
Matematica, Cultura e Società

RIVISTA DELL'UNIONE MATEMATICA ITALIANA

GIUSEPPE CONTI

Riflessioni matematiche sulla Cupola di Santa Maria del Fiore a Firenze

Matematica, Cultura e Società. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. 5 (2020), n.3, p. 243–259.

Unione Matematica Italiana

[<http://www.bdim.eu/item?id=RUMI_2020_1_5_3_243_0>](http://www.bdim.eu/item?id=RUMI_2020_1_5_3_243_0)

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)*

SIMAI & UMI

<http://www.bdim.eu/>

Riflessioni matematiche sulla Cupola di Santa Maria del Fiore a Firenze

GIUSEPPE CONTI

Università di Firenze

E-mail: giuseppe.conti@unifi.it

Sommario: *In questo lavoro voglio evidenziare l’importante ruolo della matematica nello studio e nella conoscenza della Cupola del Brunelleschi del Duomo di Santa Maria del Fiore a Firenze, mostrandone gli aspetti matematici, che sono stati estremamente utili per comprendere questa costruzione affascinante e “misteriosa”.*

Non dovrebbe sorprendere il fatto che la matematica si sia dimostrata uno strumento così importante nello studio della Cupola; infatti, Filippo Brunelleschi era anche un matematico: egli dette le regole geometriche della prospettiva e, per questo motivo, è citato in tutti i testi più importanti di storia della matematica. Inoltre, egli era circondato da altri matematici, come Paolo Toscanelli e Giovanni dell’Abaco, che collaboravano con lui.

Abstract: *In this paper, I want to highlight the important role of mathematics in the study and in the knowledge of the Brunelleschi’s Dome of the Cathedral of Santa Maria del Fiore in Florence, by showing the mathematical aspects, which have been extremely helpful in understanding this fascinating and “mysterious” construction.*

It should not surprise the fact that mathematics has proved such an important tool in the study of the Dome; in fact, Filippo Brunelleschi was also a mathematician: he gave the geometric rules of perspective and, for this reason, he is mentioned in all the most important texts of the history of mathematics. In addition, he was surrounded by other mathematicians, as Paolo Toscanelli and Giovanni dell’Abaco, who collaborated with him.

1. – Introduzione

La costruzione della Cupola della Cattedrale di Santa Maria del Fiore a Firenze fu un avvenimento straordinario già all’epoca della sua costruzione; essa suscita ancor oggi un grande stupore in chi l’ammira.

La Cupola fu edificata da Filippo Brunelleschi (1377-1446) fra il 7 agosto 1420 (per questo motivo nel 2020 a Firenze si celebrano i 600 anni dall’inizio della sua costruzione con un denso programma di eventi) e l’1 agosto 1436, ed è tuttora la più grande cupola in muratura che sia stata mai costruita nel mondo. Le dimensioni di questo monumento sono eccezionali: essa inizia da un’altezza di circa 54,60 metri dal pavimento della cattedrale e poggia su un tamburo alto 12,90 metri; il suo diametro interno misura 45,40 metri, quello esterno 54,80 metri; la sua

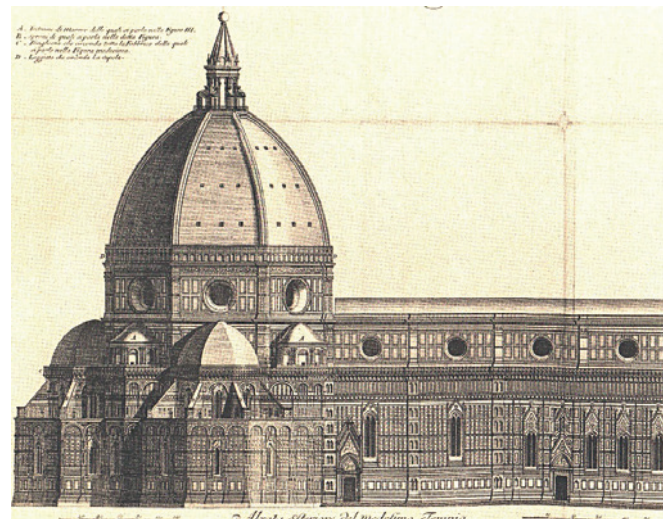


Figura 1 – La Cattedrale di Firenze in una stampa del ‘700⁽¹⁾.

sommità si trova a 91,14 metri dal pavimento e, con la Lanterna che pesa circa 750 tonnellate ed è alta

Accettato: il 10 settembre 2020.

⁽¹⁾ Questa stampa si trova in [24].

20,42 metri, arriva a circa 116,00 metri⁽²⁾; il peso della sola Cupola è di circa 30.000 tonnellate.

In questo articolo intendo evidenziare l'importanza che la matematica ha nello studio della Cupola. Sicuramente la matematica ha avuto un ruolo rilevante anche nella sua progettazione: infatti Brunelleschi si avvale del contributo di matematici, fra i quali cito Paolo dal Pozzo Toscanelli⁽³⁾ (1397-1482) e Giovanni dell'Abaco⁽⁴⁾ (1364-1440 circa); quest'ultimo collaborò con Filippo per questioni geometriche riguardanti il modello in muratura della Cupola del 1418, costruito insieme a Donatello (1386-1466) e Nanni di Banco (circa 1385-1421). Teniamo presente, inoltre, che Brunelleschi è considerato il *padre della prospettiva*, poiché stabilì le regole geometriche della prospettiva lineare⁽⁵⁾ e, per questo motivo, è citato in tutti i più importanti testi di storia della matematica ([4] p. 340, [18] p. 272, [19] pp. 260, 285).

2. – La geometria della Cupola

Tecnicamente la Cupola di Firenze è una *volta a padiglione* su base ottagonale, a differenza di altre cupole di dimensioni analoghe, che sono a base circolare (*cupole di rotazione*), come il Pantheon e la Cupola di San Pietro a Roma; anche la Cupola di Santa Sofia ad Istanbul è a base circolare e ha dimensioni più piccole rispetto a quella del Brunelleschi.

L'ottagono di base della Cupola interna di Santa Maria del Fiore è un ottagono “abbastanza” regolare

(i lati misurano da un minimo di 16,62 metri a un massimo di 17,24 metri), il cui diametro della circonferenza circoscritta è, come già visto, mediamente 45,40 metri, mentre quello della circonferenza inscritta è circa 41,94 metri. Il diametro della circonferenza circoscritta all'ottagono della cupola esterna è di circa 54,80 metri, mentre quello della circonferenza inscritta è circa 50,63 metri; naturalmente, anche i lati dell'ottagono esterno non sono tutti uguali: si va dai 20,06 ai 20,81 metri.

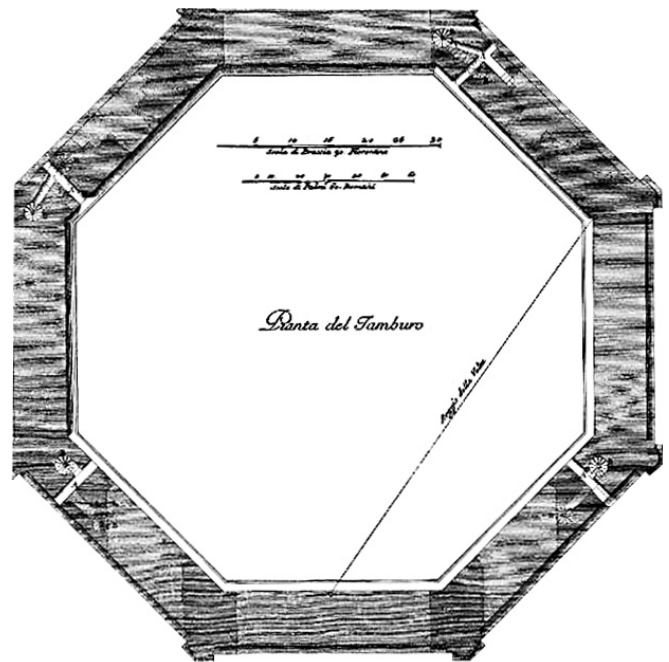


Figura 2 – L'ottagono di base della Cupola in una stampa del '700⁽⁶⁾.

⁽²⁾ Per i rilievi eseguiti sulla Cupola vedi [9], pp. 182 e seguenti. A titolo di esempio, dalla tabella presente a pg. 182 ho preso le seguenti misure in metri riguardanti alcuni rilievi, eseguiti da vari studiosi in epoche differenti, del diametro della Cupola interna: 45,52, 45,24, 45,54, 45,48, 45,20. La media di tali valori è m. 45,40 con scarto quadratico medio cm. 14,6.

⁽³⁾ Vedi [26] p. 329 e *A History of the University in Europe*, Vol. II, Hilde De Ridder-Symoens & Walter Rüegg Editors, Cambridge University Press, Cambridge 1996, p. 17.

⁽⁴⁾ Vedi [11] p. 83 e *Technological Concepts and Mathematical Models in the Evolutions of Modern Engineering Systems*, edited by Mario Lucertini, Ana Millàn Gasca, & Fernando Nicolò, Springer, Basel, 2004, p. 6.

⁽⁵⁾ Vedi: BARTOLI M. T., *Brunelleschi e l'invenzione della prospettiva*, Prospettive architettoniche, conservazione digitale, divulgazione e studio, a cura di G. M. Valenti, Sapienza Università Editrice, Roma, 2014, pp. 201-222.

È interessante notare che il profilo della base della cupola interna di San Pietro a Roma è esattamente la circonferenza inscritta nell'ottagono di base della cupola interna di Santa Maria del Fiore; dunque la cupola di San Pietro è un po' più piccola di quella di Firenze.

Brunelleschi sapeva che le cupole di rotazione sono più semplici da costruire rispetto a quelle con base poligonale; inoltre, quelle di rotazione hanno meno problemi anche dal punto di vista statico perché le forze, che agiscono su di esse, si distribuiscono in maniera uniforme. Invece, nelle cupole

⁽⁶⁾ Questa stampa si trova in [24].

a base poligonale le tensioni nei vertici sono molto forti e, proprio in questi punti, la struttura è più debole per il cambiamento di direzione della muratura. Si dice che, per questo motivo, egli proponesse una variante al progetto iniziale: rendere circolare la base della Cupola tramite, ad esempio, dei raccordi murari (i *pennacchi*), simili a quelli che avrebbe usato in seguito nelle cupolette presenti nella *Sagrestia Vecchia* e nella *Cappella dei Pazzi*. La forma ottagonale della base della Cupola risale quasi sicuramente ad un progetto anteriore, proposto alla fine del 1200 da Arnolfo di Cambio⁽⁷⁾.

Tale scelta derivava dal fatto che il Battistero

di San Giovanni, che si trova di fronte alla Cattedrale di Santa Maria del Fiore, ha al suo interno una cupola a base ottagonale⁽⁸⁾ e, come è noto anche da Dante che lo chiamava *il mio bel San Giovanni*⁽⁹⁾, era una chiesa molto amata dai fiorentini. Fu per questo motivo che i membri dell'Opera del Duomo si opposero alla variazione proposta da Filippo.

La costruzione geometrica dell'ottagono regolare si eseguiva partendo da un quadrato e non da una circonferenza. Questo dipendeva dal fatto che, per determinare le misure e le proporzioni della struttura da realizzare, venivano usati prevalentemente dei *moduli quadrati*.

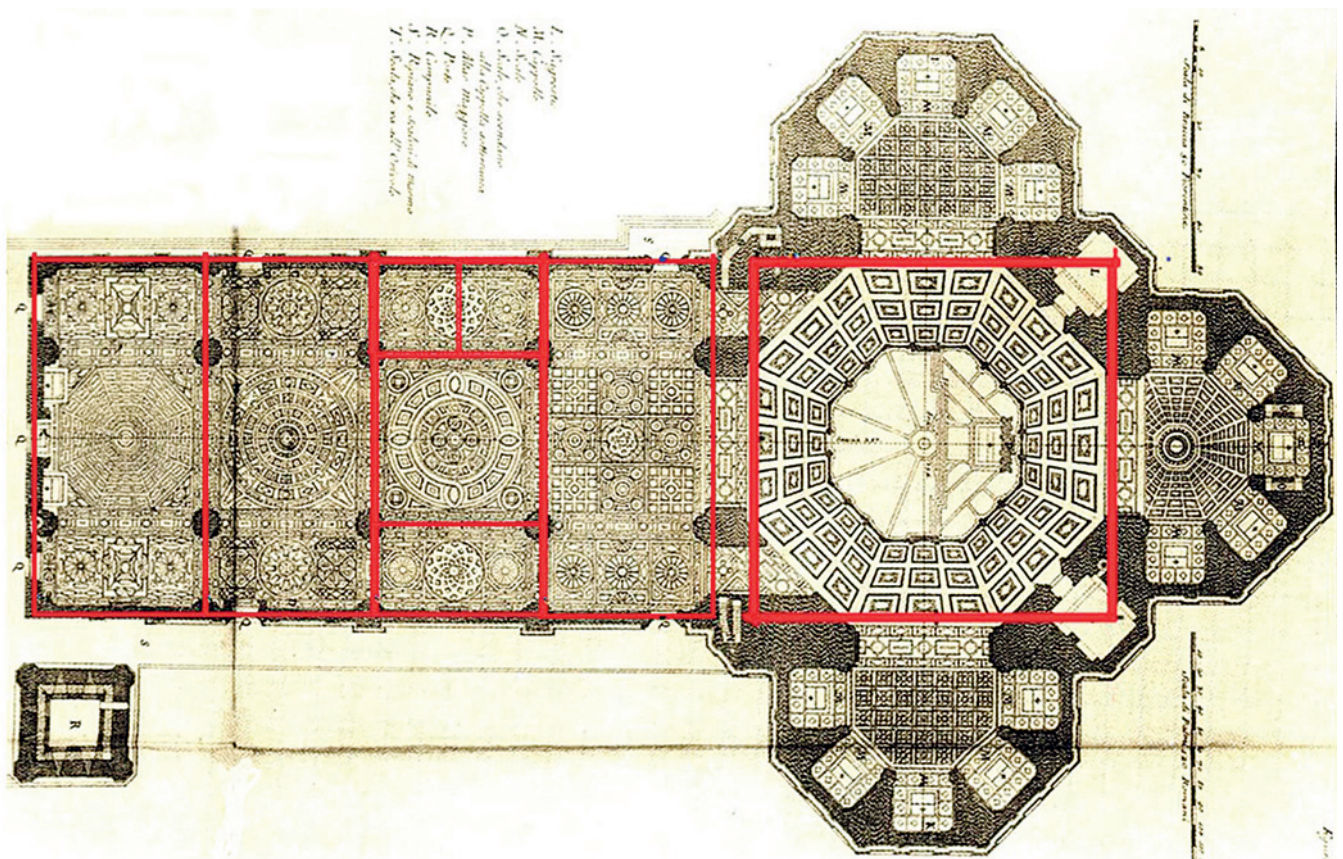


Figura 3 – Pianta della Cattedrale di Firenze con evidenziati alcuni moduli quadrati.

⁽⁷⁾ La prima pietra della nuova Cattedrale, che doveva sorgere in sostituzione della vecchia Cattedrale di Santa Reparata, fu posta il giorno 8 settembre 1296.

⁽⁸⁾ Quasi tutti i battisteri hanno forma ottagonale; il numero 8 in questo caso è legato all'ottavo giorno. Sant'Amrogio (IV secolo), infatti, affermava: *era giusto che l'aula*

del Sacro Battistero avesse otto lati perché ai popoli venne concessa la vera salvezza quando, all'alba dell'ottavo giorno, Cristo risorse dalla morte.

⁽⁹⁾ *Non mi parean né ampi, né maggiori che que' che son nel mio bel San Giovanni fatti per luogo di battezzatori* (Inferno, XIX, 16-18).

Possiamo notare che anche la pianta della Cattedrale di Santa Maria del Fiore è basata su moduli quadrati⁽¹⁰⁾.

Riportiamo una possibile costruzione geometrica dell'ottagono regolare a partire da un quadrato.

Consideriamo il quadrato $ABCD$. Determiniamo sulla diagonale AC il punto F , con AF congruente al lato AB ; il segmento LT , congruente a FC , è proprio il lato dell'ottagono regolare, la cui costruzione diventa molto semplice. Notiamo che, anche in questo caso, la costruzione dell'ottagono regolare si effettua usando la riga ed il compasso.

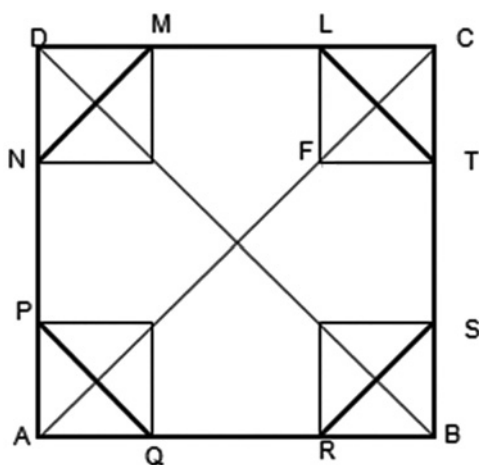


Figura 4 – Costruzione geometrica di un ottagono regolare.

La Cupola è formata da otto *spicchi*, chiamati *fusi*, oppure *vele*; ciascuna *vela* è una porzione di cilindro ellittico⁽¹¹⁾.

⁽¹⁰⁾ Le misure dei lati di questi quadrati soddisfano la seguente relazione 1:2:4. Si ottiene così il rapporto musicale di ottava. Per questioni riguardanti i rapporti musicali in architettura, vedi anche:

CONTI G., SEDILI B., TROTTA A., *Matematica, musica e architettura*, Science & Philosophy, Vol. 5 (1), 2017, pp. 129-148. CONTI G., LITTERA G., PAOLETTI R., *Musica e architettura nei monumenti fiorentini. Alcune notazioni Proporzionali*, Bollettino della Società di Studi Fiorentini, n. 26-27 (2017-2018), pp. 10-24. CONTI G., LITTERA G., MARRAGHINI S., *Musica e architettura nel Rinascimento fiorentino*, L'Universo, Istituto Geografico Militare, n. 3 (Luglio-Agosto-Settembre) 2018, pp. 432-447.

⁽¹¹⁾ Per approfondire alcune questioni riguardanti la storia della costruzione della Cupola, nonché le sue caratteristiche tecnologiche e architettoniche, si può fare riferimento ai seguenti testi: [2], [3], [6], [9], [11], [12], [15], [16], [17], [21], [22].

L'equazione cartesiana del cilindro che contiene l'intradosso di ciascuna vela della cupola interna⁽¹²⁾ è la seguente:

$$\frac{(y - y_1)^2}{(R \cos \omega)^2} + \frac{z^2}{R^2} = 1, R = 36,32,$$

$$(1) \quad y_1 = -\frac{3}{8}R \cos \omega, \omega = \frac{\pi}{8}.$$

Ogni vela è compresa fra due archi di circonferenza, corrispondenti ai *costoloni di spigolo* (detti anche *costoloni angolari*⁽¹³⁾ interni della Cupola; a partire dall'equazione (1), si può facilmente dimostrare analiticamente che il profilo interno di ciascun costolone di spigolo è un arco di circonferenza il cui raggio R misura 36,32 metri⁽¹⁴⁾.

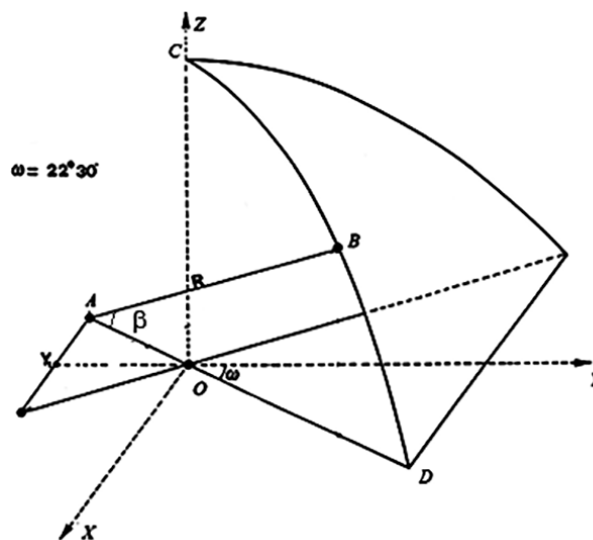


Figura 5 – Cilindro ellittico di ciascuna delle otto vele della Cupola di Santa Maria del Fiore.

Molto importanti, sia dal punto di vista estetico, sia da quello architettonico, sono i profili della Cupola; per quanto riguarda quella interna si tratta

⁽¹²⁾ Come abbiamo osservato, la Cupola è formata da due cupole: una interna ed una esterna. Brunelleschi avrebbe adottato la doppia cupola per alleggerire il peso della struttura.

⁽¹³⁾ La Cupola ha altri sedici *costoloni intermedi*, due per ogni vela, che, al contrario di quelli angolari, non si vedono dall'esterno; inoltre, il profilo di ciascuno di loro è un arco di ellisse.

⁽¹⁴⁾ Vedremo in seguito il motivo per cui il profilo di ciascun costolone angolare deve essere un arco di circonferenza. Da questo fatto segue immediatamente che ciascuna vela è una porzione di cilindro ellittico.

di un arco gotico, la cui curvatura (chiamata *sesto*) è un *sesto di quinto acuto*. Invece, il profilo di quella esterna è un arco gotico a *sesto di quarto acuto*.

Le costruzioni geometriche di questi archi gotici sono le seguenti. Cominciamo con quello interno. Consideriamo due punti diametralmente opposti *A* e *B* dell'ottagono di base della cupola interna; dividiamo il diametro *AB* in cinque segmenti uguali, ciascuno dei quali misura circa 9,08 metri. Si punta il compasso successivamente nei due punti *C* e *D*, detti *centri di quinto acuto* perché le misure dei segmenti *AC* e *DB* sono $1/5$ della misura del diametro *AB*, e si tracciano i due archi di circonferenza *BL* e *AL* con il raggio che misura circa 36,32 metri (ricordiamo che i profili angolari della Cupola sono archi di circonferenza).

Passiamo ora alla cupola esterna. Consideriamo due punti diametralmente opposti *E* e *F* (appartenenti alla retta *AB*) dell'ottagono di base esterno e dividiamo il diametro *EF* in quattro segmenti uguali, ciascuno dei quali misura 13,7 metri circa.

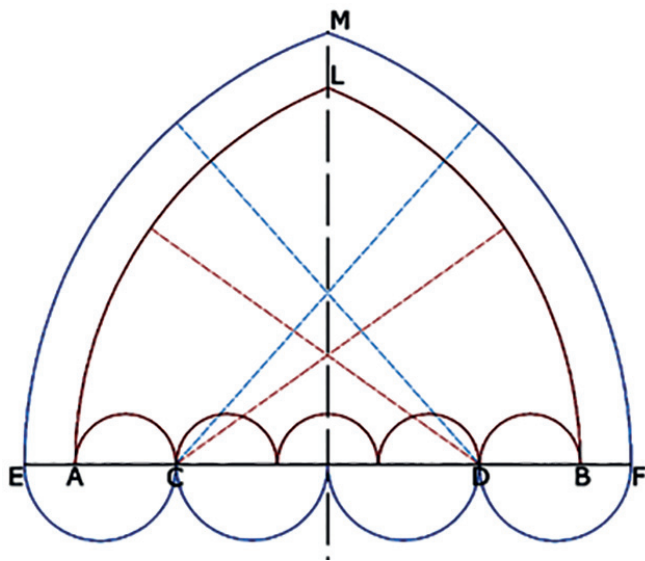


Figura 6 – La costruzione del profilo della Cupola di Santa Maria del Fiore.

Puntando il compasso negli stessi punti *C* e *D*, detti stavolta *centri di quarto acuto* per il fatto che le misure dei segmenti *EC* e *DF* sono $1/4$ della misura di *EF*, si tracciano gli archi *FM* ed *EM* con il raggio che misura circa 41,10 metri.

Sulla geometria del profilo della Cupola ci sono state in passato numerose polemiche e ancora oggi vengono fatte affermazioni inesatte su tale questio-

ne. Nel 1971 uscì un articolo del Prof. Mario Fondelli dell'Università di Firenze, il quale, come conseguenza di un rilievo fotogrammetrico da lui eseguito insieme ad altri, affermava che i profili dei costoloni angolari interni della cupola erano archi di ellisse⁽¹⁵⁾.

Questo risultato provocò la reazione di molti studiosi, i quali sostenevano che la forma ellittica andava contro quanto aveva affermato Brunelleschi, che nella sua Relazione⁽¹⁶⁾ del 1420 scriveva: *In prima: la cupola da lo lato di dentro è volta a misura di quinto acuto negli angoli*. Come abbiamo visto dalla costruzione geometrica, il *quinto acuto* può essere ottenuto soltanto usando archi di circonferenza

Inoltre, la forma ellittica era contraria al procedimento costruttivo della Cupola stessa⁽¹⁷⁾. In effetti, è quasi certo che Brunelleschi usasse per ciascuno degli otto spigoli una centina ([16] p. 46 e p. 82) mobile che veniva spostata verso l'alto man mano che la costruzione avanzava. Il profilo di ciascuna queste centine, alte circa 2 metri⁽¹⁸⁾, era un arco di circonferenza di raggio 36,32. Naturalmente, per ogni spigolo, si poteva usare la stessa centina soltanto se questo avesse avuto un profilo circolare; se la curva del costolone fosse stata un arco di ellisse, oltre alla maggiore difficoltà di realizzazione, occorreva cambiare la centina man mano che la costruzione avanzava verso l'alto. A conferma di questo, sono state trovate nell'intradosso della cupola interna, in corrispondenza dei costoloni di spigolo, delle staffe di ferro che dovevano servire ad ancorare queste centine alla muratura già eseguita ([11] p. 128).

⁽¹⁵⁾ W. FERRI, M. FONDELLI, P. FRANCHI, GRECO F., *Il rilevamento fotogrammetrico della Cupola di "S. Maria del Fiore" in Firenze*, Bollettino di geodesia e scienze affini, anno XXX, n. 3, luglio-agosto-settembre 1971, Istituto Geografico Militare Firenze, Firenze, pp. 159-222.

⁽¹⁶⁾ Sul programma costruttivo della Cupola esistono tre Relazioni di Filippo Brunelleschi: dell'aprile 1420, del 13 marzo 1422 e del 24 gennaio 1426 (vedi [20] pp. 224-228).

⁽¹⁷⁾ Vedi: P. SANPAOLESI, G. BIRARDI, *Vecchie e recenti ricerche sulla Cupola di Santa Maria del Fiore e la interpretazione di un nuovo rilievo fotogrammetrico*, Antichità viva, n. 11, 1972, 2, pp. 39-52.

P. SANPAOLESI, G. BIRARDI, *La curva attuale della Cupola di Santa Maria del Fiore risposta al Prof. Mario Fondelli*, Antichità viva, n. 11, 1972, 6, pp. 75-76.

⁽¹⁸⁾ Questa misura corrispondeva, all'incirca, all'avanzamento medio della muratura in un anno.

Notiamo che veniva continuamente verificata, con estrema precisione, la corretta posizione di queste centine; probabilmente tale controllo era fatto con fili a piombo che dovevano intersecare esattamente le diagonali dell'ottagono realizzate sull'impalcato, posto alla base della Cupola e sorretto da travi inserite nelle cosiddette *buche pontate*⁽¹⁹⁾. Esso era usato come base di lavoro durante la costruzione, ma serviva anche per determinare le misure atte a stabilire e a controllare la geometria della Cupola. Tale verifica era molto importante; infatti, anche un piccolo errore di misurazione avrebbe compromesso la convergenza degli otto costoloni alla sommità dalla Cupola ([17] pp. 143-147).

Il Prof. Lando Bartoli ha verificato che, ipotizzando che ciascun arco dei costoloni di spigolo appartenesse ad una circonferenza, questa differiva dall'ellisse teorizzata dal Prof. Fondelli per un massimo di 8,5 cm., un'inezia in confronto alle dimensioni della Cupola (vedi [1] pp. 59-60). Inoltre, l'asse maggiore di questa ellisse è notevolmente inclinato rispetto all'asse della Cupola (circa 20°), un fatto di difficile realizzazione pratica e d'incomprensibile motivazione.

Ho studiato il problema del profilo della Cupola, insieme ai professori Giovanni Anzani e Roberto Corazzi (vedi [9] pp. 232-241). Abbiamo rilevato con il laser-scanner gli otto costoloni di spigolo e determinato per ciascuno di essi le coordinate di circa 500 punti, che si trovano in una fascia dello spessore di 4 mm. Successivamente abbiamo elaborato questi dati determinando la *circonferenza dei minimi quadrati*; con tale metodo abbiamo ottenuto, per ciascun costolone, una circonferenza il cui raggio misura mediamente 36,18 metri, con uno *scarto quadratico medio* molto piccolo, dell'ordine di 3 cm. Tale risultato è molto interessante perché è quasi coincidente con la misura teorica di 36,32 metri che deve avere il raggio del profilo circolare di ciascun costolone interno.

Successivamente abbiamo considerato la curva che si ottiene intersecando una generica vela con il piano contenente il punto medio della sua base e l'asse della Cupola (*meridiano centrale della vela*). Da considerazioni teoriche si ha che questa curva

deve essere necessariamente un'ellisse, per cui, in questo caso, abbiamo cercato la *conica dei minimi quadrati*. La curva che abbiamo ottenuto con tale metodo è proprio un'ellisse, in pieno accordo con quella teorizzata, anche in questo caso con uno *scarto quadratico medio* molto piccolo.

Il profilo della Cupola era stato stabilito nel 1367 da un comitato formato da otto *Maestri e Dipintori* ([3] p. 115; [20] pp. 205-208). La maggior parte degli studiosi considera valida questa ipotesi; qualcuno precisa, inoltre, che il profilo è da attribuire a Neri di Fioravante (l'architetto che progettò il Ponte Vecchio a Firenze), il quale faceva parte del gruppo degli otto *Maestri e Dipintori*. Qualche altro studioso afferma che, invece, il profilo fu scelto proprio da Brunelleschi; effettivamente, la cupola della chiesa, rappresentata nell'affresco *La Chiesa militante e trionfante nel Cappellone degli spagnoli* situato nel *Chiostro verde* della chiesa di Santa Maria Novella a Firenze, realizzato da Andrea Bonaiuti (1319-1377) nel periodo 1365-1367, è una cupola a padiglione con base ottagonale, ma il cui profilo è molto vicino all'arco a tutto sesto, cioè a una semicirconferenza, e non a un sesto acuto. Quella del Bonaiuti è una testimonianza attendibile, poiché anche lui faceva parte degli otto *Maestri e Dipintori*. Purtroppo questo affresco è l'unica documentazione risalente a quell'epoca⁽²⁰⁾. Inoltre il Vasari nel suo libro ([26], p. 335) scrisse che Brunelleschi affermava: *non si può in nessun modo volgerla tonda perfetta, ... che mettendovi peso rovinerebbe presto*.

Perché Brunelleschi accettò (o scelse) un profilo *gotico*, mentre tutte le coperture voltate, che avrebbe usato nelle sue opere architettoniche, erano basate su profili a tutto sesto, proprio come ritorno all'arte classica e superamento di quella gotica? Sicuramente la forma della Cupola è stata scelta proprio per questioni statiche. Infatti il suo profilo si avvicina molto alla curva catenaria e questa configurazione geometrica rende più stabile la struttura, evitando pericolosi dissesti.

La *catenaria* è la curva piana secondo la quale si dispone, in equilibrio, un filo omogeneo, flessibile e inestendibile, sospeso fra due punti e posto

⁽¹⁹⁾ Le *buche pontate* sono 6 per ognuna delle otto vele e hanno una sezione quadrata, il cui lato misura un braccio fiorentino (cm. 58,36).

⁽²⁰⁾ La chiesa rappresentata nell'affresco è quasi sicuramente la Cattedrale di Firenze, anche se non sappiamo con certezza a quale progetto tale affresco si riferisse.

in un campo gravitazionale uniforme. La sua equazione è:

$$y(x) = a \cdot \cosh\left(\frac{x}{a}\right).$$

Si dimostra che la catenaria rovesciata fornisce la forma migliore per sostenere un arco omogeneo, soggetto solo al proprio peso (vedi [8]).

Fu l'astronomo e matematico Leonardo Ximenes (1716-1786) a notare che il profilo della cupola si avvicina ad una catenaria; egli, infatti, scriveva ([27], pp. 157-158): *Il Brunelleschi non sapeva certamente che sarebbon venuti dopo di lui alcuni Geometri che avrebbon dimostrato che per dare ad un arco, ad una volta, ad una cupola quella curvità che facesse massima la sua resistenza, era necessario di dare a quell'arco l'andamento di una curva catenaria rovesciata. Eppure egli è certissimo, che il sesto della nostra cupola è tale che si accosta assai alla curva catenaria, curva assai acconcia alla costruzione delle cupole.*

La forma è, dunque, molto importante per la statica dei monumenti. A titolo di esempio, consideriamo la cupola della basilica della *Madonna dell'Umiltà* a Pistoia. Questa cupola, il cui diametro è circa 29 metri, fu innalzata da Giorgio Vasari (1511-1574) fra il 1562 e il 1569; essa è simile alla cupola del Brunelleschi per i costoloni di marmo bianco e le tegole rosse, ma il suo profilo è un arco a tutto sesto. Questa forma creò subito delle pericolose lesioni nella struttura⁽²¹⁾, tanto che, subito dopo la sua costruzione, Bartolomeo Ammannati (1511-1592) la circondò con una catena di ferro per evitarne il crollo. I dissesti continuarono anche in seguito, tanto che, attualmente, la cupola è circondata da ben sette catene di ferro, l'ultima delle quali fu posta nel 1960.

Il primo che trattò la curva catenaria fu Galileo Galilei (1564-1642). Nella seconda giornata del suo libro del 1638 *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze* (vedi [14]) faceva dire a Salviati: *Fermansi ad alto due chiodi in un parete, equidistanti dall'orizzonte e tra di loro lontani il doppio della larghezza del rettangolo su l'*

⁽²¹⁾ Come vedremo in seguito, altri motivi sono intervenuti a provocare l'instabilità della cupola della *Madonna dell'Umiltà*; tutte queste cause sono dovute al fatto che, inspiegabilmente, il Vasari non ha seguito quegli accorgimenti messi in atto dal Brunelleschi nella sua Cupola di Firenze.

quale vogliamo notare la semiparabola, e da questi due chiodi penda una catenella⁽²²⁾ sottile, e tanto lunga che la sua sacca si stenda quanta è la lunghezza del prisma: questa catenella si piega in figura parabolica, sì che andando punteggiando sopra l muro la strada che vi fa essa catenella, avremo descritta un'intera parabola.

Dunque Galileo confuse inizialmente la catenaria con la parabola. Tuttavia, nella quarta giornata si corresse e fece dire a Salviati: *Ma più voglio dirvi, recandovi insieme meraviglia e diletto, che la corda così tesa, e poco o molto tirata, si piega in linee, le quali assai si avvicinano alle paraboliche: e la similitudine è tanta, che se voi segnerete in una superficie piana ed eretta all'orizzonte una linea parabolica, e tenendola inversa, cioè col vertice in giù e con la base parallela all'orizzonte, facendo pendere una catenella sostenuta nelle estremità della base della segnata parabola, vedrete, allentando più o meno la detta catenuzza, incurvarsi e adattarsi alla medesima parabola, e tale adattamento tanto più esser preciso, quanto la segnata parabola sarà men curva, cioè più distesa;... .*

Quindi Galileo si rese conto che la catenaria e la parabola sono due curve differenti, anche se sono molto simili. Tuttavia, in seguito si è continuato ad affermare che Galileo sbagliava, perché confondeva la parabola con la catenaria (il cosiddetto *errore di Galileo*)⁽²³⁾.

⁽²²⁾ Huygens fu il primo ad usare il termine *catenaria* in una lettera a Leibniz del 1690. La parola *catenaria* ricorda quella con cui l'aveva chiamata Galileo: *catenella*.

⁽²³⁾ Anche Giovanni Bernoulli (1667-1748) scrisse all'amico Pierre Rémond de Montmort di avere risolto il problema dell'equazione della catenaria in una notte, mentre, affermava Giovanni, suo fratello Giacomo pensava, come Galileo, che essa fosse una parabola.

Morris Kline (vedi [18] p. 551), scrive: *Galileo pensava che la curva fosse una parabola. Huygens affermò che ciò non era corretto.*

Carl B. Boyer (vedi [4] p. 436) afferma: *Mentre Galileo aveva creduto che la catenaria fosse una parabola, Huygens dimostrò che era una curva non algebrica.*

Gino Loria (vedi [19] p. 410) scrive: *Nei medesimi Discorsi s'incontrano due genesi meccaniche della parabola: una esatta e notevole, l'altra irrimediabilmente errata; è falso che sia una parabola la posizione secondo cui si dispone una fune omogenea pesante fissata per i suoi estremi (oggi è noto che trattasi invece di una catenaria).*

Sembra che nessuno di questi autori abbia letto la quarta giornata del *Discorsi*, ma si siano tutti fermati alla seconda giornata (vedi [25]).

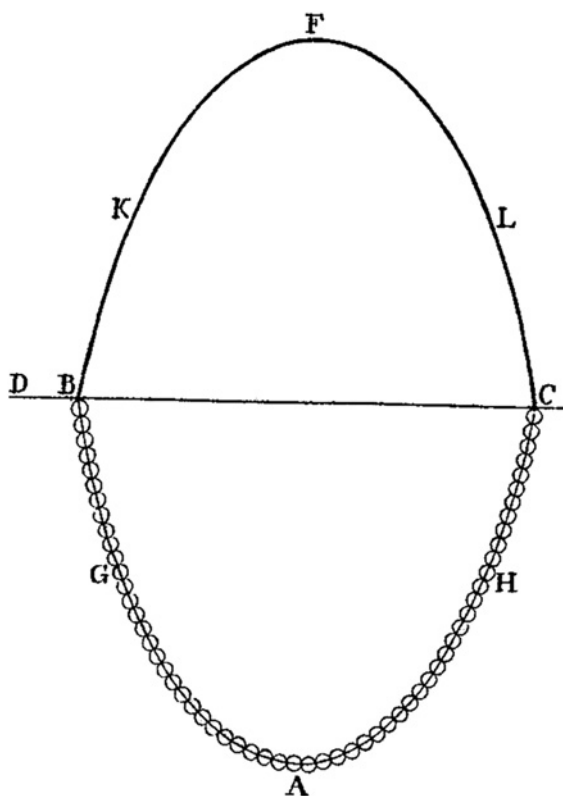


Figura 7 – La curva catenaria disegnata da Giovanni Poleni.

Come abbiamo accennato, l'equazione della catenaria fu determinata da Giovanni Bernoulli nel 1691 ([18] p. 551). Tuttavia, già nel 1676 Robert Hooke (1635-1703) aveva stabilito una connessione fra un filo sospeso, inestendibile e sottoposto al proprio peso, ed un arco i cui elementi sono sottoposti a compressione; egli scrisse tale legge sotto forma di anagramma che, sciolto, forniva questa frase in latino; *ut pendet continuum flexile, sic stabit contiguum rigidum inversum* (come pende un cavo flessibile, così si sostiene un arco rigido invertito). Tuttavia, Hooke non fu in grado di determinare l'equazione della catenaria. Ricordiamo, infine, che fu proprio lui a suggerire a Christopher Wren (1632-1723) il suo uso per la costruzione della cupola di St. Paul a Londra (vedi [8])⁽²⁴⁾.

⁽²⁴⁾ In seguito la catenaria fu usata da molti architetti nelle loro costruzioni. Citiamo, a titolo di esempio, la catenaria presente nella cupola intermedia del *Pantheon* a Parigi, gli archi a catenaria di Antoni Gaudí (1852-1926) in *Casa Milà* e in *Casa Batlló*, il profilo a catenaria del tetto della *Chiesa San Giovanni Battista* dell'Autostrada del Sole, progettata da Giovanni Michelucci (1891-1990).

La catenaria era stata usata dal matematico, fisico e ingegnere Giovanni Poleni⁽²⁵⁾ (1683-1761) per il restauro della cupola di San Pietro a Roma che mostrava delle pericolose lesioni. Nel 1748 egli presentò al Papa Benedetto XIV una Memoria⁽²⁶⁾ nella quale disegnò anche l'analogia di Hooke fra un arco e un filo sospeso (fig. 7). Nella stessa Memoria egli dimostrava che la catenaria associata alla cupola di San Pietro⁽²⁷⁾ si avvicinava pericolosamente ai bordi della struttura, causando pericolose lesioni.

Il Poleni concludeva che occorreva cerchiare la cupola. Le sue idee furono messe in pratica dall'architetto Luigi Vanvitelli (1700-1773), che pose sei cerchiature di ferro intorno alla cupola, risolvendo in tal modo il problema dei dissesti.

A differenza di quella di Roma, si può tracciare nella parte mediana della Cupola di Firenze una catenaria (fig. 8). Alla fine del '600 il Granduca Cosimo III, preoccupato per alcune ulteriori lesioni che erano comparse nella Cupola di Santa Maria del Fiore, nominò, per risolvere questo problema, una commissione della quale faceva parte il matematico Vincenzo Viviani (1622-1703). I membri della commissione stabilirono che occorreva cerchiare la Cupola.

Ci fu un lungo e acceso dibattito, durante il quale il Viviani fu attaccato per le conclusioni alle quali era arrivato; alla fine si abbandonò il progetto di porre delle catene di ferro intorno alla Cupola⁽²⁸⁾.

⁽²⁵⁾ Nel 1719 il Poleni era subentrato a Nicola Bernoulli, nipote di Giovanni e Giacomo Bernoulli, come professore di matematica alla cattedra, che era stata di Galileo Galilei, presso l'Università di Padova.

⁽²⁶⁾ POLENI G., *Memorie istoriche della Gran Cupola del Tempio Vaticano*, Stamperia del Seminario, Padova, 1748.

⁽²⁷⁾ In realtà, per tenere conto dei pesi dei conci che formano la cupola di San Pietro, il Poleni considerò una catenaria associata a un filo, al quale erano agganciati delle sferette i cui pesi aumentavano proporzionalmente all'altezza raggiunta dal filo (*catenaria pesata*); invece, nella catenaria di Fig. 7, i pesi delle sferette sono tutti uguali (*catenaria pura*, vedi [8]). Un esempio di catenaria pesata è il Gateway Arch di St. Louis, costruito fra il 1963 e il 1965 su progetto di Eero Saarinen (1910-1961).

⁽²⁸⁾ Vedi: DI TEODORO F. P., *Giovanni Poleni, Domenico Maria Manni e le catene per la Cupola di Santa Maria del Fiore: per la storia delle fratture e dei previsti risarcimenti alla "grande macchina" di Filippo Brunelleschi*, *Annali di Architettura*, 23, 2011, pp. 151-176.

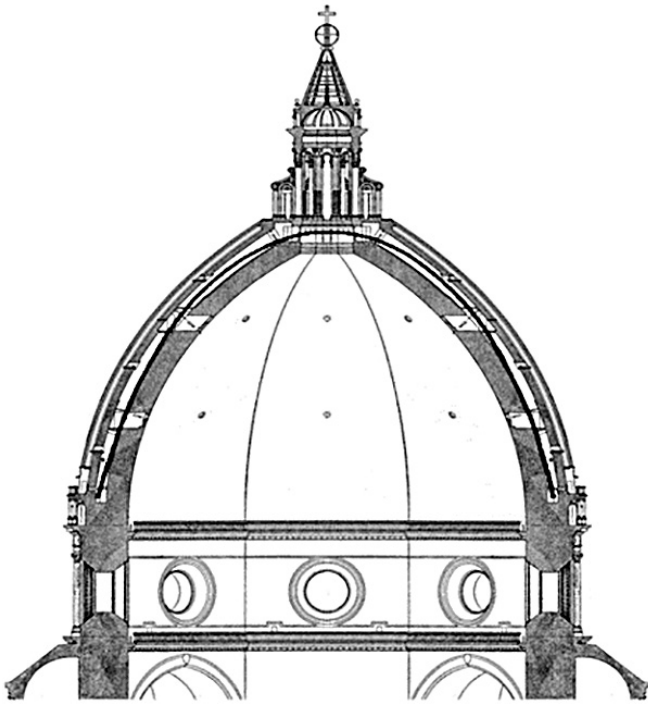


Figura 8 – La curva catenaria all'interno della Cupola di Santa Maria del Fiore.

3. – La disposizione dei mattoni

Osservando la precedente figura 8, notiamo che, come abbiamo già osservato, la Cupola di Santa Maria del Fiore è formata da due cupole: una interna, che è la struttura portante ed ha uno spessore di circa 2,22 metri (alla base è 2,40 metri), ed una esterna, più sottile (da circa 0,97 alla base a 0,60 metri alla sommità), la quale, come disse il Brunelleschi, serve a proteggere la cupola interna dalle intemperie e dagli sbalzi di temperatura ed a renderla *più magnifica e gonfiante*. Fra queste due cupole vi è uno spazio che passa da 1,22 metri alla base a 2,60 metri alla sommità (misurato orizzontalmente)⁽²⁹⁾, attraverso il quale è possibile salire fino alla sommità della Cupola, cioè alla base della lanterna (in tutto 463 gradini).

La cupola esterna è collegata con quella interna per mezzo di otto *costoloni di spigolo* (come abbiamo visto in precedenza, i loro profili sono archi di circonferenza) e 16 *costoloni intermedi*, i cui profili sono archi di ellisse. C'è poi una serie di *archetti*

⁽²⁹⁾ Vedi [9] pg. 184.

orizzontali (ogni vela ha due file di 9 archetti ciascuna) che collegano i costoloni di spigolo con quelli intermedi e servono per scaricare il peso della cupola esterna su quella interna, che è, come già osservato, la struttura portante.

Salendo sulla Cupola, per mezzo di una *scala elicoidale* che si trova nello spazio fra le due cupole (interna ed esterna), possiamo notare la particolare disposizione dei mattoni che la compongono. Questi non sono messi, come ci si potrebbe aspettare, secondo linee orizzontali, cioè parallele al piano terra, ma presentano varie disposizioni. Alcuni di questi mattoni sono posti secondo linee curve, a forma di festoni; tali curve sono chiamate *corde blande* o *brande* ed hanno gli estremi su due archi di spigolo consecutivi. Altri mattoni sono posti verticalmente (per coltello), formando le cosiddette *spinepesce*. Ci sono, poi, i mattoni dei costoloni di spigolo: essi sono disposti radialmente e convergono verso l'asse della cupola con una inclinazione crescente, da 0° a 60°. Infine, ci sono i mattoni dei costoloni intermedi, disposti anch'essi radialmente, e quelli, disposti per coltello, degli archetti orizzontali, paralleli al piano terra. Già nel XVIII secolo gli studiosi avevano notato questo particolare andamento dei mattoni. Ad esempio, Giovan Battista Nelli (1661-1725) aveva eseguito uno schizzo sintetico di una *corda blanda*⁽³⁰⁾.

Perché il Brunelleschi ha disposto i mattoni in questo modo particolare e quale regola ha seguito per farlo? Egli non ha lasciato niente di scritto sul modo con cui ha costruito la Cupola; infatti, nelle sue tre, già citate, Relazioni, egli dice quali sarebbero state le caratteristiche architettoniche della Cupola, ma non la tecnica con la quale l'avrebbe costruita.

Questo fatto fu dovuto ai rapporti molto contrastati che egli aveva con i fiorentini, i quali erano sempre polemici con lui e controllavano continuamente ciò che faceva e diceva; nell'Archivio di Stato di Firenze si trova una pergamena risalente al 1425/26, durante la costruzione della Cupola, in cui Gio-

⁽³⁰⁾ Il rilievo di G.B. Nelli è conservato alla Biblioteca Nazionale di Firenze, II-21, c. 174, ed è stato ripreso da BARBI L., DI TEODORO F. P., *I rilievi di Giovanni Battista Nelli per la Cupola di Santa Maria del Fiore*, Firenze, Rivista d'arte – Studi documentari per la Storia delle arti in Toscana, anno XLI, vol. V, p. 73, Firenze, Leo S. Olschki 1989.

vanni di Gherardo da Prato, per mezzo di scritti e disegni, accusava il Brunelleschi di commettere gravi errori nella sua realizzazione⁽³¹⁾.

Per le cupole di rotazione la tecnica costruttiva è abbastanza semplice: è sufficiente disporre i mattoni secondo anelli circolari sovrapposti, il cui diametro si restringe man mano che si sale verso la sommità. Essendo le direzioni dei mattoni convergenti verso il centro alla base della struttura, ne consegue che essi si dispongono lungo dei coni di rotazione, tutti con il loro vertice nel centro della superficie di rotazione. L'intersezione di questi coni con la superficie sono i suoi paralleli, i quali sono perpendicolari alle linee meridiane, proprio come i meridiani ed i paralleli della superficie terrestre; inoltre, nel caso di cupole semisferiche, anche le generatrici di questi coni intersecano ortogonalmente i meridiani della superficie. Con tale procedimento la struttura diventa *autoportante*, cioè si sostiene da sola; perciò, durante la sua costruzione, non occorre realizzare centine o armature.

Questa tecnica non può essere utilizzata per innalzare una cupola a base ottagonale. Il motivo è il seguente: se disponessimo i mattoni secondo anelli ottagonali, naturalmente inclinati verso il centro, nei punti di congiunzione di due vele adiacenti essi formerebbero un angolo diedro, le cui facce sono determinate dai mattoni che appartengono alle due vele contigue. Si creerebbe in tal modo quella che viene chiamata una "discontinuità della muratura" (in realtà, dal punto di vista matematico, non si tratta di una discontinuità, ma di una mancanza di derivabilità) proprio nei punti in cui le tensioni sono molto forti⁽³²⁾. L'angolo diedro che si formerebbe, se i mattoni fossero posti secondo anelli ottagonali, è stato chiamato un *libro aperto* (verso l'alto) da Piero Sanpaolesi (vedi [23]). Con tale disposizione dei mattoni la struttura rischierebbe di aprirsi proprio in corrispondenza dei costoloni di spigolo.

⁽³¹⁾ Esistono due sonetti, il primo di Gherardo a Filippo in cui usa frasi come: *fonte fonda di ignoranza e pauper animal et insensibile*, e l'altro di Filippo, in risposta, che definisce il suo avversario *animale risibile*.

⁽³²⁾ La già citata cupola della *Madonna dell'Umiltà* a Pistoia ha i mattoni posti in filari rettilinei; anche questo fatto contribuisce alla sua instabilità.

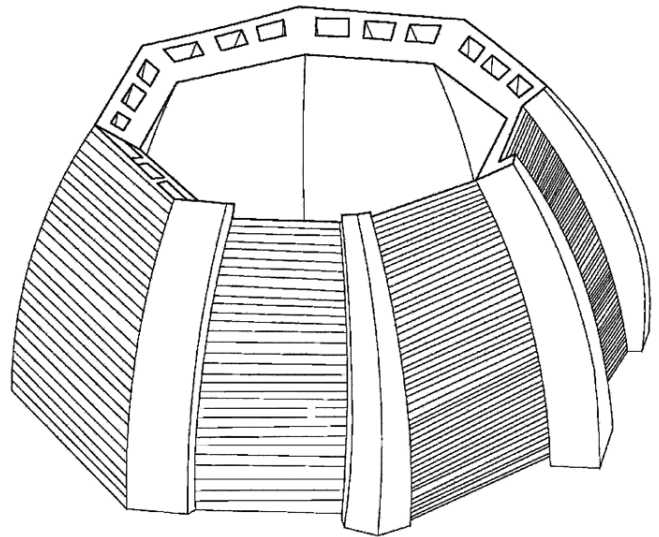


Figura 9 – Diedri che i filari dei mattoni, posti secondo anelli ottagonali, formerebbero in corrispondenza dei costoloni di spigolo.

Lo scopo di Brunelleschi era proprio quello di evitare il *libro aperto* e le conseguenti lesioni. Vedremo che i mattoni posti a *corda blanda* sono la risposta a questa esigenza.

Egli non aveva a disposizione costruzioni che gli potessero servire da esempio. La cupola del Pantheon a Roma, le cui dimensioni della base sono analoghe a quella di Santa Maria del Fiore, è una cupola di rotazione; essa ha una struttura monolitica, che poggia su una base sorretta da otto pilastri in muratura⁽³³⁾; inoltre, le spinte verso l'esterno sono controbilanciate da una muratura spessa circa 8,40 metri che circonda, alla base, l'esterno della cupola e dai sette anelli (*gradoni*) che si trovano sopra questa muratura.

La cupola di Santa Sofia a Istanbul, anch'essa di rotazione e più piccola di quella di Firenze, ha dei poderosi contrafforti per equilibrare le spinte verso l'esterno⁽³⁴⁾.

La cupola ottagonale del Battistero di San Giovanni, molto più piccola, ha all'inizio le pietre e, successivamente, i mattoni disposti su anelli ottago-

⁽³³⁾ La Cupola di Firenze, a base ottagonale, è sorretta da quattro pilastri. Infatti, gli altri quattro lati dell'ottagono corrispondono alle due aperture del transetto e a quelle della navata e dell'abside.

⁽³⁴⁾ Notiamo che questa cupola ha subito, nel corso dei secoli, alcuni crolli e cedimenti delle murature.

nali con lati rettilinei; tuttavia, in questo caso, la struttura esterna della chiesa impedisce alla cupola di avere dei pericolosi dissesti.

Dunque, Brunelleschi dovette inventare qualcosa di inedito per portare a termine la sua impresa. Quale regola ha seguito Brunelleschi per disporre i mattoni secondo le *corde blande*? Come abbiamo già osservato, egli non ha lasciato scritto niente riguardo alla tecnica costruttiva che ha adottato; da questo fatto è nato il cosiddetto *segreto di Brunelleschi*, che gli studiosi hanno cercato di scoprire fin dai tempi della sua costruzione.

Nel corso dei secoli sono state elaborate numerose teorie sulla tecnica costruttiva della Cupola e, in particolare, sulla disposizione dei mattoni⁽³⁵⁾. Sappiamo che Brunelleschi ha innalzato la sua Cupola a padiglione senza l'uso di centine e armature che sorreggessero la struttura fino al suo completamento, cioè ha costruito una *cupola autoportante*. È stato osservato in precedenza che le cupole di rotazione sono autoportanti; di conseguenza si può ipotizzare che la Cupola sia stata costruita *come se fosse una cupola di rotazione*. Bisogna stare attenti al fatto che questo non significa, come affermano alcuni studiosi⁽³⁶⁾, che all'interno della Cupola (che è a base ottagonale) si trova una cupola di rotazione (a base circolare); facendo semplici calcoli, si vede che, in tal caso, quest'ultima avrebbe uno spessore di soli 50 cm., insufficienti a reggere l'intera struttura. In realtà, costruire la Cupola come se fosse di rotazione, significa ben altro.

Abbiamo visto che nelle cupole di rotazione i conci murari formano anelli il cui profilo esterno è contenuto nella superficie di rotazione e, data la loro inclinazione verso il suo centro, anche a superfici coniche, aventi tutte il vertice nel suddetto centro. Secondo la teoria della *cupola di rotazione*, Brunelleschi ha realizzato qualcosa di analogo per la sua opera: ha posto i mattoni della Cupola su superfici coniche; così facendo, ha evitato gli angoli negli

spigoli e reso la struttura autoportante, come nelle cupole di rotazione. In questo modo gli anelli diventano porzioni di superfici "lisce", cioè senza angoli: si evitano così pericolose fratture che si possono presentare proprio in corrispondenza degli spigoli. Tra i principali fautori di questa teoria, citiamo Salvatore Di Pasquale ([10], [11]) e Leandro Bartoli ([2]).

In questo caso, tuttavia, a differenza delle cupole di rotazione, questi coni non hanno un vertice fisso, ma vertici variabili, appartenenti tutti all'asse della Cupola (vedi [10]). Ovviamente ognuno di questi coni dovrà intersecare il piano xy secondo la circonferenza che contiene tutti i centri di quinto acuto. Poiché tale circonferenza ha il centro nell'origine e raggio $\frac{3}{8}R$, si ottiene che l'equazione del cono generico è la seguente:

$$(2) \quad x^2 + y^2 = (z - h)^2 \tan^2 \alpha \quad \text{con} \quad h \cdot \tan \alpha = \frac{3}{8}R$$

dove h è la quota del vertice $V = (0, 0, h)$ e α è l'angolo di apertura del cono. Quindi le *corde blande* di ciascuna vela sono assimilabili a curve date dall'intersezione dei coni di equazione (2) con la superficie cilindrica di equazione (1); di conseguenza esse sono delle *quartiche gobbe*.

Per avere un'idea del modo con cui si generano le *corde blande*, è sufficiente considerare una matita a forma di prisma dopo averne fatto la punta. La matita poligonale corrisponde alla Cupola (la sola differenza consiste nel fatto che questa è ottagonale, mentre la matita è esagonale), l'appuntalapis corrisponde al cono che la interseca: le linee curve, che si manifestano sulla matita dopo averla appuntita, corrispondono alle *corde blande* che, perciò, fanno parte di un'unica direttrice circolare del cono relativo a un'opportuna quota h del vertice⁽³⁷⁾.



Figura 10 – Le “corde blande” di un lapis.

⁽³⁵⁾ Esistono molte teorie sulla Cupola di Santa Maria del Fiore. In questo articolo presenterò le teorie scientificamente più valide e che si avvicinano di più alla Cupola reale.

⁽³⁶⁾ Vedi, ad esempio: MAINSTONE R. J., *Le origini della concezione strutturale della Cupola di Santa Maria del Fiore*, Atti del Convegno Brunelleschiano-1977, Centro Di, Firenze, 1977, pp. 883-892.

⁽³⁷⁾ Tale visualizzazione delle *corde blande* è del Prof. Salvatore Di Pasquale.

Abbiamo visto che, nel caso di cupole emisferiche, tutti i coni hanno le loro generatrici che intersecano ortogonalmente i meridiani della superficie di rotazione. Nel caso della teoria della *cupola di rotazione* riguardante la Cupola di Santa Maria del Fiore (detta anche, per quanto visto in precedenza, teoria dell'*intersezione cono-cilindro*) questa proprietà continua "quasi" a valere. Infatti, le generatrici dei coni intersecano ortogonalmente gli archi di circonferenza corrispondenti ai costoloni di spigolo della Cupola; negli altri punti tale proprietà non vale più, ma gli angoli che si determinano differiscono da quello retto per un *errore massimo* di circa 2° , il quale si realizza nell'ellisse di mezzeria di ciascuna vela con β uguale a circa 45° . Come si vede, l'errore è piuttosto piccolo, quindi possiamo, nella pratica, considerarli ortogonali.

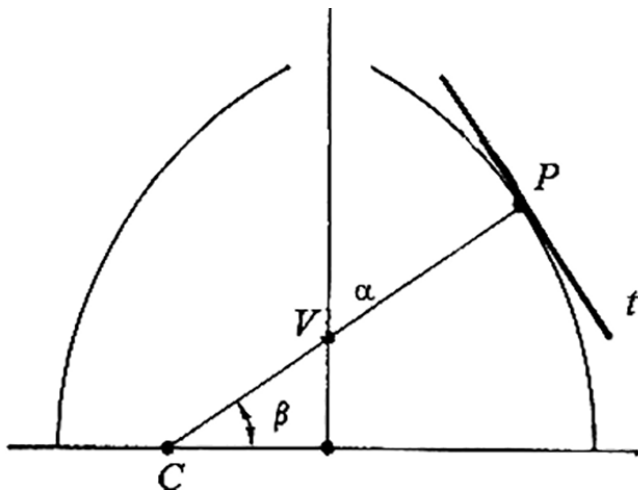


Figura 11 – Generatrice CP del cono che interseca in P una curva meridiana e la sua tangente t nel punto P .

Tale teoria non è stata accettata da altri studiosi per il fatto che sarebbe stato complicato, nella realtà, realizzare questi coni variabili durante la costruzione della Cupola. Per questo motivo ne è stata elaborata un'altra.

Secondo tale teoria, Brunelleschi procedeva nel modo seguente per innalzare la Cupola. Partiva dai costoloni di spigolo, che, come abbiamo visto, realizzava usando le centine mobili, ne innalzava una parte e contemporaneamente li collegava fra loro tramite i mattoni delle corde blande. Questo modo di procedere era differente dalla tecnica costruttiva delle volte gotiche: per realizzare quest'ultime si costruivano tutti i costoloni (che formavano la struttura portante) e poi, con i mattoni, si riempivano gli spazi vuoti.

Quindi, per innalzare la Cupola, i primi mattoni che si ponevano in opera erano quelli che formavano una parte dei costoloni angolari, i cui profili, come abbiamo già osservato, sono archi di circonferenza; in ogni punto di ciascun spigolo questi conci murari erano, perciò, sistemati su uno *stesso piano* perpendicolare al relativo costolone di spigolo, anche se si trovavano su due diverse vele adiacenti. In questo modo si evitava l'angolo diedro (*a libro aperto*) di cui abbiamo parlato in precedenza. A questo punto Brunelleschi completava la muratura di ciascun filare disponendo sempre i mattoni perpendicolarmente alle linee meridiane⁽³⁸⁾, proprio come nelle cupole di rotazione.

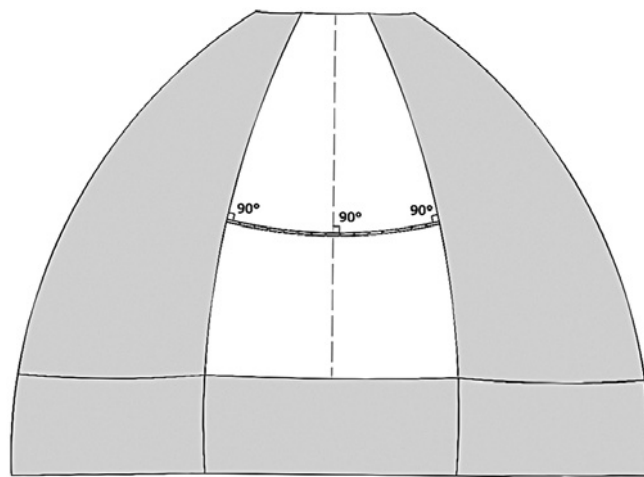


Figura 12 – Mattoni disposti ortogonalmente alle linee meridiane.

In questo modo i mattoni si disponevano secondo le *corde blande* della Cupola⁽³⁹⁾. Con linguaggio matematico si dice che esse sono le *lossodromiche ortogonali* della famiglia dei meridiani della Cupola; di conseguenza, in questo caso parliamo di teoria

⁽³⁸⁾ Questa regola permetteva di disporre i mattoni in maniera abbastanza semplice. Per questo scopo era sufficiente, ad esempio, avere una utensile formato da tre bracci rettilinei, due a due ortogonali (forse il "misterioso" *gualandrino a tre corde*, citato da Brunelleschi e sul cui uso gli studiosi non sono tutti d'accordo); bastava direzionare un braccio verso l'asse della Cupola e un altro lungo tangente in quel punto alla curva meridiana: il terzo braccio forniva la direzione della *corda blanda*. In [5] si ipotizza un modo diverso per ottenere, approssimativamente, la stessa disposizione dei mattoni.

⁽³⁹⁾ Già Leonardo Ximenes aveva notato che le corde blande sono perpendicolari in ciascun punto alla linea meridiana passante per quel punto ([27] p. 157).

delle *lossodromiche ortogonali*⁽⁴⁰⁾. In altre parole, le *corde blande* corrispondono ai paralleli delle cupole di rotazione: la differenza consiste nel fatto che in queste ultime essi sono, come dice il nome, linee parallele al piano terra; invece, nella Cupola del Brunelleschi, non essendo di rotazione, le corde blande hanno un andamento curvilineo a festoni. Perciò anche questa teoria considera un altro aspetto peculiare delle cupole di rotazione, cioè l'ortogonalità della disposizione dei mattoni rispetto alle linee meridiane. Tra i principali assertori di questa teoria, citiamo Andrea Chiarugi e Demore Quilghini ([5]), Paolo Alberto Rossi ([21]).

Che relazione sussiste fra la teoria dell'*intersezione cono-cilindro* e quella delle *lossodromiche ortogonali*? Notiamo che i sostenitori di ognuna di queste due teorie (ho conosciuto personalmente quasi tutti questi studiosi) erano in forte contrasto fra loro, ciascuno ritenendo che soltanto la propria teoria fosse quella giusta. Vediamo la risposta geometrica.

Anzitutto, consideriamo l'ipotesi che, nella teoria dell'*intersezione cono-cilindro*, le generatrici del cono siano ortogonali alle curve meridiane della Cupola; abbiamo visto che questo fatto si verifica con un errore massimo di circa 2° (tale errore si realizza, per ciascuna vela, in un punto particolare dell'ellisse di mezzera), errore trascurabile dal punto di vista della reale disposizione dei mattoni.

Facendo riferimento alla figura 11, vediamo che il gradiente del cono, applicato in P , si trova nel piano che contiene l'asse del cono e il punto P (si può verificare facilmente questa proprietà: ad esempio, dimostrando che la retta per P e avente la stessa direzione del gradiente del cono interseca il suo asse). Anche la retta t , tangente in P alla curva meridiana, si trova nel piano che contiene l'asse del cono (è lo stesso asse della Cupola) e il punto P . Perciò, essendo la generatrice CP perpendicolare alla retta t , si ottiene che il gradiente del cono, applicato in P , è contenuto nella retta t . Considera-

mo la retta s , tangente in P alla curva intersezione tra il cono ed il cilindro; sappiamo dalla geometria che tale retta è perpendicolare al gradiente del cono in P ; quindi, la retta s è perpendicolare alla tangente t e, di conseguenza, è perpendicolare alla curva meridiana in P . Abbiamo così dimostrato che, nell'ipotesi considerata, le due teorie coincidono.

Se vogliamo essere ancora più precisi, togliendo l'ipotesi fatta, si ottiene che la curva data dall'intersezione del cono e del cilindro è una lossodromica ortogonale dei meridiani, che la intersecano, di ciascuna vela con un errore massimo di 0,41°. Quindi, in pratica, le due teorie coincidono! Queste, pur essendo formulate in maniera differente tra loro, tanto da renderle apparentemente molto diverse, danno essenzialmente lo stesso risultato e forniscono un andamento delle *corde blande* corrispondente a quello reale. Gli accurati rilievi eseguiti da me e dal Prof. Roberto Corazzi (vedi [9]) hanno confermato che la Cupola reale coincide perfettamente con quella teorica ottenuta dalla coincidenza delle suddette teorie; ad esempio, partendo dalla teoria delle lossodromiche ortogonali, si può dedurre che la freccia massima delle *corde blande*⁽⁴¹⁾ è circa 0,68 metri (vedi [5]), dato che corrisponde ai rilievi effettuati sulla Cupola.

Dunque la matematica permette di studiare a fondo le varie teorie, se riusciamo, naturalmente, a metterle in formule. Possiamo, così, conoscere l'oggetto architettonico che si otterrebbe dall'applicazione pratica di ciascuna teoria, senza essere obbligati a costruirlo. La matematica, quindi, è uno strumento molto importante per la conoscenza di questo affascinante e misterioso monumento.

Esaminiamo ora la disposizione dei mattoni che formano le varie *spinepesce* presenti nella muratura della Cupola.

Questa tecnica costruttiva era già presente nella costruzione delle cupole di rotazione bizantine⁽⁴²⁾.

⁽⁴¹⁾ Le corde blande di ciascuna vela hanno una freccia variabile in funzione della loro quota. La corda blanda con la freccia massima è quella la cui quota corrisponde a un valore di β uguale a circa 45° (vedi Fig. 11).

⁽⁴²⁾ Carlo Ludovico Ragghianti riporta l'esempio della volta del chiostro copto di Sohag, in Egitto (circa 450 d.C.), (vedi [20] pp. 232-233). Un altro esempio di *spinapesce* si trova nella cupola della chiesa di Dayr al-Fakhuri, vicino a Esna (Egitto), edificata fra il VI e l'VIII secolo d.C.

Abbiamo osservato che, per realizzare le cupole di rotazione (autoportanti), si dispongono i mattoni secondo anelli circolari sovrapposti (i paralleli), il cui diametro si restringe man mano che si sale verso la sommità. Per evitare che, prima del completamento dell'anello circolare, i mattoni che lo formano scivolino verso il basso, si dispongono ad intervalli regolari alcuni mattoni per "coltello", cioè verticalmente. La disposizione dei mattoni messi per coltello, si chiama a *spinapesce*. In tal modo i mattoni collocati lungo i paralleli non cadono verso l'interno in fase costruttiva: infatti, l'anello da realizzare veniva suddiviso in tante porzioni, i cui mattoni si trovavano incastrati fra due *spinapesce* successive, impedendo loro di scivolare verso l'interno.

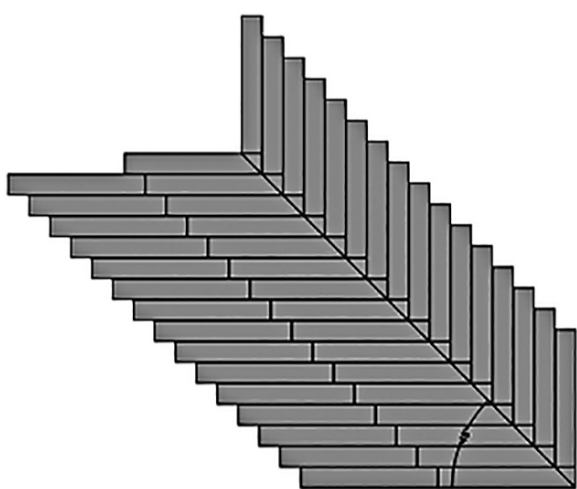


Figura 13 – Mattoni a *spinapesce* (quelli verticali) che formano un angolo di 45° con i paralleli.

Filippo Brunelleschi nella costruzione della Cupola di Santa Maria del Fiore fece ricorso alla tecnica della *spinapesce*, come risulta dalla Relazione del 24 gennaio 1426 ([20] p. 227). Per questo motivo la disposizione dei mattoni a *spinapesce*, come si può osservare con una ricognizione del complesso della Cupola, non inizia dalla base della Cupola stessa, ma dalla quota a cui era giunta la costruzione nel 1426, corrispondente al piano di calpestio del secondo camminamento, quando i mattoni delle *corde blande* avevano raggiunto un'inclinazione di circa 20° (circa 12 metri dalla base della Cupola). Infatti, oltre questo angolo, i mattoni che compongono gli anelli della Cupola, potevano scivolare verso l'interno prima che questi anelli fossero completati. Dunque, le *spinapesce* nella Cupola di Santa Maria del Fiore hanno la

stessa funzione che hanno nelle cupole di rotazione; di conseguenza, anche in questo caso il Brunelleschi ha adottato, per la sua cupola a padiglione, una tecnica tipica delle cupole di rotazione.

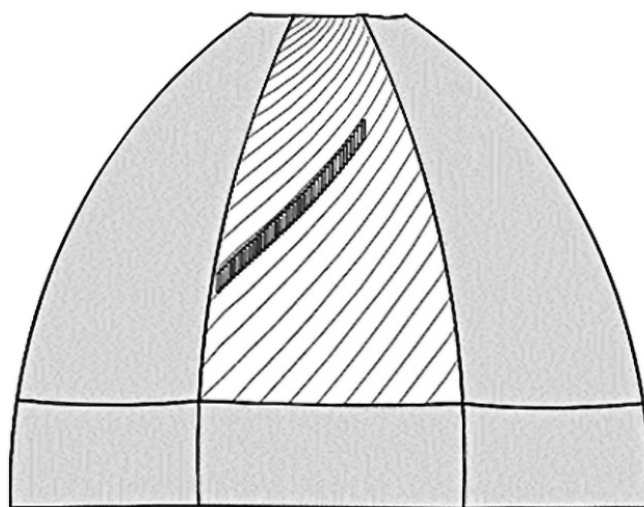


Figura 14 – Mattoni disposti a *spinapesce* nella Cupola di Santa Maria del Fiore.

Inizialmente, la distanza fra due *spinapesce* successive della Cupola è di circa 1,20 metri; naturalmente, andando verso la sua sommità, queste distanze diminuiscono. Notiamo che l'allineamento dei mattoni, che formano le *spinapesce*, è sempre radiale verso l'asse della Cupola; in questo modo si forma una successione di *piattabande*⁽⁴³⁾, che danno alla Cupola l'*autoportanza* in fase costruttiva, permettendo così di realizzarla senza armature di sostegno.



Figura 15 – Disposizione a "piattabanda" dei mattoni della Cupola.

⁽⁴³⁾ La *piattabanda* è un elemento architettonico orizzontale, usato come un architrave, formato da più conci di pietra o di mattoni. Questi elementi devono essere disposti in modo da scaricare il peso nelle estremità della *piattabanda* stessa; si raggiunge tale scopo usando conci di pietra o di mattoni rivolti verso il basso e sagomati a forma di cunei, come negli archi. Geometricamente, si potrebbe definire una *piattabanda* come un "arco circolare con centro all'infinito", quindi l'arco diventa rettilineo, mentre i profili dei conci murari convergono ad uno o più centri propri.

Osserviamo, tuttavia, che le *spinepesce*, pur essendo una geniale intuizione del Brunelleschi che gli ha permesso di “voltare” la Cupola senza armature, ha causato una serie di lesioni che si dispongono proprio lungo le *spinepesce*: infatti, queste creano all’interno della muratura delle superfici che diminuiscono la resistenza della struttura alle trazioni orizzontali (vedi [12] pp. 218-220).

Gli storici dell’architettura discutono ancora sulla derivazione di questa tecnica costruttiva da precedenti opere architettoniche. Alcuni suppongono che Brunelleschi l’abbia dedotta dall’osservazione dei monumenti romani, ma non esistono prove documentarie a sostegno di questa tesi, anche se si sa, attraverso Giorgio Vasari (vedi [26]), delle sue lunghe permanenze a Roma per studiare gli antichi monumenti romani.

Giuseppe Zander, nel suo studio sulla tecnica a *spinepesce* usata da Antonio da Sangallo il Giovane per la copertura della sala di Simon Mago nella fabbrica di San Pietro, ha ipotizzato che Brunelleschi⁽⁴⁴⁾ si sia ispirato alle absidi del Tempio di Venere e Roma, in cui si notano dei costoloni dall’andamento simile a quello delle *spinepesce*. Tuttavia non tutti condividono tale ipotesi, affermando che questa analogia è puramente formale e non strutturale.

Anche la “pista orientale” è stata percorsa per suggerire questa soluzione brunelleschiana. Certo è che, a partire dall’XI secolo, esistono esempi in Iran di cupole realizzate con la tecnica a *spinepesce*, ma non è dato sapere se Brunelleschi conoscesse queste costruzioni; Piero Sanpaolesi ha ipotizzato che possa esserne venuto a conoscenza attraverso disegni e descrizioni di viaggiatori⁽⁴⁵⁾, ma non tutti gli studiosi sono d’accordo con questa teoria. Tuttavia, voglio far notare che, nella costruzione di molte cupole presenti in oriente, veniva usata una tecnica che gli studiosi chiamano a *spinepesce*, ma in realtà è diversa, nella concezione strutturale, dall’uso che ne

faceva Brunelleschi. Infatti, questo modo orientale di disporre i mattoni è più simile all’*opus spicatum* delle costruzioni romane, che ha una funzione più decorativa che strutturale.

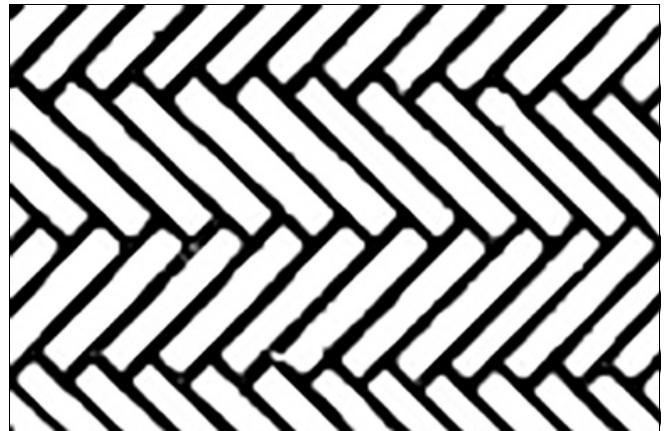


Figura 16 – Disposizione dei mattoni a *opus spicatum*.

Come ho detto in precedenza, la tecnica di disporre i mattoni a *spinepesce* era usata per costruire le cupole di rotazione; poiché i mattoni disposti a *spinepesce* formano con i paralleli degli angoli costanti di 45° , possiamo affermare che nelle cupole di rotazione esse sono delle *lossodromiche dei paralleli* (oppure dei *meridiani*). Anche le *spinepesce* della Cupola formano angoli costanti (in generale 45°) con le generatrici del cilindro ellittico⁽⁴⁶⁾, perciò esse si dispongono secondo delle curve assimilabili ad *eliche cilindriche ellittiche*⁽⁴⁷⁾, che sono sempre delle curve *lossodromiche* rispetto alle generatrici del cilindro. Notiamo che le eliche cilindriche sono anche delle *geodetiche* del cilindro, mentre le *lossodromiche* delle superfici sferiche non lo sono.

⁽⁴⁶⁾ Osserviamo che questo valore dell’angolo può variare; infatti, alcune *spinepesce* della Cupola formano con le generatrici del cilindro angoli diversi da 45° . In ogni caso, tuttavia, i mattoni delle diverse *spinepesce* si dispongono sempre lungo delle *eliche cilindriche ellittiche*, (vedi: GIORGI L., MATRACCHI P., *I mattoni del Brunelleschi. Osservazioni sulla Cupola di Santa Maria del Fiore*, Costruire in laterizio, Volume XXXI, 2018, pp. 53-81).

⁽⁴⁷⁾ In generale, i profili delle scale elicoidali sono eliche cilindriche circolari. Un interessante esempio di scala elicoidale, il cui profilo è un’elica cilindrica ellittica, è la scala ovale, progettata nella seconda metà del ’500 da Ottaviano Mascardino (1536-1606), che si trova nel palazzo del Quirinale a Roma.

⁽⁴⁴⁾ Vedi: ZANDER G., *Gli ottagoni di San Pietro riconosciuti nel dis. Arch. Uff. n. 1330*, Palladio, anno I, n.1, Roma, 1988, pp. 67-82.

⁽⁴⁵⁾ Vedi: SANPAOLESI P., *La cupola di Santa Maria del Fiore ed il mausoleo di Soltanieh*, Mitteilungen des Kunsthistorischen Institutes in Florenz, Firenze. 16, 1972, pp. 221-260.

Tenendo conto dell'equazione 1) del cilindro ellittico, si ha che le equazioni di una generica *spinapesce* dell'intradosso della vela interna della Cupola sono le seguenti:

$$x = c - k \int_{t_0}^t \sqrt{a^2 \sin^2 u + b^2 \cos^2 u} du$$

$$y = -\frac{3}{8}R \cos \omega + R \cos \omega \cos t$$

$$z = R \sin t$$

con $R = 36,32$ metri, $a = R \cos \omega$, $b = R$ e $\omega = \frac{\pi}{8}$; $t \in [t_0, t_1]$, intervallo del sottoinsieme dei numeri reali non negativi dipendente dalla *spinapesce* considerata, così come il parametro c . Il parametro k dipende dall'angolo ϑ che la *spinapesce* considerata forma con le generatrici del cilindro; si ha che tale angolo ϑ è dato dalla seguente relazione:

$$\cos \vartheta = \frac{k}{\sqrt{1+k^2}}.$$

Quindi se, ad esempio, $\vartheta = 45^\circ$, segue $k = 1$.

È interessante osservare che anche il profilo della scala, che porta alla sommità della Cupola, è un'*elica cilindrica ellittica*; possiamo constatare che essa "gira" nel verso opposto a quello delle *spinapesce*. Non sono in grado di affermare con certezza se questo fatto sia voluto, ma ho il sospetto che lo sia: infatti, in questo modo, la struttura risulta rinforzata, esattamente come accade, ad esempio, nelle rampe di accesso dello stadio di Firenze, progettato da Pier Luigi Nervi (1891-1979), che sono formate da due eliche cilindriche in cemento armato, una destrorsa e l'altra sinistrorsa. Notiamo che, in questo caso, le eliche sono circolari.

BIBLIOGRAFIA

- [1] BARTOLI L., *La rete magica di Filippo Brunelleschi*, Nardini Editore, Firenze, 1977.
- [2] BARTOLI L., *Il disegno della cupola del Brunelleschi*, Olschki, Firenze 1994.
- [3] BATTISTI E., *Filippo Brunelleschi*, Electa, Milano 1989.
- [4] BOYER C. (1990) *Storia della matematica*. Mondadori, Milano.
- [5] CHIARUGI A., QUILGHINI D., *Tracciamento della cupola del Brunelleschi. Muratori e geometria*, in Critica d'Arte, XLIX, s. IV, n. 3, 1984, pp. 38-47.
- [6] CONTI G., CORAZZI R., *La Cupola di Santa Maria del Fiore raccontata dal suo Progettista Filippo Brunelleschi*, Edizioni Sillabe, Livorno 2005.
- [7] CONTI G., SEDILI B., TROTTA A., *The loxodromic curves in architecture*, Science & Philosophy, Vol. 2, no 2 (2014), pp. 65-86.
- [8] CONTI G., PAOLETTI R., TROTTA A., *The catenary in history and applications*, Science & Philosophy, Vol. 5 (2), 2017, pp. 69-94.
- [9] CORAZZI R., CONTI G., *Il segreto della Cupola del Brunelleschi a Firenze*, Angelo Pontecorboli Editore, Firenze 2011.
- [10] DI PASQUALE S., BANDINI P. L., TEMPESTA G., *Rappresentazione analitica e grafica della cupola di Santa Maria del Fiore*, Università degli studi, Facoltà di architettura, Istituto di costruzioni, Clusf, 1977.
- [11] DI PASQUALE S., *La costruzione della cupola di Santa Maria del Fiore*, Biblioteca Marsilio, Venezia 2002.
- [12] FANELLI G., FANELLI M., *La Cupola del Brunelleschi. Storia e futuro di una grande struttura*, Mandragora, Firenze 2004.
- [13] FERRI W., FONDELLI M., FRANCHI P., GRECO F., *Il rilevamento fotogrammetrico della cupola di Santa Maria del Fiore*, Bollettino di Geodesia e Scienze Affini dell'I.G.M., XXX, 1971, pp. 158-184.
- [14] GALILEI G. *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze attinenti alla meccanica e i movimenti locali*, a cura di E. Giusti. Giulio Einaudi Editore, Torino, 1990.
- [15] GURRIERI F., *La cupola*, in F. GURRIERI, G. BELLI, A. BENVENUTI PAPI, R. DALLA NEGRA, FABBRI P., TESI V., *La cattedrale di Santa Maria del Fiore a Firenze*, Cassa di Risparmio di Firenze, Firenze 1994, I, pp. 81-135.
- [16] IPPOLITO L., PERONI C., *La Cupola di Santa Maria del Fiore*, La Nuova Italia Scientifica, Roma 1997.
- [17] KING R., *La Cupola di Brunelleschi*, Rizzoli, Milano, 2000.
- [18] KLINE M. *Storia del Pensiero Matematico; Volume I: dall'antichità al settecento*. Giulio Einaudi Editore, Torino, 1991.
- [19] LORIA G. *Storia delle Matematiche, dall'alba delle civiltà al tramonto del secolo XIX*. Ristampa anastatica autorizzata dall'editore Hepli, Cesalpino-Goliardica, Milano, 1982.
- [20] RAGGHIANI C. L., *Filippo Brunelleschi. Un uomo un universo*, Vallecchi Editore, Firenze, 1977.
- [21] ROSSI P.A., *Le cupole del Brunelleschi. Capire per conservare*, Calderini, Bologna, 1982.
- [22] SAALMAN H., *Filippo Brunelleschi. The cupola of Santa Maria del Fiore*, A. Zwemmer, London, 1980.
- [23] SANPAOLESI P., *La Cupola di Santa Maria del Fiore. Il progetto-La costruzione*, Edam, Firenze, 1977.
- [24] SGRILLI B., *Descrizione e studi dell'insigne Fabbrica di Santa Maria del Fiore Metropolitana Fiorentina*, Bernardo Paperini, Firenze, 1733.
- [25] SIMONETTI C., *Galileo e la catenaria*. Archimede, anno LVIII n° 4. Le Monnier, Firenze, 2006.
- [26] VASARI G., *Vite de' più eccellenti pittori, scultori e architettori*, Newton Compton editori, Roma, 2011.
- [27] XIMENES L., *Del vecchio e nuovo gnomone fiorentino e delle osservazioni astronomiche, fisiche e architettoniche*, Stamperia Imperiale, Firenze 1757.



Giuseppe Conti

Giuseppe Conti è professore di Istituzioni di Matematiche presso il Corso di Laurea in Scienza dell'Architettura dell'Università degli Studi di Firenze e di Matematica per il Design presso il Corso di Laurea in Disegno Industriale della stessa Università. Si interessa di Analisi Funzionale e di applicazioni della matematica all'arte, alla musica e all'architettura; è autore di numerose pubblicazioni in questi argomenti e ha scritto libri di testo per l'università e per la scuola superiore.

Nel 2002 ha vinto il premio internazionale Pirellaward per la divulgazione scientifica, primo matematico a vincere questo premio.