Elena Prestini

Precursori degli studi sul clima:Lagrange e Fourier

Matematica, Cultura e Società. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **5** (2020), n.3, p. 201–212.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=RUMI_2020_1_5_3_201_0>

Matematica, Cultura e Società. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2020.

Matematica, Cultura e Società – Rivista dell'Unione Matematica Italiana
Serie I, Vol. 5, N. 3, dicembre 2020, 201-212

Precursori degli studi sul clima: Lagrange e Fourier

ELENA PRESTINI (*)
Università di Roma, Tor Vergata
E-mail: prestini@axp.mat.uniroma2.it

Sommario: *1. Idee e intuizioni; 2. Lagrange e la teoria dei moti secolari; 3. Fourier, la propagazione del calore e l'effetto serra.*

Abstract: *1. Ideas and intuitions; 2. Lagrange and the theory of secular motions; 3. Fourier, heat propagation and the greenhouse effect.*

Idee e intuizioni

Con le leggi di Keplero dei primi del '600 e con la legge della gravitazione di Newton di fine '600 una grande porta si spalancò sul sistema solare. Così nel 1766 l'Accademia delle Scienze di Parigi potè bandire un premio per la teoria del moto dei satelliti di Giove, vincitore il torinese conte Giuseppe Luigi Lagrangia. "Primo in Europa tra gli uomini di scienza" e più noto con il cognome francese Lagrange – che gli veniva dal bisnonno trasferitosi a Torino dalla regione di Tours – si interessò di matematica dopo aver letto una memoria dell'astronomo inglese Edmond Halley. Diede importanti contributi di analisi matematica, algebra, teoria dei numeri e meccanica. Citiamo il libro *Mécanique analytique* del 1788 in cui sviluppa il suo metodo generale per trattare sistemi meccanici, anche sottoposti a vincoli. Nei suoi studi di meccanica celeste mise in luce come, a causa dell'azione gravitazionale che gli altri pianeti esercitano sulla Terra, i parametri del moto della Terra attorno al Sole subiscano variazioni secolari, cioè con periodi molto lunghi. Ai primi del '900, sarà il serbo Milutin Milanković a tradurre le variazioni secolari dell'orbita terrestre attorno al Sole nelle variazioni secolari dell'insolazione che a loro volta producono variazioni secolari del clima.

Il francese Joseph Fourier – che fu studente di Lagrange per un breve periodo – puntò in un'altra direzione. Avendo come obiettivo principalmente il problema della temperatura globale della Terra elaborò una teoria nuova, la teoria analitica del calore. Quando nel 1810 l'Accademia delle Scienze di Parigi propose un premio proprio sulla teoria matematica del calore e verifiche sperimentali, Fourier presentò la memoria dal titolo *Théorie de la Propagation de la Chaleur dans les Solides.* Nello sviluppare il suo modello matematico introdusse un metodo nuovo per rappresentare una funzione. Il metodo, che prenderà il nome di analisi di Fourier o analisi armonica, andrà a innervare gran parte della scienza moderna.

Si dovrà poi aspettare la metà dell'800 perché il chimico irlandese John Tyndall segnali l'esistenza nell'atmosfera di gas, denominati *gas serra,* che influiscono sulla temperatura della Terra e più di un secolo perché l'analisi di Fourier venga usata per validare la teoria del clima di Milanković tramite dati da profondi sedimenti marini e da ghiacciai.

Lagrange e la teoria dei moti secolari

Proprio nel 1766, anno del premio sopra citato, Lagrange si spostò da Parigi a Berlino su invito di Federico il Grande.

Accettato: il 14 dicembre 2020.

(*) Lavoro finanziato in parte dal Progetto di Eccellenza del MIUR, assegnato al Dipartimento di Matematica della Università di Roma Tor Vergata, CUP E83C18000100006.

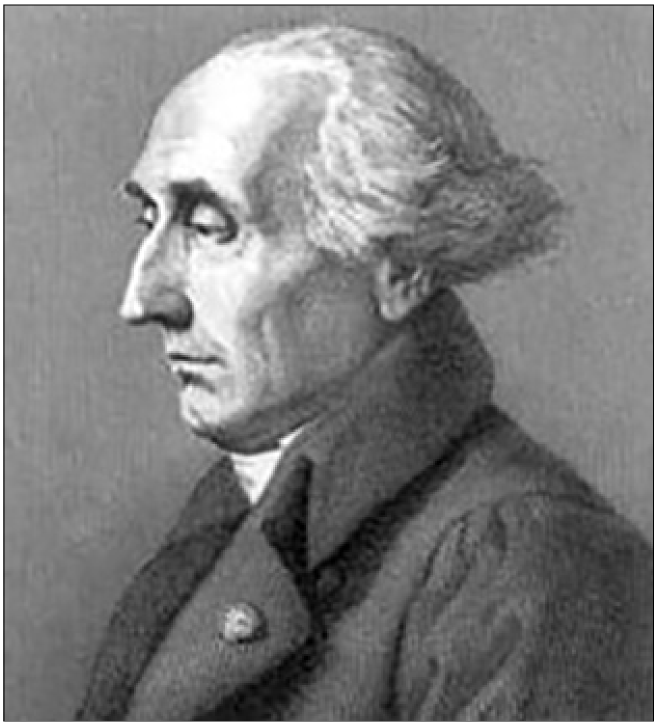

FIGURE 1 – Giuseppe Luigi Lagrange (1736-1813).

Alla Reale Accademia di Scienze e Belle Lettere di Prussia doveva ricoprire il posto lasciato libero da Eulero che tornava a San Pietroburgo su invito di Caterina II. Era l'Europa delle Corti del Settecento. Ogni sovrano o sovrana ambiva circondarsi di personalità illustri per aumentare il proprio prestigio. Di lì a non molto la Rivoluzione francese scuoterà le fondamenta di questo ordine.

Lagrange rimase a Berlino fino al 1787, anno in cui tornò definitivamente a Parigi su invito di Luigi XVI. Andò ad abitare in un appartamento offertogli al Louvre e, votato com'era solo alla scienza, fu rispettato anche durante la Rivoluzione. Gli anni del soggiorno a Berlino furono anni di intensa produttività. In particolare Lagrange formulò la sua teoria delle perturbazioni o dei moti secolari.

Il problema dei due corpi era risolto ai tempi di Lagrange. Le orbite sono delle coniche cioè parabole, ellissi o iperboli. Per rendere tutto questo in termini familiari pensiamo ai due corpi rappresentati l'uno dalla Terra e l'altro da un satellite che si vuole mettere in orbita. Se la velocità massima raggiunta dal satellite – a seguito della spinta degli usuali tre stadi del lanciatore – fosse inferiore a 7,6 Km/s, allora il satellite ricadrebbe sulla Terra descrivendo una traiettoria parabolica. Concretamente questo è il caso di tutti i missili balistici. Se invece detta velocità massima è compresa tra 7,6 e 11,2 Km/s allora il satellite viene messo in orbita attorno alla Terra con successo e la sua traiettoria è un'ellisse. Se poi la velocità massima fosse superiore a 11,2 Km/s allora il satellite, in mancanza di altri oggetti nel cielo come stiamo supponendo, si allontanerebbe sempre più dalla Terra descrivendo un arco infinito di iperbole. Di fatto il satellite potrebbe invece finire attratto da un altro pianeta del sistema solare – nel passargli vicino – o venire attratto dal Sole stesso, ma potrebbe anche allontanarsi come nel caso delle sonde Voyager 1 e Voyager 2. Lanciate nel 1977, si trovano ormai a grande distanza dal sistema solare. Questa casistica porta al problema dei tre (o più) corpi, il problema che teneva sveglio Newton la notte e gli faceva venire il mal di testa. Lagrange studiò casi particolarmente importanti dando contributi destinati a fare scuola, anche perché il problema dei tre corpi in piena generalità fu poi dimostrato non essere risolubile con metodi analitici.

Del problema dei tre corpi Eulero aveva trovato una soluzione molto particolare [7, 8]. Lagrange riprese l'argomento e nel 1772 risolse in generale il caso in cui i tre corpi si muovono mantenendo fissa la loro reciproca configurazione [16]. Questo rende il calcolo della posizione di questi punti più semplice perché coinvolge solo le masse dei corpi in oggetto. Per esempio nel caso in cui due dei corpi fossero il Sole e la Terra e si cercasse tra i punti allineati con essi, allora si troverebbe un ben preciso punto compreso tra Sole e Terra, un altro punto collocato al di là della Terra rispetto al Sole ad una specifica distanza dalla Terra e infine si troverebbe un terzo punto collocato al di là del Sole dalla parte opposta alla Terra. Sono i cosiddetti punti lagrangiani di equilibrio "collineari" L_1, L_2, L_3 trovati da Eulero. Le configurazioni (Sole, Terra, L_i), $i = 1$, 2, 3 sono instabili. Lagrange aggiunse i punti lagrangiani "triangolari" L_4 e L_5. Partendo dalla Terra e muovendosi sul cerchio centrato nel Sole, si ruoti di 60 gradi in senso orario, come pure antiorario. Così facendo si trovano i due punti, vertici di triangoli equilateri (Fig. 2). Non vi sono altri punti lagrangiani. Effettivamente sistemi di questo tipo sono stati osservati. I primi esempi datano 1906 e sono relativi al sistema Sole-Giove. Si tratta di asteroidi di Giove, noti come "troiani" (dopo che a molti di essi erano stati dati nomi di eroi dell'Iliade) che precedono Giove e altri che lo seguono nel suo moto attorno al Sole, effettivamente mantenendo le distanze. Si aggiunga che i punti lagrangiani collineari L_1 e L_2 del sistema Sole-Terra sono stati usati modernamente come aree di "parcheggio" per satelliti, per esempio per l'osservazione del Sole. Per "parcheggio" si intende che i satelliti vengono tenuti in orbita attorno all'instabile punto lagrangiano con manovre di assestamento a intervalli più o meno regolari.

Poi Lagrange concepì il grande progetto di calcolare le variazioni "secolari" del moto di ciascuno dei 6 pianeti principali, da Mercurio a Saturno, per tutti i tempi. I lavori conclusivi saranno pubblicati dall'Accademia di Scienze e Belle Lettere a Berlino nel 1781 e 1782 [18, 19]. In proposito occorre premettere che il termine "secolare" era stato coniato originariamente da Keplero poco meno di due secoli prima.

Precise tavole della posizione della Luna e dei pianeti erano richieste, essendo necessarie per navigare mari e oceani. Le Tavole Alfonsine (in onore di Alfonso X, re di Castiglia) del 1252 vennero sostituite nel 1627 dalle Tavole Rudolfine (in onore dell'imperatore Rodolfo II di Boemia). Queste diedero la posizione dei pianeti con una precisione senza precedenti, portando l'ordine d'errore da dieci a un minuto d'arco. A compilarle fu lo stesso Keplero dopo

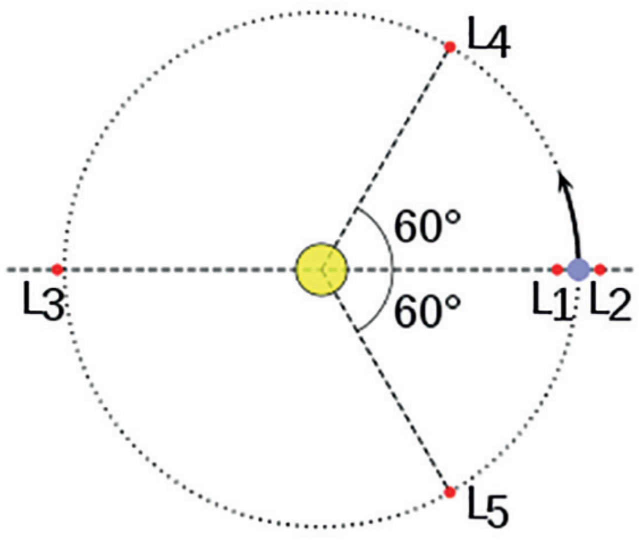

FIGURE 2 – I punti lagrangiani $L_i, i = 1, .., 5$ in un sistema a due corpi con uno molto più massivo dell'altro come nel sistema Sole-Terra. I punti $L3, L4, L5$ sembrano appartenere all'orbita del corpo minore ma in realtà sono leggermente all'esterno.

aver scoperto le sue tre leggi, le prime due pubblicate nel 1609 (*Astronomia Nova*) e la terza nel 1619 (*Harmonices Mundi*). Keplero aveva scoperto la prima legge nel tentativo di spiegare le irregolarità dell'orbita di Marte, osservate ad occhio nudo e annotate per molti anni dall'astronomo di corte Tycho Brahe. Provata ogni combinazione di cerchi senza riuscirvi, "giorno e notte consumandosi sui calcoli," Keplero abbandonò lo schema circolare. Così risolse il problema. L'emozione fu così forte da indurlo a scrivere a proposito del suo lavoro, "può aspettare cent'anni per un lettore così come Dio ha aspettato 6000 anni per un testimone." In una nota successiva [23], l'attenzione di Keplero si fissò sulle discrepanze tra i suoi calcoli e i dati raccolti da osservazioni di quasi due secoli prima, precisamente negli anni tra il 1460 e 1515, in relazione ai moti di Giove e Saturno. Giove sembrava accelerare, Saturno rallentare. Keplero dedusse la necessità di introdurre altre equazioni, che chiamò *equazioni secolari*, atte a descrivere variazioni periodiche molto lente e perciò rilevabili solo nell'arco di secoli. Nella Prefazione alle Tavole Rudolfine concluse scrivendo "Quante e quali siano quelle equazioni, l'umanità non potrà saperlo se non dopo molti secoli di osservazioni" [24].

Nel 1687 Newton pubblicò nei *Principia* la sua teoria della gravitazione da cui si deduce tramite calcoli la forma ellittica delle orbite dei pianeti, come scoperto da Keplero. Newton a sua volta, nell'edizione del 1730 di *Ottica* [27], quasi si spinge a prefigurare la instabilità del sistema solare quando scrive "nel movimento dei pianeti vi sono alcune irregolarità non considerabili che possono essere sorte per l'azione di Comete e Pianeti l'uno sull'altro e che potranno crescere fino a che il Sistema avrà una Riforma."

Halley, che nel 1648 aveva calcolato per primo l'orbita di una cometa cui è stato dato il suo nome, nel 1719 pubblicò tavole astronomiche ottenute interpolando *linearmente* dati del tempo con dati del *Trattato Matematico* di Tolomeo, meglio noto come *Almagesto* (circa 150 d.C.), e introducendo opportuni *termini secolari* di aggiustamento. Le Tavole furono riprodotte in particolare dalla Reale Accademia di Scienze e Belle Lettere nel 1776, periodo in cui Lagrange si trovava a Berlino. Halley affermò che le sue tavole davano risultati affidabili su un arco di 6000 anni, sia prima che dopo l'epoca 1700! Osservazioni dei decenni successivi sembrarono confermare le deviazioni previste da Halley.

Lagrange dal canto suo nella prima parte [18] della *Teoria delle Variazioni Secolari degli Elementi dei Pianeti* inizia osservando che "se i pianeti fossero semplicemente attratti solo dal Sole allora essi descriverebbero attorno a questo astro delle ellissi immutabili secondo le leggi di Keplero, come Newton ha dimostrato per primo e una folla di autori dopo di lui. Ma le osservazioni hanno dimostrato che il moto ellittico dei pianeti è soggetto a piccole variazioni e il calcolo ha dimostrato che la loro mutua attrazione può esserne la causa." Lagrange prosegue spiegando che le variazioni sono di due tipi. Le prime sono periodiche e dipendono solo dalla configurazione dei pianeti tra di loro. Esse non alterano sensibilmente l'orbita primitiva di un pianeta. Non sono che degli scarti passeggeri e basta applicare queste variazioni alla posizione del pianeta così come calcolata dalle Tavole ordinarie. Le seconde "alterano gli elementi stessi dell'orbita cioè la posizione e le dimensioni dell'ellisse e benché il loro effetto non sia rilevabile in brevi lassi di tempo, può tuttavia diventare sul lungo periodo molto considerevole." Lagrange si appresta dunque a sviluppare una teoria "completa e rigorosa" di questo secondo tipo di variazioni, intendendo per elementi dei pianeti le 5 quantità che determinano completamente la grandezza e posizione dell'orbita degli stessi, il primo elemento essendo il semiasse maggiore.

Lagrange parte dalle equazioni di Newton del moto di un pianeta T attorno ad un centro fisso (Sole) in virtù di una forza inversamente proporzionale al quadrato della distanza. Allo stesso tempo considera il pianeta soggetto a una forza perturbatrice che al momento opportuno specificherà essere la somma delle forze di attrazione che gli altri 5 pianeti esercitano su T. Suppone la forza perturbatrice essere molto piccola rispetto alla forza principale (attrazione del Sole). Questa ipotesi – certamente verificata essendo la massa del Sole 1000 volte più grande di quelle di tutti i pianeti sommate assieme – consentirà numerose approssimazioni nel corso dei calcoli. Sceglie poi un sistema di riferimento assoluto di assi ortogonali (x, y, z) centrato nel Sole. Con g Lagrange denota la "quantità" di questa forza a distanza 1 e con ρ denota la distanza del corpo dal centro così che

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

e $\frac{g}{\rho^2}$ risulta esserne la "espressione generale". Le sue componenti sono

$$\frac{gx}{\rho^3}, \frac{gy}{\rho^3}, \frac{gz}{\rho^3}$$

Infine denota con X, Y, Z le componenti della forza perturbatrice. I "principi primi della Dinamica" danno il seguente sistema non lineare di tre equazioni differenziali del secondo ordine

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{gx}{\rho^3} + X = 0$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{gy}{\rho^3} + Y = 0$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} + \frac{gz}{\rho^3} + Z = 0$$

Per procedere Lagrange utilizza sviluppi in serie di Taylor che tronca al primo ordine. Così in primo luogo stabilisce che il semiasse maggiore a di ogni pianeta non è soggetto a variazioni secolari lineari. È il risultato noto come "stabilità del sistema solare secondo Lagrange." La teoria di Halley – che Lagrange si aspettava di giustificare – basata com'era su un ipotetico andamento lineare non viene confermata. A questo punto Lagrange può perfezionare la scelta del sistema di riferimento. Sempre ortogonale e sempre centrato nel Sole, ha il piano dell'orbita terrestre come piano (x, y) e come asse x la direzione in cui si trova la Terra all'equinozio di primavera (Fig. 3).

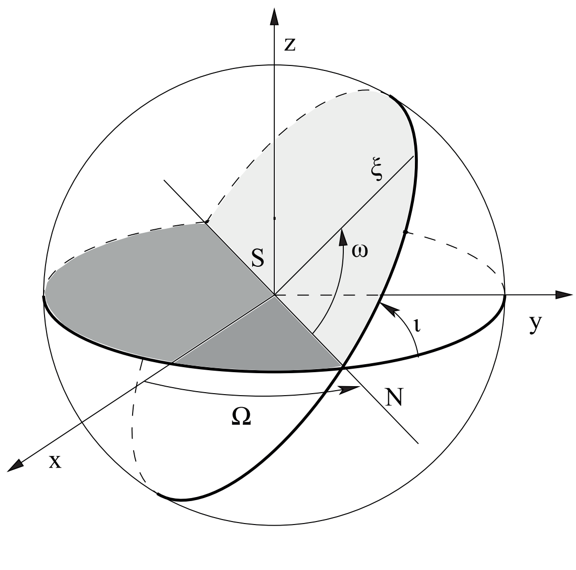

FIGURE 3 – L'inclinazione i, l'argomento del nodo Ω e l'argomento dell'afelio ω, viste in un riferimento assoluto con origine nel Sole. (Cortesia di Antonio Giorgilli, tratto da [14])

Lagrange prosegue ad esaminare gli altri quattro elementi cioè inclinazione, linea dei nodi, eccentricità e afelio. In Figura 3 l'*inclinazione* del piano dell'orbita sul piano (x, y) è denotata con i. L'intersezione dei due piani, la cosiddetta *linea dei nodi,* è identificata tramite l'angolo Ω che essa forma con l'asse x (angolo misurato in senso antiorario). La posizione dell'ellisse nel piano dell'orbita è identificata tramite l'angolo ω, *argomento dell'afelio* (punto dell'orbita più lontano dal Sole). L'eccentricità infine è data dalla formula $e = \sqrt{1 - b^2/a^2}$, dove b è il semiasse minore dell'ellisse.

Nelle equazioni differenziali, che esprimono la derivata rispetto al tempo di questi elementi, compaiono le derivate parziali prime rispetto ai parametri sopra elencati della forza perturbatrice [3]. Occorre dunque che la forza perturbatrice sia specificata. È la parte più laboriosa del "metodo generale".

Strumento fondamentale nella teoria di Lagrange sono gli sviluppi in serie di Taylor "fortemente convergenti" di taluni termini. Di tali sviluppi mantiene poi solo il termine principale tralasciando i termini di ordine superiore. Così facendo introduce una approssimazione lineare (o del primo ordine).

Lagrange per primo tratta inclinazioni e nodi. Fondamentale intuizione ai fini della risoluzione delle relative due equazioni è il cambio di variabili

$$s = \operatorname{tg} i \sin \Omega; \quad u = \operatorname{tg} i \cos \Omega$$

(Questo risultato relativo a nodi e inclinazioni Lagrange l'aveva già ottenuto e inviato nell'ottobre 1774 all'Accademia delle Scienze di Parigi [17]. Laplace, ricevutolo all'Accademia, dopo averlo esteso in modo naturale a eccentricità e afeli lo sottopose nel dicembre all'Accademia stessa [20] che lo pubblicò nel 1775. Il lavoro di Lagrange verrà pubblicato tre anni dopo! Lagrange invierà i successivi [18, 19] all'Accademia di Prussia.)

Tornando al lavoro [18] del 1781 Lagrange continua estendendo ad eccentricità e afeli la sua teoria in modo del tutto simile a quanto fatto per nodi e inclinazioni. Basta introdurre un cambio di variabili appropriato come già intuito appunto da Laplace. Inoltre, avendo avuto necessità di dati mancanti sulle masse dei pianeti privi di satellite, precisamente Mercurio, Venere e anche Marte – di cui non si conoscevano all'epoca i due satelliti – scrive che occorre dedurle dai volumi combinati con le densità e precisa le Tavole da cui trae questi due dati.

A questo punto i calcoli sono terminati. Poiché Lagrange è interessato "semplicemente" a determinare le variazioni secolari – cioè quelle che "non hanno un periodo fisso o per lo meno ne hanno uno molto lungo e indipendente dal ritorno dei pianeti agli stessi punti delle loro orbite" – non rimane che "sviluppare tutte le formule e sbarazzarsi di tutto quello che contiene termini periodici" di periodo breve (come le rivoluzioni planetarie). Così facendo ottiene delle equazioni "la cui integrazione è conosciuta, dunque il problema delle variazioni secolari è risolto."

Nella seconda parte [19] – pubblicata un anno dopo – Lagrange, dopo aver menzionato i nomi di Eulero, Clairaut e D'Alembert (ma non quello di Laplace), calcola esplicitamente i coefficienti delle equazioni lineari del primo ordine ottenute. Poi impone le condizioni iniziali al tempo $t = 0$, utilizzando dati astronomici del 1700 "ben noti e determinati con sufficiente precisione." Questo farà per un qualsivoglia pianeta T. Ottiene così le "equazioni generali e complete delle variazioni secolari degli elementi dei sei pianeti principali per un tempo indefinito". Lagrange aveva osservato fin dall'inizio di questo secondo lavoro che "questa applicazione non ha altra difficoltà che la lunghezza dei calcoli aritmetici." Pianeta dopo pianeta, equazione dopo equazione Lagrange esaurisce questi calcoli in circa 250 pagine.

In particolare dalle equazioni di Lagrange si deduce che eccentricità e inclinazione variano con piccole oscillazioni che rimangono limitate per tutti i tempi, mentre gli angoli relativi a nodi e afeli sono soggetti a moti di precessione. La bontà del metodo (su archi di tempo non troppo lunghi) fu mostrata dal lavoro di Laplace menzionato qui di seguito.

I dettagliati calcoli di Lagrange non rendevano conto dell'annoso problema riguardante la "inaequalitas" dei moti di Saturno e Giove segnalata da Keplero. Lagrange scrive testualmente che "il sistema di Saturno e di Giove è in uno stato stabile e permanente a meno che non si pensi ad una azione del tutto estranea come sarebbe quella di una Cometa o di un mezzo resistente nel quale i pianeti si muovano, oppure...." È una approssimazione troppo spinta all'origine di questa imprecisione di Lagrange. Sarà Laplace [21] a correggere e rendere conto della discrepanza. È dovuta al "semplice" rapporto tra i periodi dei due pianeti – pari a 5/2 ma non esattamente – e al conseguente effetto "risonanza" [15]. Dopo più di 150 anni il fenomeno, osservato da Keplero, aveva trovato una spiegazione. Il periodo è di circa 900 anni.

L'impeto ad applicare metodi analitici arriverà ad un punto fermo circa un secolo dopo. In occasione del premio bandito nel 1885 per il 60mo compleanno del re Oscar II di Svezia, Henri Poincaré dimostrò che il problema dei tre corpi in piena generalità non è risolubile con metodi analitici [29, 30, 4, 13] potendo dar luogo a risonanza, a collisioni, ad eiezioni e anche a moti caotici!

Tornando al sistema solare, le orbite dei pianeti ai giorni nostri si calcolano accuratamente con metodi numerici. L'accuratezza del calcolo decresce all'aumentare dell'arco di tempo. Scrive Laskar [22] "Dopo la formulazione del problema da parte di Newton, e per tre secoli, astronomi e matematici hanno cercato di dimostrare la stabilità del sistema solare. Grazie ad esperimenti numerici delle ultime due decadi, sappiamo che il movimento dei pianeti nel sistema solare è caotico e proibisce ogni accurata predizione delle loro traiettorie oltre poche decine di milioni di anni. Simulazioni recenti mostrano addirittura che collisioni o eiezioni sono possibili su un periodo inferiore a 5 miliardi di anni, prima della fine della vita del Sole."

Il passaggio dalla Meccanica celeste di Lagrange al clima, fu indotto dall'opera del biologo e geologo svizzero Louis Agassiz. Aveva già dato un contributo di assoluto rilievo alla classificazione dei pesci fossili – il cui numero portò a oltre 1700 ridando vita ai mari antichi attraverso la descrizione dei loro abitanti – quando nel 1836 iniziò una nuova linea di ricerca sui ghiacciai. L'interesse per la glaciazioni era vivo da tempo. Agassiz costruì un bivacco sul ghiacciaio Aar in Svizzera dal quale, con l'aiuto di collaboratori, studiò i movimenti e la struttura del ghiaccio. Nel lavoro *Études sur les Glaciers* del 1840, considerato il più importante dei suoi contributi, mise in luce tra l'altro l'evidenza geologica delle glaciazioni che avevano avuto luogo in un passato relativamente recente. (Nel 1847 Agassiz diventerà professore di zoologia alla Harvard University di Boston. Il suo metodo, che anteponeva il contatto diretto con la natura allo studio dei testi, rivoluzionerà l'insegnamento delle scienze naturali negli Stati Uniti).

Fu così che cominciò la ricerca di una correlazione tra dati geologici, dovuti a forti cambiamenti climatici, e variazioni di parametri astronomici terrestri. Questa ricerca portò alla teoria del clima di Milutin Milanković. Professore di Meccanica razionale, Fisica teorica e Meccanica celeste all'Università di Belgrado, scriveva in serbo i suoi lavori che l'Accademia delle Scienze di Belgrado pubblicava poi in caratteri cirillici. Tuttavia alcuni vennero scritti dall'autore in tedesco [26] o francese [25]. Milanković dedicò tutta la sua vita alla formulazione di una teoria matematica del clima, la cui versione finale è datata 1941. Riconobbe che l'insolazione – l'energia solare ricevuta dalla Terra e quindi la posizione della Terra rispetto al Sole – era all'origine dei cambiamenti climatici. Identificò nella *eccentricità* dell'orbita della Terra e nella *inclinazione* e *precessione* del suo asse di rotazione i tre più importanti fattori coinvolti. Dopo il lavoro pionieristico di Milanković e utilizzando sviluppi con approssimazioni di ordine superiore rispetto alla teoria di Lagrange, i periodi delle "variazioni secolari" di questi parametri sono stati ricalcolati varie volte. Risultano essere dell'ordine di decine di migliaia di anni, rispettivamente 100.000, 41.000 e 23.000 anni.

Fourier, la propagazione del calore e l'effetto serra

Fourier ebbe una vita che attiene alla storia della matematica, ma anche alla storia politica della Francia avendo ricoperto ruoli importanti sia durante la Rivoluzione che in epoca napoleonica.

Quando scoppia la Rivoluzione nel 1789 Fourier ha diciannove anni e si trova in un convento benedettino come novizio in attesa di prendere i voti. Voti che non prese mai perché la Rivoluzione proibì questa pratica, poi confiscò i beni degli ordini religiosi e infine abolì gli stessi. Fourier tornò allora ad Auxerre sua città natale – 150 km a sud di Parigi – per insegnare matematica, retorica, storia e filosofia in quella che era stata la Reale Scuola Militare, gestita dai benedettini, che lui stesso aveva frequentato.

Venne invitato a far parte del locale Comitato di Sorveglianza per stranieri e viaggiatori, che presto diventerà parte integrante del Terrore, ma a quel punto le dimissioni presentate da Fourier furono rifiutate. Per avere preso posizione in una città vicina contro gli eccessi della Rivoluzione fu denunciato alla Convenzione e venne dichiarato “incapace di ricevere simili incarichi” in futuro. Nel frattempo tornato ad Auxerre, dove godeva di una solida reputazione, divenne Presidente del Comitato di Sorveglianza, quindi massimo rappresentante del Terrore in città. Ritenendo di essere stato trattato ingiustamente andò di persona a Parigi per spiegarsi con Robespierre. Forse fece cattiva impressione. Certo è che al suo ritorno il 4 luglio 1794 fu arrestato. La situazione era pericolosa. La ghigliottina lavorava ogni giorno a Parigi. Nell’aprile dello stesso anno Danton e seguaci erano stati ghigliottinati, nel maggio era stata la volta del chimico Lavoisier assieme ad altri ventisette. A salvare Fourier fu un’altra esecuzione, quella di Robespierre, il 28 luglio. Fu seguita da un’amnistia generale.

Quando si cominciarono a valutare i danni causati dalla Rivoluzione, si notò una grave mancanza di insegnanti di ogni ordine e grado. Per rimediare, con decreto della Convenzione datato 30 ottobre 1794, venne istituito a Parigi un collegio nazionale chiamato École Normale [1]. Erano previsti 1500 studenti nominati e finanziati dai distretti della Repubblica. Fourier fu uno di questi. Con impressionante velocità la scuola aprì i battenti pochi mesi dopo, nel gennaio 1795 nell’anfiteatro del Jardin des Plantes. I professori erano stati scelti tra i migliori del paese. Per la matematica c’erano Lagrange, Laplace e Monge. In una lettera al suo professore di matematica ad Auxerre Fourier dà una descrizione delle prime lezioni: “non c’è posto per tutti gli studenti, ogni mattina un buon numero rimane chiuso fuori, se uno deve uscire non può più rientrare....” “le lezioni iniziano, terminano e sono spesso interrotte da applausi....” Quanto ai professori Fourier, insegnante di esperienza e bravura, era certo in grado di dare una valutazione della loro capacità di comunicare. Lagrange, che Fourier seguiva con gli occhi pieni di ammirazione come si fa con “il primo in Europa tra gli uomini di scienza,” non riscuoteva successo tra gli studenti. Incapace di tenere l’ordine, tradiva nella pronuncia la sua origine italiana avendo trascorso la giovinezza a Torino. Faceva affermazioni un po’ comiche, come per esempio “su questo argomento ci sono molte cose importanti da dire ma io non le dirò.” Ma per Fourier “l’esitazione e la semplicità di un bambino,” che a volte si notavano in Lagrange, rendevano solo più evidente “l’uomo straordinario che egli era.” Di Laplace, “tra i primi come uomo di scienza,” Fourier scrive che “insegna la matematica in un modo che non ha niente di straordinario” e di Monge che “le sue lezioni erano preparate con cura infinita ed esposte con tutta la possibile chiarezza.”

Già nel maggio 1795, pochi mesi dopo l’inaugurazione, la scuola venne chiusa per obiettive difficoltà di gestione. A giugno Fourier è di nuovo in carcere questa volta con l’accusa di “terrorismo” relativa agli anni 1793-1794. (Non c’erano state condanne a morte ad Auxerre ma taluni erano stati esiliati a norma di legge, mentre in tutto il paese 200 mila erano state le persone imprigionate e 17 mila i condannati a morte). Fourier venne liberato dopo meno di un mese, forse per un intervento di Monge che lo chiamò all’École Polytechnique dove prenderà il posto di Lagrange come professore di Analisi e Meccanica nel 1797. I giorni tranquilli terminarono bruscamente nel marzo dell’anno successivo quando Fourier ricevette una lettera del Ministro dell’Interno che gli ordinava di prepararsi e tenersi pronto a partire. Così il 19 maggio Fourier salpò da Tolone al seguito di Bonaparte. La destinazione ignota ai più era l’Egitto. Ancora una volta era stato Monge a selezionare Fourier come membro della Commissione Scientifica a cui Bonaparte affidò tra l’altro il compito di collezionare dati storici, naturali o altro sull’Egitto. Dopo gli iniziali successi sul terreno, la flotta venne distrutta dagli inglesi guidati dall’ammiraglio Nelson. Nell’agosto 1801 i francesi firmarono la resa. Venne loro concesso di tenere parte dei reperti accumulati con cura, ma non la stele di Rosetta che segnerà l’inizio della moderna egittologia. Questa fu collocata al British Museum a Londra.

Fourier tornò a Parigi ma fece a tempo a tenere solo poche lezioni all’École Polytechnique perché

(1) L’attuale École Normale discende dalla scuola omonima fondata 16 anni dopo in epoca napoleonica e dedicata all’istruzione superiore.

FIGURE 4 – Jean-Baptiste Joseph Fourier (1768-1830).

Bonaparte – divenuto Primo Console – nel febbraio 1802 lo nominò prefetto del Dipartimento dell'Isère. Centrato a Grenoble, questa era una delle ottantatre regioni in cui la Francia era divisa dal 1790. Fourier rimarrà a Grenoble per più di dieci anni durante i quali divenne popolare per il suo modo di fare e per l'eccellente amministrazione, bonificherà paludi e inizierà la costruzione della spettacolare strada Grenoble-Torino via Briançon e Pinerolo, la strada più breve tra Lione e Torino. Non solo, su incarico di Napoleone scriverà assieme ad altri *Description de l'Égypte,* un resoconto della spedizione che doveva mostrare come questa avesse segnato l'inizio di un rinascimento dell'Egitto e rendere così onore a Bonaparte, che volle leggere e apportò correzioni di suo pugno. Fourier venne ricompensato con il titolo di barone e una pensione annua. A Grenoble Fourier introdusse all'egittologia ed ebbe come amico culturale Jean-François Champollion-Figeac che nel 1822 scoprirà la chiave per decifrare i geroglifici.

Durante questi anni in cui era intensamente sollecitato da impegni amministrativi Fourier troverà il tempo di affrontare un problema completamente nuovo rispetto alla sue ricerche precedenti e riuscirà a seguirlo fino a completa soluzione. Questo processo culminò nella memoria *Teoria della Propagazione del Calore nei Solidi* del 1807 che presentò all'Istituto di Francia a Parigi. La commissione, nominata per esaminare il lavoro, comprendeva tra gli altri Lagrange, Laplace e Monge che si erano già formati un'alta opinione di Fourier. Tuttavia il lavoro non convinse la commissione che non scrisse mai un rapporto. Però nel 1810 venne annunziato il gran premio per la matematica del 1811: teoria matematica del calore e verifiche sperimentali. Fourier sottomise la vecchia memoria rivista ed estesa, in tutto 215 pagine. La commissione in cui erano di nuovo presenti Lagrange e Laplace assegnò il premio a Fourier "per la novità e l'importanza dell'argomento." Tuttavia nella motivazione stava anche scritto che "il modo in cui l'autore arriva alle equazioni differenziali non è esente da difficoltà e l'analisi condotta ai fini della risoluzione lascia qualcosa a desiderare per quanto attiene alla generalità e anche al rigore." Così il premio in denaro gli fu dato, ma il lavoro non venne pubblicato e non lo sarà per i successivi quindici anni. Il problema principale erano le serie trigonometriche utilizzate per rappresentare una "qualsiasi" funzione (prenderanno il nome di "serie di Fourier"). Lagrange pensava che il metodo non fosse rigoroso. In questo si trovava d'accordo con Eulero [9] che cinquant'anni prima aveva bloccato sul nascere un'idea simile, avanzata da Daniele Bernoulli [2] in relazione a corde vibranti. Era chiaro, argomentava Eulero, che una funzione priva di derivata anche solo in un punto non può essere rappresentata come somma di funzioni lisce quali seni e coseni. Solo una classe di funzioni "molto speciali" poteva ammettere una simile rappresentazione. Tale classe andava identificata. Eulero non farà questo ma tempo dopo, in un lavoro pubblicato postumo [10], troverà la semplice formula – proprio quella che viene usata modernamente – per il calcolo dei "coefficienti di Fourier".

Per studiare la propagazione del calore Fourier iniziò trattando il caso semplice di una lamina sottile, di larghezza finita e lunghezza semi-infinita (Fig. 5). Centrò la lamina sull'asse x e fissò la larghezza sull'asse y tra -1 e 1. Come condizioni al contorno scelse che il lato sull'asse y fosse tenuto a temperatura 1 in una data unità di misura (fornendo calore) e i lati lungo l'asse x fossero tenuti a temperatura zero (con un flusso di aria fredda). Voleva determinare lo stato stazionario in tutti i punti della lamina. In questo caso, caratterizzato da temperatura $u(x, y)$ indipendente dal tempo, l'equazione differenziale è la seguente

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

Per risolverla Fourier usò il metodo di separazione delle variabili introdotto da d'Alembert. Cercò soluzioni che potessero essere scritte come $\varphi(x)\psi(y)$ e trovò che φ e ψ devono soddisfare le seguenti equazioni differenziali ordinarie

$$\varphi(x)/\varphi''(x) = -\psi(y)/\psi''(y) = A$$

Facendo $A = 1/n^2$ ottenne come soluzioni $u(x, y) = e^{-nx} \cos ny$, la cui combinazione lineare tramite costanti arbitrarie a_n dava l'integrale generale. Per terminare gli rimaneva da imporre la condizione iniziale $u(0, y) = 1$, con$-1 < y < 1$. Così facendo trovò la formula

$$(1) \quad 1 = a_1 \cos \frac{\pi y}{2} + a_2 \cos \frac{3\pi y}{2} + a_3 \cos \frac{5\pi y}{2} + ...$$

Al fine di determinare gli infiniti coefficienti a_n – evidentemente ignaro del lavoro di Eulero [10] pubblicato postumo – derivò la formula infinite volte e, sostituendo al posto di y il valore zero, ottenne un sistema lineare di infinite equazioni in infinite incognite. Con un lungo metodo trovò l'esatto valore del

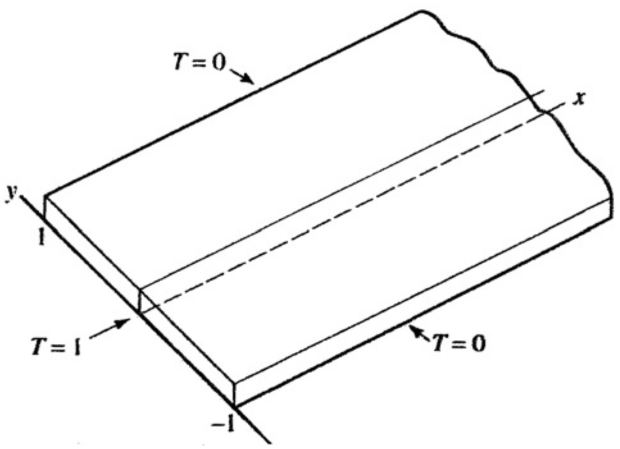

FIGURE 5 – La lamina sottile della memoria di Fourier.

primo coefficiente $a_1 = 4/\pi$ e poi tutti gli altri. Fourier continuò spiegando quale funzione la serie rappresentava. La funzione così rappresentata è periodica di periodo 4, come mostra un rapido esame del secondo membro; vale 1 per $-1 < y < 1$ (condizione iniziale); vale -1 per $1 < y < 3$; e vale 0 per $y = 1$ e $y = -1$.

In termini moderni Fourier aveva trovato la "serie di Fourier" dell' *onda quadra.* Nello stesso lavoro calcolò la serie di Fourier di altre funzioni, quali l'*onda triangolare* e il *dente di sega,* mostrando quanto fosse avanti nella comprensione delle somme infinite. Sostenne poi che *ogni* funzione potesse essere così rappresentata. In questo si sentiva sostenuto anche da considerazioni fisiche, avendo condotto ed esposto nella memoria diversi esperimenti in proposito. La disputa sarà risolta nel 1837 dall'alsaziano Pierre Lejeune Dirichlet [5], un allievo di Fourier. Darà largamente ragione a Fourier perché *dimostrerà* che *tutte* le funzioni, il cui grafico può essere tracciato su di un foglio o su una lavagna, sono così sviluppabili. È vero l'opposto di quello che Eulero si aspettava: l'idea di Bernoulli e di Fourier fallisce solo nel caso di funzioni "molto speciali."

Fourier tornerà a Parigi nel 1815 dopo la sconfitta di Napoleone a Waterloo. Non verranno riconosciuti i "molti servigi" che aveva reso allo Stato e rimasto senza alcun incarico penserà di emigrare in Inghilterra lontano da persecuzioni politiche quando il conte di Chabrol, prefetto della Senna e suo studente all'École Polytechnique, lo nominò direttore dell'Ufficio Statistico. In seguito nel 1817 verrà eletto membro dell'Accademia delle Scienze di cui nel 1822 divenne segretario permanente e solo allora comparve la *Théorie analytique de la chaleur* [11] che raccoglieva i suoi studi sull'argomento. (Ben diversamente andò a Monge. Benché avesse rimesso in piedi il sistema dell'istruzione superiore in Francia fu privato di ogni incarico e morì nell'indigenza.)

Nel lavoro *Mémoire sur les Températures du Globe Terrestre* [12] del 1827 Fourier scrive che "il problema della temperatura della Terra, uno dei più importanti della filosofia naturale, era principalmente nella mia mente nello sviluppare la teoria analitica del calore." Come questo problema avesse catturato la sua attenzione può forse essere spiegato

FIGURE 6 – Fourier nella sua cantina. (Disegno di Enrico Bombieri, tratto da [31]).

dal fatto che Fourier era una persona freddolosa. Sempre rimpianse il caldo dell'Egitto e mai veramente si abituò al clima di Grenoble. Teneva le stanze molto riscaldate, andava sempre in giro ben coperto e a volte si faceva accompagnare da un servitore che portava vestiti di riserva.

La memoria, largamente qualitativa, mostra tuttavia come Fourier avesse ben compreso i processi termici coinvolti nella propagazione del calore, nel contesto delle conoscenze dell'epoca. Si pensava che la temperatura della Terra ricevesse un contributo significativo da parte dell'energia geotermica, dovuto a una Terra – inizialmente molto calda – in corso di raffreddamento. Fourier, in base al suo fondamentale lavoro sulla propagazione del calore nei solidi, conclude che gli scambi di calore con l'interno della Terra sono trascurabili ai fini della temperatura d'equilibrio sulla superficie. Identifica invece i fenomeni chiave nell'assorbimento dei raggi solari e negli scambi tramite raggi infrarossi con lo "spazio planetario."

I raggi infrarossi erano una scoperta dell'astronomo Friedrich Herschel (Sir William), nato in Germania e poi emigrato in Inghilterra. Già famoso per la scoperta del pianeta Urano, nel 1800 mentre studiava lo spettro solare con l'aiuto di un termometro aveva verificato che l'effetto maggiore aveva luogo oltre il rosso. I raggi infrarossi, non ancora ben conosciuti, venivano chiamati "calore oscuro". Fourier si appresta ad un bilancio di energia qualitativo, poiché "è difficile stabilire fino a che punto l'atmosfera influisce sulla temperatura media del globo, e in questo esame si cessa di essere guidati da una teoria matematica regolare." Mentre l'atmosfera è trasparente ai raggi solari, risulta opaca agli infrarossi. Fourier scrive: "È così che la temperatura è aumentata per l'interposizione dell'atmosfera perché il calore trova meno ostacoli per penetrare l'aria, essendo allo stato della luce, di quelli che trova per ripassare nell'aria allorché è convertito in calore oscuro." Per questo l'espressione "effetto serra" (*effet de serre*) è attribuita a Fourier [6]. I gas serra, principalmente vapor d'acqua e CO_2, verranno scoperti trent'anni dopo da Tyndall [33]. Allora si capirà che non c'è solo l'assorbimento dei raggi infrarossi a ridurre la perdita di energia verso lo spazio. C'è anche il fatto che l'atmosfera li assorbe e li emette, così apportando ulteriore energia alla superficie della Terra.

Fourier è anche consapevole che l'atmosfera e gli oceani possono trasportare calore con il loro movimento, ma sottostima questo effetto non avendo modo di misurarlo (come si farà nel '900 da satellite). Sovrastima invece la temperatura dello spazio planetario e il relativo scambio di calore con la Terra. Tuttavia "Fourier capì l'essenza dell'effetto serra cioè il principio del bilancio di energia e il ruolo asimmetrico che l'atmosfera esercita su luce e infrarossi" [28].

La decomposizione di una funzione in armoniche – di cui la (1) per l'onda quadra è un esempio – è diventata fondamentale per la comprensione, codificazione, trasmissione e decodificazione dei segnali. Così l'analisi di Fourier è un indispensabile strumento in molti campi scientifici, dalla risonanza magnetica alla Tac, dalle telecomunicazioni alla radioastronomia, dai compact disc alla cristallografia [31] e anche negli studi sul clima [1, 31] come accennato all'inizio.

Per il lettore curioso di arrivare vicino ai giorni nostri con gli studi sul clima segnaliamo [32], una breve storia che arriva fino alla Conferenza sul clima tenutasi a Parigi nel Dicembre 2015. Allo stesso fine segnaliamo anche, per esempio, la bibliografia in https://www.nature.com/articles/sdata2018254.

Fourier era dell'opinione che "il bene comune e la spiegazione dei fenomeni naturali" fossero lo scopo della matematica. Per aver operato in questo senso Fourier e Lagrange sono ancor oggi ricordati.

Ringraziamo molto il collega Antonio Giorgilli per il contributo che ha dato alla prima parte di questo lavoro.

Ringraziamo poi entrambi i referee per aver suggerito miglioramenti al testo.

BIBLIOGRAFIA

[1] ABE-OUCHI A. et al. [2013], *Insolation driven 100,000-year glacial cycles and hysteresis of ice-sheet volume,* Nature 500, 190-193.

[2] BERNOULLI D. [1755], *Réflections et éclaircissements sur les nouvelles vibrations des cordes exposées dans les mémoires de l'Académie de 1747 et 1748,* Mémoires de l'Académie Royale de Berlin 9, 147-172.

[3] CARPINO L. [1991], *Teoria lineare delle perturbazioni secolari,* 1-40; http://www.brera.mi.astro.it/~mario.carpino/didattica/lagrange.pdf

[4] CELLETTI A., PEROZZI E. [1996], *Il valzer dei pianeti,* CUEN, Napoli.

[5] DIRICHLET P. L. [1837], *Über die Darstellung ganz willkürlicher Funktionen durch Sinus- und Cosinusreihen,* Repertorium der Physik, Vol. 1. Ristampato in: Werke, Vol. 1, 133-160.

[6] DUFRESNE J.-L. [2006], *Jean-Baptiste Joseph Fourier et la découverte de l'effet de serre,* La Météorologie, Météo et Climat. 53, 42-46; https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00113200

[7] EULER L. [1767], *De motu rectilineo trium corporum se mutuo attrahentium,* Novi Commentarii Academiae Scientiarum Petropolitanae 11, 144-151. Ristampato in: Opera Omnia: Series 2, Volume 25, 281-289.

[8] EULER L. [1770], *Considérations sur le problème des trois corps*, Mémoires de l'Académie des Sciences de Berlin 19, 194-220. Ristampato in: Opera Omnia: Series 2, Volume 26.

[9] EULER L. [1755], *Remarques sur les mémoires précédents de M. Bernoulli,* Mémoires de l'Académie Royale de Berlin 9, 196-222.

[10] EULER L. [1798], *Disquisitio ulterior super seriebus secundum multipla cuiusdam anguli progredientibus,* Nova Acta Academiae Scientiarum Petropolitanae 11, 114-132.

[11] FOURIER J. [1822], *Théorie analytique de la chaleur,* Firmin Didot, Paris. *The Analytical Theory of Heat*, Cambridge University Press, London (1978).

[12] FOURIER J. [1827], *Mémoire sur les Températures du Globe Terrestre et des Éspaces Planétaires,* Mémoires de l'Académie Royale des Sciences de l'Institut de France 7, 569-604; Ristampato in: Oevres, tome 2, Gauthier-Villars, 1890. (http://gallica.bnf.fr/)

[13] GIORGILLI A. [2007], *I moti quasi periodici e la stabilità del sistema solare. I: Dagli epicicli al punto omoclino di Poincaré,* Bollettino della Unione Matematica Italiana, A 10, 55-83.

[14] GIORGILLI A. [2018], *Il flebile sussurro del caos nell'armonia dei pianeti,* in Meccanica Teorica e Applicata, Istituto Lombardo Accademia di Scienze e Lettere, Milano.

[15] GIORGILLI A. [2019], *La geometria del caos: catastrofi, biforcazioni, attrattori,* Matematica, Cultura e Società 4 (1), 5-33.

[16] LAGRANGE J.L. [1772], *Essai sur le problème des trois corps,* Mémoires de l'Académie des Sciences de Paris. Ristampato in: Oeuvres de Lagrange, Gauthier-Villars, Paris (1873), tome 6, 229-332.

[17] LAGRANGE J.L. [1778], *Recherches sur les équations séculaires des mouvements des noeuds et des inclinaisons des planètes,* Mémoires de l'Académie des Sciences de Paris. Ristampato in: Oeuvres de Lagrange, Gauthier-Villars, Paris (1870), tome 6, 635-712.

[18] LAGRANGE J.L. [1781], *Théorie des variations séculaires des éléments des planètes. Première partie contenant les principes et les formules générales pour déterminer ces variations,* Nouveaux Mémoires de l'Académie des Sciences et Belles-Lettres de Berlin. Ristampato in: Oeuvres de Lagrange, Gauthier-Villars, Paris (1870), tome 5, 125-207.

[19] LAGRANGE J.L. [1782], *Théorie des variations séculaires des éléments des planètes. Seconde partie contenant la détermination de ces variations pour chacune des planètes principales,* Nouveaux Mémoires de l'Académie des Sciences et Belles-Lettres de Berlin. Ristampato in: Oeuvres de Lagrange, Gauthier-Villars, Paris (1870), tome 5, 211-489.

[20] LAPLACE P.-S. [1775], *Mémoire sur les solutions particulières des équations différentielles et sur les inégalités séculaires des planètes,* Mémoires de l'Académie des Sciences de Paris. Ristampato in: Oeuvres complètes de Laplace, Gauthier-Villars, Paris (1895), tome 8, 325-366.

[21] LAPLACE P-S. [1785], *Théorie de Jupiter et de Saturne,* Mémoires de l'Académie Royale des Sciences de Paris. Ristampato in: Oeuvres complètes de Laplace, Gauthier-Villars, Paris (1895), tome 11, 95-207.

[22] LASKAR J. [2013], *Is the solar system stable?* Progress in Mathematical Physics, 66, 239–270; https://arxiv.org/abs/1209.5996

[23] KEPLERO J., *Consideratio observationum Regiomontani et Waltheri,* Incluso in: Johannis Kepleri astronomi opera omnia, ed. Dr. Ch. Frisch, Frankfurti A.M. et Erlangae Heyder & Zimmer, MDCCCLX, Vol. VI, 725-774. Ristampato in: Johannes Kepler Gesammelte Werke, Bayerische Akademie der Wissenschaften München, Band XX, pp. 393-455, 1990.

[24] KEPLER J., *In tabulas Rudolphi praefatio,* in Johannis Kepleri astronomi opera omnia, ed. Dr. Ch. Frisch, Frankfurti A.M. et Erlangae Heyder & Zimmer, MDCCCLX, Vol. VI, 666-674. Ristampato in: Johannes Kepler Gesammelte Werke, Bayerische Akademie der Wissenschaften München, Band 1, 1990.

[25] MILANKOVIĆ M. [1920], *Théorie Mathématique des Phénomènes Thermiques Produits par la Radiation Solaire,* Gauthier-Villars, Paris.

[26] MILANKOVIĆ M. [1941], *Kanon der Erdbestrahlung und seine Anwendung auf das Eiszeiten-problem,* Roy. Serb. Acad. Spec. Publ. 133, 1-633.

[27] Newton I. [1730], *Opticks: or a Treatise of the Reflections, Refractions, Inflexions and Colours of Light,* (quarta edizione), London.
[28] Pierrehumbert R.T. [2004], *Greenhouse effect: Fourier's concept of planetary energy balance is still relevant today,* Nature 432, p. 677.
[29] Poincaré H. [1890], *Sur le problème des trois corps et les équations de la dynamique,* Acta Math. 13, 1-270.
[30] Poincaré H. [1892], *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste,* Gauthier-Villars, Paris.
[31] Prestini E. [2017], *The Evolution of Applied Harmonic Analysis. Models of the Real World,* (seconda edizione) Birkhäuser, New York.
[32] Prestini E. [2017], *Temperature della Terra e Clima,* Lettera Matematica PRISTEM 102, 48-53.
[33] Tyndal J. [1863], *Heat: A Mode of Motion,* (prima edizione) Appleton, New York; (settima edizione) Longmans, London (1887).


Elena Prestini

Elena Prestini, laureata alla Università degli Studi di Milano e Ph.D. alla Università del Maryland (USA), è professore di Analisi Matematica alla Università di Roma ''Tor Vergata''. Ha dato contributi in analisi armonica in più dimensioni, in particolare serie di Fourier multiple, e storia della scienza. Ha tenuto conferenze in Italia e all'estero e ha pubblicato più di cinquanta articoli su riviste nazionali e internazionali e tre monografie tra cui la recente seconda edizione di ''The Evolution of Applied Harmonic Analysis'' (New York, Birkhauser, 2017).