
Matematica, Cultura e Società

RIVISTA DELL'UNIONE MATEMATICA ITALIANA

ITALO CAPUZZO DOLCETTA

Louis Nirenberg, qualche ricordo personale di lavoro e amicizia

Matematica, Cultura e Società. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. 5
(2020), n.3, p. 181–186.

Unione Matematica Italiana

[<http://www.bdim.eu/item?id=RUMI_2020_1_5_3_181_0>](http://www.bdim.eu/item?id=RUMI_2020_1_5_3_181_0)

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

Louis Nirenberg, qualche ricordo personale di lavoro e amicizia

ITALO CAPUZZO DOLCETTA

E-mail: i.capuzzodolcetta@gmail.com

Non ricordo con certezza la data del mio primo incontro con Louis Nirenberg, probabilmente a Roma in occasione di un suo seminario presso l'Istituto di Matematica a cui partecipavo come borsista CNR nei miei primi anni di post-laurea. Ricordo bene invece di non avere risposto agli inviti da lui spesso rivolti al pubblico di interromperlo durante l'esposizione per chiarimenti o dubbi. Il suo aspetto severo, la difficoltà degli argomenti matematici (se non ricordo male le stime di regolarità da lui stabilite in collaborazione con Agmon e Douglis) suggerivano in me un certo senso di inadeguatezza e comunque di riverenza.

A quell'epoca, da poco laureatomi su argomenti di ottimizzazione e di analisi convessa non avevo infatti avuto l'occasione di studiare suoi articoli, pur ovviamente conoscendo il suo nome come quello di uno tra i più eminenti cultori di equazioni alle derivate parziali, professore al mitico Courant Institute della New York University.

In quegli anni una importante occasione di incontro tra numerosi giovani (allora!) analisti della mia generazione con conferenzieri italiani e stranieri erano i convegni periodici SAFA, acronimo di Seminario di Analisi Funzionale e Applicazioni, il primo dei quali si svolse nella nuova Università della Calabria ad Arcavata.

Il terzo convegno della serie si svolse a Bari nel 1979 su temi di analisi nonlineare: tra i docenti c'era Louis Nirenberg che presentò una



ampia panoramica di idee e metodi nel suo minicorso⁽¹⁾.

Il formato del seminario e l'atmosfera informale stabilitasi tra i partecipanti e qualche cena sociale permise a me, e sicuramente anche ad altri tra noi, di riconoscere in Louis una persona di gentilezza squisita, cordiale e curiosa di conoscere le persone nei loro interessi matematici e più in generale culturali, inclusi gli aspetti gastronomici!

Ricordo che mi chiese di parlargli dei miei progetti di lavoro: avevo qualche idea ancora molto preliminare riguardo le soluzioni generalizzate nel senso delle misure di Young in teoria del controllo ottimo e delle equazioni di Hamilton-Jacobi-Bellman. Credo

Accettato: il 27 ottobre 2020.

⁽¹⁾ The use of topological, functional analytic, and variational methods in nonlinear problems. Confer. Sem. Mat. Univ. Bari No. 163-168 (1979).

che gli argomenti non fossero di grande interesse per lui ma mi ascoltò gentilmente e dopo una conversazione più lunga di quello che avevo immaginato mi suggerì che l'approccio giusto alla ricerca matematica dovesse essere quello di affrontare i problemi che di volta in volta suscitavano il mio interesse: if you like it, just do it!

1. – Una breve visita al Courant Institute

Anni dopo, nel 1982, ero visitatore per un anno con il supporto di una borsa CNR-NATO presso l'Università del Maryland a College Park. Già nel primo periodo del mio soggiorno Craig Evans mi illustrò con grande chiarezza ed entusiasmo i risultati di un suo recentissimo lavoro con Mike Crandall e Pierre-Louis Lions⁽²⁾ in cui veniva rielaborata la teoria della buona posizione per equazioni alle derivate parziali nonlineari del prim'ordine di tipo Hamilton-Jacobi quali ad esempio

$$(1.1) \quad H(\nabla u) + u = n(x)$$

basandosi su una definizione di soluzione in senso di viscosità in qualche modo più maneggevole di quella originalmente introdotta qualche tempo prima.

Questa fortunata circostanza mi consentì di riuscire a provare rigorosamente un risultato di convergenza di soluzioni di problemi approssimati in tempo discreto, problematica su cui lavoravo da qualche tempo, in seguito sviluppata in collaborazione con Hitoshi Ishii⁽³⁾, ed insieme con Craig Evans di fornire una soluzione completa del problema di controllo noto come optimal switching⁽⁴⁾.

⁽²⁾ M. G. CRANDALL, L. C. EVANS, P. L. LIONS, Some properties of viscosity solutions of Hamilton-Jacobi equations, Trans. Amer. Math. Soc. 282 (1984).

⁽³⁾ I. CAPUZZO DOLCETTA, On a discrete approximation of the Bellman equation of deterministic control theory, Appl. Math. Optim. 10 (1983) I. CAPUZZO DOLCETTA, H. ISHII, Approximate solutions of the Bellman equation of deterministic control theory, Appl. Math. Optim. 11 (1984).

⁽⁴⁾ I. CAPUZZO DOLCETTA and L. C. EVANS, Optimal switching for ordinary differential equations, SIAM J. Optim. Control 22 (1984), 1133-1148.

In questo contesto fruttuoso della mia attività mi arrivò molto gradito l'invito di Louis Nirenberg per una breve visita con annesso seminario al Courant.

Dando forse un pò per scontato che la nozione di soluzione viscosità fosse nota al pubblico dei presenti, scelsi di richiamarla brevemente nella versione che mi sembrava, per così dire, più economica: quella basata sul testare l'equazione con i sotto e sopra gradienti di funzioni semicontinue. Ciò per dare maggiore spazio alla presentazione dei miei recenti risultati che riguardavano prevalentemente applicazioni a problemi di controllo.

Nel suo studio, dopo il seminario ed un caffè nella lounge room all'ultimo piano dell'edificio di Mercer Street, Louis mi chiede di spiegargli meglio la nozione di soluzione viscosità.

Dopo un attimo di esitazione decido di provare a rispondere alla sua domanda cominciando con lo scrivere sulla lavagna la approssimazione viscosa

$$(1.2) \quad -\varepsilon \Delta u^\varepsilon + H(\nabla u^\varepsilon) + u^\varepsilon = n(x)$$

dell'equazione (1.1). Mentre (1.1) è una equazione alle derivate parziali del prim'ordine completamente nonlineare per la quale è ragionevole non aspettarsi soluzioni regolari, la (1.2) è, per $\varepsilon > 0$, una equazione ellittica quasi lineare dotata di soluzioni regolari.

Almeno formalmente ci si può aspettare che se esistesse una funzione u limite per $\varepsilon \rightarrow 0^+$ delle u^ε questa dovrebbe essere una soluzione di (1.1) in qualche senso debole.

La scelta di introdurre l'operatore di Laplace si rivela una buona idea! Louis sembra molto più interessato di prima: "one can get estimates in the sup norm and also in Hölder seminorms, uniformly in ε through the Maximum Principle".

Mi ritornarono in mente quelle parole qualche anno dopo quando ascoltai dalla sua viva voce durante una cena parigina la sua celebre battuta "I made a living off the Maximum Principle".

E cominciamo a parlare di come, se la funzione continua u è un limite per sottosuccessioni delle u^ε , come garantito dal teorema di Ascoli-Arzelà, allora per ogni funzione test $v \in C^2$ e per ogni punto x_0 di massimo locale di $u - v$ si ha

$$\nabla u^\varepsilon(x_0^\varepsilon) = \nabla v(x_0^\varepsilon) \quad , \quad -\Delta u^\varepsilon(x_0^\varepsilon) \geq -\Delta v(x_0^\varepsilon)$$

in punti x_0^ε vicini a x_0 e quindi

$$v(x_0^\varepsilon) + H(\nabla v(x_0^\varepsilon)) \leq \varepsilon \Delta v(x_0^\varepsilon) + n(x_0^\varepsilon),$$

da cui segue, se H e n sono continue, che

$$v(x_0) + H(\nabla v(x_0)) \leq n(x_0)$$

e cioè u verifica la definizione di sottosoluzione viscosa di (1.1) data nel lavoro di Crandall-Evans-Lions citato sopra.

La curiosità suscitata in Louis ci porta poi a parlare delle notevoli proprietà di paragone fra sotto e sopra soluzioni, di unicità e stabilità delle soluzioni viscosità.

Molti anni dopo Louis scriverà con L. Caffarelli e Y.Y. Li una serie di articoli su soluzioni di viscosità singolari di equazioni ellittiche del second'ordine⁽⁵⁾ che hanno fornito idee importanti per successivi miei lavori in collaborazione con A. Vitolo⁽⁶⁾.

Nel corso di questa bella conversazione mi faccio l'idea, che sarà confermata nelle nostre future frequentazioni, che la forma di comunicazione matematica preferita da Louis era quella diretta, alla lavagna, discutendo informalmente con speciale attenzione alla illustrazione di risultati generali su modelli semplici ma fondamentali.

2. – Molti anni dopo: problemi ellittici indefiniti

All'inizio degli anni '90, in una conferenza nel quadro del Seminario di Equazioni Differenziali presso il Dipartimento di Matematica della Sapienza, Henri Berestycki aveva citato tra l'altro risultati di esistenza o non esistenza di soluzioni positive per l'equazione ellittica semilineare

$$(2.1) \quad -\Delta u + m(x)u = a(x)u^p \quad \text{in } \Omega$$

⁽⁵⁾ L. A. CAFFARELLI, Y. Y. LI and L. NIRENBERG, Some remarks on singular solutions of nonlinear elliptic equations. III: viscosity solutions, including parabolic operators, Comm. Pure Appl. Math. 66 (2013), pp. 109-143.

⁽⁶⁾ I. CAPUZZO DOLCETTA and A. VITOLO, The weak Maximum Principle for degenerate elliptic operators in unbounded domains, Internat. Math. Res. Notices 2018, n. 2, Pages 412-431.

a crescita sottocritica $1 < p < \frac{n+2}{n-2}$, con condizioni di Dirichlet, di Neumann oppure di Robin al bordo dell'aperto limitato e regolare Ω di $\mathbb{R}^n$.

I risultati citati riguardavano i casi in cui il coefficiente a della nonlinearity era positivo (o sempre negativo) in tutto il dominio Ω .

Dopo il seminario chiedo ad Henri se conosce risposte nel caso in cui a cambia segno all'interno del dominio: trova il problema interessante, mi dice che ne vorrebbe parlare con Louis Nirenberg che avrebbe incontrato prossimamente. Ovviamente la prospettiva di una collaborazione anche con Louis mi attrae moltissimo e comincia allora uno scambio di fax manoscritti tra New York, Parigi e Roma.

Uno strumento utile per ricavare condizioni necessarie si rivela presto essere la relazione differenziale

$$\begin{aligned} & \operatorname{div} \left[\psi \left(\frac{v}{u} \right) (u \nabla v - v \nabla u) \right] = \\ & = \psi \left(\frac{v}{u} \right) (u \Delta v - v \Delta u) + \psi' \left(\frac{v}{u} \right) u^2 \left| \nabla \left(\frac{v}{u} \right) \right|^2, \end{aligned}$$

valida per generiche funzioni $\psi \in C^1$, $u, v \in C^2$ con $u > 0$, in cui Louis riconosce, nel caso particolare $\psi(t) = t$, una classica identità dovuta a M. Picone⁽⁷⁾.

Nell'esempio modello di condizioni di Neumann la condizione necessaria trovata, che si rivelerà poi anche sufficiente per l'esistenza di soluzioni, è che a cambi segno e che $\int_{\Omega} a \, dx < 0$.

In questa disuguaglianza integrale su a non traspariva il ruolo importante della autofunzione principale Φ del problema in considerazione (nel caso di condizioni di Neumann infatti $\Phi \equiv 1$) ma questa osservazione suggeriva tuttavia che per uno studio completo dell'esistenza di soluzioni positive di (2.1) fosse opportuno considerare l'equazione parametrizzata da τ

$$(2.2) \quad \begin{aligned} & -\Delta u + [m(x) - \tau]u = a(x)u^p \quad \text{in } \Omega, \\ & Bu = 0 \quad \text{su } \partial\Omega \end{aligned}$$

dove B indica la condizione al bordo considerata.

⁽⁷⁾ M. PICONE, Sui valori eccezionali di un parametro da cui dipende un'equazione differenziale ordinaria del secondo ordine, Ann. Scuola Norm. Pisa (1910) 11, 144.

Assumendo che l'operatore lineare $-\Delta + m(x)$ con la condizione al bordo $B = 0$ abbia 0 come autovalore principale, ovvero che esista $\Phi > 0$ tale che

$$-\Delta\Phi + m(x)\Phi = 0 \quad \text{in } \Omega, \quad B\Phi = 0 \quad \text{su } \partial\Omega$$

e che a cambi segno in Ω con $\int_{\Omega} a\Phi^{p+1} dx < 0$, si ottiene con un metodo di massimizzazione vincolata in spazio di Sobolev il risultato di esistenza di tipo Fredholm nonlineare:

esiste $\tau^* > 0$ tale che il problema (2.6) ha soluzione per $0 \leq \tau < \tau^*$ mentre non esiste soluzione per $\tau > \tau^*$.

Questo risultato è parte del lavoro ⁽⁸⁾, pubblicato con mio grande piacere su NoDEA, che ha consentito di generalizzare e inquadrare in un approccio unificato vari risultati su problemi ellittici con non-linearità indefinite. ⁽⁹⁾

La nostra collaborazione si è svolta in questa occasione interamente per corrispondenza: Louis ha messo nella collaborazione molte idee e consigli, e questo non sorprende, ma non solo questo: ho apprezzato enormemente il suo lavoro di redazione, la verifica puntuale dei testi mandatigli da me o da Henri e soprattutto la magnifica modestia “please check carefully the proof of this lemma...” con la quale accompagnava i suoi fax manoscritti (purtroppo non li ho conservati!).

Quasi in contemporanea con la conclusione di questo lavoro Louis ci propone di continuare la ricerca su problemi ellittici di tipo indefinito avendo in mente di preparare un lavoro che gli era stato chiesto di contribuire per un fascicolo speciale di Topological Methods in Nonlinear Analysis dedicato a Jean Leray. La sua proposta era quella di studiare il problema

$$(2.3) \quad u > 0, \quad Lu + a(x)g(u) = 0 \quad \text{in } \Omega$$

$$(2.4) \quad Bu = 0 \quad \text{su } \partial\Omega$$

nel caso di un operatore differenziale del secondo ordine L in forma non divergenziale

$$Lu = \text{Tr}(A(x)\nabla^2 u) + b(x) \cdot \nabla u + c(x)u$$

⁽⁸⁾ H. BERESTYCKI, I. CAPUZZO DOLCETTA, L. NIRENBERG, Variational methods for indefinite superlinear homogeneous elliptic problems, NoDEA 2 (1995) 553-572.

⁽⁹⁾ C. BANDLE, M.A. POZIO, A. TESEI, Existence and uniqueness of solutions of nonlinear Neumann problems. Math. Z. 199 (1988), no. 2, 257-278, S. ALAMA, G. TARANTELLO, On semilinear elliptic equations with indefinite nonlinearities. Calc. Var. Partial Differential Equations 1 (1993), no. 4, 439-475.

con matrice $A(x)$ uniformemente ellittica, non-linearità g con una precisa crescita polinomiale sottocritica all'infinito e a regolare e di tipo indefinito come nel lavoro sopradescritto.

Le condizioni al bordo prese in considerazione erano quella di Dirichlet oppure di derivata conormale nulla.

A causa della generale struttura di L il problema, al contrario di quello considerato precedentemente, non ammette un approccio variazionale e quindi la proposta di Louis era stata di affrontare la questione di esistenza di soluzioni usando il metodo della teoria del grado topologico.

Il progetto era naturalmente molto attraente ma non nascosi il fatto che a quell'epoca non avevo alcuna esperienza su quei metodi, a parte la risolubilità tramite grado e/o teorema di Brouwer di sistemi di equazioni nonlineari e disequazioni quasi variazionali in dimensione finita.

Sarò sempre grato a Louis per avermi incoraggiato ad affrontare quegli argomenti: quell'esperienza si rivelò molto importante e aprì a me e alle mie collaboratrici di allora la strada ad affrontare problematiche che fino a quel momento non avevo preso in considerazione né avrei avuto gli strumenti per farlo. ⁽¹⁰⁾

Il cuore della ricerca sarebbe stato, secondo i dettami della teoria del grado di Leray-Schauder, quello di stabilire una stima a priori

$$(2.5) \quad 0 < u \leq C$$

per l'insieme delle possibili soluzioni u del problema

$$(2.6) \quad u > 0, \quad Lu + a(x)g(u) + \rho = 0 \quad \text{in } \Omega$$

$$(2.7) \quad Bu = 0 \quad \text{su } \partial\Omega$$

con C costante dipendente da L, a, g, Ω ma non da u né da ρ , superando le difficoltà dovute al fatto che il coefficiente a potesse cambiare segno in Ω , situazione che male si accorda con il Principio di Massimo.

Il primo compito assegnatomi da Louis fu quello, impegnativo, di leggere un importante lavoro di

⁽¹⁰⁾ I. BIRINDELLI, I. CAPUZZO DOLCETTA, A. CUTRÌ, Liouville theorems for semilinear equations on the Heisenberg group, Ann. Inst. Henri Poincaré, Analyse Non Linéaire, 14, 3 (1997), A. CUTRÌ, F. LEONI, On the Liouville property for fully nonlinear equations, Ann. Inst. Henri Poincaré, Analyse Non Linéaire, 17, 6 (1998).

Gidas e Spruck⁽¹¹⁾ che garantiva la validità della stima nel caso di un coefficiente $a < 0$ e $p > 1$ e minore dell'esponente critico $\frac{n+2}{n-2}$.

In seguito abbiamo avuto l'opportunità di passare Henri ed io una settimana al Courant e con varie giornate di intenso lavoro, Louis infaticabile spesso alla lavagna, si arrivò a definire l'ossatura del lavoro la cui stesura completa richiese ancora un tempo non trascurabile.⁽¹²⁾

Di quella settimana ricordo anche una bella passeggiata con Louis a Brooklyn e una storiella che mi raccontò in quella occasione e che ancora oggi mi fa sorridere: come premi di una lotteria organizzata nella comunità ebraica di quel quartiere era stato stabilito di offrire al primo estratto una settimana di vacanza a Filadelfia, due settimane al secondo estratto, al terzo tre settimane e così via...

Tornando alla stima a priori, la dimostrazione adottata era per assurdo: si suppone che (2.5) sia falsa e che esista quindi una successione di soluzioni positive u_j tali che per $j \rightarrow +\infty$

$$M_j := \max_{x \in \bar{\Omega}} u_j(x) = u_j(x_j) \rightarrow +\infty$$

Per derivare una contraddizione si usa il metodo di blow-up introducendo nuove coordinate $y = \frac{x - x_j}{\lambda_j}$ con opportune scelte del fattore di riscaldamento λ_j e le funzioni $v_j(y) = \frac{1}{M_j} u_j(\lambda_j y + x_j)$ che verificano $0 < v_j \leq 1$.

Dato che Ω è limitato si può supporre che la successione x_j converga ad un punto $x_0 \in \bar{\Omega}$ e l'analisi di blow-up, effettuata sotto l'ipotesi che l'insieme degli zeri di a fosse interamente contenuto in Ω e che $\nabla a(x) \neq 0$ su tale insieme, richiedeva di esaminare tre casi a seconda della posizione del punto limite x_0 .

In ogni caso la funzione limite v si trovava a verificare, dopo opportuni cambi lineari di variabili, una equazione del tipo

$$(2.8) \quad v \geq 0, \quad \Delta v + v^p = 0$$

in tutto $\mathbb{R}^n$ oppure in un semispazio (con le appropriate condizioni al bordo) nel caso in cui $x_0 \in \Omega$ e

$a(x_0) \neq 0$ oppure $x_0 \in \partial\Omega$.

Nel caso, certamente possibile per il problema indefinito, in cui $a(x_0) = 0$ l'equazione di blow-up risultava invece

$$(2.9) \quad v \geq 0, \quad \Delta v + x_n v^p = 0 \text{ in tutto } \mathbb{R}^n.$$

La contraddizione cercata è originata dalla validità di forme nonlineari del classico Teorema di Liouville sulle funzioni armoniche intere che garantiscono, se

$1 < p < \frac{n+2}{n-2}$ nel caso (2.8) e se $1 < p < \frac{n+2}{n-1}$ per il

problema (2.9), che l'unica soluzione limitata nell'intorno dell'origine di questi problemi è la funzione v identicamente nulla, il che contrasta con il fatto che per costruzione $v_j(0) \equiv 1$ per ogni j .

Il risultato di rigidità necessario per trattare il caso (2.9) non era disponibile in letteratura ed è stato ottenuto nel nostro lavoro come conseguenza di un nuovo, generale teorema di tipo Liouville per la disuguaglianza differenziale

$$(2.10) \quad \Delta v + h(x)v^p \leq 0, \quad x \in \Sigma$$

dove Σ è un cono di $\mathbb{R}^n$ con vertice nell'origine. Questo risultato valido sotto restrizioni su p dipendenti dalla crescita polinomiale della funzione non negativa h all'infinito, da n e dall'apertura del cono misurata tramite l'autovalore principale del-



Con Louis e Umberto Mosco
[Nonlinear PDE's, Roma Settembre 2008].

⁽¹¹⁾ B. GIDAS, J. SPRUCK, A priori bounds for positive solutions of nonlinear elliptic equations, Comm. Partial Diff. Eq. 8 (1981).

⁽¹²⁾ H. BERESTYCKI, I. CAPUZZO DOLCETTA, L. NIRENBERG, Superlinear indefinite elliptic problems and nonlinear Liouville theorems, Topological Methods in Nonlinear Analysis, Vol. 4 (1994).



Nel 2015 con Daniele Cassani a Roma, Terme di Diocleziano.



l'operatore di Laplace-Beltrami su $\Sigma \cap S^{n-1}$ asserisce che l'unica soluzione non negativa e limitata nell'intorno dell'origine del problema (2.10) è la funzione identicamente nulla.

Nel corso dell'esecuzione di questo lavoro ho certamente appreso numerose abilità tecniche ed in aggiunta a queste ho maturato una considerazione per me inaspettata sulla strana bellezza della matematica: l'esistenza di soluzioni per un problema al contorno su un dominio compatto può essere dedotta dalla non esistenza di soluzioni di un problema ausiliario posto su un insieme illimitato!



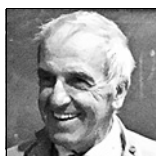
RISM, Varese 2014 (cortesia di Daniele Cassani).

3. – Gli ultimi anni

In anni recenti sono state numerose le occasioni di incontrare Louis in Italia, paese che ammirava e suscitava la sua curiosità sotto tanti aspetti. I suoi problemi di deambulazione non gli hanno impedito, grazie all'amorevole aiuto di Nanette, di viaggiare, seppure con difficoltà, e partecipare a congressi o ad eventi dedicati.

Lo ricordo in particolare, seduto sempre in prima fila sulla sua carrozzina, assistere attento a tutte le conferenze in un convegno dedicatogli dal RISM a Varese nel 2014, poi ad un "pomeriggio di matematica" organizzato all'Università di Roma Tor Vergata per festeggiare il suo novantesimo compleanno e celebrare il conseguimento del Premio Abel 2015, ad un workshop su equazioni alle derivate parziali, sempre al RISM, nel luglio 2017 ed al congresso dedicato a J. Serrin nell'inverno 2017 a Perugia.

La comunità matematica era per Louis come una grande famiglia, così usava dire, nella quale si sentiva a suo agio circondato da affetto che ricambiava generosamente. La sua scomparsa è stata un evento tristissimo che ha lasciato un grande vuoto, per la sua grandezza scientifica e per la sua squisita e raffinata umanità, in quanti hanno avuto il privilegio di conoscerlo.



Italo
Capuzzo Dolcetta

Italo Capuzzo Dolcetta è stato professore ordinario di Analisi Matematica presso il Dipartimento di Matematica Guido Castelnuovo di Sapienza Università di Roma.

I suoi interessi scientifici si sono sviluppati in collaborazioni nazionali ed internazionali che hanno dato luogo a più di 90 pubblicazioni su riviste scientifiche, prevalentemente su tematiche di teoria del controllo e di equazioni alle derivate parziali.

*È stato per vari anni Direttore del gruppo GNAMPA dell'Istituto Nazionale di Alta Matematica e Managing Editor della rivista *Nonlinear Differential Equations and Applications*.*