Matematica, Cultura e Società

Rivista dell'Unione Matematica Italiana

Daniela Bubboloni, Eloisa Detomi, Silvio Dolfi, Francesco Fumagalli, Eugenio Giannelli, Francesco Matucci, Emanuele Pacifici, Orazio Puglisi, Lucía Sanus, Luigi Serena

Un ricordo di Carlo Casolo

Matematica, Cultura e Società. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **6** (2021), n.1, p. 69–82.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=RUMI_2021_1_6_1_69_0>

Matematica, Cultura e Società. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2021.

Matematica, Cultura e Società – Rivista dell'Unione Matematica Italiana
Serie I, Vol. 6, N. 1, aprile 2021, 69-82

Un ricordo di Carlo Casolo

Daniela Bubboloni, Eloisa Detomi, Silvio Dolfi, Francesco Fumagalli, Eugenio Giannelli, Francesco Matucci, Emanuele Pacifici, Orazio Puglisi, Lucía Sanus, Luigi Serena

Sommario: *A un anno dalla scomparsa del nostro amico e collega Carlo Casolo, professore ordinario di Algebra presso l'Università di Firenze, presentiamo un ricordo della sua figura di uomo e di matematico.*

Abstract: *A year after the sudden loss of our friend and colleague Carlo Casolo, Full Professor in Algebra at the University of Florence, we present a remembrance of him as a man and as a mathematician.*

Gentile, colto e garbato, un matematico stimato da tutti: il 28 marzo 2020 è prematuramente scomparso Carlo Casolo, lasciando tutti noi, amici, colleghi, studenti, in un vuoto inaspettato.

Carlo Casolo nasce a Milano il 21 febbraio 1958 e, dopo essersi stabilito con la famiglia in Veneto, a Pieve di Soligo, si iscrive all'Università di Padova dove si laurea in matematica nel 1982. L'argomento della tesi riguarda l'area nella quale ha poi svolto prevalentemente le sue ricerche, la Teoria dei Gruppi, ed il suo relatore è Franco Napolitani, persona che resterà sempre tra quelle a lui più care. Alla laurea segue un periodo come borsista all'Università di Warwick, dove studia sotto la guida di Stewart Stonehewer. Tornato in Italia vince il concorso per l'insegnamento nella scuola secondaria e, come primo incarico, è assegnato all'Istituto Professionale per Segretarie d'Azienda di Conegliano. Carlo ricorderà questo periodo sempre con grande piacere, sottolineando che avrebbe senza dubbio scelto di essere un insegnante se non avesse avuto l'opportunità di continuare con la carriera accademica, come in effetti è stato. Infatti nel 1986 vince un concorso da ricercatore all'Università di Udine dove rimane poi anche come professore di prima fascia. Nel 1994 l'Università di Firenze lo chiama sulla cattedra di Algebra che, fino al 1986, era stata ricoperta da Guido Zappa, il primo professore ordinario di Algebra in Italia.

Carlo è stato un matematico straordinario, sia per l'originalità delle sue idee che per la profondità dei risultati raggiunti. Ha avuto un grande rispetto per la ricerca, intesa da lui nel senso più alto del termine e affrontata con totale coinvolgimento, con l'unico fine, per dirla con parole sue, di leggere "il gran libro della Natura". Per questo, erano solo i problemi che sorgono in modo naturale nello studio della matematica ad attirare la sua attenzione.

Le sue ricerche hanno riguardato tematiche centrali nella teoria dei gruppi sia finiti che infiniti, aspetto non comune nella ricerca contemporanea del settore.

Il lato scientifico è però solo una parte della sua personalità accademica: Carlo è stato un uomo dai forti principi etici che ne hanno ispirato il comportamento e che si riconoscono nel modo in cui ha interpretato il suo ruolo di professore. Nelle sue lezioni, sempre chiare e motivanti, Carlo stabiliva una relazione con i suoi allievi ben oltre il livello dei meri contenuti: Carlo comunicava passione. Dai suoi discorsi era evidente quanto ritenesse importante trasmettere ad altri – studenti o colleghi che fossero – ciò che conosceva ed era fermamente convinto (in

Accettato: l'1 febbraio 2021.

questo caso a torto) che questa sua opera di trasmissione fosse l'unico suo contributo significativo alla matematica. Infatti, nonostante fosse, senza ombra di dubbio, una persona ed un matematico fuori dal comune, un altro tratto che lo caratterizzava era la modestia.

Il suo impegno si è espresso in diversi modi, ed uno degli aspetti a cui ha dedicato grandi energie è stata la produzione di materiale didattico. Un'opera cominciata con la stesura delle dispense che ancora oggi vengono usate per i corsi di Algebra I e II a Firenze, e che si è arricchita negli anni di testi di Teoria dei Grafi, Algebra Commutativa, Teoria dei Gruppi e Teoria Geometrica dei Gruppi. Ciascuno di questi è un esempio di chiarezza espositiva e contiene una grande quantità di esercizi che, come era nello spirito di Carlo, sono imprescindibili se si vuole comprendere davvero la materia. Si tratta di testi di alto livello che, nonostante le offerte avanzate da diverse case editrici, Carlo rifiutò sempre di pubblicare, ritenendo che il frutto del suo lavoro dovesse essere liberamente accessibile a tutti. Le energie dedicate alla didattica, la grande competenza e la preparazione venivano colte dagli studenti che hanno sempre visto in Carlo una persona sinceramente interessata al loro percorso di apprendimento. È per questo che molti allievi si rivolgevano a lui non solo per i consueti chiarimenti sugli argomenti dei suoi corsi, ma anche per consigli sul loro percorso di studi. Il fatto che sia stato relatore di più di cinquanta tesi di laurea, è un ulteriore indicatore della stima che gli studenti nutrivano nei suoi confronti. Il suo impegno è stato considerevole anche a livello di dottorato. Sono infatti dodici gli studenti di cui è stato supervisore.

Carlo non si è poi mai sottratto agli impegni amministrativi, che sentiva come parte integrante del suo ruolo e che ha sempre svolto con spirito di servizio. Prorettore alla didattica a Udine, al suo arrivo a Firenze fu nominato direttore del dipartimento. Pur conscio della difficoltà che il ruolo comportava, specialmente per chi come lui era da poco arrivato in un nuovo ateneo, svolse questo compito con il suo consueto impegno e rigore. Una volta completato l'incarico, Carlo è stato con continuità componente di molte commissioni, da quelle incaricate della divisione dei fondi a quelle con compiti inerenti alla didattica.

Tutti riconoscevano la sua onestà intellettuale ed il suo equilibrio, ed i suoi pareri erano sempre tenuti in grande considerazione. In definitiva, pur essendo impossibile tratteggiare con poche parole la complessa personalità di Carlo, desideriamo sottolineare con forza la sua attitudine e determinazione a far prevalere sempre l'interesse generale su quello particolare, nonché il suo impegno instancabile per la crescita degli studenti e per il buon funzionamento dell'istituzione di cui faceva parte.

Carlo era inoltre socio dell'Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti e possedeva un'enorme cultura, non solo matematica, ma anche letteraria e musicale, di cui resta traccia nei suoi scritti su *matematica e letteratura* e su *matematica e musica*.

La scomparsa di Carlo lascia un vuoto scientifico e umano che non può essere colmato. Ai colleghi, agli amici e agli studenti rimane, purtroppo, solo il ricordo di una persona che a tutti ha saputo dare molto e che ha testimoniato con i suoi comportamenti una rara fedeltà ai propri principi. Dopo la sua morte il sito del Dipartimento U. Dini è stato inondato di messaggi di cordoglio da parte di studenti, ex-studenti, colleghi, amici e conoscenti, il che testimonia quanto Carlo fosse amato e stimato. Gli studenti del corso di laurea hanno poi deciso di ricordarlo piantando un albero nel giardino del dipartimento: un gesto semplice e toccante, perfettamente in sintonia con lo spirito di Carlo.

Nelle sezioni successive presenteremo alcuni contributi scientifici di Carlo che riteniamo essere tra i più significativi, e termineremo con una sezione dedicata ai suoi saggi su matematica e letteratura.

1. – Complessi simpliciali in gruppi finiti

Nello studio della struttura dei gruppi si cerca spesso di analizzarne i sottogruppi ed in particolare le catene di sottogruppi. Una *catena (finita)* di un gruppo G è una sequenza finita di sottogruppi $G_0, G_1, \ldots, G_n$ di G tali che G_i sia contenuto in G_{i+1} per ogni $i = 0, 1, \ldots, n-1$, e generalmente viene scritta in questo modo:

$$G_0 \leq G_1 \leq \ldots \leq G_n = G. \tag{1}$$

Di particolare importanza sono le *catene normali* (dette anche *serie*), dove ogni G_i è un sottogruppo normale del successivo. Brevemente, un sottogruppo N è normale in G quando è possibile indurre, in modo naturale, la struttura di gruppo sul cosiddetto insieme quoziente G/N, ovvero sulla famiglia dei sottoinsiemi della forma $aN = \{an \mid n \in N\}$ per $a \in G$, tramite la legge $(a_1N)(a_2N) := (a_1a_2)N$. Diciamo invece che N è *subnormale* in G se appare come termine di una qualche catena normale.

Molto spesso sono proprio le condizioni sulle catene di sottogruppi che permettono di classificare i gruppi secondo le varie "tipologie". L'esempio più eclatante è sicuramente, nella teoria dei gruppi finiti, il concetto di *risolubilità*, che di fatto permette di suddividere la teoria in due grossi filoni che vengono studiati con tecniche spesso molto differenti. Ricordiamo che un gruppo G è detto risolubile se possiede una catena normale della forma (1), con $G_0 = 1$, dove ogni insieme quoziente G_{i+1}/G_i è un gruppo commutativo. Évariste Galois fu il primo a scoprire che la risolubilità per radicali di un polinomio (cioè la possibilità di scrivere le soluzioni di un'equazione polinomiale tramite opportune somme, prodotti e radici dei coefficienti del polinomio stesso) è equivalente a determinare se un ben preciso gruppo di permutazioni delle radici del polinomio in questione sia un gruppo risolubile, nel senso della definizione appena data.

Prendere in esame le catene di sottogruppi è solo un caso molto particolare di una situazione più ampia. In generale, dato un insieme parzialmente ordinato $(P, \leq)$ (che chiameremo *poset* per brevità), possiamo definire una catena finita di P ogni sequenza del tipo:

$$x_0 \leq x_1 \leq \ldots \leq x_n,$$

per $x_0, x_1, \ldots, x_n \in P$. L'insieme di tutte queste possibili catene finite in P si chiama *complesso delle catene* $\Delta(P)$ ed è un esempio di complesso simpliciale astratto.

Tramite una realizzazione geometrica come sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$ può essere dotato di una topologia.

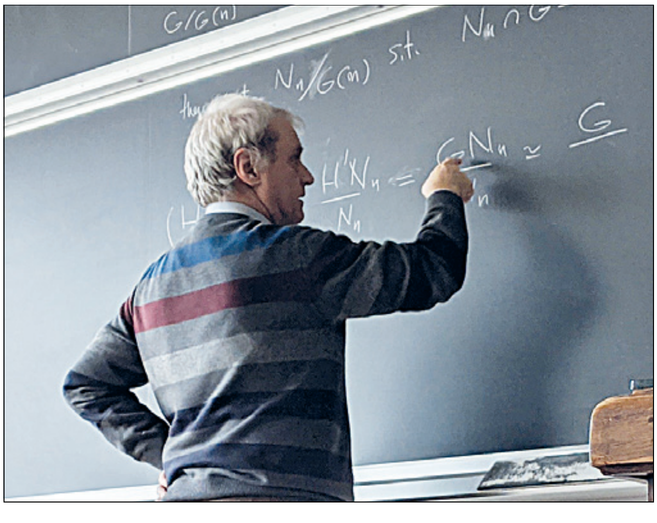
Il lettore avrà probabilmente già visto alcuni esempi molto particolari di complessi simpliciali in dimensione 2 e 3: i poligoni e poliedri regolari.

La quercia in memoria di Carlo.

Ora, ad ogni gruppo finito G sono associati in maniera naturale diversi sottoinsiemi parzialmente ordinati e, di conseguenza, diversi complessi simpliciali, i quali hanno una loro topologia (una volta realizzati in qualche $\mathbb{R}^n$) e dei ben precisi invarianti geometrici. In questo modo si stabilisce un ponte tra due discipline della matematica: da un lato l'algebra – ed in particolare, la teoria dei gruppi – dall'altro la topologia algebrica. Sarà pertanto possibile reinterpretare problemi di natura tipicamente gruppale in termini topologici, e viceversa. Come è ben noto, stabilire legami di questo tipo tra diverse aree della matematica ha sempre un notevole valore. Congetture che a priori sembrano essere irrisolvibili con i mezzi di una data teoria possono essere attaccate con quelli dell'altra, ed in generale si hanno a disposizione molte più tecniche per affrontare questioni aperte e porsene di nuove.

Il modo per associare un complesso simpliciale, e di conseguenza una topologia, a certi poset di un gruppo nasce da un'idea di K. Brown ([4]), poi ampiamente sviluppata da D. Quillen ([41]). Uno dei complessi più noti è proprio il *complesso di Brown*, $\Delta(\mathcal{S}_p(G))$, rappresentato dal complesso delle catene del poset $\mathcal{S}_p(G)$, i cui elementi sono i p-sottogruppi non banali di G (dove ricordiamo che un sottogruppo è un p-sottogruppo non banale se il suo ordine è una potenza > 1 del numero primo p). Di grande impatto è la *congettura di Quillen*, secondo cui il complesso $\Delta(\mathcal{S}_p(G))$ è contraibile (come spazio topologico) se e solo se il gruppo G possiede un p-sottogruppo normale non banale. La congettura è stata dimostrata vera in moltissimi casi, anche se nella sua generalità rimane tuttora aperta (attualmente il risultato più significativo a riguardo è di M. Aschbacher e S. Smith [3]).

Su queste tematiche Casolo nell'estate del 2000 tenne a Cortona un corso organizzato dalla Scuola Matematica Interuniversitaria. Le dispense del corso ([13]), sono basate su precedenti seminari svolti in collaborazione con Luis Ezquerro. In queste note, oltre ad introdurre dalle basi la teoria dei complessi simpliciali, vengono discussi i risultati conosciuti fino a quel momento non solo sul complesso di Brown ma anche sugli altri complessi associati a gruppi finiti. Di particolare interesse è una versione (dovuta a Casolo) della dimostrazione della congettura di Quillen nel caso dei gruppi p-risolubili, che fa un uso estremamente ridotto della classificazione dei gruppi semplici finiti.



L'interesse di Casolo per i complessi simpliciali associati ai gruppi finiti era già evidente nei suoi lavori [9, 11], dove introduce una brillante innovazione nello studio dei sottogruppi subnormali. In [9] Casolo fornisce una dimostrazione alternativa del celebre *criterio di subnormalità di Wielandt*, secondo il quale un sottogruppo H è subnormale in un gruppo finito G se e solo se, per ogni $g \in G$, si ha che H è subnormale nel sottogruppo generato da H e da g: tale dimostrazione utilizza il tipo di omotopia e i gruppi di omologia di complessi di Brown, come pure strumenti importanti in teoria dei numeri e in combinatoria. Stewart Stonehewer, reviewer dell'articolo e autore di una monografia sui sottogruppi subnormali ([30]), ha così descritto il lavoro [9] di Casolo: *"The ingenious arguments involve the Möbius function and inversion formula on the poset of p-subgroups of G and proceed within a topological framework".* Questo approccio è continuato anche in [11] dove Casolo ha studiato un altro complesso simpliciale, chiamato *complesso di Wielandt*, dimostrando un teorema dal sapore simile alla congettura di Quillen: un sottogruppo H di G è subnormale in G se e solo se il complesso di Wielandt $\Delta(\mathcal{W}([H]))$ è contraibile.

Nel settembre 2003 durante il *XVII Congresso UMI* svoltosi a Milano-Bicocca Casolo ha tenuto una conferenza generale dal titolo "Topologia algebrica nella teoria dei gruppi finiti". In seguito, il lavoro di Casolo sui complessi simpliciali nei gruppi è continuato prevalentemente nel seguire tesi di suoi studenti. Tra questi ricordiamo Silvia Lucido, anche lei prematuramente scomparsa, della quale Casolo ha seguito come co-supervisore la tesi di dottorato nel 1996 (relatore Franco Napolitani). Silvia Lucido ha poi continuato a lavorare su complessi simpliciali ([31, 32, 33, 34]).

2. – Subnormalità

La normalità non è una relazione transitiva nell'insieme dei sottogruppi di un gruppo: ad esempio, nel gruppo D_8 delle simmetrie di un quadrato, il sottogruppo generato da una riflessione non è normale in D_8, ma è normale in un sottogruppo normale di D_8. La chiusura transitiva della relazione di normalità è la subnormalità: come già ricordato nella sezione precedente, un sottogruppo H di un gruppo G si dice subnormale se esiste una catena finita di sottogruppi G_i di G

$$H = G_0 \leq G_1 \leq \ldots \leq G_n = G$$

tali che ogni G_i è normale in G_{i+1}, per $i = 0, \ldots, n-1$. Il minimo tra le lunghezze delle catene di questo tipo per H si chiama *difetto di subnormalità* di H in G (lo si può considerare come una misura di quanto il sottogruppo subnormale H sia "lontano" dall'essere normale).

La presenza di sottogruppi normali o, più in generale, subnormali, influisce pesantemente sul modo di indagare la struttura di un gruppo. Ai due estremi abbiamo da un lato i gruppi *semplici* che, per definizione, sono privi di sottogruppi normali (e quindi anche subnormali) propri, dall'altro i gruppi in cui ogni sottogruppo è subnormale, chiamati $\mathcal{N}_1$-*gruppi*. Questa dicotomia è particolarmente importante nel caso dei gruppi finiti. Infatti, per un'importante caratterizzazione degli $\mathcal{N}_1$-gruppi che segue facilmente dai Teoremi di Sylow, in ogni gruppo finito G le seguenti condizioni sono equivalenti:

- G è un $\mathcal{N}_1$-gruppo;
- G è un prodotto diretto di gruppi in ciascuno dei quali ogni elemento ha ordine una potenza di uno stesso primo (*p-gruppi*);
- G è *nilpotente*, cioè esiste una serie finita

  $$\{1_G\} = G_0 \leq G_1 \leq G_2 \leq \cdots \leq G_n = G$$

  tale che, per ogni $g \in G$, ogni $i \in \{1, \ldots, n\}$ ed ogni $g_i \in G_i$, $g_i^{-1} g^{-1} g_i g \in G_{i-1}$ (una tale serie viene detta *centrale*).

Come spesso accade, quando si lascia cadere l'ipotesi di finitezza la situazione diviene assai meno controllabile. Esempi come i gruppi di *Tarski* (gruppi semplici infiniti in cui ogni elemento ha ordine primo per uno stesso primo, [40]) o come i gruppi di *Heineken-Mohamed* ($\mathcal{N}_1$-gruppi non nilpotenti in cui tutti gli elementi hanno ordine una potenza di uno stesso primo, [25]), mostrano che la caratterizzazione degli $\mathcal{N}_1$-gruppi valida nel caso finito non è vera in generale e non sembra(va)no lasciare molte speranze per lo sviluppo di una teoria soddisfacente per questa classe di gruppi.

Il primo risultato di carattere generale sugli $\mathcal{N}_1$-gruppi è dovuto a Roseblade, che in [42] dimostrò che un gruppo è nilpotente se e solo se è un $\mathcal{N}_1$-gruppo ed esiste un limite superiore al difetto di subnormalità dei suoi sottogruppi. Soltanto molti anni dopo, Möhres in [39] provò, usando, tra l'altro, idee e risultati di Casolo, che ogni $\mathcal{N}_1$-gruppo è risolubile.

Casolo si dedica allo studio dei sottogruppi subnormali per tutta la sua carriera accademica, portando importanti e molteplici contributi tanto da venir considerato uno dei maggiori esperti in questo campo. Nei suoi primi lavori Casolo inizia a studiare la struttura degli $\mathcal{N}_1$-gruppi infiniti ([5, 6]), ottenendo risultati che saranno essenziali per il citato teorema di Möhres. In [11] introduce l'approccio topologico alla teoria dei sottogruppi subnormali di cui abbiamo parlato nella sezione precedente. Con queste tecniche dimostra che, per verificare la subnormalità di un sottogruppo H in un gruppo finito, basta trovare, per ogni primo p, un p-sottogruppo massimale P tale che H è subnormale nel sottogruppo generato da H e P. Si occupa inoltre della serie di Wielandt (il sottogruppo di Wielandt è l'intersezione dei normalizzanti dei sottogruppi subnormali) ottenendo interessanti relazioni tra la lunghezza di questa serie e la lunghezza delle serie abeliane nei gruppi finiti ([10]) e infiniti ([7]).

Già in questi lavori è evidente la brillantezza e la genialità di Casolo che finalmente, nel gennaio 2000 con le tecniche e le competenze acquisite negli anni, riesce a dimostrare, in modo alquanto elegante, che un $\mathcal{N}_1$-gruppo privo di elementi di ordine finito (e quindi diametralmente opposto ai gruppi di Heineken e Mohamed) è necessariamente nilpotente ([14]). Questo risultato, raggiunto indipendentemente nello stesso anno anche da Howard Smith ([43]), è un importante passo avanti che permetterà a Casolo di giungere nel giro di due anni ad una sorprendente caratterizzazione degli $\mathcal{N}_1$-gruppi. Nei mesi successivi infatti Carlo riesce a provare che in un $\mathcal{N}_1$-gruppo ogni sottogruppo nilpotente è contenuto in un sottogruppo normale nilpotente ([16]) (e quindi gli $\mathcal{N}_1$-gruppi sono gruppi di Fitting), risultato chiave per poter usare argomenti di riduzione di tipo "simil-induttivo" nella trattazione degli $\mathcal{N}_1$-gruppi. Da questo segue un bellissimo lavoro ([15]) in cui completa la descrizione degli $\mathcal{N}_1$-gruppi dimostrando che gli $\mathcal{N}_1$-gruppi con tutti gli elementi di ordine finito sono un'estensione di un gruppo nilpotente con un gruppo commutativo (divisibile e di rango finito). Di conseguenza, utilizzando il risultato già citato che gli $\mathcal{N}_1$-gruppi privi di elementi di ordine finito sono nilpotenti, prova che ogni $\mathcal{N}_1$-gruppo è metanilpotente, cioè estensione di un sottogruppo normale nilpotente con un gruppo nilpotente.

Il suo contributo alla teoria dei sottogruppi subnormali non si limita ai soli risultati raggiunti: negli anni Casolo è stato una preziosa guida ai suoi dottorandi ed un costante stimolo ai suoi collaboratori. Recentemente, ad esempio, il suo allievo Pietro Gheri ([26]) ha studiato la probabilità che un sottogruppo di un gruppo finito sia subnormale (da cui deriva un interessante criterio di risolubilità per gruppi finiti). Ricordiamo infine la monografia [17] nella quale Casolo descrive in modo chiaro e completo la teoria degli $\mathcal{N}_1$-gruppi, ne richiama i molti, difficili, problemi ancora aperti ed i possibili sviluppi.

3. – Caratteri e classi di coniugio

Carlo Casolo ha dato un notevole contributo anche alla teoria delle rappresentazioni dei gruppi finiti. In questa sezione intendiamo presentare una panoramica di alcuni tra i suoi risultati più significativi in tale ambito, dopo aver brevemente richiamato il contesto generale nel quale si colloca questa parte del suo lavoro.

Uno dei più rilevanti filoni di ricerca nello studio delle proprietà algebriche dei gruppi finiti è senza dubbio quello della teoria delle rappresentazioni lineari e dei loro caratteri. Negli ultimi cinquanta anni, una vasta porzione della comunità scientifica (algebrica) si è dedicata allo studio di una serie di importanti problemi, riguardanti la relazione esistente tra la struttura algebrica intrinseca di un gruppo finito (come sempre nel seguito di questa sezione) e certe proprietà numeriche dei suoi caratteri irriducibili ([35]). Un problema classico in questa cornice è quello di capire quali informazioni su un determinato gruppo si possano ricavare dalla conoscenza della sola prima colonna della sua tavola dei caratteri, nella quale sono elencate le dimensioni delle sue rappresentazioni irriducibili.

Molte fra le congetture in questo settore sono rimaste pressoché inattaccabili per anni, ma recentemente abbiamo assistito ad una svolta: alcuni problemi in teoria delle rappresentazioni sono stati ridotti ai gruppi semplici e, successivamente, sono stati verificati usando la classificazione dei gruppi semplici finiti (CFSG) ([28]). La dimostrazione della congettura di McKay per $p = 2$ è un esempio classico del successo di questo approccio ([29], [36]).

Sebbene sia indubbiamente uno strumento efficace, l'utilizzo della CFSG spesso sacrifica la comprensione profonda del problema studiato. Non è raro dunque trovare in letteratura dimostrazioni *CFSG – free* di problemi già precedentemente dimostrati con l'uso della classificazione.

L'inventiva e l'eleganza tipiche degli argomenti che non utilizzano la classificazione si trovano in varie pubblicazioni di Casolo riguardanti la teoria dei gruppi finiti. Un esempio significativo è il lavoro [18], che studia speciali azioni di gruppo su moduli finiti e di cui nel seguito illustreremo più in dettaglio il contenuto.

3.1 – *Orbite su moduli finiti e caratteri.*

Azioni di gruppo su moduli finiti compaiono in maniera naturale in teoria dei gruppi, semplicemente considerando l'azione per coniugio di un gruppo su un suo sottogruppo normale abeliano. Il concetto di modulo, centrale in tutta l'algebra moderna, è definito tramite un omomorfismo di un gruppo G nel gruppo degli automorfismi di un gruppo abeliano V; se V è uno spazio vettoriale su un campo $\mathbb{K}$, un tale omomorfismo è detto anche *rappresentazione lineare* del gruppo G su $\mathbb{K}$. Il caso particolarmente importante in cui $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ sia il campo complesso, gode della seguente speciale proprietà: il tipo di isomorfismo del modulo V è univocamente determinato dalla funzione $\chi : G \to \mathbb{C}$, detta *carattere*, che ad ogni elemento del gruppo associa la *traccia* della corrispondente mappa $\mathbb{C}$-lineare di V in sé. La teoria dei caratteri, sviluppata agli inizi del 1900 da G. Frobenius e I. Schur, si è dimostrata uno strumento molto potente per la risoluzione di alcuni dei problemi più profondi della moderna teoria dei gruppi.

I caratteri che corrispondono a moduli *irriducibili* (ovvero che non contengono sottomoduli propri non nulli) sono detti *caratteri irriducibili*. Il *grado* di un carattere è il valore che esso assume sull'elemento neutro del gruppo, e tale valore coincide con la dimensione come spazio vettoriale del modulo associato. I caratteri di grado 1 sono detti *lineari*; essi sono, a differenza dei caratteri di grado maggiore di 1, omomorfismi del gruppo G nel gruppo moltiplicativo $\mathbb{C}^{\times}$.

L'insieme $\mathrm{Irr}(G)$ dei caratteri irriducibili di un gruppo G è una base del $\mathbb{C}$-spazio delle funzioni da G a $\mathbb{C}$ che sono costanti sulle classi di coniugio di G. Di conseguenza, il numero dei caratteri irriducibili di G coincide con il numero delle sue classi di coniugio. In effetti la connessione tra caratteri irriducibili e classi di coniugio di un gruppo appare molto profonda (discuteremo più avanti di alcune questioni in merito), ed è un aspetto affascinante della teoria delle rappresentazioni.

Il ponte che collega la teoria dei caratteri sul campo complesso e le azioni di gruppo su moduli finiti è la *teoria di Clifford*, ovvero lo studio delle costituenti irriducibili delle restrizioni di caratteri irriducibili di un gruppo ai suoi sottogruppi normali. Per illustrarne l'idea principale, consideriamo il caso di un sottogruppo normale minimale abeliano M di un gruppo G. Allora il gruppo duale V dei caratteri (tutti lineari) di M è un G-modulo rispetto all'azione indotta dal coniugio di G su M. Dato $\mu \in V$, se un primo p non divide i gradi dei caratteri irriducibili di G la cui restrizione ad M contiene μ, si può dimostrare che il centralizzante $\mathbf{C}_G(\mu)$ contiene un p-sottogruppo di Sylow P_μ di G. Questa condizione, sotto particolari ipotesi, può essere ulteriormente rafforzata richiedendo che P_μ sia contenuto nel centro di $\mathbf{C}_G(\mu)$. Il bel risultato di Carlo è il seguente.

TEOREMA 1 ([18]). – *Siano V un G-modulo finito, e p un divisore primo dell'ordine di $\overline{G} = G/\mathbf{C}_G(V)$ tale che p non divide $|V|$. Supponiamo che il centralizzante in $\overline{G}$ di ogni elemento non nullo di V contenga un p-sottogruppo di Sylow di $\overline{G}$ come sottogruppo centrale. Allora V è irriducibile e $\overline{G}$ agisce in modo semilineare su V.*

Ricordiamo che $\overline{G}$ agisce in modo semilineare su V se V può essere identificato con un campo finito $\mathbb{F}$ e gli elementi di $\overline{G}$ con biezioni di V del tipo $x \mapsto ax^{\alpha}$ con $a \in \mathbb{F}^{\times}$ e α automorfismo di Galois di $\mathbb{F}$.

Il Teorema 1 è stato provato da Carlo con una dimostrazione ingegnosa ed elegante, che non fa uso della classificazione dei gruppi semplici finiti.

Il valore di questo risultato risiede anche nell'utilità per la risoluzione di una serie di problemi sia nel contesto dei gradi dei caratteri irriducibili che in quello, per alcuni aspetti gemello, delle cardinalità delle classi di coniugio di un gruppo.

Seguendo l'idea della "riduzione della complessità" che consiste nel sostituire le rappresentazioni lineari con semplici funzioni a valori complessi (i caratteri) è naturale chiedersi, come sopra accennato, quali informazioni sulla struttura di un gruppo sia possibile leggere dalla piccola porzione della sua tavola dei caratteri (cioè la tabella dei valori dei caratteri irriducibili) costituita dai loro gradi, ovvero i valori assunti sul singolo elemento neutro. Una pietra miliare in questo ambito è il seguente teorema.

TEOREMA 2 (Ito-Michler). – *Siano G un gruppo, p un primo e P un p-sottogruppo di Sylow di G. Allora p non divide alcuno dei gradi dei caratteri irriducibili di G se e solo se P è abeliano e normale in G.*

Utilizzando il Teorema 1, in [23] viene dimostrato:

TEOREMA 3. – *Sia G un gruppo e siano p, q primi distinti. Se il prodotto pq di due primi distinti divide la cardinalità di una classe di coniugio di G, allora esiste un carattere irriducibile di G il cui grado è multiplo di pq.*

Vogliamo sottolineare che il Teorema 3 è uno dei rari enunciati che stabilisce un rapporto diretto fra l'insieme delle cardinalità delle classi di coniugio e l'insieme dei gradi dei caratteri irriducibili di un gruppo finito. Risultati di questo tipo sono particolarmente desiderabili, al fine di comprendere ed esplicitare le possibili relazioni fra i due importanti insiemi di invarianti.

3.2 – *Grafo dei caratteri e grafo delle classi.*

In generale, dato un insieme X di interi positivi, possiamo costruire il grafo (*prime graph*) $\Delta(X)$ scegliendo come insieme di vertici l'unione degli insiemi dei divisori primi degli elementi di X e unendo due vertici distinti p e q con un lato in $\Delta(X)$ se il prodotto pq divide qualche elemento di X. Abbiamo così un modo di rappresentare in forma geometrico/combinatoria le proprietà aritmetiche dell'insieme in questione.

Prendendo come insieme X l'insieme $\mathrm{cd}(G)$ dei gradi dei caratteri irriducibili di un gruppo G,

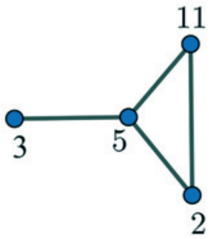


FIGURA 1 – $\Delta(M_{11})$

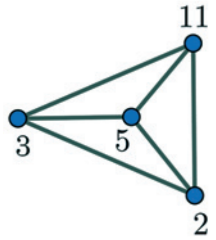


FIGURA 2 – $\Delta^*(M_{11})$

abbiamo il *grafo dei caratteri* di G, che denotiamo con $\Delta(G)$; considerando invece $X = \mathrm{cs}(G)$, l'insieme delle cardinalità delle classi di coniugio di G, abbiamo il *grafo delle classi* $\Delta^*(G)$. Ad esempio, per il gruppo sporadico di Mathieu $G = M_{11}$ abbiamo $cd(G) = \{1, 10, 11, 16, 44, 45, 55\}$ e $cs(G) = \{1, 165, 440, 720, 990, 1320, 1584\}$. I grafi $\Delta(M_{11})$ e $\Delta^*(M_{11})$ sono quindi come nella Figura 1 e Figura 2, rispettivamente.

Il Teorema di Ito-Michler, riformulato in questo contesto, afferma che un primo p non compare fra i vertici di $\Delta(G)$ se e solo se un p-sottogruppo di Sylow P di G è abeliano e normale in G. D'altra parte, come conseguenza dei teoremi di Sylow e del fatto che un gruppo finito non può essere unione dei coniugati di alcun sottogruppo proprio, segue invece che p non è un vertice del grafo delle classi $\Delta^*(G)$ se e solo se P è contenuto nel centro di G. Dato che ogni sottogruppo del centro di un gruppo è sicuramente abeliano e normale nel gruppo stesso, abbiamo quindi che l'insieme dei vertici di $\Delta(G)$ è un sottoinsieme dell'insieme dei vertici di $\Delta^*(G)$. Il Teorema 3 afferma quindi che, per ogni gruppo finito G, $\Delta(G)$ è un *sottografo* di $\Delta^*(G)$.

Un altro convincente esempio della profonda intuizione matematica di Carlo è fornito dal seguente risultato.

TEOREMA 4 ([1]). – *Se G è un gruppo risolubile, allora il grafo $\Delta(G)$ può essere ricoperto con due soli sottografi completi.*

In altri termini, il Teorema 4 afferma che il *grafo complementare* (1) $\overline{\Delta}(G)$ è bipartito. Osserviamo che per gruppi non risolubili il risultato in generale non vale: basti considerare che il grafo dei caratteri del gruppo alterno A_5 ha tre vertici, ma nessun lato. Nel successivo lavoro [2], sono comunque stati classificati completamente i gruppi G per cui il grafo complementare $\overline{\Delta}(G)$ non è bipartito. Per completezza menzioniamo che, d'altra parte, la trasposizione del Teorema 4 al contesto delle classi di coniugio (vale a dire, l'analogo risultato per il grafo $\Delta^*(G)$) risulta invece vera per tutti i gruppi finiti ([24]).

3.3 – *La congettura Rho-Sigma di B. Huppert.*

Negli anni '80 del secolo scorso, Bertram Huppert ha proposto uno dei problemi "iconici" riguardanti i gradi dei caratteri irriducibili di un gruppo: è vero che esiste un carattere irriducibile il cui grado contenga, tra i suoi fattori primi, una porzione "ampia" dell'intero insieme di primi che appaiono come divisori di qualche grado? Più precisamente, sia G un gruppo e, se χ è un carattere irriducibile di G, si denoti con $\pi(\chi)$ l'insieme dei divisori primi del grado di χ. Si definiscano l'insieme

$$\rho(G) = \bigcup_{\chi \in \mathrm{Irr}(G)} \pi(\chi)$$

e l'intero positivo

$$\sigma(G) = \max\{|\pi(\chi)| \ : \ \chi \in \mathrm{Irr}(G)\}.$$

La *congettura* ρ-σ di Huppert propone di verificare la validità della disuguaglianza $|\rho(G)| \leq 3\sigma(G)$ per ogni gruppo, e di $|\rho(G)| \leq 2\sigma(G)$ per la classe dei gruppi risolubili. Notiamo che le precedenti limitazioni superiori per $|\rho(G)|$ sono ottimali, poiché sono raggiunte per i gruppi A_5 e S_4, rispettivamente.

Considerando la "dualità" che si riscontra tra problemi relativi ai gradi dei caratteri e alle cardinalità delle classi di coniugio, la congettura $\rho - \sigma$ ha una ovvia controparte in quest'ultimo contesto: denotando con $\rho^*(G)$ l'insieme di tutti i primi che dividono la cardinalità di qualche classe di coniugio di G e con $\sigma^*(G)$ il massimo numero di primi che dividono la cardinalità di una singola classe, ci si può chiedere se valga $|\rho^*(G)| \leq 3\sigma^*(G)$ per ogni gruppo G, e $|\rho^*(G)| \leq 2\sigma^*(G)$ nel caso in cui G sia risolubile.

In una prima fase, il lavoro di Carlo riguardante la congettura $\rho - \sigma$ si è principalmente focalizzato sulle classi di coniugio. Con il suo gusto per l'argo-

(1) Ricordiamo che il grafo complementare di un grafo Γ è definito come il grafo avente lo stesso insieme di vertici di Γ, in cui due vertici distinti sono adiacenti se e solo se non lo sono in Γ.

mentazione più semplice e nitida possibile, sempre rivolta a mettere in evidenza e spiegare gli aspetti cruciali delle questioni trattate, Carlo dimostra la validità della disuguaglianza $|\rho^*(G)| < 2\sigma^*(G)$ per una vasta classe di gruppi che includono i gruppi semplici ([8]) (senza fare ricorso alla classificazione); mostra inoltre (in [12]) che $|\rho^*(G)| \leq 2\sigma^*(G)$ vale per ogni gruppo con $\sigma^*(G) = 2$, e per ogni gruppo risolubile con $\sigma^*(G) = 3$ (con uguaglianza in entrambi i casi raggiunta solo se G è metabeliano ([2])). In [21] prova infine che per ogni gruppo G metanilpotente si ha $|\rho^*(G)| < 3\sigma^*(G)$, e costruisce una famiglia di gruppi metabeliani $\{G_n\}$ per cui

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|\rho^*(G_n)|}{\sigma^*(G_n)} = 3,$$

in tal modo smentendo la congettura $\rho - \sigma$ per classi di coniugio di gruppi risolubili. Resta un problema aperto provare che per ogni gruppo valga $|\rho^*(G)| \leq 3\sigma^*(G)$. Il miglior risultato in questo senso ad oggi disponibile è stato ottenuto ancora da Carlo in [22]: per ogni gruppo G vale $|\rho^*(G)| \leq 5\sigma^*(G)$ (per gruppi risolubili la costante moltiplicativa può essere portata a 4, come mostrato in [44]).

Per quanto riguarda la congettura $\rho - \sigma$ nel contesto dei gradi dei caratteri e nel caso generale (ovvero, senza l'ipotesi di risolubilità), sempre in [22] si prova il miglior risultato noto ad oggi: per ogni gruppo G vale $|\rho(G)| \leq 7\sigma(G)$.

Ricordiamo per completezza che, con l'ipotesi aggiuntiva di risolubilità, la congettura $\rho - \sigma$ nella sua formulazione originale $|\rho(G)| \leq 2\sigma(G)$ è tuttora aperta. È stata dimostrata per valori piccoli di $\sigma(G)$ (da O. Manz per $\sigma(G) = 1$ in [37], e da D. Gluck per $\sigma(G) = 2$ in [27]), mentre il miglior risultato generale ad oggi pubblicato si deve a O. Manz e T.R. Wolf ([38]): esso stabilisce che, per ogni gruppo risolubile G, si ha $|\rho(G)| \leq 3\sigma(G) + 2$.

4. – Carlo, la matematica, la letteratura

Per Carlo la lettura era una passione senza confini. Praticamente tutto lo interessava: dai grandi classici ai gialli, dalla botanica alla zoologia, dai saggi storici alla storia dell'arte. Nella sua presentazione per il convegno "La Matematica tra storia, arte e letteratura", svoltosi a Ravenna nel 2015, Carlo scrive che *la passione per il leggere lo condiziona in vario modo sin da quando ha imparato a farlo*. E, senza dubbio, questo traspare dalla articolata ed ampia mole di saggi ed articoli da lui scritti sui rapporti fra matematica e letteratura ([19, 20]) ([3]). In questa sezione ci focalizzeremo su alcuni di questi tentando di far emergere dal grande intreccio di riflessioni e considerazioni sviluppate in quelle pagine, certi aspetti sia della personalità di Carlo che della sua visione del mondo e quindi anche, indissolubilmente, della matematica. Non vi è dubbio infatti che mentre egli trattava gli autori più diversi, da Musil a Poe a Potocki, passando per Gadda, Tolstoj e Canetti, con la motivazione esplicita di trovare la matematica nella letteratura, inevitabilmente l'esito era pure quello di trovare la letteratura nella matematica. Se infatti letteratura sta per poesia, abbandono all'immaginazione e al sogno, bellezza incorrotta, sollevamento dal grigiore quotidiano, appare evidente che questi siano, nell'opinione di Carlo, ingredienti indispensabili anche al pensiero matematico. In altre parole c'è della letteratura, nel suo senso più ampio, dentro la matematica. Nel leggere i suoi interventi si è in effetti esposti ad una miscela volutamente inestricabile di matematica e letteratura, dove queste due arti giocano sostanzialmente alla pari su un comune terreno. L'esito della partita pende ora dall'una ora dall'altra parte ma termina senza vincitori, sotto lo sguardo dell'unico arbitro a cui sia consentito esprimere un giudizio, ossia la vita, intesa come slancio vitale e passione.

In questo senso, esemplare ed assolutamente originale è la trattazione della figura di Don Giovanni, visto come un *emblema della libera e incandescente energia vitale* ([4]) e tuttavia ripensato alla luce della matematica, comunemente *additata come arida e consumante sottomissione a regole*

([2]) Un gruppo è detto metabeliano se è estensione di un sottogruppo normale abeliano con un gruppo abeliano.

([3]) Altri articoli sono liberamente scaricabili alla voce "varie" sulla homepage di Casolo ([45])

([4]) In questa sezione riportiamo in corsivo le parole di Carlo nei suoi articoli e fra virgolette le citazioni degli autori presenti nei suoi articoli.

astruse. I legami fra il mito di Don Giovanni e la matematica sono in parte espliciti, come nell'opera di M. Frisch in cui Don Giovanni è un matematico, ma in più larga misura nascosti e a questo disvelarli contribuisce ampiamente la trattazione che Carlo ci offre.

Si parte da Mozart, come è doveroso, e dalla immortalità a cui ha trascinato il numero 1003 nel famoso catalogo, il cui successo nei secoli appare in parte dovuto alla *primordiale attrazione che una lista di numeri esercita* e in parte al *marchio di garanzia ed autorevolezza* esercitato dalle cifre esatte. Qui Carlo coglie l'occasione per descrivere, in modo divertente ma anche polemico, i consulenti finanziari come *moderni Leporelli in giacca e cravatta, sempre pronti ad estrarre dalle loro valigette squadrate i loro cataloghi di tabelle e grafici*. Rinforza poi la sua ironia in una nota dai contenuti estremamente attuali:

> *La sensuale autorevolezza del numero presiede anche la voga di certe autocertificazioni ed autovalutazioni, come ad esempio quelle universitarie [...]. In effetti, il catalogo di Leporello può essere visto come uno dei primi documenti di autovalutazione interna ad una azienda, redatto secondo cosiddetti "criteri oggettivi".*

Si prosegue con Molière che lascia esprimere al suo Don Giovanni un credo libertino e dissacratore avvalendosi delle armi affilate della matematica. Quando il servitore Sganarello pressa Don Giovanni per sapere in cosa egli creda, la risposta non potrebbe essere più secca: "Credo che due più due fa quattro, Sganarello, e che quattro più quattro fa otto". Dunque egli crede in ciò a cui non si può non credere, ossia al computo elementare del due più due, ma anche al metodo deduttivo della matematica espresso dall'avvio di ragionamento costituito dalla affermazione successiva quattro più quattro fa otto. In Molière insomma la matematica sembra messa in bocca a Don Giovanni come *l'esempio più convincente e riuscito di un metodo di conoscenza che prescinde da verità rivelate o dal ricorso al principio di autorità*. Ma vi è pure un'altra interpretazione possibile, ossia che quell'aggiunta del quattro più quattro fa otto sia meramente rafforzativa del calcolo iniziale e che l'unica cosa che davvero conti per Don Giovanni sia il raggiungimento cinico e opportunista dei propri fini. In questa seconda lettura la matematica sarebbe quindi lo strumento finale per il raggiungimento dell'efferatezza.

Altra interessante incursione della matematica nel mito di Don Giovanni la troviamo nel racconto di A. Schnitzler, "Il ritorno di Casanova" (1918). Questa volta attraverso una giovane e bella studiosa di matematica di cui Casanova si invaghisce, stupito e affascinato dalla sua insolita passione. Infine nel "Don Juan" (1818) di Lord Byron è la madre di Don Giovanni ad essere una matematica. Questa volta però la matematica fa da sostegno ad una figura che impersona una educazione severa e negatrice della vita. Tale svolta nella accezione della matematica è tipica di tutto il periodo romantico, in cui, a differenza di quello illuminista, la matematica non è più vista come matrice di un pensiero anticonformista e libero ma anzi come un principio coercitivo e contrario alla libera espressione dell'esperienza vitale, tanto da associarsi *al vecchio nemico della religione istituzionale, nel dispensare norme restrittive e mortifere, e nel richiamo conservatore all'ordine*. Si guardi, come caso estremo, al poemetto "Le calcul" di V. Hugo, di cui Carlo ha fornito una convincente traduzione in italiano ([45]). In tale composizione il calcolo è visto come abisso, la scienza esatta come nuda, pallida e terribile, il numero come orrendo muro e, in sostanza, tutta la matematica come morte e negazione della poesia. Un ampio commento di questo poemetto si ritrova, in effetti, in "Matematica e sogni nella letteratura" [19], saggio in cui Carlo esplora la matematica nella letteratura fantastica, attribuendole la funzione di elemento di connessione fra mondo immaginario e mondo reale. L'osservazione fondamentale da cui egli parte è che la matematica grazie al suo rigore rende plausibile ed accettabile intellettualmente ciò che invece è completamente senza regole, fissa come possibili degli elementi concettuali di per sé astrusi che risulterebbero altrimenti puramente arbitrari e dunque ridicoli agli occhi del lettore. A tale proposito chiarificatrice è l'apertura dell'articolo lasciata a J. L. Borges:

> "Se mi dicessero che ci sono unicorni sulla luna, io accetterei o respingerei la notizia, oppure sospenderei il giudizio, ma sarei in grado

di immaginarli. Se invece mi dicessero che sulla luna sei o sette unicorni possono essere tre, direi subito che è impossibile. Chi ha compreso che tre più uno fa quattro non fa la prova anche con monete, dadi, pezzi degli scacchi o matite. Lo sa e basta. Non può concepire un'altra cifra." ([5])

Gli esempi di letteratura fantastica in cui la matematica riveste un ruolo notevole sicuramente non mancano: dai ben noti "Flatland" di E. Abbott ad "Alice nel paese delle meraviglie" di L. Carroll, a E. A. Poe che nel racconto "Hans Pfaall" descrive le fasi iniziali dell'ascesa in pallone verso la Luna infarcendo la narrazione di calcoli e considerazioni matematiche. L'esplorazione di questo ampio mondo non si riduce però, in Carlo, ad un dettagliato elenco, ma è invece un'occasione per dibattere il complesso confronto/rapporto fra la matematica e il sognare, iniziando dall'evidenziare due tipici poli, entrambi parzialmente distorcenti, presenti nei testi letterari. Da un lato la totale incompatibilità fra le due attività, che deriva dall'interpretazione della matematica come fredda intelligenza e quella del sogno come libera emotività. Dall'altro la loro completa identificazione, che deriva dall'interpretazione della matematica come una sorta di sogno, ma anche di delirio e forse di incubo. La prima interpretazione è ben visibile, ad esempio, nella favola "Il principe felice" di O. Wilde in cui un austero professore di matematica mette in discussione la possibilità dei bambini dell'orfanotrofio di riconoscere come somigliante ad un angelo la statua del principe. Egli argomenta che il riconoscimento è impossibile perché nessuno ha mai davvero visto un angelo e, alla replica dei bambini di averne visti nei loro sogni egli "aggrottò la fronte e fece la faccia scura, perché non trovava giusto che i bambini sognassero". Quello che Carlo propone è di uscire dalla rigida dicotomia fra i due poli di cui sopra e cercare invece di mettere in luce

le caratteristiche che accomunano il sognare al fare matematica: una certa forma di libertà, l'indipendenza dalle condizioni materiali, l'audacia, la certezza, ma anche l'estraneità e la stranezza; assieme alla suggestione che il linguaggio della matematica, al tempo stesso esatto e remoto, sia, così come quello dei sogni, un veicolo per idee non convenzionali.

A tale proposito, si veda, la lunga sezione dedicata a "Il sogno di D'Alembert" di D. Diderot, quella dedicata a H. P. Lovecraft e infine quella, piuttosto originale, riguardante il poeta e filosofo R. Daumal, interessato alla particolare natura delle parole della matematica per la descrizione delle sue visioni. Come Carlo osserva

tra tutte le parole degli uomini, quelle della matematica sono un po' più leggere, un po' più veloci, né troppo molli, né troppo rigide. [...] Se, da una parte, la matematica è il linguaggio in cui è scritto il libro della Natura, potrebbe anche, dall'altra, essere quello del testo iniziatico in cui è celata l'Oltrenatura.

È inoltre evidente come la matematica, nel corso dei secoli, sia stata soggetta a letture ed interpretazioni estremamente diversificate e talora opposte, per cui la polarizzazione della riflessione su di essa non è riducibile a quella sopra ricordata. Carlo ci invita a riflettere, in particolare, sulla matematica ammirata come disciplina spirituale oppure denigrata come forma di conoscenza troppo specifica, tecnica e di angusta portata. E se sul primo versante si può sicuramente partire da Platone e dal suo famoso omaggio alla geometria scolpito all'ingresso dell'Accademia, Carlo prosegue con molti autori degli anni '30 del Novecento, da Musil a Broch a Queneau. Nel periodo in cui la matematica affronta la spinosa questione dei suoi fondamenti, una eco importante di tale riflessione e delle dimensioni conflittuali ad essa collegate pervade infatti anche la letteratura.

Per cominciare, il protagonista del romanzo "L'uomo senza qualità" (1930) di R. Musil è il matematico Ulrich che "amava la matematica per via di quelli che non la potevano soffrire" e che pensava la matematica "fredda e tagliente come la lama di un coltello", subendo la fascinazione delle sue lim-

([5]) J. L. Borges, *Il libro di sabbia*, Trad. I. Carmignani, Adelphi 2004.

pide qualità estetiche e della sua funzione ordinatrice del mondo. D'altra parte egli osserva come la matematica, oltre che madre delle scienze, sia ormai divenuta anche nonna della tecnica, esprimendo con questo il timore per un suo possibile contributo all'imbarbarimento culturale causato dalla schiavitù dell'uomo rispetto alla macchina. Perché non vi è dubbio invece che, per Musil (e per Carlo), il vero volto di questa scienza sia quello "non finalizzato ma antieconomico e passionale". Non dunque

> *la matematica del regolo calcolatore, dell'ingegnere e delle banche, ma anche del docente universitario, ossia la matematica – essenzialmente reazionaria – del noto; ma la matematica dell'ignoto e della promessa, della fantasia e dell'onestà, dell'esercizio esasperato, gratuito ed impeccabile. Questa matematica, oscillante fra lo sport estremo e la mistica...*

Meno conosciuto il romanzo "L'incognita" (1927) di H. Broch, che incuriosiva particolarmente Carlo essendo il protagonista uno studente di fisica impegnato nella stesura della sua tesi di dottorato in teoria dei gruppi. Broch vede la matematica come una forma di conoscenza limitata, piccola parte di una conoscenza di tipo mistico e universale. Due delle figure di scienziati che appaiono nel suo romanzo sono, per motivi diversi, prive di autentica considerazione per la matematica. Troppo prosaici, troppo focalizzati nelle loro specifiche ricerche, non credono nelle possibilità conoscitive o applicative della matematica, né tantomeno nelle sue possibilità emancipatorie o redentive. Ad esse si contrappone Hieck, il protagonista, per il quale la matematica non solo è inspiegabilmente emozionante ma in più promette la possibilità di abbracciare tutti i fenomeni della vita giungendo ad una comprensione totale dell'essere, sconfinando in una prospettiva quasi religiosa. Il suo slancio è tuttavia contrastato da un senso di solitudine ed incomunicabilità, nonché dalla percezione dei propri limiti personali, cosicché un chiaro conflitto si apre fra la matematica come "limpida rete di realtà luminosa" da dipanare o invece come "arido intreccio a cui si applicasse una schiera di ciechi."

Diversa considerazione merita J. L. Borges, la cui opera è permeata dalla matematica. Non tanto perché i protagonisti dei suoi racconti siano matematici, quanto perché le situazioni descritte prendono l'avvio da considerazioni ed idee di tipo matematico o comunque attingono copiosamente dall'immaginario stesso della matematica. Tuttavia Carlo mette in luce benevolmente alcuni scivoloni matematici in cui Borges incappa. Ad esempio, una vertigine di tipo combinatorio sostiene il celebre racconto "La biblioteca di Babele" (1941) in cui viene descritta un'ipotetica biblioteca contenente tutti i libri, la cui lunghezza non supera un certo numero di pagine, che è possibile scrivere usando i simboli dell'alfabeto, i segni di interpunzione e lo spazio bianco. Ma oltre la combinatoria sta pure la geometria visto che, a contribuire al senso di estraniamento che il racconto evoca, concorre pure una minuziosa descrizione delle gallerie esagonali, dei pozzi di ventilazione centrali e dei collegamenti fra essi nei vari piani in cui la biblioteca si articola. Carlo ci invita ad osservare però che, per come è fatta la biblioteca, essa può essere percorsa ma non esplorata dato che ogni stanza esagonale ha solo una o due porte di accesso; *ed in questo senso essa è tanto "labirintica" quanto una linea retta*. Ovviamente la biblioteca è piena zeppa di libri privi di senso compiuto e anche di tutte le piccole variazioni possibili di quelli di senso compiuto che hanno fatto la storia della letteratura nel corso dei secoli. Si tratta insomma di una biblioteca totale, in cui non solo compare il racconto stesso di Borges ma anche quello in cui le gallerie della biblioteca sono triangolari anziché esagonali. Con questa accezione di totalità, o se si preferisce universalità, esistono racconti e trattati sicuramente antecedenti. Carlo, nel suo saggio "La biblioteca universale" [20], esamina in maniera attenta tali precedenti, spaziando dallo psicologo tedesco G. T. Fechner, al Carroll di "Sylvie and Bruno", allo storico della scienza K. Lasswitz che ambienta il suo racconto "La biblioteca universale" (1904) in una atmosfera domestica e serale, priva dei tratti angosciosi della versione di Borges. Si prosegue con Leibniz e il suo breve saggio "Apocatastasi" (1715), termine che si riferisce nella filosofia stoica al ritorno dell'universo nel suo stato originario. Qui appare la dimostrazione matema-

tica della finitezza dei libri possibili e l'inquietante osservazione secondo cui la narrazione della storia pubblica annuale (ma anche quella delle singole vicende individuali) sia destinata a ripetersi ciclicamente. Ciò solleva ovviamente l'importante problema della sostanziale impossibilità di descrivere la realtà, del salto tra *la continua confusa variabilità delle sensazioni e la finitezza discreta dei testi*. Si ricorda poi che J. Swift, nei "Viaggi di Gulliver" (1726), immagina una macchina di legno, tutta ingranaggi e manovelle, destinata alla scrittura automatica di tutti i possibili libri e dunque capace, secondo il delirio dello strampalato accademico Lagado, di sconfiggere ogni forma di ignoranza senza necessità di ingegno e applicazione. E nel finale dell'articolo, sul tema della scrittura automatica, non poteva certo mancare l'immagine colorita, creata dal matematico E. Borel nel 1913, del plotone di scimpanzé dattilografi impegnati a battere casualmente i tasti di una macchina da scrivere.

Ma ci fermiamo qui, consapevoli che anche queste nostre pagine siano già presenti in uno almeno dei volumi della biblioteca totale.

Ringraziamenti
Gli autori desiderano ringraziare Clara Franchi e Mario Mainardis per la collaborazione ed i suggerimenti su alcune parti di questo lavoro.

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

[1] Z. Akhlaghi, C. Casolo, S. Dolfi, K. Khedri, E. Pacifici, *On the character degree graph of solvable groups*, Proc. Am. Math. Soc. 146 (2018), 1505-1513.
[2] Z. Akhlaghi, C. Casolo, S. Dolfi, E. Pacifici, L. Sanus, *On the character degree graph of finite groups*, Ann. Mat. Pura e Appl. 198 (2019), 1595-1614.
[3] M. Aschbacher, S. D. Smith, *On Quillen's conjecture for the p-groups complex*, Ann. of Math. (2) 137 (1993), no. 3, 473-529.
[4] K. S. Brown, *Euler characteristics of groups: the p-fractional part*, Invent. Math. 29 (1975), no. 1, 1-5.
[5] C. Casolo, *On groups with all subgroups subnormal*, Bull. London Math. Soc. 17 (1985), no. 4, 397.
[6] C. Casolo, *Groups in which all subgroups are subnormal*, Rend. Accad. Naz. Sci. XL Mem. Mat. (5) 10 (1986), no. 1, 24-249.
[7] C. Casolo, *Soluble groups with finite Wielandt length*, Glasgow Math. J. 31 (1989), no. 3, 329-334.
[8] C. Casolo, *Prime divisors of conjugacy class lengths in finite groups*, Atti Accad. Naz. Lincei Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. Rend. Lincei (9) Mat. Appl. 2 (1991), 111-113.

[9] C. Casolo, *On the subnormalizer of a p-subgroup*, J. Pure Appl. Algebra 77 (1992), no. 3, 231-238.
[10] C. Casolo, *Wielandt series and defects of subnormal subgroups in finite soluble groups*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova 87 (1992), 93-104.
[11] C. Casolo, *A criterion for subnormality and Wielandt complexes in finite groups*, J. Algebra 169 (1994), no. 2, 605-624.
[12] C. Casolo, *Finite groups with small conjugacy classes*, Manuscripta Math. 82 (1994), 171-189.
[13] C. Casolo, *Simplicial Complexes in Finite Groups*, Scuola Matematica Interuniversitaria, (2000) Cortona. http://web.math.unifi.it/users/casolo/complessi.pdf
[14] C. Casolo, *Torsion-free groups in which every subgroup is subnormal*, Rend. Circ. Mat. Palermo (2) 50 (2001), 321-324.
[15] C. Casolo, *On the structure of groups with all subgroups subnormal*, J. Group Theory 5 (2002), no. 3, 293-300.
[16] C. Casolo, *Nilpotent subgroups of groups with all subgroups subnormal*, Bull. Lond. Math. Soc. 35 (2003) 15-22.
[17] C. Casolo, *Groups with all subgroups subnormal*, Note Mat. 28 (2008), suppl. 2, 1-153 (2009).
[18] C. Casolo, *Some linear actions of finite groups with q'-orbits*, J. Group Theory 13 (2010), 503-534.
[19] C. Casolo, *Matematica e sogni nella letteratura* in Matematica e letteratura. Analogie e convergenze, Collana UMI-CIIM, UTET Università (2016), 199-234.
[20] C. Casolo, *La biblioteca universale* in Parole, formule, emozioni. Tra matematica e letteratura, UTET Università (2018), 277-308.
[21] C. Casolo, S. Dolfi, *Conjugacy class lengths of metanilpotent groups*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova 96 (1996), 121-130.
[22] C. Casolo, S. Dolfi, *Prime divisors of irreducible character degrees and of conjugacy class sizes in finite groups*, J. Group Theory 10 (2007), 571-583.
[23] C. Casolo, S. Dolfi, *Product of primes in conjugacy class sizes and irreducible character degrees*, Israel J. Math. 174 (2009), 403-418.
[24] S. Dolfi, E. Pacifici, L. Sanus, V. Sotomayor, *The prime graph on class sizes of a finite group has a bipartite complement*, J. Algebra 542 (2020), 35-42.
[25] H. Heineken, I. J. Mohamed, *A group with trivial centre satisfying the normalizer condition*, J. Algebra 10 (1968), 368-376.
[26] P. Gheri, *Subnormalizers and solvability in finite groups*, submitted, arXiv:2007.03554.
[27] D. Gluck, *A conjecture about character degrees of solvable groups*, J. Algebra 140 (1991), 26-35.
[28] D. Gorenstein, R. Lyons, R. Solomon, *The classification of the finite simple groups*, Number 3, Part I, Chapter A, Almost simple K-groups, Mathematical Surveys and Monographs, 40.3, American Mathematical Society, Providence, RI, 1998, xvi+419 pp.
[29] I. M. Isaacs, G. Malle, G. Navarro, *A reduction theorem for the McKay conjecture*, Invent. Math. 170 (2007), 33-101.
[30] J. C. Lennox, S.E. Stonehewer, *Subnormal subgroups of groups*, Oxford Mathematical Monographs, Oxford University Press, New York, 1987. ix+253 pp.
[31] M. S. Lucido, *On the partially ordered set of nilpotent subgroups of a finite group*, Comm. Algebra 23 (1995), no. 5, 1825-1836.
[32] M. S. Lucido, *Prime graph components of finite almost simple groups*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova 102 (1999), 1-22.
[33] M. S. Lucido, *On the nilpotent complex of simple groups of Lie type*, Hokkaido Math. J. 32 (2003), no. 2, 277-289.
[34] M. S. Lucido, *On the poset of non-trivial proper subgroups of a finite group*, J. Algebra Appl. 2 (2003), no. 2, 165-168.
[35] G. Malle, *Local-global conjectures in the representation theory of finite groups*, Representation Theory - Current Trends and Perspectives., EMS Ser. Congr. Rep, Eur. Math. Soc., Zurich (2017), 519-539.
[36] G. Malle, B. Späth, *Characters of odd degree*, Ann. of Math. (2) 184 (2016), 869-908.
[37] O. Manz, *Endliche auflösbare Gruppe, deren sämtliche Charaktergrade Primzahlpotenzen sind*, J. Algebra 94 (1985), 211-255.
[38] O. Manz, T. R. Wolf, *Arithmetically long orbits of solvable linear groups*, Illinois J. Math. 37 (1993), 652-665.
[39] W. Möhres, *Auflosbarkeit von Gruppen deren Untergruppen alle subnormal sind*, Arch. Math. (Basel) 54 (1990), 232-235.
[40] A.Yu. Olshanskii, *Infinite groups with cyclic subgroups*, Soviet Math. Dokl. 20, (1979), 343-346.
[41] D. Quillen, *Homotopy properties of the poset of nontrivial $\{p\}$-subgroups of a group*, Adv. Math. 28 (1978) no. 2, 101-128.
[42] J. E. Roseblade, *On groups in which every subgroup is subnormal*, J. Algebra 2 (1965), 402-412.
[43] H. Smith, *Torsion-free groups with all subgroups subnormal*, Arch. Math. (Basel) 76 (2001), 1-6.
[44] J. Zhang, *On the lengths of conjugacy classes*, Comm. Algebra 26 (1998), 2395-2400.
[45] http://web.math.unifi.it/users/casolo/varie.html

Gli autori sono collaboratori, ex-studenti, colleghi, ma soprattutto amici di Carlo Casolo. Sono docenti o ricercatori in Algebra presso l'Università degli Studi di Firenze, l'Università degli Studi di Padova, l'Università degli Studi di Milano-Bicocca e la Universitat de València (Spagna).