte dette anche *ovoidi* (ossia insiemi massimali di punti a tre a tre non allineati). Ne furono autori nel 1955 Barlotti e indipendentemente G. Panella (1929-1993). Il discorso sulle quadriche in $\mathrm{PG}(n, q)$, portato avanti a più riprese da Tallini, fu completato in un lavoro del 1957. Nello stesso anno al Convegno Internazionale sui Reticoli e le Geometrie Proiettive, a Palermo e Messina, Tallini comunicò di avere caratterizzato in modo grafico la superficie di Veronese di $\mathrm{PG}(5, q)$. Nel settembre del 1973 un evento importante per la geometria combinatoria. B. Segre compiva settant'anni e a Roma presso l'Accademia Nazionale dei Lincei, fu organizzato un Convegno Internazionale di Geometrie Combinatorie. C'erano proprio tutti i pezzi da novanta del settore, fu un evento importante. Nel Comitato Scientifico, di cui Segre era Presidente, c'erano tra gli altri E. Bombieri (prima Medaglia Fields italiana, 1974), L. Lombardo Radice, G.C. Rota, G. Ricci. Si fece il punto sulle ricerche nel settore, che si era intanto sviluppato in varie direzioni, si riferì sulle caratterizzazioni delle varietà algebriche negli spazi di Galois. E naturalmente molte altre cose si fecero in quelle giornate di studio e di incontri. Qui ci interessa segnalare, in particolare, un paio di risultati che furono comunicati: caratterizzazione delle curve razionali normali (Segre e Thas), e caratterizzazione delle varietà hermitiane di $\mathrm{PG}(r, q)$, con q quadrato (M. Scafati Tallini). Nei primi anni '80 poi si caratterizzarono graficamente le *varietà di Grassmann*. E su questa linea si arrivò, attraverso alcuni passi intermedi, agli anni '90 con la caratterizzazione degli *spazi di Grassmann topologici* e degli *spazi di Grassmann ordinati*. Il matematico P.V. Ceccherini nel 1998 scrisse: "I teoremi di caratterizzazione di varietà algebriche di uno spazio di Galois sono senza dubbio fra i risultati più significativi di questo secolo riguardanti le geometrie sui campi finiti".

Un altro appuntamento importante da segnalare, perché riaffermava la combinatoria come disciplina matematica matura e ne festeggiava i successi, fu il convegno dell'Advanced Study Institute che si tenne in Olanda nel 1974. Il convegno fu organizzato da M. Hall Jr. ed era rivolto ai giovani ricercatori di cinque sezioni: geometrie finite, teoria dei codici, teoria dei disegni, teoria dei grafi, combinatoria gruppale. Poi a partire dal 1981 ebbe inizio la serie di convegni *Combinatorics* che ancora oggi continua, insieme a molte scuole estive, seminari ed altre iniziative di carattere nazionale, europeo e internazionale. Il primo Combinatorics fu dedicato a Segre, che nel 1978 mancò; e quello del 1996 fu dedicato a Tallini, che era scomparso prematuramente l'anno prima. Nel Combinatorics precedente del 1994 il primo autore tenne la sua prima comunicazione a un convegno internazionale. Sembra opportuno riportare qui il seguente aneddoto: il prof. Tallini era già su una sedia a rotelle a causa dell'avanzare della sua malattia. Nonostante ciò, a distanza di oltre 25 anni da allora, il primo autore ricorda che a termine della sua comunicazione Tallini fu la persona nell'audience che riuscì ad esprimere, con l'uso dei soli occhi, il maggior entusiamo per la comunicazione ascoltata.

In questi ultimi anni, per stare alla geometria degli spazi di Galois, importanza crescente hanno acquisito particolari insiemi detti *linear sets*. Si tratta di una nozione che generalizza quella di sottogeometria di uno spazio proiettivo. La prima apparizione in letteratura risale al 1982 in un articolo [3] di A.E. Brouwer e H.A. Wilbrink in cui vengono costruiti esempi di blocking sets di Rédei. Tuttavia il termine linear sets fu usato per la prima volta in un lavoro [22] di G. Lunardon del 1999. La ragione del largo impiego dei linear sets risiede nel fatto che permettono di costruire o caratterizzare una serie di oggetti geometrici notevoli: blocking sets, ovoidi, semifield flocks, finite semifields, C_F^m*-sets*.

Ci avviamo alla conclusione. Abbiamo avuto modo di parlare del legame stretto tra alcune aree di quella parte della geometria che chiamiamo Geometria Combinatoria. La Geometria Combinatoria a sua volta è connessa con molte importanti discipline matematiche. Ha stabilito legami "naturali" con la *Geometria Algebrica*, con la *Teoria degli Anelli* e ovviamente con la *Teoria dei Gruppi*. Per esempio nel 1982 la classificazione dei gruppi semplici finiti sfruttava ampiamente idee e metodi combinatori: Geometrie, Grafi, Codici, Disegni. Altre discipline con cui la combinatoria ha legami sono la *Topologia Algebrica*, le *Algebre di Lie*. La verità è che idee e metodi combinatori attraversano tutti i settori della Matematica. Allargando un po' lo sguardo e uscendo dalla Matematica, abbiamo già parlato della necessità di modelli discreti in ambito fisico e statistico. Ma anche la genetica moderna offre un altro esempio importante: il linguaggio dei geni è un linguaggio discreto. L'elettronica e i computer sono certamente altri settori che hanno portato nuovo interesse per i problemi combinatori della geometria finita. La ricerca operativa, anche, ha sempre avuto legami stretti con la Combinatoria. E certamente trascuriamo altre connessioni.

Nel 1944 J. von Neumann e O. Morgestern, nel loro libro famoso, scrivevano queste parole. "L'importanza dei metodi matematici sembra spostarsi verso la combinatoria e la teoria degli insiemi, e allontanarsi dall'algoritmo delle equazioni differenziali che domina la Fisica Matematica". Anche altri studiosi erano convinti che in un futuro prevedibile la Matematica del discreto sarebbe stata uno strumento sempre più decisivo nel tentativo di capire il mondo. La storia che abbiamo ricostruito, oltre ad informarci di molti ed importanti sviluppi della Scienza Combinatoria, conferma quanto lontano vedessero certi uomini di genio: L. Eulero, A. Cayley, J.J. Sylvester, G.H. Hardy, J.E. Littlewood, P. Erdös, J. Von Neumann, B. Segre.

Questo settore di studi, nonostante i pregiudizi degli inizi, secondo i quali non si trattava di vera Matematica ma di passatempi per signore o signori, o poco più, come testimoniava la sorte editoriale del problema delle studentesse di Kirkman è riuscito negli anni ad aquistare sempre maggiore importanza nell'ambito della Matematica anche grazie ad importanti applicazioni.

Nel 2003 il matematico P.J. Cameron, uno studioso del settore, commentava [5] così: "Gli studiosi di Combinatoria si sentono per la verità una comunità a sè stante all'interno della Matematica, in parte per via delle opinioni espresse con sufficienza da alcuni matematici. A tale atteggiamento si oppone però la sempre maggiore centralità della Combinatoria nella Matematica moderna e nelle applicazioni".

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

[1] U. Bottazzini, Il flauto di Hilbert. Utet, Torino, 2003.

[2] C. Boyer, Storia della matematica. Mondadori, Milano, 1980.

[3] A.E. Brouwer, H.A. Wilbrink, Blocking sets in translation planes. *J. of Geom.* 19 (1982) 200.

[4] A. Bruen, J.C. Fisher, Blocking Sets and Nets of order ten. *Advances in Matematics* 10, 317-320 (1973).

[5] P.J. Cameron, La grande scienza. Combinatoria. Storia della scienza (2003),
http://www.treccani.it/enciclopedia/la-grande-scienza-combinatoria_\%28Storia-della-Scienza\%29/

[6] A. Cayley, Chapters in the Analytical Geometry of m dimensions. *Cambridge Journal* 4 (1843).

[7] P.V. Ceccherini, Necrologio di Giuseppe Tallini. *Bollettino dell'Unione matematica Italiana* (8) 1-B (1998), 451-474.

[8] A. Collino, A. Conte, A. Verra, On the life and scientific work of Gino Fano *La Matematica nella Società e nella Cultura. Rivista dell'Unione Matematica Italiana* (7) 1 (2014), 99-137.

[9] G. M. Conwell, The 3-space PG(3,2) and its Group. *Annals of Mathematics* 11, (1910), 60-76.

[10] P. Dembowski, Finite Geometries, Springer 1968.

[11] G. Donati, N. Durante, Scattered linear sets generated by collineations between pencils of lines. *Journal of Algebraic Combinatorics*, 40 (2014) 1121-1134.

[12] G. Donati, N. Durante, A generalization of the normal rational curve in $PG(d, q^n)$ and its associated non-linear MRD codes. *Des. Codes Cryptogr.* 86 (2018), no. 6, 1175-1184.

[13] N. Durante, Geometry of sesquilinear forms. Notes of a course given at the Summer School "Finite Geometry and friends", Bruxelles. June 2019. Online August 31, 2019.

[14] G. Fano, Sui postulati fondamentali della geometria in uno spazio lineare ad un numero qualunque di dimensioni. *Giornale di Matematiche*, Vol. 30 (1892), p. 106-132.

[15] R. W. Hamming, Self-Correcting Codes, Case 20878, Memorandum 1130-RWH-MFW, *Bell Telephone*, 1947.

[16] G. Hessenberg, Über die projective Geometrie. *Sitzungsberichte der Berliner mathematischen Gesellschaft*, 1902-03, pp.36-40.

[17] G. Järnefelt, P. Kustaanheimo, An observation on finite geometries. *Comptes Rendus XI Congr. Math. Scand.*, Trodheim, 166-182, 1949.

[18] F. Kàrteszi, Introduzione alle geometrie finite. Feltrinelli, Milano, 1978.

[19] W. Kuyk, Il discreto e il continuo. Boringhieri, Torino, 1982.

[20] B. Levi, Fondamenti della metrica proiettiva. *Mem. della R. Acc. delle Scienze di Torino*, ser. 2, vol. 54 (1904); no. 21, La geometria proiettiva, pp. 42-44.

[21] B. Levi, Geometrie Proiettive di Congruenza e Geometrie Proiettive Finite. *Transactions of the American Mathematical Society*, Vol. 8, No. 3 (Jul., 1907), pp. 354-365.

[22] G. Lunardon, Normal spreads. *Geom. Dedicata* 75 (1999) 245-261.

[23] F. Mazzocca, Alcuni problemi di ricerca nelle geometrie di Galois, *Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8*, Vol. 4-B (2001), n. 1, p. 45-69.

[24] F. Mazzocca, Codici e Geometria. Periodico di Matematiche (2012), Vol. 1, 27-67.

[25] J. von Neumann, O. Morgenstern, Theory of games and economic behavior. Princeton, 1947.

[26] D. Olanda, Note di geometria combinatoria. Univ. Napoli, 1985.

[27] O. Polverino, Blocking set nei piani proiettivi. *Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 8*, Vol. 3-A-*La Matematica nella Società e nella Cultura* (2000), n. 1S, p. 181-184.

[28] O. Polverino, Linear sets in finite projective spaces. *Discrete Math.* 310, (2010) 3096-3107.

[29] D. K. Ray-Chaudhuri, R. M. Wilson, (1971). Solution of Kirkman's schoolgirl problem, in Combinatorics, University of California, Los Angeles, 1968. Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, Providence, Rhode Island: *American Mathematical Society*, XIX: 187-203, doi:10.1090/pspum/019/9959, ISBN 978-0-8218-1419-2.

[30] L. Rédei, Lacunary polynomials over finite fields. North Holland, Amsterdam, 1973.

[31] M. Richardson, On finite projective games. *Proc. Amer. Math. Soc.* , 7 (1956), 458-465.

[32] B. Segre, Sulle ovali dei piani lineari finiti. *Atti Acc. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Mat., Fis., Nat.* , 17 (1954), 141-142.

[33] B. Segre, Istituzioni di geometria superiore. Vol. II, Ist.G. Castelnuovo, Univ. Roma, 1965.

[34] C.E. Shannon, A Mathematical Theory of Communication. *The Bell System Thecnical Journal*, vol. 27, 379-656, July, October, 1948.

[35] J. Singer, A theorem in finite projective geometry and some applications to number theory. *Trans. Amer. Math. Soc.* Vol. 43 (1938) pp. 377-385.

[36] G. Tallini, Strutture grafiche proiettive. Liguori, Napoli, 1977.

[37] G. Tarry, Le problème des 36 officiers. *Compte Rendu de l'Association Française pour l'Avancement de Science Naturel*, v. 1, 1900, p. 122-123; v. 2, 1901, p. 170-203.

[38] A. Terracini, Necrologio di Gino Fano. *Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 3*, Vol. 7 (1952), n. 4, p. 485-490.

[39] O. Veblen, W.H. Bussey, Finite projective geometries, *Trans. Amer. Math. Soc.* Vol. 7 (1906) p. 241-259.

Nicola Durante

Nicola Durante si è laureato in Matematica a Napoli nel 1992 sotto la guida dei professori Domenico Olanda e Frank De Clerck con una tesi dal titolo: Piani inversivi e flock di quadriche ed è diventato dottore di ricerca in Matematica a Napoli nel 1997 con una tesi dal titolo: Spazi di cerchi.
Da aprile 2021 è professore ordinario di Geometria presso l'Università di Napoli Federico II.
La sua attività di ricerca riguarda principalmente lo studio di insiemi classici (coniche e loro generalizzazioni, quadriche e loro generalizzazioni, ovoidi di spazi polari classici, unital, archi massimali) in spazi proiettivi su campo finito.
È autore di oltre 60 pubblicazioni su riviste internazionali di settore.

Antonio Restaino

Antonio Restaino si è laureato con lode in Matematica all'Università degli Studi di Napoli "Federico II". Docente di Matematica e Fisica nei licei, è attualmente in servizio presso il Liceo Scientifico Carlo Pisacane di Padula (SA).