
Matematica, Cultura e Società

RIVISTA DELL'UNIONE MATEMATICA ITALIANA

MARIA PIERA MANARA

Matematica: intuizione o rigore? negli scritti di Carlo Felice Manara

* Lettera alla rivista

Matematica, Cultura e Società. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. 5 (2020), n.1, p. 83–87.

Unione Matematica Italiana

http://www.bdim.eu/item?id=RUMI_2020_1_5_1_83_0

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

Matematica: intuizione o rigore? negli scritti di Carlo Felice Manara

Lettera alla rivista

MARIA PIERA MANARA

E-mail: mariapiera.manara@gmail.com

L’articolo di Adele Telsoni e Carlo Toffalori: *Tra Hilbert e Poincaré. Matematica: intuizione o rigore?* (Matematica, Cultura e Società - agosto 2019) mi suggerisce di rileggere le riflessioni sul tema: *Matematica: intuizione o rigore?* nel lavoro di Carlo Felice Manara.

Carlo Felice Manara (1916 – 2011), allievo di Oscar Chisini all’Università di Milano, fu professore ordinario di Geometria nelle Università di Modena, Pavia, Milano; fu anche studioso e docente di Economia matematica, Logica, Matematiche complementari in varie istituzioni.

In molti suoi scritti, insieme ai temi più specifici riguardanti il rapporto fra Geometria, creatività e rigore, e il rapporto fra Logica e intuizione, si trovano considerazioni sul ruolo di intuizione e rigore nell’insegnamento e nell’apprendimento della matematica. Le diverse sensibilità testimoniate da Poincaré e Hilbert, illustrate a fondo e inquadrare storicamente nell’articolo citato, sono ben presenti a C. F. Manara, che ne ricerca e trova le tracce nel lavoro di matematici che apprezza profondamente.

Nelle righe seguenti vorrei allora dare un rapido esempio delle sue considerazioni in tal senso su Euclide, Hilbert, Enriques, Chisini, Peano. Infine vorrei ricordare alcune delle riflessioni riguardanti il ruolo di intuizione e rigore nella didattica.

Rileggendo gli interventi, inediti o pubblicati anche su riviste non facili da trovare, ma tutti raccolti nel sito indicato alla fine della Lettera, risulta chiaro come C. F. Manara fosse attento a

entrambi gli atteggiamenti, senza privilegiare definitivamente l’uno rispetto all’altro, sia nel pensiero creativo che nell’insegnamento, alla ricerca di un non facile equilibrio. Intuizione o rigore diviene nel suo pensiero intuizione e rigore.

Euclide: il mito. Nel testo dell’ultima conferenza pubblica, (1), *Geometria: rigore e creatività*, (2004), si legge: “.....ciò che suscita la nostra stupita ammirazione per gli Elementi è, a mio parere, il fatto che quest’opera ha la struttura espositiva di un trattato rigoroso ed astratto, con un livello di astrazione che prescinde dall’ipotesi di eventuali applicazioni pratiche. È noto che la procedura dell’esposizione segue un cammino che è diventato paradigmatico per le opere matematiche di tutta la storia umana seguente: tale cammino tocca anzitutto le proposizioni che vengono date per vere senza bisogno di dimostrazione, e procede poi per dimostrazioni rigorose di ogni altra proposizione che si enuncia e si prende in considerazione.....”

La grande ammirazione di C. F. Manara per il contributo della geometria greca è testimoniata in molti altri scritti: non si sa se più per il rigore delle argomentazioni o per l’aderenza ad una base intuitiva.

La psicologia dell’invenzione in campo matematico. Nel 1945 Princeton University Press pubblica *The psychology of invention in the mathematical field*, di Jacques Hadamard. Il libro deve aver suscitato interesse in Oscar Chisini e nei suoi allievi, appartenenti alla scuola di F. Enriques, che del resto manifestò lui pure grande attenzione per la psicologia della ricerca scientifica. Nelle sue riflessioni C. F. Manara si riferisce spesso al libro di Hadamard.

Accettato: il 30 gennaio 2020

Del 1965 è il testo inedito di una conferenza tenuta il 9 dicembre presso la Sede dell'Istituto di Psicologia Sperimentale dell'Università di Milano: (2) *Problemi psicologici dell'invenzione matematica*, in cui viene citato ripetutamente Hadamard. Nel testo si legge fra l'altro: "...A questo proposito si suole distinguere i matematici in due grandi categorie psicologiche: i geometri e gli analisti. Dovrebbe essere propria dei primi l'attitudine mentale della intuizione, della visione immediata della verità che si ricerca, magari con l'aiuto delle immagini spaziali, senza il passaggio attraverso i canali della logica; dovrebbe essere propria dei secondi l'analisi paziente di tutti gli anelli logici di una catena di deduzione, per giungere alla conquista di una singola verità, oppure alla costruzione di una intera teoria con un rigore formale ineccepibile. Ma è propria dei due tipi mentali la capacità di divinare i risultati, e di escogitare i procedimenti di dimostrazione, capacità che si riferisce sempre alla fantasia creatrice, seppure con diversi caratteri.

Accanto a questa proprietà di fantasia creatrice vengono messi in evidenza anche altri caratteri dei grandi matematici,... Vi è una specie di gusto estetico, che fa scegliere alla mente, anche senza che ne abbia coscienza, una strada che viene giudicata "bella"; molto spesso si sente dire da matematici di un teorema che è "bello" e questo giudizio direi che ha molto in comune con il giudizio estetico, anche se non mi so spiegare il perché...."

Nel testo del 1994, (3), *La creatività geometrica*, si trovano illustrate ampiamente le idee maturate negli anni, così riassunte: "...Credo infatti che la creatività possa realizzarsi anzitutto con la costruzione delle immagini, in secondo luogo con la costruzione dei concetti e dei sistemi di concetti che si impiantano sulle immagini, ed infine con l'invenzione di simboli ed in generale di linguaggi..."

Su Federigo Enriques e David Hilbert. Il binomio Hilbert – Poincaré diviene per C. F. Manara il binomio iconico Hilbert – Enriques. Nell'articolo del 1980, (4), *Federigo Enriques et David Hilbert*, riassunto in italiano dall'Autore stesso, si legge: "...è particolarmente interessante analizzare l'atteggiamento dei due matematici, soprattutto in relazione alla questione perennemente disputata del 'rigore' in matematica. In questo ordine di idee

è interessante rifarsi alla analisi psicologica della ricerca e della creazione matematica che venne fatta da H. Poincaré, in una sua conferenza al congresso dei matematici tenutosi a Parigi nel 1900. [Poincaré, H. Du rôle de l'intuition et de la logique en mathématiques, *Compte rendu du Deuxième Congrès International des Mathématiciens*, Paris, 1902. pp. 121- 55]. In questa occasione Poincaré delineò due tipi fondamentali di mentalità dei matematici, tipi che egli indicò con le denominazioni tradizionali di 'analisti' e 'geometri'.... si potrebbe dire che F. Enriques costituisce il tipo quasi puro del geometra, perché in tutta la sua opera si riconosce il superamento del rigore formale e della generalità vuota e priva di significato a favore della scoperta e della apertura di nuove strade. Questo atteggiamento si ritrova anche nei suoi lavori che riguardano i fondamenti della geometria; perché egli, alla ricerca di sistemi nuovi e rigorosi di postulati, preferì l'analisi dei classici: lo studio della storia, del processo temporale secondo il quale le idee si sono formate; alla enunciazione delle leggi logiche preferì la ricerca del loro significato e della importanza che esse ebbero nella storia della scienza. La figura di D. Hilbert potrebbe essere in qualche modo considerata come rappresentante dell'analista.... soprattutto se si considera la sua opera di fondatore di una scuola di logica simbolica e di analisi dei fondamenti del ragionare matematico. Tuttavianella celebre conferenza che egli tenne allo stesso congresso mondiale dei matematici che è stato ricordato, a fronte delle pretese del rigore formale cercato ad ogni costo, Hilbert non soltanto ricorda la fecondità di suggestioni che l'esperienza sensibile, la geometria, la fisica matematica forniscono alla matematica 'rigorosa'; ma arriva fino a rivendicare il ruolo della intuizione come procedimento rigoroso di deduzione e di scoperta. Nella stessa linea è l'opera 'Fondamenti della geometria'; in questa si trovano da una parte il rigore della esposizione e dall'altra una aderenza estremamente equilibrata alle esigenze dell'esperienza e dell'intuizione geometrica, come si può constatare dalla graduazione accurata dei gruppi di postulati: infatti, partendo da quelli che hanno origine nelle sensazioni più semplici ed elementari, si passa gradualmente a quelli che nascono dalla idealizzazione e dalla elaborazione fantastica di

esperienze più composite e complicate. Pertanto presso questi due grandi matematici, che in certo senso chiudono un'epoca e ne introducono un'altra, troviamo il rispetto profondo per le facoltà fondamentali dell'uomo, la ragione e la fantasia creatrice, rispetto che supera le esigenze di un rigore formale quando esso rischia di diventare sterile formalismo....."

Il profondo apprezzamento di C. F. Manara per i Grundlagen di Hilbert è manifestato nell'*Introduzione all'edizione italiana di "Fondamenti della Geometria" di D. Hilbert* (1970), (5). E soprattutto dall'impostazione del suo insegnamento dei corsi di Geometria all'Università di Milano dopo il 1960, ispirata al programma di Erlangen, di Felix Klein.

Se in molti scritti è indicato Federico Enriques come il rappresentante tipico del matematico – geometra secondo la classificazione di Poincaré, in (6) *Ricordo di Oscar Chisini* (1987) C. F. Manara afferma di vedere in sommo grado "...la vivezza della fantasia, intesa come immaginazione spaziale, la capacità di intuire e cogliere le analogie tra situazioni diverse e di generalizzare, ed infine il senso critico inesorabile e radicale." Quindi Oscar Chisini, che fu allievo di F. Enriques e che C. F. Manara sempre considerò suo maestro, è visto accentuare le caratteristiche intuitive del lavoro intellettuale del maestro, ma con un estremo rigore critico. Inoltre, si apprezza profondamente il fatto che il lavoro scientifico di O. Chisini proceda il più possibile appoggiandosi a modelli concreti.

Ecco dunque testimoniato il gusto per rigore e intuizione.

Educare alla razionalità. Rileggendo gli scritti dedicati a problemi della didattica nella Scuola secondaria, si vede come C. F. Manara considerasse scopo fondamentale dell'insegnamento l'educazione alla razionalità, nel senso più generalmente umano, e come ritenesse che l'insegnamento scientifico, in particolare della matematica, possa portare un contributo molto importante alla formazione della personalità. Ne vengono varie considerazioni, che potrebbero apparire contrastanti. Anzitutto il rifiuto, sempre più convinto negli anni, dell'impostazione bourbakista nell'insegnamento secondario, e l'affermazione della necessità di una didattica che parta dall'esperienza concreta dell'allievo, e ne

stimoli l'intuizione. Un esempio è dato nella descrizione dell'esperienza di insegnamento in corsi professionali, in (7) *Un esperimento didattico: l'insegnamento della Matematica nei centri ANCIFAP* (1975).

Ma anche è affermata la necessità imprescindibile dell'educazione al senso critico e al corretto ragionare, dell'educazione al porsi problemi, e a risolverli. È frequente l'affermazione che l'insegnamento non debba essere dedicato alla trasmissione di tecniche e formule, ma soprattutto all'appropriarsi di idee guida, come è testimoniato in (8) *Introduzione a "Ripensando l'educazione matematica"*, (1994). In queste idee guida e propositi, C. F. Manara è in consonanza totale con altri Colleghi e Amici suoi contemporanei che si sono occupati appassionatamente di insegnamento, come Bruno de Finetti, Giovanni Prodi, Modesto Dedò, Vinicio Villani, Emma Castelnuovo, Mario Marchi, Giovanni Melzi, Margherita D'Aprile, Candido Sitia, Mario Ferrari..... Ma naturalmente, le proposte concrete dei vari matematici sono diverse: C. F. Manara era molto amareggiato dal vedere l'insegnamento della geometria progressivamente ridursi nella Scuola, perché lo riteneva particolarmente adatto – se ben condotto – al rispetto del binomio intuizione e rigore.

La logica. Tutto il lavoro di C. F. Manara manifesta il suo grande interesse per l'intuizione e la creatività, ma anche per la logica. Avendo insegnato Logica matematica e Logica all'Università Cattolica UCSC a Milano, nei suoi testi e nelle sue dispense si trovano molti capitoli riguardanti la formalizzazione del pensiero. C. F. Manara ritiene indispensabile per chi si prepara all'insegnamento, a qualunque livello, un breve corso di logica, che inserisce in molti appunti per corsi vari, come nelle dispense (9) *La Matematica di base per insegnanti di sostegno*, (1993).

C. F. Manara dimostra profondo apprezzamento per l'opera scientifica e la figura di G. Peano. Si trova scritto in (10) *Giuseppe Peano e i fondamenti della Geometria* (1991): "...Volendo cercare di caratterizzare, anche in modo sommario e superficiale, le linee fondamentali del lavoro scientifico di Peano si potrebbe dire che la sua fu una ricerca costante della semplicità, della concretezza ed ovviamente del rigore.... Interessante, per dipingere il carattere di

Conclusione.

L'insegnante di buona volontà potrà combinare problemi simili e migliori dei precedenti, onde rendere attraente lo studio.

La differenza fra noi e gli allievi affidati alle nostre cure sta solo in ciò, che noi abbiamo percorso un più lungo tratto della parabola della vita. Se gli allievi non capiscono, il torto è dell'insegnante che non sa spiegare. Nè vale addossare la responsabilità alle scuole inferiori. Dobbiamo prendere gli allievi come sono, e richiamare ciò che essi hanno dimenticato, o studiato sotto altra nomenclatura. Se l'insegnante tormenta i suoi alunni, e invece di cattivarsi il loro amore, eccita odio contro sé e la scienza che insegna, non solo il suo insegnamento sarà negativo, ma il dover convivere con tanti piccoli nemici sarà per lui un continuo tormento. Ognuno si fabbrica la sua fortuna, buona o cattiva. Chi è causa del suo mal, pianga sé stesso. Così disse Giove, e lo riferisce Omero, *Odissea* I, 34. Con questi principii, caro lettore e collega, vivrai felice.

Giuseppe Peano. Giochi di aritmetica e problemi interessanti. Paravia, Torino, 1925.

Peano, è la sua definizione di rigore: esso consiste nel dire soltanto delle cose vere. Ritengo di dover sottolineare quell'avverbio "soltanto", che si ricollega da una parte all'altro carattere del suo pensiero, e cioè alla ricerca della semplicità; e da un'altra parte si ricollega anche alla sua opera didattica, che mira a presentare i concetti matematici secondo la linea più diretta e più semplice." E ancora: "...[nel Calcolo Geometrico]....mi pare di poter vedere il germe di vari problemi dei quali Peano si occupò nel seguito e quasi sino alla fine della sua vita. Tra questi problemi vorrei ricordare anzitutto quello, di cui ho detto, della creazione di un sistema di simboli atti a rappresentare in modo, per così dire, "diretto ed immediato", gli enti della Geometria e le loro relazioni; ed un secondo, ovviamente collegato al primo, di creare una sintassi di questi simboli, un'Algebra della logica, sulla scorta dei lavori di George Boole, in modo tale che la risoluzione dei problemi geometrici prendesse gli stessi caratteri di quella dei problemi algebrici: cioè si riducesse alla applicazione rigorosa delle regole di sintassi dei simboli scelti."

Seguendo la ricerca di semplicità nella concettualizzazione, C. F. Manara introduce il campo reale "alla Peano", attraverso l'uso di classi di numeri razionali, invece che attraverso sezioni o partizioni di razionali. La trattazione si trova in (11) *Complementi di algebra ed elementi di trigonometria ad uso degli studenti dei corsi propedeutici delle facoltà universitarie*, e un cenno di motivazione in (12) *Numeri cardinali finiti e transfiniti* (1967). Purtroppo non ci sono valutazioni sulla auspicata efficacia didattica di tale presentazione.

Allora questo è il progetto di Carlo Felice Manara: raggiungere il massimo livello di rigore, senza abbandonare le basi intuitive; nella ricerca, e nell'insegnamento ad ogni livello. Sappiamo che il progetto non è facile da attuare, né nell'insegnamento né nella ricerca.

Reference

Elenco dei testi citati nell'ordine in cui compaiono nelle pagine precedenti. Sono tutti leggibili nel sito www.carlofelicemanara.it

- [1] C. F. MANARA – M. MARCHI. *Geometria: rigore e creatività*. Accad. Sci. Modena. Atti Mem. (8), 7 (2004), 40-41.
- [2] *Problemi psicologici dell'invenzione matematica*. (Conferenza tenuta il 9 dicembre 1965 presso la Sede dell'Istituto di Psicologia Sperimentale, Università di Milano).
- [3] *La creatività geometrica*. Atti del Convegno "Pensiero scientifico e creatività", Ancona, 17-19 marzo 1994. Quaderno n. 21. IRRSAE Marche, Ancona, 1996, pp. 209-221.
- [4] *Federigo Enriques et David Hilbert*. Epistemologia, (IV/1, 1981), 189-204.
- [5] *Introduzione all'edizione italiana di "Fondamenti della Geometria" di D. Hilbert*. Feltrinelli, Milano, 1970, pp. vii-xxvi.
- [6] *Ricordo di Oscar Chisini*. Atti del Convegno di Geometria, Milano, maggio 1987. Rend. Sem. Mat. Fis. Milano, 57 (1987), 11-29.
- [7] *Un esperimento didattico: l'insegnamento della Matematica nei centri ANCIFAP*. Pedagogia e vita, (1975), 513-541.
- [8] *Introduzione a "Ripensando l'educazione matematica"*, di Hans Freudenthal. La Scuola, Brescia, 1994, 5-16.
- [9] *La Matematica di base per insegnanti di sostegno*. (Dispense di un corso di lezioni tenute presso l'Istituto di Psicologia clinica dell'Università di Milano, a. a. 1992-1993.)

- [10] *Giuseppe Peano e i fondamenti della Geometria*. (Accademia Nazionale di Scienze Lettere e Arti, Modena. Atti del Convegno “Peano e i fondamenti della matematica”, Modena 22-24 ottobre 1991, 171-184.). *Peano*. (Si tratta presumibilmente del testo di una conferenza tenuta da C.F. Manara alla fine degli anni '70, certamente posteriore al 1977).
- [11] P. CANETTA – C. F. MANARA. *Complementi di algebra ed elementi di trigonometria ad uso degli studenti dei corsi propedeutici delle facoltà universitarie*. La Goliardica, Milano, 1959.
- [12] *Numeri cardinali finiti e transfiniti*. Ist. Mat. Univ. Milano, (1967). Dattiloscritto rieditato.



Maria Piera Manara

Maria Piera Manara ha avuto vari incarichi di insegnamento presso l'Università di Milano, in Geometria ed Esercitazioni per Chimici, fino al 1988; poi tecnico laureato fino al 1994, periodo in cui si è occupata di didattica con il calcolatore. Ha collaborato poi nella didattica e nell'organizzazione del Diploma universitario in Metodologie fisiche dell'Università di Parma, fino al 2002. Ha collaborato in vari modi e in vari corsi alla didattica del Dipartimento di Matematica del Politecnico di Milano.