Matematica, Cultura e Società

Rivista dell'Unione Matematica Italiana

Daniela Ferrarello, Giuseppe Bellia, Giuseppe Pastura, Sebastiano Vespa

Vietato non toccare

Matematica, Cultura e Società. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **6** (2021), n.2, p. 161–182.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=RUMI_2021_1_6_2_161_0>

Matematica, Cultura e Società. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2021.

Matematica, Cultura e Società – Rivista dell'Unione Matematica Italiana
Serie I, Vol. 6, N. 2, agosto 2021, 161-182

Vietato non toccare

DANIELA FERRARELLO
Università di Catania
E-mail: daniela.ferrarello@unict.it

GIUSEPPE BELLIA
Catania

GIUSEPPE PASTURA
Catania

SEBASTIANO VESPA
Catania

Sommario: *Questo articolo racconta e mostra i risultati di un progetto portato avanti nella sezione carceraria di una scuola secondaria superiore, grazie al premio* "Italian Teacher Prize", *finanziato dal Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca. I protagonisti del progetto sono studenti reclusi – coautori dell'articolo – prima destinatari di una formazione matematica per la costruzione di un Laboratorio e Centro di formazione matematica e poi guide dello stesso Laboratorio. Il Laboratorio, intitolato "Vietato non toccare", come il progetto che ne ha permesso la creazione, espone, sotto forma di mostra, degli oggetti di interesse matematico, che però, rispetto a una mostra tradizionale, possono – anzi, devono – essere toccati dai visitatori.*

Abstract: *This paper show the development and results of a project carried out in a high-school inside a prison, thanks to the prize* "Italian Teacher Prize", *founded by Italian Ministry of Education, University and Research. The main characters of the project are students that are inmates – co-authors of the paper – who received a mathematical education to create a math lab and mathematics education centre, and then became guides for the lab. The name of the lab is "Vietato non toccare" (It is forbidden to do not touch), same name of the project that allowed its creation. The lab exhibits objects of mathematical interest, but contrary to traditional exhibitions, these object can – or rather must – be touched by visitors.*

1. – Introduzione

1.1 – *Nascita del progetto*

L'idea del progetto nasce nel 2016, anno in cui una degli autori, allora docente di matematica presso la sede carceraria di Cavadonna (Sr) dell'istituto alberghiero di Palazzolo Acreide (Sr), insegnava agli studenti reclusi usando la metodologia del Laboratorio di matematica (che sarà approfondita nella sezione 2.2), usando oggetti da far manipolare agli studenti per mediare concetti matematici. Nel maggio del 2016, a seguito di una visita a una mostra dedicata ad Archimede e Leonardo, in cui era severamente *vietato toccare* gli oggetti in mostra, la docente ebbe l'idea di creare una mostra/laboratorio in cui gli oggetti potevano, e anzi dovevano, essere toccati, dal nome "*Vietato non toccare*". Pochi giorni dopo, il Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca comunicò l'istituzione di un premio dal nome "*Italian Teacher Prize*", gemellato con il *Global Teacher Prize*, teso a raccontare

Accettato: l'8 luglio 2021.

"le storie e le esperienze di quegli insegnanti che sono riusciti ad ispirare in modo particolare i loro studenti. Docenti che hanno prodotto cambiamenti significativi all'interno della loro comunità scolastica". La docente parlò del premio ai suoi studenti di Cavadonna e uno di loro, entusiasta, manifestò la volontà di "nominare" la docente; cosa non possibile, dato che le nomination erano previste sulla piattaforma online e le carceri sono sprovviste di rete internet (fino a quel momento!). Fu così che la docente, senza credere che avrebbe potuto vincere il premio, ma più per dar voce a quello studente, si candidò al premio, proponendo, in caso di vincita, proprio la creazione di una mostra/laboratorio dal nome "Vietato non toccare", i cui protagonisti sarebbero stati gli studenti reclusi, guide poi del Centro di formazione per studenti e docenti visitatori. Nel maggio del 2017, quando la docente era già stata assegnata alla casa circondariale di Catania Bicocca, sede carceraria dell'istituto alberghiero "K. Wojtyla" di Catania, arrivò la notizia della vittoria del premio.

1.2 – *Obiettivi e fasi del progetto*

Obiettivo primario dell'intero progetto è mettere gli studenti reclusi nelle condizioni di essere e di sentirsi studenti come tutti gli altri, poiché, come recita l'articolo 34 della Costituzione Italiana, "la scuola è aperta a tutti", tutti hanno il diritto all'istruzione, alla formazione e alla crescita e non ci sono scuole (e studenti) di serie A e di serie B. L'obiettivo principale della scuola (trasversale rispetto all'apprendimento delle varie discipline) è quello di formare individui che siano cittadini attivi e nel pieno possesso delle proprie facoltà. Come già diceva Dewey "Quale è dunque il vero significato della preparazione sul piano educativo? In primo luogo, un individuo, giovane o vecchio, deve trarre dalla sua esperienza presente tutto quanto essa gli offre in quel momento... solo estraendo in ogni momento il pieno significato di ogni esperienza presente ci prepariamo a fare altrettanto nel futuro. È questa l'unica preparazione che a lungo andare concluda qualche cosa" (Dewey 1949, p. 33, 34). Gli alunni quindi devono essere messi nelle condizioni di diventare individui capaci di prendere decisioni positive per la loro vita futura e rispettose degli altri, non inconsapevolmente e per scelta imposta, ma con cognizione di causa. Tale obiettivo deve essere perseguito anche nelle scuole carcerarie, perché i detenuti prendano coscienza di non essere "condannati" ma di avere anche loro, come i ragazzi della scuola, l'opportunità di crescere e migliorare. La qualità dell'educazione in termini delle sue conseguenze sociali è stata intuita e studiata già in (Mellin-Olsen, 1981): c'è necessità di ripensare all'insegnamento prendendo in considerazione la dimensione sociale, in vista del *lifelong learning* auspicato dall'Europa per tutti gli studenti. Questo è valido anche per la matematica, materia purtroppo spesso relegata a un'arida memorizzazione di formule e una cieca esecuzione di procedure, ed è valido anche (anzi, diremmo soprattutto) nelle scuole carcerarie, spesso dimenticate. Diverse attività matematiche volte agli studenti reclusi sono state portate avanti con successo in carceri svedesi e hanno dato luogo ai lavori (Helenius & Ahl, 2017) e (Ahl & Helenius, 2020). Secondo gli autori, che hanno lavorato con studenti reclusi adulti con esperienze scolastiche fallimentari alle spalle, questa seconda opportunità scolastica rappresenta una importante occasione di "cambio di identità in due passaggi; primo, quando si decide di cogliere l'opportunità di studiare matematica, e secondo, quando si ha successo. Questo cambio di identità può dare agli studenti reclusi maggiori opportunità di rientrare in società". (Helenius & Ahl, 2017, p. 247). Poiché le storie scolastiche fallimentari che gli adulti portano con sé rendono fragile la motivazione (Ahl et al., 2017), è importante agire stimolando gli studenti verso obiettivi di padronanza (piuttosto che obiettivi di prestazione), in grado di incoraggiarli. "Questa fragilità motivazionale può essere gestita attraverso attività didattiche scelte con cura che si sposino con il potenziale degli studenti a favore del coinvolgimento nell'apprendimento della matematica" (Ahl & Helenius, 2020, p. 2). Il progetto "Vietato non toccare" intende migliorare la motivazione degli studenti detenuti nell'apprendimento della matematica attraverso la didattica laboratoriale e porre gli stessi nelle condizioni di migliorare il senso di autoefficacia, cioè la convinzione dell'individuo riguardo al successo nella gestione di un problema (Bandura, 1997), attraverso la responsabilità data dall'essere formatori.

Dunque il progetto, che ha costruito una mostra/laboratorio di macchine matematiche, consta delle seguenti fasi:

Fase 0
- Individuazione del "team macchine", per la progettazione 3d e la realizzazione delle macchine, oggetto della mostra/laboratorio;
- Individuazione del "team formazione" per la formazione degli studenti/detenuti e dei docenti visitatori;
- Progettazione in 3d delle macchine, presentate brevemente nella sezione 1.3 e descritte nella sezione 3, a cura del "team macchine".

Fase 1
- Realizzazione delle macchine da parte degli studenti/detenuti coordinati dal "team macchine";
- Formazione matematica degli studenti/detenuti da parte delle docenti del "team formazione".

Fase 2
- Formazione studenti da parte degli studenti/detenuti, divenuti studenti/guide: visite in carcere di studenti visitatori provenienti da scuole e università;
- Formazione docenti visitatori da parte delle docenti del "team formazione";
- Disseminazione nel territorio di buone pratiche di insegnamento/apprendimento.

La formazione degli studenti/detenuti (fase 1) è avvenuta seguendo un metodo didattico, ispirato dalle teorie esposte nella sezione 2. Tale metodo didattico (didattica laboratoriale e uso di artefatti, in particolare) è in linea con le recenti ricerche in didattica della matematica, che ne garantiscono la bontà. Gli studenti/detenuti non hanno ricevuto una formazione specifica come guide, se non l'indicazione di procedere con i visitatori con lo stesso metodo didattico con il quale avevano imparato. Una discussione sul metodo è stata portata avanti poco prima dell'inaugurazione della mostra/laboratorio. Durante la fase 2, i visitatori sono stati ragazzi della scuola secondaria di secondo grado, studenti adulti detenuti presso la stessa casa circondariale della scuola primaria, secondaria di primo grado e secondaria di secondo grado, accompagnati dai loro docenti, studenti universitari, accompagnati dai loro docenti, docenti dalla scuola dell'infanzia alla scuola secondaria di secondo grado (docenti di matematica, ma non solo), docenti universitari, compresi presidenti di corso di laurea e direttori di dipartimento. Da subito gli studenti/guide hanno mostrato padronanza degli argomenti e disinvoltura con gli studenti visitatori e nel corso delle visite hanno acquisito una sempre maggiore sicurezza e autonomia, riuscendo a interagire positivamente e senza timore anche con i docenti accompagnatori, con i quali hanno interagito le docenti del "team formazione". Durante le visite, condotte, come detto, con il metodo didattico esposto nella sezione 2, oltre a veicolare concetti matematici, è stato veicolato un metodo di insegnamento/apprendimento, che i docenti di matematica visitatori possono portare nelle loro prassi didattiche.

In definitiva, il progetto auspica che la creazione della mostra/laboratorio riesca a:

a. Permettere agli studenti reclusi di sperimentare il successo e un senso di autoefficacia in un terreno, nuovo a molti di loro, che è quello della cultura scientifica e della sua diffusione, donando agli studenti, spesso etichettati solo come "detenuti", la nuova identità di "formatori";

b. Promuovere lo scambio di esperienze tra "il dentro e il fuori". Dall'incontro tra ragazzi e docenti da fuori e gli studenti dentro ci si aspetta un arricchimento reciproco in termini di vissuto umano;

c. Diffondere buone pratiche di insegnamento/apprendimento nel territorio, diffondendo il metodo didattico utilizzato dalle guide con i visitatori durante le visite alla mostra. Questo consente alla scuola carceraria di Bicocca di diventare un punto di riferimento per le realtà scolastiche del territorio, e ai docenti visitatori di replicare nelle loro scuole le esperienze didattiche apprese.

1.3 – *Oggetti in mostra*

La mostra si articola in quattro sezioni:

1. Superfici non orientabili: nastro di Möbius, bottiglia di Klein;
2. Pantografi per trasformazioni geometriche: pantografi per l'omotetia, la simmetria assiale e la simmetria centrale;
3. Conicografi: ellissografi, iperbolografo e parabolografo;

4. Macchine di Archimede: specchio parabolico, coclea e leva.

Le sezioni sono state scelte opportunamente per veicolare non solo contenuti matematici, ma anche riflessioni sulla vita, strutturando, nel corso delle visite, un percorso metaforico, oltre che matematico, che sarà approfondito nella sezione 3. Il percorso didattico, seguito durante le visite, è lo stesso portato avanti dalle insegnanti (Daniela Ferrarello e Maria Flavia Mammana), nel corso della formazione matematica degli studenti/guide (coautori di questo articolo), che da formati sono diventati formatori. Quasi tutti gli oggetti (tutti, a eccezione del nastro di Möbius e dello specchio parabolico) sono stati realizzati con una stampante 3d, acquistata coi fondi destinati al progetto e installata nella casa circondariale. E quasi tutti gli oggetti (tutti, a eccezione delle superfici non orientabili e della coclea) hanno un corrispettivo virtuale realizzato con il software GeoGebra. La scelta di avere anche un corrispettivo virtuale deriva dalla considerazione che gli oggetti matematici sono eterni e perfetti, ma, purtroppo, non esistono, mentre gli oggetti fisici esistono, ma purtroppo, non sempre funzionano alla perfezione (Châtelet, 1987, p. 1). L'oggetto virtuale, che ha in sé la perfezione della matematica e la praticità della fisica, consente un miglior apprendimento poiché aiuta il fruitore a ricostruire mentalmente il concetto matematico, mediato dall'oggetto fisico (l'artefatto).

2. – Quadro teorico di riferimento e metodo didattico

In questa sezione verranno approfondite le teorie usate nel corso del progetto e in questo articolo: insegnamento orizzontale, laboratorio di matematica, ergonomia cognitiva.

Queste tre teorie hanno ispirato il metodo didattico: i concetti matematici sono stati introdotti attraverso un problema da affrontare, la cui risoluzione è stata mediata dalla manipolazione di artefatti (le macchine). Il tutto in un ambiente collaborativo, in cui chi apprende si confronta con gli altri, proponendo idee, strategie di risoluzione, congetture. Chi insegna guida la discussione matematica, suggerendo, se necessario, dove concentrare l'attenzione. Durante il processo di insegnamento/apprendimento c'è uno scambio di informazioni ed esperienze reciproco, che porta entrambe le parti ad imparare qualcosa. Volutamente abbiamo parlato di "chi apprende" e "chi insegna", poiché nessuno dei protagonisti del progetto è stato solo studente o solo docente. Tutti hanno appreso e insegnato. In particolare, gli studenti/detenuti hanno appreso durante la fase 1 del progetto e insegnato durante la fase 2, rivestendo prima il ruolo di "chi apprende" e poi di "chi insegna".

2.1 – *Insegnamento orizzontale*

Questa teoria, (Ferrarello et al., 2013) è un modello di insegnamento/apprendimento, che si contrappone nettamente alla lezione tradizionale con modello trasmissivo, "Insegnamento verticale", in cui l'insegnante travasa dall'alto alcune delle sue conoscenze verso lo studente. Nell'insegnamento orizzontale, invece, i due insiemi delle conoscenze dello studente e del docente sono allo stesso livello e hanno una intersezione (Fig. 1).

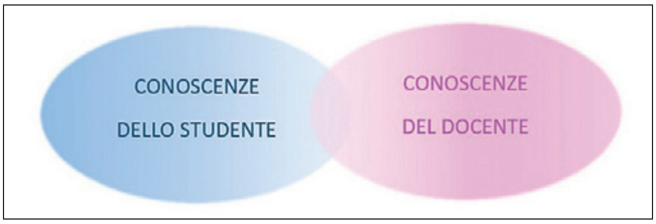

FIGURA 1 – Fase preliminare dell'insegnamento orizzontale.

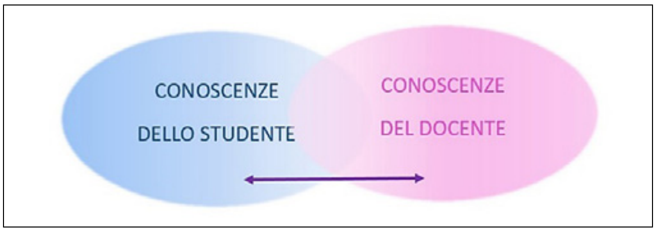

FIGURA 2 – Fase di apprendimento dell'insegnamento orizzontale.

Il docente entra dentro questa intersezione e la espande. Questo vuol dire:

a. Entrare nell'intersezione significa conoscere i propri studenti, conoscere le loro vite, i loro interessi, esplorare i loro stili di apprendimento. E quindi adottare trasposizioni didattiche adeguate a quelle vite, quegli interessi, quegli stili di apprendimento. Ad esempio, se uno studente apprende meglio con immagini si userà il canale dell'intelligenza visuale.

b. Espandere l'intersezione non significa solo dare nuove nozioni ma significa innanzitutto condurre lo studente all'espansione del proprio modo di apprendere, quindi nell'esempio dello studente che apprende bene per immagini, si procederà iniziando per immagini per poi condurlo a ragionamenti di tipo logico-matematico.

Va notato che quando l'intersezione si espande non è escluso che si espanda nell'altro senso, dallo studente al docente, che, cioè, anche il docente impari qualcosa (vedi doppia freccia orizzontale nella figura 2). È, anzi, questa la caratteristica più importante dell'insegnamento orizzontale, poiché apprendono entrambe le parti (docente e studenti) e si può davvero parlare di un processo di insegnamento/apprendimento.

2.2 – *Laboratorio di Matematica*

Il Laboratorio di Matematica, fortemente consigliato dalle Indicazioni nazionali ministeriali italiane, per tutti i livelli scolari, dalla primaria alla secondaria di secondo grado, "non è un luogo fisico diverso dalla classe, è piuttosto un insieme strutturato di attività volte alla costruzione di significati matematici" (Anichini et al., 2004). La costruzione dei significati, nel Laboratorio di Matematica, è strettamente legata a un problema da affrontare, interagendo insieme ai compagni di classe, sotto la guida del docente e con l'uso di oggetti da manipolare. Qui in particolare ci urge sottolineare l'importanza dell'interazione con gli oggetti e tra le persone. Gli oggetti manipolabili in un Laboratorio di Matematica possono essere sia oggetti poveri, come carta da piegare, riga, compasso, che oggetti tecnologici e digitali, come calcolatrici, software di geometria dinamica, fogli elettronici. Nel nostro caso abbiamo usato macchine matematiche e software di geometria dinamica. Il Laboratorio di Matematica è assimilabile all'ambiente tipico della bottega rinascimentale, in cui si imparava vedendo fare e facendo, e non ricevendo lezioni teoriche. Molte discipline (forse tutte?) si imparano meglio praticando, piuttosto che ascoltando lezioni. Ma ancora alcuni insegnanti credono che sia possibile imparare la matematica solo guardando matematica già pronta e perfettamente impacchettata dagli insegnanti, e, prima di loro, dagli autori di libri di matematica. In realtà il miglior risultato che si può avere da questo insegnamento di concetti impacchettati è che gli alunni studino matematica, ma raramente essi faranno matematica. Lo studente dovrebbe scoprire da sé i concetti, anche se certamente aiutato e supportato dall'insegnante e dai compagni. L'insegnante nel Laboratorio di Matematica non fa al posto dello studente, ma incoraggia, corregge, loda per i risultati ottenuti. Inoltre, si impara anche confrontandosi con i compagni, con cui è bene dialogare, scambiarsi idee, possibili soluzioni al problema posto. E non importa davvero che le idee scambiate siano subito corrette, è più importante che dallo scambio di idee nascano nuovi modi di vedere, nuove prospettive che ci fanno vedere il compito (il problema posto) sotto una luce che prima non avevamo considerato. Il "toccare con mano" e il confronto con gli altri sono importantissimi, non solo perché molte ricerche in didattica della matematica evidenziano un miglior apprendimento della disciplina, ma perché abituano lo studente a non essere passivo fruitore di una lezione recitata a memoria, ma protagonista attivo del proprio apprendimento, e, analogamente, protagonista attivo della propria vita. Ecco perché questa metodologia di insegnamento è particolarmente indicata in un contesto come quello delle scuole carcerarie, in cui spesso gli studenti si sentono "condannati", vittime delle scelte che hanno fatto o si sono trovati a fare, senza possibilità di riscatto, perché la vita ha deciso per loro. Essere attivi in classe abitua gli studenti a sentirsi attivi anche nella vita, protagonisti di nuove scelte. E per intraprendere nuovi cammini è fondamentale vedere nuove vie, quelle che si aprono alla nostra vista man mano che ci abituiamo a guardare con gli occhi dell'altro, senza verità imposte dall'alto, ma grazie a opinioni e strategie condivise. Per gli studenti/guide, il fattore relazionale è forse ancora più importante, poiché nella quotidianità si ritrovano a contatto sempre con le stesse persone. Le attività di formazione per gli insegnanti e gli studenti visitatori li mettono a contatto con realtà nuove, da cui è possibile imparare, ma a cui è possibile anche insegnare, scambiare non solo informazioni di carattere matematico, ma anche punti di vista, quindi dare e acquisire nuove prospettive, e crescere e far crescere.

2.3 – *Ergonomia cognitiva*

La forte volontà di utilizzare oggetti nelle attività contenute in questo articolo induce una riflessione a priori sull'efficacia didattica degli stessi. Infatti, non necessariamente la manipolazione di oggetti conduce automaticamente alla comprensione di significati matematici. Come già suggerito da Vygotskij, precursore dei tempi e definito come "il Mozart della psicologia", un concetto scientifico può essere mediato, ovvero compreso, oltre che grazie all'interazione sociale, anche grazie alla mediazione di un segno (mappe concettuali, diagrammi, simboli matematici, linguaggio) che è considerato uno "strumento durante l'attività psicologica, analogamente al ruolo di un utensile nel lavoro" (Vygotsky, 1978, p. 52). In particolare i segni possono essere anche oggetti fisici detti artefatti. Il concetto di artefatto è studiato anche da Rabardel, che lo definisce come un oggetto, materiale o immateriale, concepito per svolgere una determinata attività, per risolvere un determinato problema, se utilizzato nei modi in cui il suo uso è stato concepito: il funzionamento in atto dell'artefatto è guidato da conoscenze esplicite, teoriche o pratiche, esperienze personali oppure sociali, che guidano l'utente a un utilizzo coerente con il modo in cui il suo funzionamento è stato concepito, consentendo di svolgere l'attività per cui è stato pensato. In particolare ciò può avvenire quando l'attività è volta all'acquisizione di una conoscenza matematica (Rabardel & Samurcay, 2001). Per esempio l'oggetto compasso è costruito proprio con l'intento di disegnare circonferenze. Ma oltre alla componente oggettiva, cioè come è fatto l'oggetto, è importante anche la componente soggettiva, cioè come l'oggetto viene usato (Rabardel, 1995). Se infatti usassimo il compasso come una matita, senza puntare l'ago sul foglio, non avremmo usato l'artefatto nel modo "corretto", cioè nel modo che ci fa disegnare circonferenze, azione per la quale era stato concepito. Dunque non necessariamente un artefatto concepito per l'acquisizione di un concetto matematico è in grado di mediare il concetto. E solo in questo caso l'artefatto viene chiamato *strumento* (Verillon & Rabardel, 1995). Tornando all'esempio del compasso, potremmo disegnare una circonferenza anche semplicemente usando un bicchiere perfettamente rotondo, ma il bicchiere non mi dice nulla su cosa sia una circonferenza, ma semplicemente ne disegna una. Invece, se usiamo il compasso fissando la punta metallica in un punto (il centro) e facciamo ruotare la mina mantenendo costante l'apertura del compasso (il raggio) è possibile costruire mentalmente il concetto di circonferenza (il luogo dei punti che hanno distanza fissata dal centro). Il processo che porta un artefatto a diventare strumento prende il nome di *genesi strumentale* (Verillon & Rabardel, 1995). Potremmo dire che quando si verifica il processo di genesi strumentale l'artefatto, divenendo strumento, ha mediato il concetto matematico ed è stato efficace. Molti ricercatori in didattica della matematica hanno studiato il ruolo di artefatti e strumenti, e di segni, in generale, nell'apprendimento della matematica. L'ipotesi è che l'uso di artefatti possa aiutare nella comprensione di quei concetti matematici che sono l'obiettivo dell'azione didattica pensata. Un lavoro che sviluppa quanto qui accennato, studiando come la conoscenza personale che emerge dall'uso di un artefatto possa evolvere verso una conoscenza matematica, anche attraverso il ruolo di processi semiotici è quello di Bartolini Bussi & Mariotti (Bartolini Bussi & Mariotti, 2009). Particolari artefatti sono le macchine matematiche. Uno studio sulle macchine matematiche, in particolare, è affrontato in (Bartolini Bussi & Maschietto, 2006), in cui viene anche data la definizione di macchina matematica come un artefatto che obbliga un punto, un segmento o una figura a muoversi nello spazio o a subire trasformazioni seguendo una legge matematicamente determinata. Spesso una macchina matematica è composta da aste di varie lunghezze, unite tra loro tramite cerniere, secondo le descrizioni contenute nella letteratura scientifico-tecnica di un periodo che va dalla Grecia classica fino ai primi del '900. Le macchine matematiche possono essere di vari tipi (pantografi, per realizzare trasformazioni geometriche; conicografi, per tracciare coniche; prospettografi, per rappresentare oggetti tridimensionali su un piano; risolutori di problemi, realizzati per risolvere ad esempio i problemi classici dell'antichità). Nonostante negli ultimi anni a scopo didattico si sia diffuso soprattutto l'uso di tecnologie digitali, le macchine matematiche ricoprono ancora un ruolo fondamentale nel processo di apprendimento dei concetti matematici. Esse infatti suscitano interesse, creando un'immagine piacevole della matematica, stimolano, attraverso la manipolazione fisica degli oggetti, la creatività degli studenti e la riflessione sul loro funzionamento. Infatti, la comprensione di concetti matematici astratti può essere efficacemente fondata su esperienze senso-motorie e sull'interazione con il mondo che ci circonda (Ferrara et al., 2018).

3. – Percorso didattico: funzionamento delle macchine in mostra e motivazioni pedagogiche

In questa sezione descriveremo le macchine costruite durante il laboratorio e utilizzate nel corso delle visite alla mostra, fornendo anche la motivazione pedagogica che sta alla base della scelta di queste macchine. Descriviamo le macchine esattamente nell'ordine in cui sono state presentate sia nella fase 1 di formazione degli studenti/detenuti, che nella fase 2, durante le visite alla mostra/laboratorio, per mettere in evidenza che spesso concetti utili alla comprensione del funzionamento di una macchina erano stati acquisiti grazie alla discussione sull'uso di una macchina precedentemente vista. Quasi tutte le macchine sono state progettate mediante OpenScad, software gratuito di progettazione 3d, dalla dottoressa Clelia Leotta, per la stesura della sua tesi di laurea magistrale in matematica, sotto la guida sapiente del professor Giuseppe Scollo, docente di informatica dell'Università di Catania. Le sezioni di macchine descritte in 3.2 e in 3.3 sono state progettate traendo ispirazione dalle macchine dell'Associazione Macchine Matematiche, con sede presso L'Università di Modena e Reggio Emilia, dove tali modelli, realizzati fisicamente, sono conservati. I modelli sono efficacemente descritti sul sito www.macchinematematiche.org. Una descrizione del progetto, comprese le rappresentazioni virtuali delle macchine, sul sito dedicato al progetto: https://sites.google.com/view/vietatonontoccare/home. A condurre il corso di formazione matematica per gli studenti della sede carceraria dell'istituto "K. Wojtyla" sono state le professoresse Daniela Ferrarello e Maria Flavia Mammana, docente di Matematiche Complementari presso l'Università di Catania, per un totale di 40 ore di formazione, consentendo agli studenti formati di divenire formatori, come guide della mostra. A condurre le visite guidate alla mostra per docenti e studenti di scuola e università, attualmente in corso, sono le professoresse Ferrarello e Mammana e gli studenti/guide Giuseppe Bellia, Giuseppe Pastura e Sebastiano Vespa.

3.1 – *Superfici non orientabili: quando "dentro" e "fuori" si fondono*

Gli oggetti con cui veniamo in contatto in genere sono superfici orientabili, cioè hanno un "dentro" e un "fuori", separati da un bordo. Anche noi, spesso, cataloghiamo cose e persone mettendole entro certi confini molto netti, primo fra tutti il confine tra "buoni" e "cattivi": cataloghiamo e a ogni persona da confinare attribuiamo un'etichetta. In realtà i confini entro cui collochiamo le persone, etichettandole, prima di tutto noi stessi, non sono davvero così netti come li dipingiamo, ma piuttosto sfumati. Se pensiamo a un confine netto lo facciamo solo per una nostra convenienza. A volte, però, restare mentalmente dentro un confine ci preclude la possibilità di imparare, perché spesso si apprende grazie allo squilibrio cognitivo, cioè grazie a una momentanea perdita di un consolidato equilibrio, e alla perdita di certezze: ci viene posto un problema che, per essere risolto, ha bisogno di essere guardato da un altro punto di vista.

FIGURA 3 – Le superfici non orientabili in mostra.

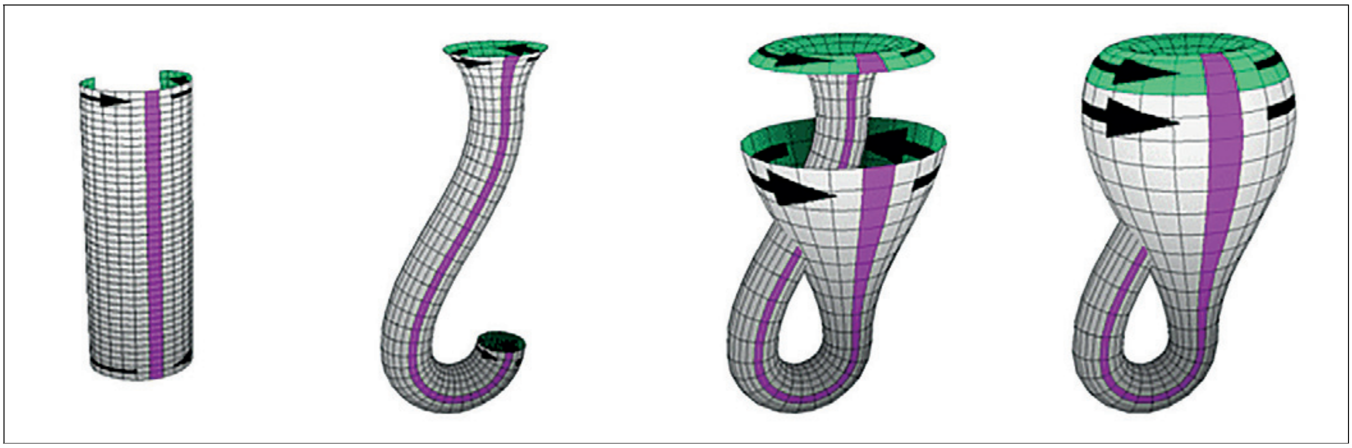

FIGURA 4 – Possibile costruzione di una bottiglia di Klein.

Le superfici non orientabili costruite durante il laboratorio e in mostra sono:
– Nastro di Möbius
– Bottiglia di Klein.

Ogni visita alla mostra inizia proprio con la riflessione sul tema dei confini, che, matematicamente, ci è suggerita dalle superfici non orientabili. In alcune superfici matematiche, come il nastro di Möbius o la bottiglia di Klein, il "dentro" e il "fuori" comunicano senza attraversare il bordo. La bottiglia di Klein, che si può costruire come indicato in figura 4, è quindi, come il nastro di Möbius, una superficie non orientabile ed è, per questo, il pezzo di apertura della mostra, perché il progetto si propone di realizzare un contatto tra il carcere e l'ambiente esterno, due mondi i cui confini sono percepiti come molto netti.

Durante le visite questo confine diventa via via sempre più sfumato, non solo perché i visitatori superano i vari cancelli e quindi guide e visitatori si incontrano in uno spazio comune, ma soprattutto perché ciascuno incontra l'altro nel terreno (neutro) della matematica, in cui non c'è più distinzione tra un ruolo e l'altro, in quel momento tutti siamo solo "matematici all'opera", e ciascuno si svela come persona, indipendentemente dall'etichetta di confine che gli/le era stata attribuita. Dopo aver mostrato le superfici non orientabili, e prima di accedere alla sezione successiva, entrando nel vivo, le guide propongono un gioco detto "Mosaico matto", che consiste nello spiegare perché il mosaico mostrato in figura 5, ricomponendo i pezzi in modi diversi, sembra non ricoprire la stessa area, lasciando, in uno dei due casi, un quadretto vuoto. Come mai vediamo l'impossibile materializzarsi sotto i nostri occhi?

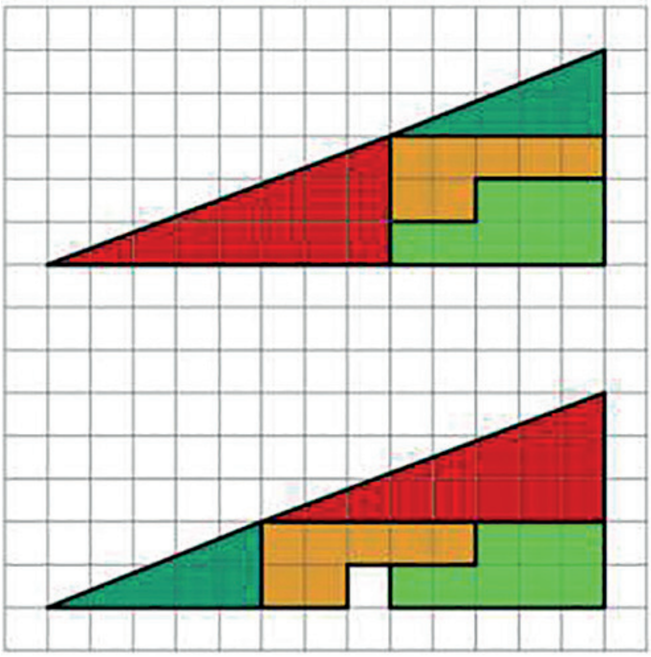

FIGURA 5 – Modello del paradosso "mosaico matto".

Usando la metodologia del Laboratorio di matematica, descritta nella sezione 2.2, i visitatori sono invitati a riflettere, manipolando il mosaico e con l'uso di un righello, confrontandosi tra loro e sotto la supervisione sapiente delle guide, che li portano a riflettere sulle diverse pendenze delle ipotenuse dei due triangoli del mosaico, rosso e verde in figura. L'ipotenusa del triangolo verde ha una pendenza di 2/5, e quella del triangolo rosso di 3/8, quindi i triangoli in questione, pur “assomigliandosi”, non sono simili e dunque quando poniamo i due triangoli con le ipotenuse consecutive, mantenendo paralleli i rispettivi cateti, i due segmenti delle ipotenuse non appartengono alla stessa retta, avendo angolazioni diverse. Il mosaico matto dà lo spunto per parlare di paradosso (“contro l’opinione comune”, dal greco), spiegando che l’impossibile (la perdita di un quadretto di area, in questo caso) a volte è spiegabile con l’uso di ragionamenti logici, che possono aiutarci a trasformare l’impossibile in possibile, e che ciò che a volte viene pensato come impossibile in realtà è solo contro l’opinione comune, cioè un paradosso, appunto. Dal punto di vista matematico, il mosaico matto dà lo spunto per parlare di similitudine di triangoli, concetto utile nella sezione di macchine successiva.

3.2 – *Pantografi per trasformazioni geometriche: rimanendo sé stessi, trasformarsi*

In geometria è possibile trasformare una figura in un’altra figura, mantenendo alcune proprietà. Ad esempio, se stiriamo un quadrato e lo trasformiamo in un rettangolo, le lunghezze non si mantengono, ma il parallelismo dei lati sì. Compito della scuola è farci crescere e quando si cresce ... ci si evolve ... pur cambiando alcune cose di noi, manteniamo alcune nostre caratteristiche. Una scuola che vuole far crescere davvero non lavora per trasformare completamente l’alunno, ma trova le sue caratteristiche migliori, i suoi talenti, per mantenerli, trasformando quelle altre caratteristiche che, invece, nuocciono alla formazione dell’alunno. Questo è un compito in particolare delle scuole carcerarie, in cui a volte il docente che per la prima volta entra per insegnare, crede di trovarsi di fronte persone assolutamente “cattive per definizione”, per poi trovare invece persone che, come tutti noi, hanno pregi e difetti. I pregi possono essere anche ben nascosti, ma un bravo docente, quello che sa che sicuramente ci sono, sa come scovarli. Ed è proprio a partire da quei pregi che occorre portare avanti una formazione che consenta all’alunno di crescere e migliorarsi. La scuola non può e non deve sostituire l’alunno con una nuova persona, ma “trasformarla”, nel senso indicato sopra, dal punto di vista delle trasformazioni geometriche.

Le macchine per le trasformazioni geometriche costruite durante il laboratorio e in mostra sono:

- Pantografo per l’omotetia
- Pantografo per la simmetria assiale
- Pantografo per la simmetria centrale

Nonostante l’omotetia non sia la trasformazione geometrica più semplice da approcciare (certamente le simmetrie sono più intuitive), la prima macchina ad essere studiata e realizzata è quella per l’omotetia di rapporto 2, perché grazie al mosaico matto erano state già introdotte le similitudini. Essa, infatti, sfrutta proprio la similitudine tra triangoli, precisamente i triangoli OBQ e OAP, in figura 7.

Il pantografo, infatti, composto da quattro aste incernierate nei punti A, B, C, Q, è costruito in modo che le due aste AO e AP, della stessa lunghezza, siano divise entrambe in 2 parti uguali, nei punti B e C, e che le due aste BQ e CQ siano entrambe di

FIGURA 6 – I pantografi per le trasformazioni geometriche in mostra.

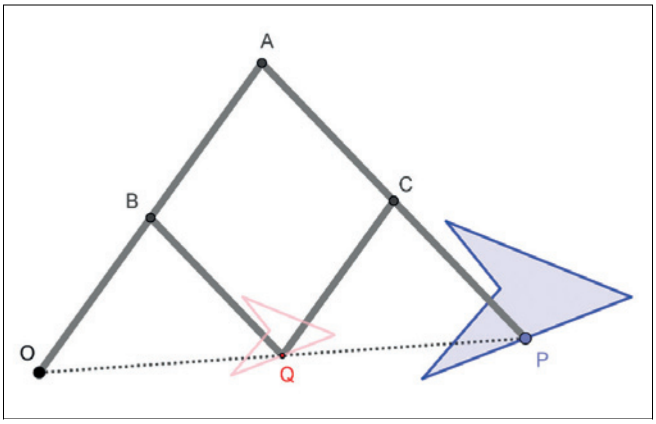

FIGURA 7 – Modello virtuale di pantografo per l’omotetia.

misura uguale alla metà di AO. In tal modo, i due triangoli isosceli OBQ e OAP sono simili, avendo i lati in proporzione. Pertanto, i punti O, Q e P sono sempre allineati e la distanza OP, che varia muovendo la macchina, è sempre il doppio della distanza OQ. La macchina è stata realizzata anche virtualmente, con l'ausilio del software GeoGebra, in modo da esplorare i casi di omotetia di rapporto n, anche con $n > 2$. In questi altri casi, abbiamo notato che il quadrilatero QBAC, che è un rombo nel caso $n = 2$, è, in generale, un parallelogramma. Queste considerazioni hanno permesso di richiamare le definizioni di rombo e parallelogramma, utili nell'approccio delle due macchine seguenti.

La seconda macchina studiata è stata, infatti, il pantografo per la simmetria assiale, il cui funzionamento si basa sulle proprietà del rombo. Il rombo in questione, in figura 8 FGHI, è costituito da 4 aste di uguale lunghezza, incernierate agli estremi, che a due a due hanno una estremità, rispettivamente nei punti F e H, incernierata a un'asta a, mediante dei cursori che permettano alla macchina di scorrere.

L'asta a sarà l'asse di simmetria e ogni punto toccato da G avrà il suo simmetrico rispetto ad a nel punto I, poiché le due diagonali GI ed FH sono ortogonali e si bisecano per una nota proprietà dei rombi. Per poter inserire due penne e disegnare una figura e la sua simmetrica, abbiamo prolungato le aste FG e FI, della stessa lunghezza, rispettivamente fino ai punti P e Q.

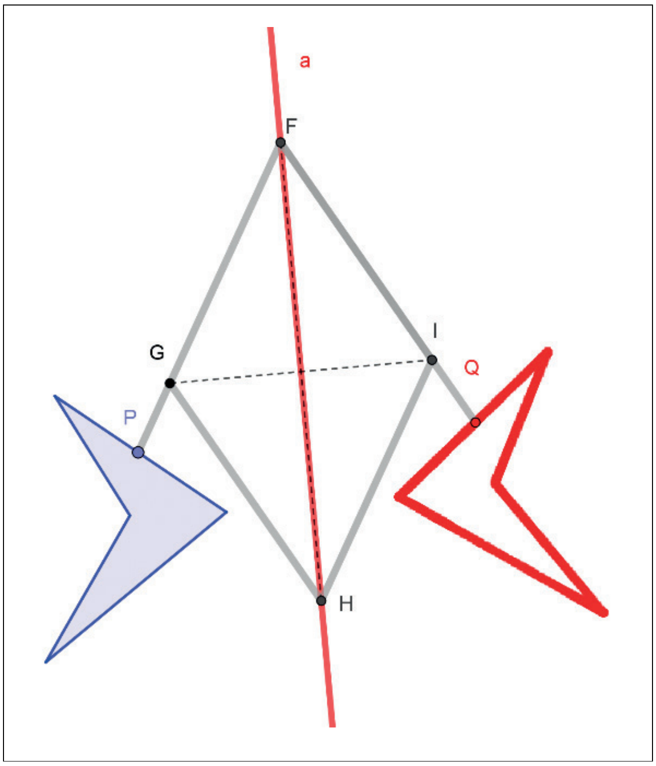

FIGURA 8 – Modello virtuale di pantografo per la simmetria assiale.

Se le proprietà del rombo ci sono utili per la simmetria assiale, per la simmetria centrale ci sono utili quelle del parallelogramma. La macchina per la simmetria centrale che abbiamo studiato, infatti è costituita proprio da un parallelogramma (ABCD, in figura 9), in cui due aste parallele, AB e CD in figura, sono prolungate rispettivamente fino ai punti P e Q. I prolungamenti sono tali che la lunghezza di BP sia uguale alla lunghezza di CQ. In questo modo viene a formarsi un parallelogramma immaginario (PCQB in figura 9), in cui O divide a metà la diagonale BC. Pertanto, per una nota proprietà dei parallelogrammi, O divide a metà anche la diagonale PQ. Quindi i punti P, O e Q sono allineati e O è il punto medio tra P e Q. Il che equivale a dire che P e Q si corrispondono nella simmetria centrale di centro O.

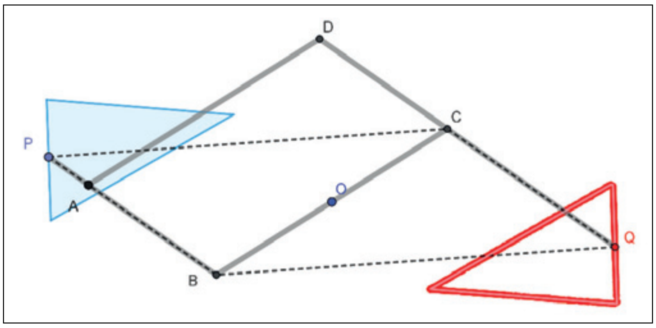

FIGURA 9 – Modello virtuale di pantografo per la simmetria centrale.

3.3 – *Conicografi: le condizioni per trovarsi in un luogo*

Le sezioni coniche (intersezioni di un cono con un piano) sono curve che possono essere descritte come luoghi geometrici, cioè possiamo descrivere delle condizioni per un punto che sono soddisfatte se e solo se il punto appartiene alla curva. Trovarsi in un "luogo" (geometrico o, fuor di metafora, nella realtà ...) dipende quindi dalle condizioni dettate. I nostri comportamenti (le condizioni, nella metafora matematica) determinano gli effetti sulla nostra vita (il luogo geometrico, nella metafora matematica). È assurdo pensare di comportarsi sempre nello stesso modo e ottenere risultati diversi, così come in matematica è assurdo pensare che tutti i punti che, ad esempio, soddisfano le condizioni richieste per una ellisse appartengano invece a una parabola. Se si vuole cambiare il luogo, allora occorre partire cambiando le condizioni. Troppo spesso gli studenti (ma non solo!) si ritrovano a vedersi vivere in un "luogo" che non desiderano come se vi fossero costretti dal luogo stesso. In realtà sono le condizioni poste a determinare il luogo. Questa sezione di macchine vuole essere uno spunto a riflettere sull'importanza dell'autodeterminazione e un monito per i visitatori a rimpadronirsi della propria vita, prendendola in mano e dettando nuove condizioni.

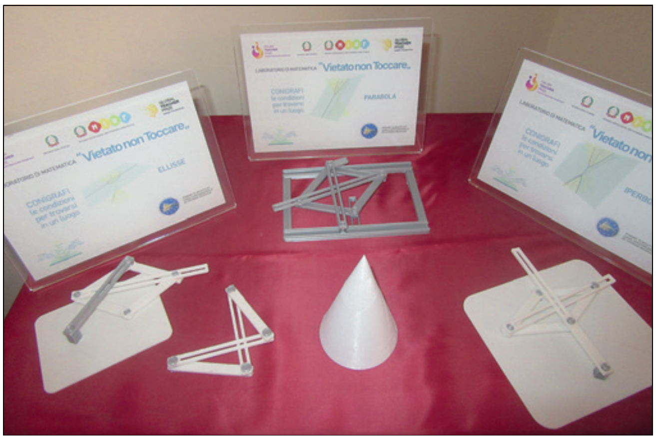

FIGURA 10 – Cono e conicografi in mostra.

I conicografi costruiti durante il laboratorio e in mostra sono:
– Ellissografo ad antiparallelogramma
– Ellissografo a cerchio direttore
– Iperbolografo a cerchio direttore
– Parabolografo

Il percorso didattico sulle coniche è iniziato con l'osservazione di un cono stampato in 3d diviso in parti assemblate che simulano dei tagli praticati da un piano (si può usare un foglio di carta per simulare il piano) e mettono in evidenza come la sezione del cono con il piano dia una curva diversa secondo l'inclinazione del piano. La prima conica ad essere studiata è stata la circonferenza, la più facile da approcciare, costruita mediante uno spago teso fissato a un estremo (il centro) e facendo scorrere su un foglio una matita legata al secondo estremo. La condizione per costruire il luogo "circonferenza", quindi, è che la distanza da un punto fissato (l'estremo dello spago) sia costante (uguale alla lunghezza dello spago). Si è quindi passati a un primo cambiamento di condizioni, fissando sul piano entrambi gli estremi dello spago a distanza minore della sua lunghezza. Facendo scorrere sul foglio una matita vincolata allo spago teso si disegna una ellisse. Gli studenti hanno congetturato che la condizione per costruire l'ellisse è che fissati due punti (i fuochi), la somma delle distanze di un punto dai due fuochi sia costante (la lunghezza dello spago). Una volta trovata la condizione da soddisfare siamo passati alla costruzione del primo ellissografo, quello ad antiparallelogramma.

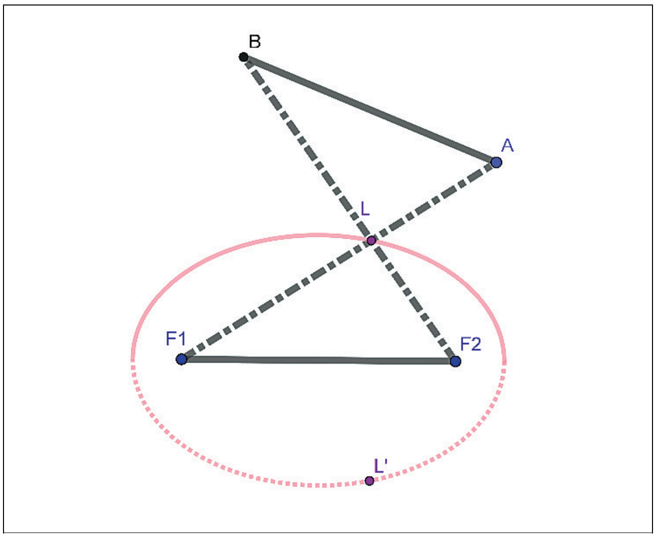

FIGURA 11 – Modello virtuale di ellissografo ad antiparallelogramma.

La macchina è composta da 4 aste, incernierate agli estremi, due forate longitudinalmente di ugual misura e due piene di ugual misura. Le due aste forate si intersecano. Un antiparallelogramma, o parallelogramma intrecciato, infatti, è un quadrilatero con due coppie di lati opposti uguali, (come il parallelogramma) ma non paralleli. E, a seconda dell'elasticità del materiale usato per la sua costruzione, può essere ottenuto da un parallelogramma intrecciandolo, cioè facendone ruotare di 180° un lato attorno al centro del lato stesso, così da ottenere lo stesso lato ma con i vertici scambiati di posto. Un antiparallelogramma può anche essere visto come la figura costituita dai due lati opposti e di uguale

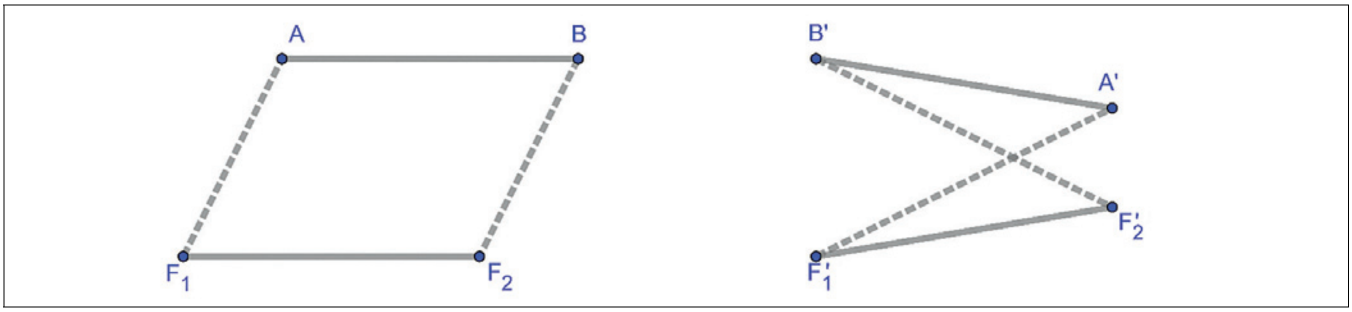

FIGURA 12 – Un parallelogramma e un antiparallelogramma.

misura di un trapezio isoscele ($A'B'$ e $F_1'F_2'$, in figura 12) e le sue diagonali ($A'F_1'$ e $B'F_2'$ in figura 12).

Il punto L, (figura 11) intersezione delle due diagonali del trapezio isoscele (a cui mancano i due lati paralleli), è equidistante da A e da F_2, e anche da B e da F_1. Quindi la somma delle distanze di L dai punti F_1 ed F_2 è costante, perché $\overline{LF}_1 + \overline{LF}_2 = \overline{LF}_1 + \overline{AL} = \overline{AF}_1$ e $\overline{AF}_1$ è una lunghezza fissa perché è la lunghezza di un'asta rigida. Il punto L, quindi, descrive una ellisse, di fuochi i punti F_1 ed F_2, se questi sono fissi sul piano. Tenendo fisse le due cerniere su F_1 ed F_2 sul piano, si potrà disegnare metà ellisse (effettivamente, tenendo conto dei limiti fisici verrà disegnata meno di metà ellisse). Per disegnare l'altra metà occorre girare la macchina invertendo di posto F_1 ed F_2. Una volta compresa la definizione di ellisse, si può continuare con la costruzione mediante il cerchio direttore, che è un po' più complessa, ma didatticamente efficace perché ci permette di passare agevolmente da un luogo (ellisse) a un altro (iperbole). Qui di seguito descriviamo la costruzione matematica.

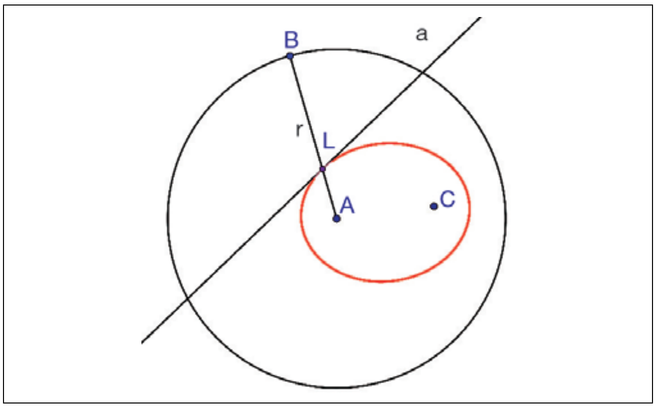

FIGURA 13 – Costruzione di una ellisse mediante un cerchio direttore.

Si consideri una circonferenza di centro un punto fisso A e raggio r, che chiameremo cerchio direttore. Sia B un punto sulla circonferenza e C un punto fissato all'interno del cerchio direttore. Sia a l'asse del segmento BC. Al variare di B sulla circonferenza, il punto L di intersezione tra a e il raggio $r = AB$ descrive una ellisse di fuochi A e C. Infatti, $\overline{LA} + \overline{LC} = \overline{LA} + \overline{LB} = r$, ed r è una lunghezza fissa. La macchina che segue questa costruzione matematica può essere costruita fisicamente mediante un'asta rigida forata longitudinalmente, AF_1 in figura 14, che rappresenta il raggio del cerchio direttore, una cerniera fissata al piano, nel punto F_2 di figura 14, con l'accortezza che la distanza tra i punti F_1 ed F_2 sia minore della lunghezza dell'asta AF_1.

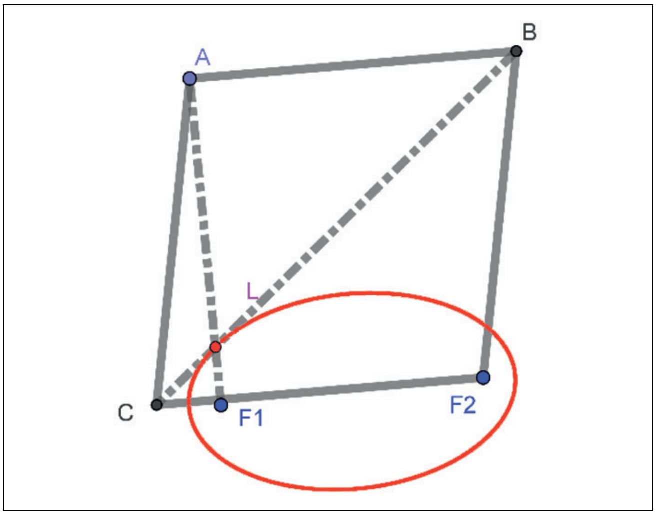

FIGURA 14 – Modello virtuale di ellissografo a cerchio direttore.

Per costruire l'asse di AF_2, usiamo lo stratagemma del rombo: l'asse cercato è l'altra diagonale di un rombo di diagonale AF_2. Occorrono dunque 4 aste rigide a due a due congruenti, per costruire i lati del parallelogramma, e un'asta forata, BC in figura 14, che ne è diagonale. Una penna inserita nell'intersezione L delle due aste forate descrive l'ellisse di fuochi i punti F_1 ed F_2. La costruzione matematica in figura 13, realizzata con il software di geometria dinamica GeoGebra, dà l'opportunità di introdurre il concetto di iperbole. Infatti, trasportando il punto C fuori dal cerchio direttore e costruendo la retta r_1 contenente il raggio r del cerchio direttore, si ottiene la costruzione in figura 15, in cui il punto L è intersezione delle rette a e r_1.

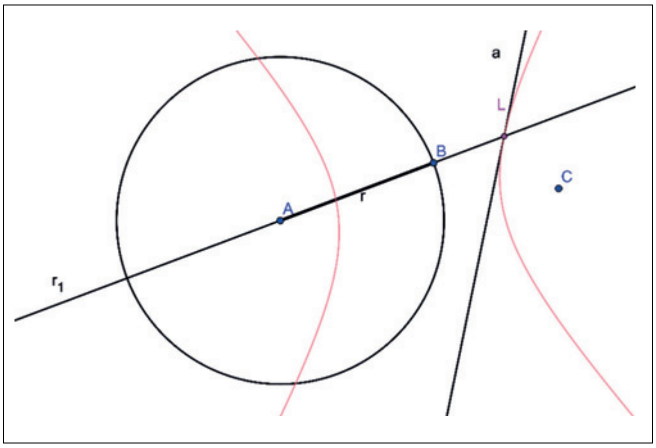

FIGURA 15 – Costruzione di una iperbole mediante un cerchio direttore.

Questa volta a mantenersi costante non è la somma delle distanze del punto L dai punti A e C, ma la loro differenza. Infatti, $\overline{LA} - \overline{LC} = \overline{LA} - \overline{LB} = r$, che è fisso perché è il raggio del cerchio direttore. Ecco allora che il semplice spostamento di un punto (da dentro a fuori il cerchio direttore) ha determinato una nuova condizione (da somma a differenza di distanze costante), che ha determinato un luogo completamente differente (da ellisse a iperbole). La macchina che segue questa costruzione, il cui modello è reperibile sul sito www.macchinematematiche.org, può essere costruita in modo analogo alla precedente di figura 14, semplicemente avendo cura di prolungare l'asta forata, AF_1, che rappresenta il raggio del cerchio direttore, e fissando la cerniera in F_2 a una distanza da F_1 maggiore di r (Figura 16).

Il percorso didattico prosegue introducendo la parabola, già vista come sezione conica. Si può inizialmente immaginare che una costruzione con cerchio direttore con il punto C delle figure 13 e 15 posizionato sulla circonferenza dia una parabola, ma

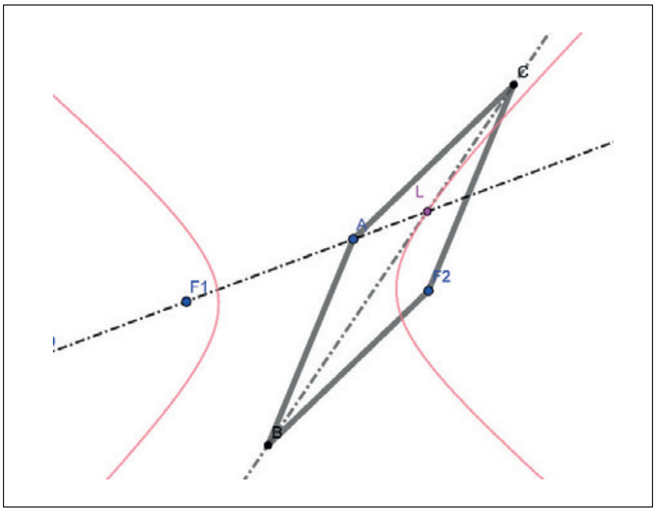

FIGURA 16 – Modello virtuale di iperbolografo a cerchio direttore.

tale costruzione in effetti si riduce al solo centro del cerchio, dato che l'asse di una corda passa, appunto, per il centro. La parabola, infatti, "richiede" per la sua costruzione una retta, la direttrice (che si può pensare come un cerchio direttore ma di raggio infinito!)

Una volta definita la parabola come il luogo dei punti del piano aventi la stessa distanza da un punto fisso, detto fuoco, e da una retta fissa, detta direttrice, si può procedere alla costruzione di un parabolografo.

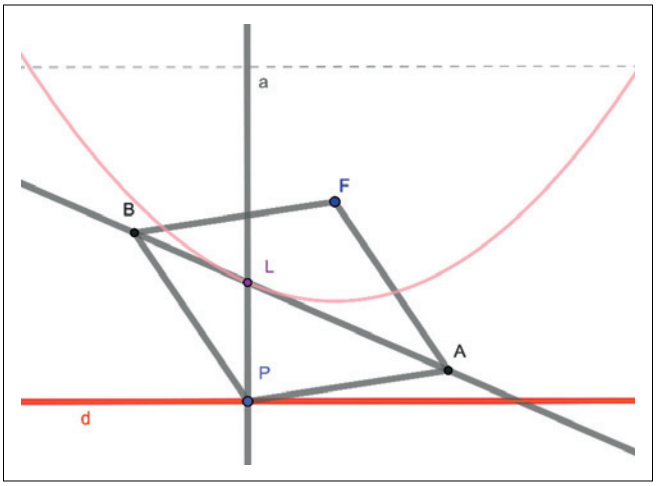

FIGURA 17 – Modello virtuale di parabolografo con rombo articolato.

Il punto F è fissato al piano, e anche la retta d, che è costituita da un'asta rigida. Il punto P è realizzato mediante un cursore, libero di muoversi su d. Il quadrilatero $APBF$ è un rombo. Sul cursore P viene incernierata un'asta a, perpendicolare all'asta d (per dare maggiore stabilità alla struttura è preferibile fissare l'asta a anche a un'asta parallela a d, tratteggiata in figura 17). Lungo la diagonale AB si fissa un'asta che ne è il prolungamento. Questa costruzione garantisce che il punto L, intersezione di a con il prolungamento di AB, generi un arco di parabola. Infatti, AB, essendo diagonale, è asse del segmento FP, per cui ogni punto su di essa è equidistante da F e da P. Il punto L, quindi, poiché è fissato all'asta a, perpendicolare alla direttrice, ha sempre la stessa distanza da d e da F.

3.4 – *Macchine di Archimede: Sicilia, terra di matematica!*

Uno degli obiettivi del progetto è l'abbattimento dei pregiudizi, il vedere oltre le etichette, che purtroppo accompagnano le nostre vite, a cominciare dai posti in cui viviamo: spesso la Sicilia, terra natia degli autori, è accomunata a fatti, persone, idee, che non rendono giustizia alla millenaria cultura che qui è nata e cresciuta, sin dai tempi della Magna Grecia. Il nostro laboratorio è lieto di ospitare una sezione di macchine attribuite al genio di Archimede, per ricordare altri fatti, altre persone, altre idee, quelli che hanno contribuito enormemente alla nostra cultura scientifica. La Sicilia non è solo terra di mafia, ma anche terra di matematica, e una persona non è solo un detenuto, ma anche, in questo caso, una guida di una mostra di matematica (e anche molto di più ...). Dietro ogni persona c'è, sì, una storia già scritta ma davanti ad essa c'è una storia ancora da scrivere.

Le macchine di Archimede in mostra sono:

- Specchio parabolico
- Coclea
- Leva.

Ci siamo lasciati con la parabola e da qui si prosegue per studiarne la proprietà focale. Dopo aver esplorato la proprietà con l'uso di GeoGebra, e aver congetturato che una retta parallela all'asse di una parabola si riflette sempre sul fuoco (e viceversa, una retta uscente dal fuoco si riflette parallelamente

FIGURA 18 – Le macchine di Archimede in mostra.

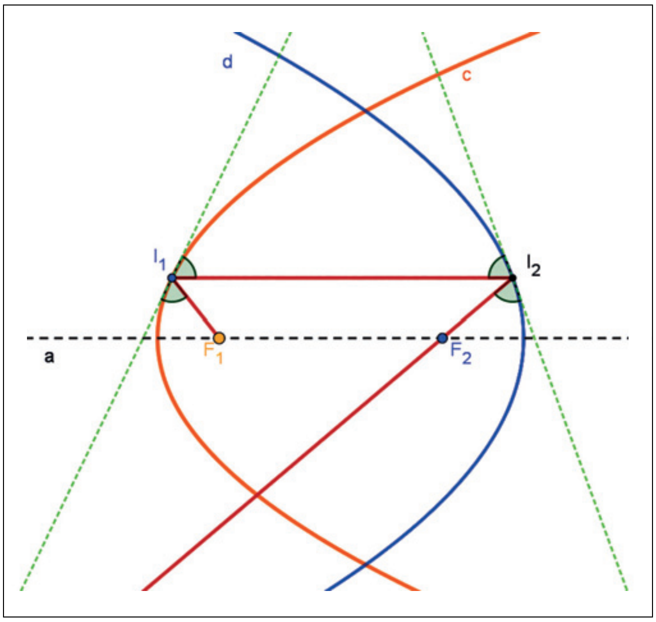

FIGURA 19 – Schematizzazione del funzionamento del doppio specchio parabolico.

all'asse), si passa al racconto della vita di Archimede, della difesa di Siracusa contro l'assedio delle forze terrestri e marittime di Roma, e, in particolare, della leggenda degli specchi ustori. La prima macchina ispirata ad Archimede in mostra (non stampata in 3d, ma acquistata all'esterno), consiste in due specchi parabolici, aventi lo stesso asse e che rivolgono la concavità l'uno verso l'altro. Uno dei due specchi (quello superiore) è forato, l'altro si poggia su un piano e serve da base per poter poggiare un oggetto, ad esempio una moneta. L'effetto è che la moneta, poggiata sul fondo, si riflette sul foro superiore, dando l'impressione all'osservatore di trovarsi sospesa nel vuoto. Il "trucco" deriva da una doppia applicazione della proprietà focale: un oggetto è posto sul fuoco F_1 dello specchio rappresentato dalla parabola c (figura 19). La sua immagine si riflette, ma per semplicità consideriamo solo un raggio luminoso invece che l'intera immagine dell'oggetto. Il raggio si riflette sullo specchio c, incontrandolo nel punto di incidenza I_1, e da lì viene riflesso, per la proprietà focale applicata alla parabola c, parallelamente all'asse, finché incontra lo specchio parabolico d, nel punto di incidenza I_2. Da lì, provenendo dalla direzione parallela all'asse si riflette sul fuoco F_2 di d, per la proprietà focale applicata alla parabola d.

Dopo un excursus sulle macchine da guerra di Archimede, si passa attraverso un racconto fotografico ad alcune altre macchine inventate da Archimede a sostegno di attività quotidiane, come l'orologio ad acqua e la coclea. Di quest'ultima abbiamo progettato e stampato una versione 3d (figura 20).

La coclea, o vite senza fine, è una macchina composta da una superficie di forma elicoidale attorno a un cilindro, che, solo girando consente a un oggetto, tipicamente un liquido o un flusso granulare, di salire di quota. La coclea si alloggia all'interno di un tubo cilindrico coassiale all'elicoide, con una inclinazione rispetto al piano di appoggio (l'inclinazione non è unica, purché non maggiore di 45°). La parte inferiore del tubo è immersa nel liquido o nel materiale granulare da sollevare. Facendo ruotare la macchina attorno al cilindro, ogni elemento del flusso posto sulla superficie tende a raggiungere, per forza di gravità, la posizione più bassa possibile tra quelle imposte dal vincolo della superficie e della pressione con gli elementi adiacenti. In tal modo viene alimentato il flusso in entrata e perciò l'avanzamento del flusso stesso, che porta ogni suo elemento a salire lungo la direzione dell'asse, a ogni giro di vite, di una distanza pari al passo della vite, fino a fuoriuscire dalla sommità del tubo. Il nostro percorso termina con la macchina di Archimede per eccellenza: la leva. A partire dall'esplorazione diretta con la mac-

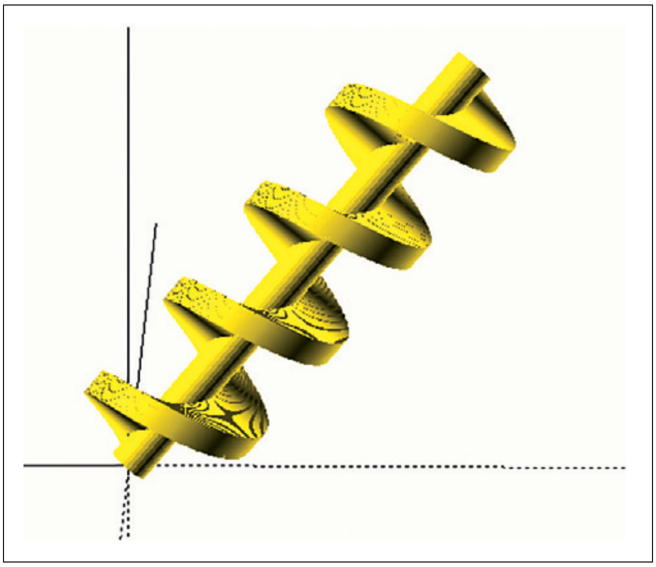

FIGURA 20 – Progettazione 3d di una coclea.

china stampata in 3d, e ricordando l'esperienza con oggetti che usano il principio della leva (ad esempio un'altalena), si sistemano ai bordi della leva dei pesetti, P_1 e P_2. La leva è stampata in modo da poter inserire il fulcro in diverse posizioni (figura 21), esplorando le varie possibilità fino al raggiungimento dell'equilibrio e misurando i bracci b_1 (al cui bordo è sistemato il peso P_1) e b_2 (al cui bordo è sistemato il peso P_2).

L'esperienza porta a congetturare che per raggiungere l'equilibrio il fulcro deve essere avvicinato al peso maggiore, in modo da mantenere la proporzione $\frac{b_1}{b_2} = \frac{P_2}{P_1}$. Ancora una volta, la costruzione della macchina virtuale, riportata in figura 22, è utile per misurare con più accuratezza, esplorare dinamicamente casi diversi, dare maggior forza alle congetture.

Il percorso didattico e la visita alla mostra si chiudono con l'esempio della leva e la famosa frase, attribuita ad Archimede, "Datemi un punto d'appoggio e vi solleverò il mondo": non tutto nella vita è semplice, non tutti i percorsi sono agevoli, ma usando la razionalità e l'attitudine a risolvere problemi, competenze migliorabili col fare matematica, anche una sola piccola persona può sollevare un mondo!

4. – Discussione sul metodo didattico

Poiché non ci è stato possibile effettuare video in carcere, da utilizzare per poter effettuare analisi di processi cognitivi, discutiamo la bontà del metodo didattico adottato in base alle osservazioni dirette fatte durante la formazione degli studenti/guide e durante le visite, e dai commenti degli studenti/guide, degli studenti/visitatori e dei docenti/visitatori. Abbiamo raccolto i loro commenti spontanei in un apposito registro cartaceo delle visite e sul sito dedicato al progetto. In questa sezione commenteremo il materiale a nostra disposizione alla luce delle teorie esposte nella sezione 2: insegnamento orizzontale, laboratorio di matematica, ergonomia cognitiva. Riteniamo, prima di tutto, di poter dichiarare l'efficacia dell'intero metodo didattico dal punto di vista dell'acquisizione dei concetti matematici, a partire dall'osservazione degli stu-

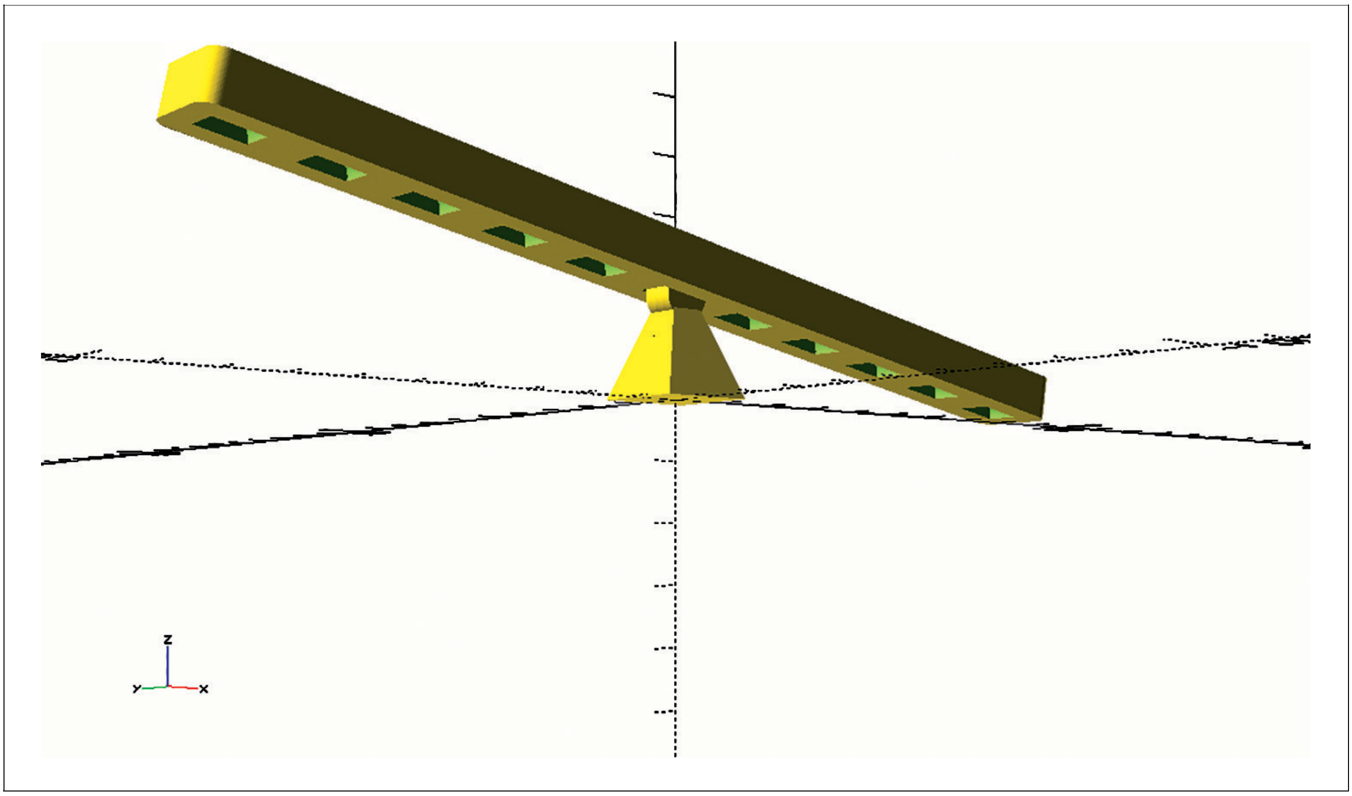

FIGURA 21 – Progettazione 3d di una leva di Archimede.

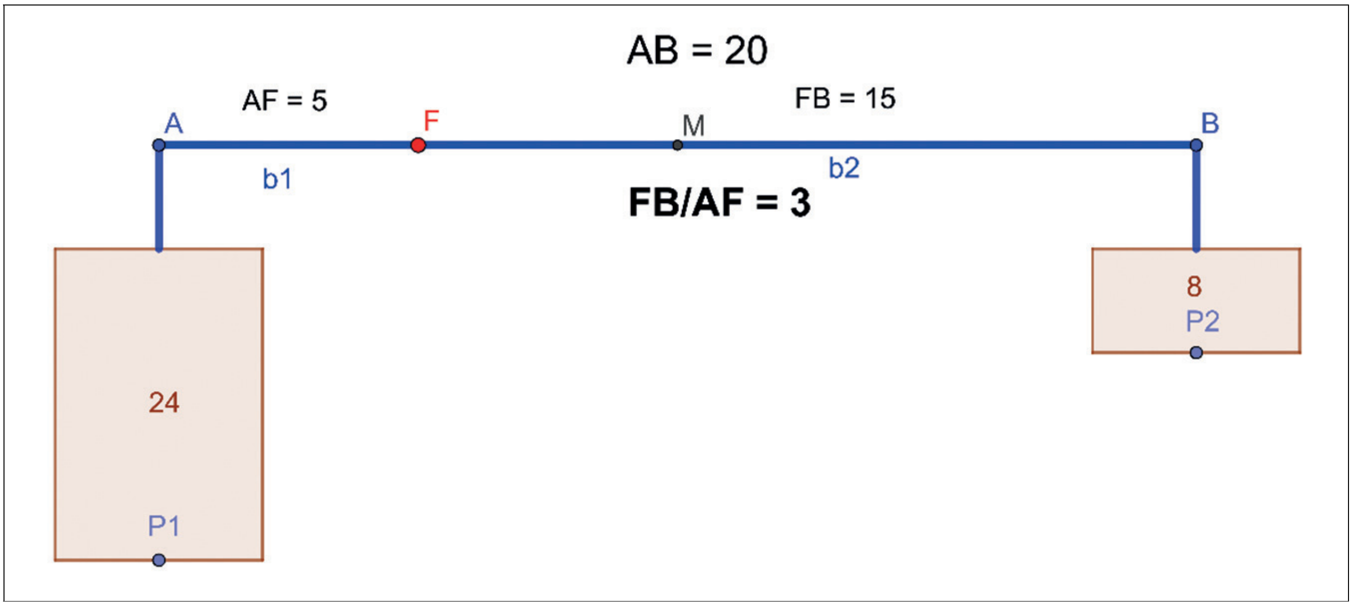

FIGURA 22 – Modello virtuale di una leva.

denti/guide durante le visite: studenti inizialmente privi di determinate conoscenze matematiche sono stati in grado, dopo la formazione, di diventare essi stessi formatori, divenendo le guide della mostra/laboratorio e mostrando pieno possesso dei contenuti matematici appresi. Il modo in cui gli studenti/guide, ad ogni visita, hanno presentato i concetti ai visitatori, spiegando ma più spesso accompagnandoli alla scoperta dei concetti matematici, mostra una chiara padronanza degli argomenti, che non sono stati soltanto studiati e compresi, ma fatti propri, tanto da poterli esprimere agli altri, anche con parole proprie. Secondo la teoria dell'insegnamento orizzontale, l'insegnante deve poter entrare nel vissuto degli studenti, adottando trasposizioni didattiche che non solo consentano di entrare nell'intersezione studente/docente (vedi figura 1), ma soprattutto che consentano l'espansione di questa intersezione (figura 2), intesa come l'acquisizione di un apprendimento che parta dal proprio vissuto. Dal punto di vista matematico, l'intero percorso didattico della fase 1, formazione matematica degli studenti/detenuti, è stata ispirata da questo *modus operandi*, in quanto le docenti del "team formazione" sono sempre partite da concetti matematici già noti per introdurne di nuovi, ma soprattutto, le docenti hanno affrontato temi matematici a partire dalle vite proprie e degli studenti. Come esempio, citiamo la costruzione dell'iperbole mediante il cerchio direttore, vista nella sezione 3.3. Il passaggio da ellisse a iperbole è stato introdotto proprio a partire da considerazioni sulle nostre vite e sulla nostra tendenza a ritornare in "luoghi" non graditi, ma ormai noti. Abbiamo visto l'idea di passare da ellisse ad iperbole mediante il passaggio di un punto (C, nelle figure 13 e 15) da dentro a fuori il cerchio direttore e abbiamo visto questo passaggio, metaforicamente, come un modo per cambiare luogo nella propria vita, attraverso un cambio del proprio atteggiamento. Uno studente/guida scrive "*Questo progetto ha portato nella mia vita un qualcosa di unico e inimmaginabile. Non credevo potessi arrivare a tanto e questo mi fa comprendere che anche io ho le capacità e la possibilità di ambire ad un futuro pieno di occasioni, cercando di dare una svolta alla mia vita*". Dare una svolta alla propria vita, soprattutto in un contesto come quello carcerario, significa proprio effettuare questo passaggio da una conica come l'ellisse, che, nel senso di Riemann, è limitata, pur avendo infiniti punti, ad una conica come l'iperbole che è sia infinita che illimitata, uscendo dal noto circuito, verso una nuova vita. L'esperienza di vita è stata utile a far proprio un concetto matematico (cambio di condizioni da ellisse a iperbole) e il concetto matematico è stato utile a una maturazione nella concezione della propria vita, consentendo un'espansione dell'intersezione di figura 2. A questa visione può aver contribuito anche la metodologia laboratoriale, che abitua gli studenti ad essere attivi nella propria vita, così come nell'apprendimento. Il laboratorio di matematica, inoltre, guida chi impara alla comprensione dei concetti matematici, senza forzare la spiegazione, ma consentendo una propria costruzione del sapere. Qui, come esempio, riportiamo i passaggi che nella maggior parte delle visite si sono susseguiti per la risoluzione del problema denominato "mosaico matto", descritto nella sezione 3.1. Ricordiamo gli elementi caratterizzanti di un laboratorio di matematica, coniugati nella situazione di apprendimento "mosaico matto":

- Un problema da affrontare: "come è possibile che spostando i pezzi del mosaico in un'altra configurazione si perda l'area di un quadretto?";
- Oggetti da manipolare: i pezzi del mosaico, una riga;
- Ruolo del docente: il docente in questo caso sono gli studenti/guide, che non spiegano, ma lasciano riflettere, chiedono, suggeriscono, provocano;
- Interazione tra le persone: si cerca la partecipazione dei visitatori, facendoli interagire tra di loro, promuovendo l'aiuto reciproco, cercando da ciascuno il giusto contributo da dare alla questione.

Una delle guide pone il problema del mosaico, che ha cura di non chiamare mai "triangolo" ma "figura" o "mosaico". Qui di seguito ci riferiamo alla figura 5. La guida sposta i pezzi dalla configurazione iniziale a quella finale, in cui "manca" un quadretto (vedi figura) e chiede ai visitatori come questo sia possibile invitandoli a provare essi stessi a spostare i pezzi. Dopo aver provato a manipolare il mosaico, in genere, i visitatori, che credono di vedere un triangolo, intuiscono che la base o l'altezza del presunto triangolo, possano differire dalla configurazione iniziale a quella finale. È a questo punto che la guida, senza svelare che l'intuizione sia errata, fornisce la riga, perché i visitatori possano assicurarsi di quali siano le misure. Con sgomento, i visitatori si accorgono che le basi e le altezze dei due presunti triangoli misurano entrambe 13 cm e 5 cm, rispettivamente, sia nella configurazione iniziale che in quella finale (vedi figura, immaginando il foglio quadrettato con la misura di un cm per quadretto). È questo, in genere, il momento di crisi, in cui bisogna lasciare ai visitatori un po' di tempo per riflettere. In genere viene dato il suggerimento di concentrarsi sui pezzi a forma di triangolo. Raramente è capitato che qualche visitatore abbia a questo punto sovrapposto i triangoli accorgendosi subito della differenza tra gli angoli. Nella maggior parte dei casi, è stato necessario un nuovo suggerimento da parte delle guide, che invitano i visitatori ad analizzare i due triangoli e descriverli. Tutti i visitatori affermano subito che entrambi i triangoli sono rettangoli, condizione che viene confermata dalle guide. Una delle guide chiede se i due triangoli si assomiglino. A questa richiesta, in genere, c'è un diverso comportamento a seconda che il visitatore in questione sia un matematico o insegnante di matematica oppure no (ovvero sia uno studente). L'idea che in genere i visitatori hanno è che i due triangoli siano simili, anche nel senso matematico del termine e non solo nel senso comune. Ma il matematico a quel punto si chiede se la domanda "si assomigliano?" voglia dire "sono simili, nel senso matematico del termine?". La questione si sposta allora sul chiedere ai visitatori quando due triangoli si dicono simili. La risposta adottata dal gruppo in genere è che due triangoli simili hanno angoli corrispondenti uguali, e si pone il problema di non avere a disposizione un goniometro. È allora spesso necessario ricordare che la pendenza degli angoli opposti ai cateti in verticale si può calcolare come il rapporto tra i cateti in verticale e quelli in orizzontale. Qualora questo concetto non sia posseduto dai visitatori si ricorre all'esempio della pendenza di una strada espressa da un cartello stradale che indica una ripidità del 10%: quel 10% indica un dislivello di 10 metri su un rettilineo di 100 metri, cioè una pendenza di 10/100. I visitatori passano a misurare i vari cateti, trovando per il triangolo rosso una pendenza di 3/8 e per il triangolo verde una pendenza di 2/5. A questo punto il passo è breve: i visitatori si rendono conto che il presunto triangolo iniziale in realtà è un quadrilatero, concavo nella configurazione iniziale e convesso nella configurazione finale. E la differenza di aree tra i due quadrilateri è, appunto, di un quadretto. Una delle guide porta avanti una discussione matematica, ripercorrendo in breve le tappe di quanto emerso. Nella risoluzione del problema gioca certamente un ruolo importante la manipolazione degli oggetti fisici (i pezzi del mosaico), come del resto in tutte le attività proposte. A titolo di esempio, qui discutiamo il ruolo dell'artefatto pantografo per l'omotetia nella comprensione del concetto di figure omotetiche: inizialmente la macchina viene usata da due visitatori. Qualora si renda necessario specificare lo schema d'uso dell'artefatto, una delle guide specifica che il punto corrispondente ad O, in figura 7, va mantenuto fermo (molti visitatori lo intuiscono perché il punto è incernierato a un piccolo cilindro, concepito perché qualcuno con le dita possa tenerlo fisso, vedi figura 6, prima macchina a partire da sinistra). I due piccoli fori corrispondenti ai punti Q e P in figura 7 lasciano intendere che vada inserita una penna. Anche in questo caso, se non fosse chiaro, una guida ne specifica lo schema d'uso. Viene inoltre precisato che dei due visitatori impegnati nell'esplorazione uno deve disegnare, con la penna in P, per esempio, e l'altro deve seguire il disegno, con la penna in Q. Immediatamente i visitatori si rendono conto di aver disegnato due figure "*con la stessa forma, di cui una più piccola e una più grande*". È a questo punto che viene proposto il compito "*Che rapporto c'è tra le figure disegnate dalla penna in P e da quella in Q?*" ed entra in gioco una osservazione puntuale dell'artefatto, che possa aiutare i visitatori a comprendere come le due figure vengano realizzate. All'osservazione si abbina una manipolazione, a volte accompagnata dall'uso di una riga, che consenta di affermare che la figura QBAC sia un rombo e che OB è la metà di OA. La discussione prosegue, spesso accompagnata da segni, alla scoperta della costruzione dei due triangoli OBQ e OAP, che si scoprono essere simili. È la similitudine dei due triangoli visibili nell'artefatto a far comprendere ai visitatori che punto per punto ciò che viene tracciato dalla penna in P viene riportato dalla penna in Q, ma con le distanze dimezzate. Un ulteriore passo è quello di comprendere la differenza tra similitudine e omotetia, messo in atto dall'osservazione da parte dei visitatori della fissità del punto O e dell'allineamento dei tre punti O, Q e P, nell'artefatto. Il passaggio dai segni situati (che emergono dalla risoluzione del compito proposto) ai segni matematici (segni collegati ai significati condivisi dalla comunità matematica) è spesso il risultato di una evoluzione che passa da vari segni pivot, segni, cioè, che possono riferirsi sia all'attività con l'artefatto che al linguaggio naturale e al dominio matematico. Ad esempio, la parola "omotetia", in genere è usata solo alla fine del processo ed è preceduta da parole pivot come "proiezione". In ogni caso, l'attività promuove sempre lo scambio sociale, che è accompagnato soprattutto da parole e gesti.

Riteniamo che la manipolazione dell'artefatto, accompagnato dai su citati segni, abbia dato luogo a un processo di genesi strumentale, aiutando i visitatori nella costruzione del significato matematico cercato.

In figura 23 riportiamo la fotografia di uno dei fogli utilizzati durante una visita. I due fiori in figura sono stati disegnati da un visitatore utilizzando il pantografo per l'omotetia di cui abbiamo appena discusso. I due triangoli in basso sono stati disegnati da un secondo visitatore (posto di fronte al primo) per ricordare a tutti cosa fossero due triangoli simili. Il foglio è stato riutilizzato per disegnare le due chiavi di violino, visibili sulla destra e sulla sinistra della figura, con il pantografo per la simmetria assiale, ed era già stato utilizzato prima dell'attività sull'omotetia per la riflessione sul mosaico matto, tant'è che si possono leggere (scritte sottosopra, in alto a sinistra in figura) le misure di base e altezza del presunto triangolo (quello che, in realtà, si svela poi essere un quadrilatero) e delle misure delle basi e delle altezze dei due triangoli (rosso e verde in figura 5).

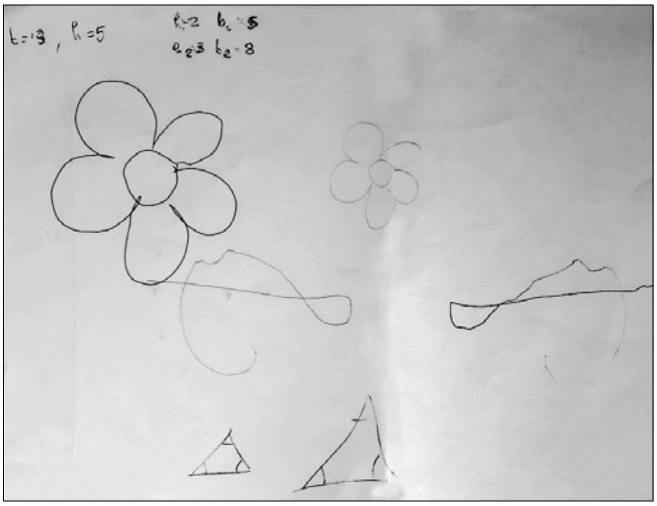

FIGURA 23 – Segni prodotti da alcuni visitatori nel corso di una visita.

5. – Conclusioni

Questo progetto poneva degli obiettivi ambiziosi, descritti nel paragrafo 1.2 di questo articolo, che riteniamo siano stati pienamente raggiunti. In questa sezione riportiamo le parole testuali degli studenti/guide e dei visitatori in corsivo tra virgolette.

L'obiettivo **a.** intendeva far sperimentare agli studenti reclusi una sensazione di successo, che porti a capire che l'impegno può portare a grandi risultati e che "volere è potere", persino in un campo tradizionalmente ostico come quello della matematica, che molti studenti (e ahimè! Anche alcuni docenti) considerano ancora una disciplina d'élite. Ci sono state delle difficoltà nella fase di formazione, difficoltà logistiche (trasferimenti presso altre sedi carcerarie, fine pena) che hanno portato a una drastica diminuzione del numero di studenti, da una decina a 6, che hanno completato la formazione. I 3 studenti su 6 che sono riusciti oltre che a seguire l'intero corso, anche a guidare le visite dall'esterno sono coautori di questo articolo. Questo il loro pensiero, che, rispetto all'obiettivo **a.**, non necessita di ulteriori commenti: "*Questo progetto ha comportato per noi un cambiamento culturale ma soprattutto personale. All'inizio eravamo molto entusiasti ma poco motivati, solo perché davamo dei limiti alle nostre potenzialità, alla nostra conoscenza e intelligenza. Ma frequentando le lezioni con impegno e passione siamo riusciti ad arrivare a grandi risultati, facendo calcoli, ipotesi e valutazioni. Fino a qualche anno fa non avremmo mai immaginato di fare dibattiti su concetti matematici. Abbiamo avuto l'opportunità di camminare a pari passo, se non di più, con il mondo esterno, lavorando con uno degli strumenti più innovativi e più utilizzati* (stampa 3d e software di geometria dinamica). *Ci siamo appassionati a grandi matematici, tra cui uno in particolare, Archimede, già parte del nostro progetto*". Abbiamo imparato, studenti e docente, che "*nella vita bisogna guardare oltre le nostre aspettative*".

Rispetto all'obiettivo **b.**, che intendeva promuovere lo scambio di esperienze tra "il dentro e il fuori", citiamo in particolare la circostanza di uno studente/visitatore che, particolarmente colpito dalla storia di coraggio e forza di uno degli studenti/guide nell'investire il suo tempo in carcere nello studio e nella lettura, gli ha voluto donare "*con una grande stima*" un libro, che andrà ad ingrandire la sua futura libreria. Gli studenti visitatori hanno espresso sentimenti positivi non solo nei confronti della matematica, «*... una matematica "nuova", fatta non solo di numeri e regole, ma anche di tanta passione e umanità. Una "matematica viva" che "lascia il segno"*», ma anche nei confronti degli studenti/guida, i formatori, che "*anche con tante difficoltà, si vede a occhio nudo che hanno davvero tanta voglia di imparare*". I visitatori hanno imparato che "*bisognerebbe spesso affacciarsi verso queste realtà che sembrano così distanti da noi, per guardarsi dentro* [...] *per capire che nella vita la parola fine non esiste e che non servono le ali per volare, ma la cultura può permetterlo*". Una visitatrice trova che questa visita sia "*Un'esperienza che cambia la vita*" perché "*poter ritrovare tanta Bellezza e ricchezza dentro questa realtà non è scontato e non tutti pensano che sia possibile. Ma per me è stato così! I volti, gli sguardi e i sorrisi di quelle persone piene di entusiasmo per il lavoro che avevano fatto, mi fanno pensare che c'è tanta speranza*".

L'obiettivo **c.** riguarda la diffusione di buone pratiche di insegnamento/apprendimento della matematica, con particolare riferimento al metodo didattico esposto nella sezione 2. Non solo gli "*alunni sicuramente hanno appreso concetti e contenuti e sono stati motivati ad ulteriore approfondimento!*", come commentato da una docente/visitatrice che si occupa di istruzione per gli adulti, ma è stata saggiata in prima persona la bontà del metodo del laboratorio di matematica, che ha consentito di provare "*il fascino di toccare con mano il nastro di Möbius*" , di toccare con mano i concetti matematici spiegati e di "*vedere la matematica con occhi nuovi, dal punto di vista più umano*", riconoscendo alla mostra "*un'esperienza visiva, tattile e densa di umanità, in cui la matematica si fonde con la pedagogia*", un modo per "*illuminare la via del nostro cammino per un futuro migliore*". Si riconosce così finalmente alla matematica il suo alto valore pedagogico, perché, come dicono gli studenti/guide "*grazie alla matematica sappiamo chi siamo e chi saremo. Ricordando che la matematica non è fatta solo di numeri e somme, ma anche di ben altro!*".

La tradizionale visione della matematica come materia difficile è sconvolta, e allo stesso modo le difficoltà della vita possono sembrare meno ardue, perché grazie a "Vietato non toccare", dicono gli studenti/guide "*abbiamo creduto che l'unica cosa che non puoi fare nella vita è dividere per zero!*".

Ringraziamenti

Contro le aspettative di molti, compresi gli autori, il progetto "Vietato non toccare" è diventato realtà. Molte sono state le difficoltà incontrate nell'esecuzione del progetto, ma le abbiamo superate tutte, e questo grazie alla nostra tenacia, ma anche al contributo essenziale di diverse persone, che vogliamo ringraziare. Ringraziamo lo studente della casa circondariale di Cavadonna (Sr), senza il quale non avremmo mai pensato di realizzare il progetto. Grazie al Dirigente Scolastico della scuola "K. Wojtyla" di Catania, prof.ssa Daniela Di Piazza, per aver creduto e sempre sostenuto l'importanza di mantenere una scuola carceraria. Ringraziamo il Direttore della casa circondariale di Catania – Bicocca, Dott. Giuseppe Russo, che mostrando lungimiranza, ha consentito l'ingresso di strumenti tecnologici in un carcere di alta sicurezza. Un grazie a tutto il personale di Polizia Penitenziaria per aver permesso che il progetto avesse luogo, garantendo la sicurezza di tutti. Importantissimo il supporto dell'area pedagogica del carcere, che, nella persona del dott. Maurizio Battaglia in particolare, ha seguito da vicino l'intero progetto, sostenendolo costantemente. La nostra riconoscenza va anche alla Dott.ssa Clelia Leotta, che durante la stesura della sua tesi di laurea magistrale in matematica ha lavorato con passione alla progettazione in 3d delle macchine. Ultimi, ma non per importanza, siamo enormemente grati ai docenti prof. Giuseppe Scollo e prof.ssa Maria Flavia Mammana per la loro disponibilità ricca di impegno ed entusiasmo. Non hanno solo svolto un lavoro, sono ormai i nostri "compagni di viaggio" nell'avventura "Vietato non toccare". Senza ciascuna delle persone che abbiamo ringraziato non ce l'avremmo fatta. ([1])

([1]) La ricerca è stata supportata dall'Università di Catania, mediante il progetto di Ateneo "Piano per la ricerca 2020-2022 (PIACERI) – Engineering solutions for sustainable development of agricultural buildings and land".

Bibliografia

Ahl, L. M., & Helenius, O. (2020). *Bill's Rationales for Learning Mathematics in Prison.* Scandinavian Journal of Educational Research, 1-13.

Ahl, L. M., Sánchez Aguilar, M., & Jankvist, U. T. (2017). *Distance mathematics education as a means for tackling impulse control disorder: The case of a young convict.* For the Learning of Mathematics, 37(3), 27–32. https://doi.org/10.2307/26548468.

Anichini, G., Arzarello F., Ciarrapico, L., Robutti, O., & Statale, L.S. (2004). *Matematica 2003. La matematica per il cittadino.* Matteoni stampatore.

Bartolini Bussi, M. G., & Mariotti, M.A. (2009). *Mediazione semiotica nella didattica della matematica: artefatti e segni nella tradizione di Vygotskij. L'Insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate*, vol.32, A-B, pp. 269-294.

Bartolini Bussi, M.G., & Maschietto M. (2006). *Macchine matematiche: dalla storia alla scuola.* Springer.

Bandura, A. (1997). *Self-efficacy: The exercise of control.* W. H. Freeman.

Châtelet, G. (1987). *L'enchantement du virtuel*. Revue Chimeres, 2, 1- 20.

Dewey, J. (1949). *Esperienza e educazione*, Firenze, La Nuova Italia.

Ferrara, F., de Freitas, E., Mammana, M. F., Maschietto, M. (2018). *Corpo e movimento in matematica: incontri, intrecci e sviluppi*. Relazione Seminario Nazionale di Ricerca in Didattica della Matematica "Giovanni Prodi". Rimini, 27-28 Gennaio 2018.

Ferrarello D, Mammana MF, Pennisi M (2013). *Teaching by doing*. In: Benedetto di Paola. Proceedings of CIEAEM65. Quaderni di ricerca in didattica, vol. 23, p. 466-475, ISSN: 1592-4424, TORINO, 2013.

Helenius, O., & Ahl, L. (2017). *Identity change through inner and outer driving forces for studying mathematics in the swedish prison education program.* Mathematics Education and Life at Times of Crisis, 247.

Mellin-Olsen, S. (1981). *Instrumentalism as an educational concept.* Educational Studies in Mathematics, 12(3), 351–367. https://doi.org/10.1007/BF00311065.

Rabardel, P. (1995). *Les hommes et les technologies – Approche cognitive des instruments contemporains*. Paris: Armand Colin.

Rabardel, P., & Samurcay, R. (2001, March). *From artifact to instrument-mediated learning.* In Symposium on New challenges to research on Learning (pp. 21-23).

Verillon, P., & Rabardel, P. (1995). *Cognition and artifacts: A contribution to the study of though in relation to instrumented activity.* European journal of psychology of education, 10(1), 77-101.

Vygotsky, L.S. (1978). *Mind in Society, the Development of Higher Psychological Processes*. Cambridge: Harvard University Press.

Vygotskij, L. S. (1990). *Pensiero e linguaggio: Ricerche psicologiche* (L. Mecacci, Trad. it.). Bari-Roma: Laterza. (Lavoro originale pubblicato nel 1934).

Sitografia

http://www.macchinematematiche.org/

https://sites.google.com/view/vietatonontoccare/home

Daniela Ferrarello

Daniela Ferrarello ha insegnato con passione matematica in scuole secondarie di secondo grado presso case circondariali dal 2015 al 2020. Dal 2020 è professore associato di Matematiche Complementari, presso l'Università di Catania. Tra i suoi interessi di ricerca, che riguardano soprattutto la Didattica della Matematica, c'è il ruolo culturale e sociale della matematica.

Giuseppe Bellia ha 25 anni. Ha ottenuto il diploma presso l'istituto alberghiero "K. Wojtyla" di Catania, plesso di Bicocca, indirizzo enogastronomia, con il voto di 100/100 e intende proseguire gli studi, iscrivendosi all'Università. È alla prima detenzione. Negli ultimi anni si è molto appassionato allo studio e alla lettura e, in particolare, all'astronomia.

Giuseppe Pastura, 30 anni, ha frequentato la scuola presso l'istituto alberghiero "K. Wojtyla" di Catania, plesso di Bicocca, diplomandosi con il voto di 80/100. Ha un talento naturale per i numeri ... e per la pasticceria.

Sebastiano Vespa, di professione autotrasportatore e abituato a guardare lontano ..., ha 40 anni, ottenuta in carcere la licenza media, frequenterà il quinto anno dell'istituto alberghiero "K. Wojtyla" di Catania presso il plesso di Bicocca. Durante la frequenza al corso di formazione di "Vietato non toccare" si è appassionato alla figura di Archimede, e spera, una volta fuori, di poter andare a visitare un museo dedicato al grande matematico.