Matematica, Cultura e Società

Rivista dell'Unione Matematica Italiana

Loredana Biacino, Gabriella Viola

Giacinto Sigismondo Gerdil e il problema dell'infinito

Matematica, Cultura e Società. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **5** (2020), n.1, p. 33–58.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=RUMI_2020_1_5_1_33_0>

Matematica, Cultura e Società. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2020.

Matematica, Cultura e Società – Rivista dell'Unione Matematica Italiana
Serie I, Vol. 5, N. 1, aprile 2020, 33-58

Giacinto Sigismondo Gerdil e il problema dell'infinito

LOREDANA BIACINO
Università di Napoli
E-mail: loredana.biacino2@unina.it

GABRIELLA VIOLA
Università di Torino
E-mail: gabriella.viola@unito.it

Sommario: *Il problema dell'infinito ha sempre rappresentato un momento essenziale nella speculazione di filosofi e matematici. In questo lavoro esso è affrontato sotto un'angolazione molto particolare: si descrive infatti come il cardinale Giacinto Sigismondo Gerdil, esponente dell'Illuminismo cattolico, essendo ben addentro a questioni di carattere scientifico e filosofico, abbia utilizzato una buona fetta di teoria matematica allo scopo apologetico della fede. Egli infatti nella sua* Mémoire de l'Infini Absolu consideré dans la Grandeur *cerca di dimostrare l'impossibilità dell'infinito attuale nelle costruzioni matematiche per provare l'impossibilità di una serie attualmente infinita di cambiamenti quale quella che dovrebbe comportare l'ipotesi che non ci sia stata una creazione dell'universo e che il tempo sia eterno. Egli trova che tutte le questioni in cui è coinvolto l'infinito in matematica possono risolversi mediante l'uso del concetto di limite da poco introdotto da d'Alembert.*

Abstract: *Infinity has always been an essential problem in philosophy and in mathematics. In this paper we consider it from a very particular point of view since we describe how the cardinal Giacinto Sigismondo Gerdil, a representative of Catholic Enlightenment, since he was well acquainted with scientific and philosophical problems, used a large slice of mathematical theory for a faith apologetic purpose. Indeed in his* Mémoire de l'Infini Absolu consideré dans la Grandeur *he tries to prove the impossibility of the actual infinity in the mathematical constructions in order to demonstrate the impossibility of an infinite series of changes that the hypotheses the universe was not created and the time is eternal should imply. He finds that all the mathematical problems involving infinity can be solved by the use of the concept of limit proposed by d'Alembert.*

Lorsque du haut d'une colline on jette les yeux sur une valle plaine dont la vue ne peut embrasser toute l'étendue, on n'a pas de peine à distinguer les premiers objects qui se presentent...
Mais à mesure qu'ils s'éloignent, on commence à les confondre ...
G.S. Gerdil, *Mémoire de l'Infini Absolu consideré dans la Grandeur*

Un esponente dell'Illuminismo cattolico

Giacinto Sigismondo Gerdil (Samoëns, Alta Savoia, 1718 – Roma, 1802) è una figura di rilievo nel paesaggio culturale dell'Italia della seconda metà del Settecento in campo teologico ma anche, più in generale, in campo filosofico-letterario e matematico-scientifico.

Fig. 1. – Giacinto Sigismondo Gerdil

Nel 1734 entra nell'ordine dei barnabiti; nel 1735, dopo il noviziato, è inviato a Bologna dove compie i suoi primi studi di teologia e si forma scientificamente: le sue capacità gli conquistano la benevolenza del cardinale Prospero Lambertini, futuro Papa Benedetto XIV; può inoltre far tesoro dell'amicizia di Francesco Maria Zanotti (1692-1777) e

Accettato: il 30 aprile 2020.

degli uomini più dotti della città che lo indirizzano alle teorie di Descartes, Newton, Malebranche (1638-1715) e Gassendi (1592-1655).

Questo primo periodo di studi si conclude con la tesi di dottorato in filosofia su *La dottrina di Cartesio*, dove si avverte l'influsso delle idee di Malebranche. In difesa di tali idee, contro il Locke (1632-1704), scrive nel 1748 la

> *"Défense du sentiment du Père Malebranche sur la nature et l'origine des idées contre l'examen de Mr. Locke."*

È professore nei collegi dell'ordine e nel 1749 diviene titolare dell'insegnamento di Filosofia Morale all'Università di Torino, essendo dopo qualche anno (1754) promosso alla cattedra di Teologia Morale. Molti incarichi prestigiosi costellano la sua attività di religioso, culminata con la nomina a cardinale nel 1777. Alla morte di Pio VI è nella rosa dei papabili nel conclave del 1799.

Nel suo insegnamento è moderno, come pochi attento alle idee che provengono dal mondo della scienza: in particolare sostiene e divulga le teorie di Newton che stima profondamente.

Egli stesso affronta questioni di carattere scientifico e matematico, spesso, pur essendo uomo di chiesa, in maniera non convenzionale. Interessante il giudizio espresso per d'Alembert, definito nel 1755, nell'*Introduzione allo studio della religione* "uno dei più grandi uomini di questo secolo (1)"; la stima è confermata anche nelle edizioni successive, nonostante la condanna all'indice dell'*Encyclopédie* avvenuta nel 1758-59; nella *Mémoire sur la cause physique de la cohesion des hemispheres de Magdebourg* "l'illustre d'Alembert" è definito "*Un des plus zéles défenseur de la Philosophie de Newton, digne de l'être par l'élévation, de son génie et l'étendue de ses conoissances*" [Gerdil 1845, Vol. II, 812].

D'altro canto anche d'Alembert guarda con interesse all'uomo e alla sua posizione riguardo al calcolo, come si evince dalle lettere che gli invia il 26 luglio 1754 e il 24 ottobre 1755 (2).

In effetti Gerdil è legato all'intellettuale francese, oltre che dalla stima per il valente scienziato e uomo di cultura, da un'identità di vedute di carattere matematico per quanto concerne la teoria degli infinitesimi e dell'infinito, argomento vivacemente dibattuto in tutta la prima metà del Settecento e che è l'oggetto del saggio *Mémoire de l'Infini Absolu consideré dans la Grandeur* del 1761, pubblicato nei *Mélanges de Philosophie et de Mathématique de la Société Royale de Turin*.


MÉLANGES
DE
PHILOSOPHIE ET DE MATHÉMATIQUE
DE LA
SOCIÉTÉ ROYALE
DE TURIN
Pour les Années 1760—1761.
A TURIN,
DE L'IMPRIMERIE ROYALE.
Avec Permission.

Fig. 2. – Frontespizio dei Mélanges della Société Royale de Turin

Gerdil fu uno dei primi soci della "Società privata torinese", fondata nel 1757 dal conte Angelo Saluzzo di Monesiglio, dal medico Gianfranco Cigna e dal ventunenne matematico Luigi Lagrange, successivamente denominata "Società reale di Torino" e diventata poi "Accademia reale delle Scienze di Torino" nel 1783. Egli ne scrisse regole e statuto; inoltre la sua presenza contribuì all'internazionalizzazione dell'Accademia con il costituirsi di una fitta rete di scambi epistolari.

Per altre informazioni di carattere biografico si può consultare ad esempio P. Stella [Stella 2001] o G. Piantoni [Piantoni 1851]. Riportiamo qui una parte delle considerazioni conclusive del saggio di Stella:

> *"... la modernità del cardinale barnabita ... è da vedere nell'aver accettato senza riserve il ruolo del sapere matematico ed empirico, frutto di ragionamento e sperimentazione, nell'aver sostenuto con forza il postulato assoluto di Dio ... , nel-*

(1) [Gerdil 1845, Vol. II, 54] Le parole usate da Gerdil sono: "*Del celebre Gio. Bernoulli riporterò ciò che scrive nel suo elogio uno dei più grandi uomini di questo secolo (il Sig. d'Alembert)*" Seguono le parole di d'Alembert, riferite al Bernoulli e riportate dal Gerdil in quanto significative del sentire religioso dell'enciclopedista.

(2) In tali lettere si fa riferimento a due scritti fatti pervenire a d'Alembert: uno di essi, in francese, *Démonstration mathématique contre l'éternité de la matiére et du mouvement*, fu poi pubblicato come parte del *Recueil des Dissertations*, nel 1760 da Chaubert a Parigi, e subì una successiva elaborazione nella *Mèmoire de l'Infini Absolu consideré dans la Grandeur* del 1761. L'altro, in italiano, è *Della nozione dell'esteso geometrico e delle proprietà che ne risultano*.

l'averlo discusso e dimostrato nei confronti delle teorie e dei discorsi degli atei e dei materialisti dell'epoca, che erano per lo più nell'ambito dei philosophes *francesi; di averlo fatto con tutto r ispetto per le persone individuando piuttosto quelle che a suo parere erano contraddizioni logiche, non ricorrendo a retorica violenta o a illazioni sulla moralità dei personaggi."*

Significativo relativamente al rapporto con i *philosophes* francesi è il seguente episodio. In seguito alla pubblicazione nel 1760 del *Recueil des Dissertations*, nel febbraio 1761 comparve sulla rivista *Mercure de France* una lettera del Sig. Dupuy che, con una lunga argomentazione-dimostrazione, sosteneva, sostanzialmente in accordo con la teoria di Spinoza, che l'estensione, oggetto della geometria, non ha parti reali. Come vedremo, questo contrastava vistosamente con le tesi sostenute più volte da Gerdil, che rispose con il trattato *Eclaircissement sur la notion et la divisibilité de l'étendu géométrique*, dove riproponeva senza alcuna variazione tutte le sue idee già espresse nel trattato *Della nozione dell'esteso geometrico e delle proprietà che ne risultano*.

Per uno sguardo complessivo sull'opera filosofica, teologica e pedagogica si può consultare anche R. Valabrega [Valabrega 2004].

Nel suo libro sull'infinito U. Bottazzini [Bottazzini 2018] riserva ampio spazio al filosofo Gerdil e alla sua opera apologetica delle verità di fede che si avvale di argomentazioni di natura matematica e fisica.

Matematica e filosofia in Gerdil

Gerdil afferma, solo in conclusione del *Mémoire de l'Infini Absolu consideré dans la Grandeur* e in modo molto stringato, che la motivazione principale del suo saggio risiede nella Metafisica: afferma infatti che l'impossibilità dell'infinito assoluto, dimostrato in modo geometrico, fornirebbe alla Metafisica un principio luminoso per stabilire verità della più grande importanza. In altre opere è molto più esplicito su quali possano essere alcune ragioni del suo interesse per la matematica. Ad esempio nell' *Essai d'une démonstration mathématique de l'existence de Dieu* [Gerdil 1845, Vol. II, 351] e nel saggio *Della nozione dell'esteso geometrico e delle proprietà che ne risultano* [Gerdil 1845, Vol. II, 557] criticando l'idea dell'infinito attuale esposto negli *Eleménts de la Géométrie de l'Infini* di Fontenelle (3) [Fontenelle 1727], intende dimostrare che non è possibile una successione infinita di rivoluzioni e cambiamenti di stato nell'universo quale dovrebbe risultare dall'eternità del mondo.

Quindi il mondo non è eterno, ha avuto un'origine e avrà una fine. Negli stessi saggi cerca di dimostrare che la materia non può essere infinita e non può esistere indipendentemente da un essere superiore. Aderendo al meccanicismo cartesiano egli ritiene che l'estensione rappresenti ciò che è primitivo e irriducibile nella materia, con la conseguente identità corpo/spazio e eliminazione del vuoto. Nel saggio *Della nozione dell'esteso geometrico e delle proprietà che ne risultano* sono espresse le seguenti proprietà dell'estensione:

- l'esteso non risulta dall'unione di una moltitudine di elementi componenti;
- distinzione delle parti: si può ad esempio distinguere la porzione di esteso che forma la sfera dalla parte di esteso che la circonda;
- ogni porzione di esteso è delimitato da una figura;
- mobilità: ad esempio una sfera può ruotare attorno ad un suo diametro all'interno di un cubo che la contiene;
- divisibilità: ogni parte determinata dell'esteso è divisibile all'infinito ed è quindi impossibile determinare attualmente tutte le parti di una qualsivoglia parte dell'esteso geometrico (vedi anche [Fasciolo Bachelet 2001]).

Gerdil non ritiene che le prove che egli fornisce siano necessarie per la Religione, che si avvale della fede e delle Scritture, ma se la soluzione dei precedenti problemi (è eterno il mondo? è indipendente la materia da un creatore?) mediante i lumi della ragione è indifferente per la Religione, essa è di grande rilievo per la Filosofia, rappresentando la questione più

(3) Gerdil afferma nell'*Essai d'une démonstration mathématique de l'existence de Dieu* di aver già comunicato il suo pensiero a un Geometra di prim'ordine (n.d.a. d'Alembert) e che *ce grand homme me fait l'honneur de me marquer qu'il etait particuliérement satisfait de cet endroit, ajoutant que les principes que je combats "sont en effect très-faux, et tendroient à jetter du doute sur les vérités Géométriques."* (tra virgolette le parole presenti nella lettera del 24 ottobre 1754 di d'Alembert a Gerdil).

importante per lo spirito umano e la meno suscettibile di dimostrazione.

Gerdil, sostanzialmente, mette in connessione l'infinito nel mondo con l'infinito matematico e intende dimostrare che non può esserci infinito in atto nel mondo reale allo stesso modo in cui non può esservi nelle costruzioni matematiche, essendo esso, l'infinito attuale o assoluto, un attributo riservato esclusivamente a Dio.

Una volta che sia assodata tale verità, afferma, l'incredulo dovrà ammettere che il mondo e la materia hanno avuto un inizio e un creatore (4).

Se è vero che l'infinito in atto non è nel mondo, esso è però concepito dalla nostra anima come diretta emanazione dall'infinito che è Dio. L'infinito attuale è un concetto innato nella mente umana e Gerdil sottolinea che l'idea intuitiva e spontanea che ne ha l'uomo lo predispone al ragionamento, al calcolo, al metodo per trattare oggetti matematici e geometrici che, nella loro essenzialità, sono legati all'infinito (numeri naturali, incommensurabilità ecc.).

La prova malebranchiana derivante dall'idea di infinito riveste, secondo Gerdil, un duplice valore: gnoseologico, in quanto riconoscimento di Dio come condizione assoluta di ogni possibilità di conoscenza, e metafisico, in quanto dimostrazione dell'esistenza di Dio [Fasciolo Bachelet 2001].

"*Per poco che riflettiamo sopra noi medesimi, conosceremo ad evidenza e senza poterne in niuna guisa dubitare, che noi abbiamo l'idea dell'Ente infinito, dell'Ente infinitamente perfetto. [...] Dunque l'idea che noi ne abbiamo prova egualmente che questo essere infinito esiste, e ch'egli è l'oggetto immediato del nostro spirito, quando noi il percepiamo* (5)".

Segue da questa premessa che il finito è percepito dall'intelletto come una limitazione dell'idea originaria di infinito, «perché – dice Gerdil – il finito non è finito che per la negazione dell'infinito».

Il problema che si pone allora Gerdil consiste nel sapere se noi conosciamo, oltre all'infinito "in potenza", anche quello "in atto". A tal proposito sottopone ad una analisi critica di carattere matematico sia l'infinito numerico che il continuo. Si domanda se lo spazio sia il risultato di una moltiplicazione ripetuta di spazi determinati, di cui abbiamo ricevuto l'idea dall'esperienza sensibile (opinione di Locke), o se invece non sia l'idea di una estensione senza limiti che sorpassa non solo quella che con i sensi abbiamo potuto percepire, ma anche quella che la nostra immaginazione può fissare, qualsiasi sforzo essa faccia per estendere uno spazio determinato che si concepisca sensibilmente. Ora l'esperienza personale dimostra, per Gerdil, la preesistente presenza in noi dello spazio infinito "in atto". Inoltre vi è anche un altro argomento: «che cioè ogni idea determinata di una qualunque estensione determinata, se viene aggiunta ad un'altra idea determinata d'un'altra estensione determinata, forma necessariamente un'idea determinata di una più grande estensione, ma sempre determinata», da tali idee determinate è quindi impossibile inferire l'infinito assoluto. Nel saggio *Della nozione dell'esteso geometrico e delle proprietà che ne risultano* (sez. 36,38) Gerdil asserisce che la divisibilità all'infinito dell'esteso geometrico non prova in alcun modo l'esistenza d'un numero attualmente infinito. Infatti un numero attualmente infinito deve constare d'infinite unità; ma l'unità non è applicabile se non a parti attualmente determinate e poiché ripugna che siano attualmente determinate le parti possibili in cui il continuo è all'infinito divisibile, non può essere l'unità attualmente loro applicabile e non ne può risultare un numero infinito.

In definitiva ci si allontana dall'infinito attuale sia aggiungendo parti a parti sia dividendo l'esteso.

Risulta allora ben chiara la posizione di Gerdil: finitezza nella realtà che ci circonda e nel tempo, infinito potenziale nei ragionamenti matematici, infinito assoluto in Dio e nella mente umana indipendentemente da sensazione ma anche da riflessione, solo come intuizione e illuminazione diretta da parte della divinità.

(4) Circa un secolo dopo Cauchy nelle sue *Sept leçons de physique générale* affermerà di condividere pienamente, da credente e da uomo di scienza, l'impianto della *Démonstration mathématique contre l'éternité de la matiére* di Gerdil, di cui riporterà un ampio passo e definirà l'illustre professore dell'Università di Torino come "*uno dei più profondi filosofi che abbiano prodotto i tempi moderni*" [Cauchy 1868, 26].

(5) Questa prova cartesiana dell'esistenza di Dio è tratta dalla *Défense du sentiment du Père Malebranche sur la nature, et l'origine des idées contre l'examen de M. Locke* [Gerdil 1845, Vol. II, 230].

Non solo la metafisica ma anche il modo in cui si formano le idee e la conoscenza, secondo Gerdil, può trarre giovamento da esempi provenienti dalla matematica. Così nelle *Osservazioni sul modo di spiegare gli atti intellettuali della mente umana per mezzo della sensibilità fisica* [Gerdil 1845, Vol.II, 21-63], per dimostrare al Locke (1632-1704) che non tutta la conoscenza trae origine dal mondo delle sensazioni, osserva che alcune idee che hanno un carattere di assoluto rigore e precisione e per le quali non è ammessa approssimazione debbono necessariamente derivare da facoltà mentali non riducibili al genere delle sensazioni che provengono dal mondo esterno. Tali sono le idee precise dell'unità, dell'eguaglianza, dell'affermazione e della negazione e del rapporto di quantità: questo si può constatare, secondo Gerdil, con esempi tratti dalla geometria. Afferma infatti: se un geometra ha sotto gli occhi una figura che rappresenta una retta perpendicolare ad un'altra, descritte entrambe con matita o con inchiostro, saprà distinguere ciò che è oggetto della sensazione e ciò che è oggetto d'intelligenza. E se due uomini diversi guardano la stessa figura non possono essere certi che la sensazione dell'uno corrisponda esattamente alla sensazione dell'altro e neppure potranno affermare che gli angoli che le rette formano siano assolutamente eguali: però con un atto d'intelligenza (quale ad esempio una dimostrazione) concordano sulla loro eguaglianza. Gerdil propone anche come esempio un quadrato: l'eguaglianza dei triangoli formati dalla diagonale è da tutti intesa in modo rigoroso, senza le approssimazioni che sono proprie delle sensazioni. Allo stesso modo la difficoltà nella quadratura del cerchio non è legata alla sensazione che sia impossibile la costruzione fisica di un quadrato equivalente ad un dato cerchio, ma è una difficoltà di carattere esclusivamente intellettuale. Infatti, comunque si costruisca, a partire dal raggio e con l'uso esclusivo di riga e compasso, un poligono equivalente ad un dato cerchio, con il ragionamento si vedrà che tale impresa è impossibile e resta sempre una differenza che può essere resa arbitrariamente piccola ma mai nulla. Anche cogliere le relazioni tra gli oggetti che ci circondano, ad esempio constatare che due colonne sono eguali, è una capacità umana che non è strettamente riducibile all'esperienza stessa.

Gerdil ritiene comunque che certe idee semplici provengano dalle sensazioni. Nell'*Eclaircissement sur ce que la théorie des incommensurables semble offrir de plus misterieux* [Gerdil 1845, vol. II, 609 e seguenti], continuando e riprendendo argomentazioni presenti anche nell'*Eclaircissement sur la notion et la divisibilité de l'étendu geometrique*, egli si pone preliminarmente il problema di come riguardare gli oggetti di cui la geometria si occupa. Seguiamo il suo ragionamento:

> "*Il metodo più seguito in geometria è di passare dai punti alle linee, dalle linee alle superfici e dalle superfici ai solidi: e questo metodo, sia per forza d'abitudine, sia per la natura stessa del soggetto, sembra il più naturale, il più semplice, il più agevole. Tuttavia bisogna dire che questo modo di procedere, anche se senza dubbio il più conveniente e vantaggioso per il progresso di questa scienza, non sembra essere quello più conforme all'ordine ed allo sviluppo delle nostre concezioni. Ed in effetti se è vero che, come tutti convengono, le idee più semplici sono quelle che lo spirito raccoglie immediatamente tramite le sensazioni ... non si potrà che convenire che l'idea di solido sia più semplice di quelle di superficie, linea, punto*".

Conclusione interessante da un punto di vista didattico, oltre che gnoseologico! Gerdil prosegue: spogliando un blocco di marmo di tutte le altre qualità sensibili con cui impressiona la vista e il tatto e considerandone la sola estensione, si avrà l'idea del solido geometrico, che entra tutta formata nello spirito e si ricollega al primitivo modo con cui apprendiamo a vedere gli oggetti nell'infanzia. Acclarato quindi che la nozione di estensione sia una nozione primitiva acquisita tramite la sensazione vediamo come a partire da essa si formano le altre idee. Un solido geometrico, come ad esempio il cubo, può essere suddiviso con il pensiero seguendo due procedure diverse: lo spirito può prima pensarlo diviso in due parti e poi ancora può pensare tali due parti divise di nuovo ognuna in due e così ancora indefinitamente, si otterranno sempre ad ogni passo oggetti della stessa natura del cubo originario, per quanto il processo sia avanzato. É così negata la possibilità di pervenire agli indivisibili di Cavalieri.

Un altro modo per suddividere il cubo è di considerarlo da punti di vista diversi: se ne può considerare la lunghezza senza riguardo alla larghezza e alla profondità, ottenendo la linea, oppure la lunghezza e la larghezza senza riguardo alla profondità ottenendo la superficie. E il termine dove lo spirito concepisce che la linea finisce ci dà l'idea del punto. Così, dice Gerdil, lo spirito forma le nozioni di linea, punto, superficie, conformemente alle definizioni dei geometri, ottenendo parti che non sono integranti o reali, come avviene nella prima procedura, ma attributi astratti e metafisici, che sono però idee reali.

Diversamente dal filosofo, matematico e vescovo Berkeley che in Inghilterra aveva condotto una critica spietata al nuovo calcolo [Berkeley 1734], sulla base delle effettive lacune di carattere logico di questo, Gerdil affronta la questione in modo molto pacato, non è contrario al calcolo, anzi ne è un sostenitore, e ne discute i termini e le obiettive difficoltà entrando nel vivo di alcuni degli argomenti principali che erano stati materia di riflessione da parte dei matematici di quegli anni e cercando di dimostrare, di volta in volta, il principio logico dichiarato nell'*Essai d'une démonstration mathématique de l'existence de Dieu*: "*la supposition de l'infini actuel dans la quantité, implique contradition*". Ma, diversamente da Berkeley che non poteva conoscerla, trova nella appena nata teoria dei limiti proposta da d'Alembert una soluzione del problema.

L'opera di Gerdil e il problema dei fondamenti del calcolo

È fondamentale per la comprensione del seguito tenere presente l'affinità del pensiero di Gerdil con quello di Malebranche, sia per le sue idee filosofiche che per le sue opinioni circa il calcolo: relativamente alle prime, nel 1748 Gerdil aveva scritto la *Défense du sentiment du Père Malebranche sur la nature, et l'origine des idées contre l'examen de M. Locke,* dove aveva confutato la filosofia di Locke secondo la quale tutta la conoscenza avviene tramite i sensi (filosofia, si tenga presente, seguita da d'Alembert e dagli enciclopedisti) e, con forte influsso platonico-agostiniano, aveva svolto la teoria malebranchiana delle idee come presentate all'anima direttamente da Dio, senza intermediazione del corpo con l'esterno.

Padre Malebranche, filosofo e scienziato, appartenente all'Oratorio di Gesù e Maria in Francia, aveva incontrato Leibniz, con cui condivideva una sostanziale identità di vedute, durante il soggiorno di quest'ultimo a Parigi ed era stato da lui introdotto alla teoria degli infinitesimi. Così i leibniziani dal 1690 godevano del suo appoggio: gli oratoriani si preoccupavano di far circolare le opere di Leibniz e dei suoi seguaci e nel contempo, come loro abitudine, producevano essi stessi testi di carattere pedagogico [6] dove, accanto alle tradizionali e consolidate conoscenze, anche le nuove teorie del neonato calcolo trovavano posto. La notorietà di Malebranche ebbe una notevole influenza nel contrastare l'opposizione alla teoria degli infinitesimi di Leibniz sorta in seno all'Accademia delle Scienze di Parigi nel 1700. A capo del partito degli oppositori ci fu Michel Rolle (1652-1719); nella sua memoria pubblicata dalla stessa Accademia delle Scienze nel 1703, *Du nouveau système de l'infini*, egli sosteneva che l'uso degli infinitesimi non solo era teoricamente insostenibile in quanto privo di fondamento logico ma anche, nonostante gli apparenti successi, era suscettibile di confutazione con semplici paradossi e produceva errori: gli stessi risultati potevano essere ottenuti, e anche migliori, con l'uso dei metodi di Fermat e Hudde. Riguardo a Rolle, Gerdil nel *Mémoire de l'Infini Absolu consideré dans la Grandeur*, osserverà, con il tratto conciliante che lo contraddistingue, che non sbagliava nel far dipendere il calcolo dagli infinitesimi, ma sbagliava nel rifiutare il calcolo in quanto tale. Contro Rolle ed i suoi seguaci, i leibniziani combatterono strenuamente ad opera soprattutto di Johann Bernoulli, che sostenne che Rolle non aveva capito nulla del calcolo, e del sacerdote matematico Varignon che si avvaleva del prestigio indiscusso di Newton e sosteneva che i metodi infinitesimali potevano essere ricondotti alla geometria di Euclide.

Solo molti anni dopo Fontenelle, esponente del partito forte degli analisti, poteva affermare che la

(6) Ricordiamo che circa sessant'anni dopo Gerdil avrebbe provato il suo impegno pedagogico scrivendo la sua opera più nota: *Anti-Emile* ou *Réflexions sur la théorie et la pratique de l'éducation contre les principes de Mr. Rousseau* (1763), dove, in contrasto con le idee del Rousseau, avrebbe posto alla base dell'educazione dei giovani la natura politica e sociale dell'uomo e l'armoniosa comunicazione con la natura.

questione era ormai chiusa, proponendo nel 1727, nei suoi *Eléments de la géometrie de l'infini*, una teoria alquanto dogmatica, completamente astratta e tecnica, non influenzata da concezioni filosofiche o metafisiche, dove infiniti e infinitesimi attuali venivano introdotti e confrontati nei vari loro ordini, stabilendo una sorta di algebra dell'infinito.

D'Alembert nel suo articolo *Infini* dell'*Encyclopédie* riporta l'argomentazione di Fontenelle fatta all'inizio del suo trattato:

> "*Essendo la grandezza suscettibile di aumento senza fine ne segue che la si possa supporre realmente aumentata senza fine: perché sarebbe impossibile che la grandezza suscettibile di aumento senza fine si trovasse nelle stesse condizioni come se non fosse possibile di aumento senza fine. Ora se non fosse suscettibile di un aumento senza fine essa rimarrebbe sempre finita; dunque la proprietà essenziale che distingue la grandezza suscettibile di aumento senza fine dalla grandezza che non ne è suscettibile è che quest'ultima rimane sempre finita e non può mai essere supposta che finita; dunque la prima di queste due specie di grandezze può essere supposta attualmente* infinita ([7])."

D'Alembert risponde a questo argomento osservando che c'è un errore in esso e sta nel fatto che una grandezza non suscettibile di aumento non è semplicemente finita, ma non potrebbe mai superare una qualunque pre-assegnata grandezza, mentre la grandezza suscettibile di aumento senza fine rimane sempre finita ma può essere aumentata fino a superare una qualsiasi grandezza assegnata. Continua affermando che non esiste in natura una grandezza maggiore di qualunque grandezza assegnabile e pertanto tale idea la troviamo solo nel nostro spirito e non esiste in esso che per una specie di astrazione che proviene dal finito e dal limitato, e che quindi ha una connotazione assolutamente negativa, come del resto la parola infinito, non finito, prova ([8]).

Fontenelle non esprimeva una concezione completamente nuova e originale. Nel Seicento l'infinito attuale aveva avuto molti cultori tra i matematici, che, sulle orme dell'*Arithmetica infinitorum* di Wallis [Wallis 1656], se ne erano serviti felicemente, semplificando metodi antichi e anticipando nuove scoperte. Fontenelle, ad esempio, come Wallis, scrive ∞ per indicare l'ultimo termine della successione infinita 0, 1, 2, 3,...., calcola non solo potenze intere di ∞, come aveva fatto Wallis, ma anche potenze frazionarie, trascura potenze di ordine inferiore di ∞ rispetto a potenze di ordine maggiore; allo stesso modo di Wallis scrive un infinitesimo come $\frac{1}{\infty}$ e introduce una gerarchia di infinitesimi dedotta dalla precedente gerarchia degli infiniti; costruisce in tal modo un edificio più ardito che solido secondo il giudizio di alcuni successivi studiosi, tra cui Montucla, condiviso da Gerdil.

Comunque, con l'intervento sulla scena di Fontenelle, il calcolo infinitesimale era tra gli argomenti più dibattuti nell'ambito dell'Accademia delle Scienze di Parigi.

Le critiche all'opera di Fontenelle non tardarono infatti ad arrivare: in Francia, oltre a quelle già accennate di d'Alembert e Gerdil, va ricordata ad esempio la requisitoria contro l'infinito attuale che il naturalista e matematico francese Georges Louis Leclerc conte di Buffon (1707-1788) inserisce nella prefazione della traduzione francese del trattato *The Method of Fluxions and Infinite Series* di Newton [Newton 1740].

Anche in Inghilterra, dopo gli attacchi agli analisti da parte di Berkeley, il problema degli infiniti e degli infinitesimi era fortemente sentito. Non a caso nel saggio *Mémoire de l'Infini Absolu consideré dans la Grandeur*, a pagina 5, è riportata una nota dell'editore delle opere di Mac Laurin il quale, parlando del trattato sulle flussioni, osserva che in esso l'autore ha completamente eliminato termini quali infinito o infinitamente piccolo, divenuti familiari in matematica, ma che celano assurdità reali, e ha invece preferito attenersi agli *Elementi* di Euclide.

Informazioni sui primi anni del calcolo infinitesimale si possono trovare in [Boyer 1949]. Uno studio approfondito sul trattato *Nova Methodus pro Maximis et Minimis* di Leibniz si trova in [Dupont e Roero

([7]) Anche Gerdil, ad esempio nel saggio *Della nozione dell'esteso geometrico e delle proprietà che ne risultano*, riporta questo passo di Fontenelle.

([8]) Per Gerdil invece, come si è già detto, l'idea dell'infinito attuale proviene per emanazione diretta dello spirito o divinità, ed è il finito che è concepito per limitazione dell'infinito.

1991]. Il metodo delle flussioni è esposto nel *Tractatus de quadratura curvarum* (1676) e nel *Methodus fluxionum et serierum infinitarum* (1671) pubblicati in [Newton 1744]. Nel *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* [Newton 1687] Newton espone il metodo delle prime e ultime ragioni.

Il saggio "De l'infini absolu consideré dans la Grandeur"

Fondamentalmente è all'approccio di Fontenelle che, come già si è detto, Gerdil fermamente si oppone: egli infatti incomincia il suo saggio con la distinzione, risalente ad Aristotele, tra infinito potenziale e infinito in atto: una quantità è infinita (o infinitesima) attualmente se ha ricevuto tutti i suoi possibili accrescimenti (o rispettivamente tutte le sue possibili diminuzioni); è potenzialmente infinita (o infinitesima) se non c'è alcun termine che ne limiti l'accrescimento (o la diminuzione). Gerdil riporta la distinzione tra i due significati presente in Locke, che usa la parola *infinità* per denotare il primo e *infinito* per il secondo: Locke conclude che l'infinito in atto è impossibile a concepirsi, perché richiederebbe allo stesso tempo che una successione di accrescimenti non abbia mai fine e che pure essa possa pervenire al suo compimento. Allo stesso modo l'enciclopedista inglese Chambers (1680-1740) ([9]), seguendo i principi di Locke non esita a concludere che l'idea d'un numero infinito è insostenibile.


DE L' INFINI ABSOLU

Consideré dans la Grandeur

PAR LE

P. GERDIL BARNABITE.

Fig. 3. – Prima pagina del *Mémoire*

Gerdil passa poi a prendere le difese di Cavalieri: questo autore ha introdotto l'infinito in geometria, considerando le figure composte di un numero infinito di parti parallele tra loro, che sono gli ultimi termini di una decomposizione che se ne può fare, da lui detti *indivisibili*. Diversamente da Tacquet (1612-1660) secondo il quale [Tacquet 1651, 23-24] gli elementi di una linea devono essere linee e non punti, quelli di una superficie superfici e non linee e infine quelli di un solido solidi e non superfici, cioè una grandezza geometrica è composta solo da *homogenea* e non da *eterogenea*, e invece, concordemente con Antoine Deidier secondo il quale [Deidier 1740, XI] Cavalieri non ha mai preteso che i suoi punti fossero assolutamente indivisibili, che le linee non avessero larghezza, né le superfici alcuna profondità, Gerdil reputa l'opera di Cavalieri niente altro che una traduzione nel vocabolario della matematica allora in uso del metodo di esaustione di Archimede.

È qui il caso di ricordare che quando Gerdil nel saggio *Della nozione dell'esteso geometrico e delle proprietà che ne risultano* considera i segmenti come costitutivi di figure piane, abbraccia sostanzialmente il punto di vista di Tacquet, e li suppone rettangoli di cui una dimensione sia piccolissima, quasi una riproposizione dell'indivisibile di Torricelli, negando la possibilità di parti infinitesime o indivisibili. Il segmento considerato da Gerdil è da lui detto *retta elementare*. Esso è inteso come una quantità mentale che nasce dalla divisione del continuo in parti di larghezza piccolissima che conservano la natura del continuo da cui provengono. Vi è quindi una profonda differenza tra la *ligne rigourouse et abstraite*, qual è il segmento comunemente inteso e la *ligne élémentaire*, differenza che si estende alle curve e ai punti. Nell'*Eclaircissement sur ce que la théorie des incommensurables semble offrir de plus mysterieux* [Gerdil, 1845, vol. II, 639], opera di diversi anni successiva, Gerdil afferma che grazie a tale distinzione si può presentare una semplice soluzione del paradosso che meravigliò lo stesso Galilei: considerato il cilindro ABCD, generato dalla rotazione del rettangolo ABCD attorno all'asse minore EF, la semisfera DEC, il cono AFB, è ben noto che un piano parallello alla base del cilindro individuata dai punti A e B, determina due sezioni equivalenti del cono e del solido cavo, la scodella, rispettivamente un cerchio e una corona circolare. La meraviglia nasce dal fatto che, avvicinandosi il piano all'altra base del cilindro, la corona va a finire nell'orlo della scodella, la circonferenza di diametro DC, mentre il

([9]) Ephraim Chambers pubblicò a Londra nel 1728 la *Cyclopaedia or An Universal Dictionary of Arts and Sciences*.

cerchio finisce nel punto F, circonferenza e punto che debbono allora essere considerati ancora eguali. Afferma Gerdil che se l'orlo della scodella e il vertice F del cono sono considerati uno come una linea elementare, l'altro come un punto elementare, allora non c'è difficoltà a supporre che si conservi ancora per essi il rapporto di eguaglianza che sussiste per tutte le sezioni della scodella e del cono e il paradosso non sussiste. A tale riguardo Gerdil ha però un atteggiamento ondivago; ad esempio nello stesso saggio è detto a pagina 614: "*Le point est la limite de la ligne.*" ([10])

In generale Gerdil riguardo l'estensione e la natura degli enti geometrici è completamente in sintonia con Aristotele come egli stesso dichiara in più punti dell'*Eclaircissement sur la notion et la divisibilité de l'étendu geometrique*. Senza affrontare in modo sistematico la questione, ricordiamo ad esempio che per il grande filosofo greco una figura geometrica, in particolare un segmento, non è l'insieme dei suoi punti come si tende a ritenere nei tempi moderni:

> "*È impossibile che qualcosa di continuo risulti composto da indivisibili, ad esempio che una linea risulti composta da punti, se è vero che la linea è un continuo e il punto è un indivisibile. [...] Il continuo sarebbe divisibile in indivisibili [...]; ma in realtà nessun continuo è divisibile in cose prive di parti. [...] Ogni continuo è divisibile in parti che siano sempre divisibili* (Fisica, VI, 231a-b)."

Contro la teoria degli indivisibili proposta da Galileo, Gerdil si era già pronunciato ripetutamente qualche anno prima; ad esempio nel saggio *Della nozione dell'esteso geometrico e delle proprietà che ne risultano*, al n. 18, considera un rettangolo che ruota attorno ad un suo lato e afferma: non bisogna intendere che esso possa realmente formare un cilindro. Infatti sia *abcd* il rettangolo che ruota attorno al lato *ad*. Allora il punto *b* non potrebbe descrivere una circonferenza "*se non quando lasciasse impresso il vestigio di sé stesso da per tutto dove passa*" e quindi la circonferenza sarebbe costituita da tanti punti eguali a *b*. Ma il punto *e* che divide a metà la linea *ab* segna nel volgersi tanti punti distinti quanti ne segna *b*. Dunque anche supponendo infiniti codesti punti infinitamente piccoli, essendo anche le due infinità eguali e i punti parimenti eguali, dovrebbe la circonferenza descritta da *e* essere eguale a quella descritta da *b*. "*Ciò dimostra apertamente, contro Galileo, il continuo non potere essere composto da indivisibili*". Ovviamente nel suo ragionamento Gerdil non tiene conto che nella teoria di Cavalieri non si possono confrontare indivisibili in figure qualsiasi (come è puntualizzato molto bene in [Torricelli 1919].

La conclusione è: "*Insomma se un arco qualunque di un cerchio concentrico è composto di punti indivisibili gli uni presso gli altri, quei punti posti anche gli uni presso gli altri nella circonferenza di doppio diametro, dovranno solo formare in esso la metà dell'arco omologo; e se debbono essere sparsi in tutto l'arco omologo, debbono lasciare altrettante interruzioni: ma codeste interruzioni sono anch'esse estese, e pertanto fanno parte della detta circonferenza continua; dunque una superficie non può essere propriamente formata, ma solo misurata col pensiero della rivoluzione d'una linea*". Quindi la possibilità di ottenere un solido o una superficie per rotazione è esclusivamente un mezzo opportunistico per determinarne la misura: d'Alembert, dopo aver letto il saggio, nella lettera dell'ottobre 1755 dissentirà espressamente su questo punto. Scriverà infatti in tale lettera: "*Non io vorrei assicurare, così fermamente come voi fate che una superficie non possa generare un solido; di fatti supposto un cubo verbigrazia, il quale si muova dal basso in alto, a me pare evidente che la superficie superiore di questo cubo descriverà un parallelepipedo.*" In una nota Gerdil chiarirà il suo pensiero: "*Convien dire che non mi fossi spiegato bastantemente in quel passo. .... Volli soltanto dire che se noi concepiamo delle superficie senza profondità, accumulate le une sulle altre, coteste superficie non potranno mai formare un solido; a quel modo che noi concepiamo come il flusso di un punto descrive o determina una linea sopra una data superficie, né però deve inferirsi da questo che la linea sia composta di punti indivisi-*

([10]) Identica definizione troviamo nell' *Eclaircissement sur la notion et la divisibilité de l'étendue geometrique, Def. IV.)* definizione molto simile a quella che dà Aristotele: *I punti sono limiti delle grandezze* (Metafisica, V, 1092 b 9-10).

bili collocati l'uno sopra l'altro". E ancora nel n. 20 dello stesso saggio Gerdil considera il caso, sostanzialmente equivalente a quello precedente, di due circonferenze concentriche, delle quali una abbia raggio finito, l'altra infinitesimo, concludendo "*se la somma degli indivisibili nella prima circonferenza, perché infiniti, forma una circonferenza finita, essendo eguale codesta somma nell'altra circonferenza, dovrebbe formare altresì una circonferenza finita, e non infinitamente piccola secondo la supposizione*". Si tratta della situazione limite di quella descritta nel caso delle due circonferenze concentriche in [Torricelli 1919], a cui possiamo applicare la stessa critica di Torricelli che cioè gli indivisibili (e nel caso in esame si tratta di indivisibili curvi) non sono tutti eguali.

Successivamente, nell'*Eclaircissement sur ce que la théorie des incommensurables semble offrir de plus misterieux*, Gerdil si renderà conto dell'importanza che ha la giacitura nella teoria degli indivisibili. In tale saggio Gerdil riprende infatti un argomento impropriamente usato contro tale teoria e ne fornisce una giustificazione servendosi della nozione di linea elementare. Si consideri un rombo e per ogni punto di un lato si conduca un segmento parallelo ed uguale al lato consecutivo. Tutti i segmenti così ottenuti riempiono il rombo. Si consideri ora il caso che invece che obliquamente per ogni punto di un lato si tracci un segmento eguale perpendicolarmente al lato: la totalità di tutti i segmenti in questo caso costituisce ora un quadrato di lato eguale al lato del rombo. I segmenti sono nei due casi di eguale lunghezza e sono tanti nel primo caso quanti nel secondo: allora rombo e quadrato dovrebbero avere la stessa area, ma non è così. Gerdil osserva che se le linee del quadrato non sono astratte e rigorose, ma linee elementari cioè rettangoli, si capisce che quelli obliqui si poggiano su un segmento più largo di quelli perpendicolari, quindi in definitiva ce ne sono meno nel rombo che nel quadrato, la qual cosa spiega perché il quadrato abbia area maggiore del rombo.

Ritorniamo all'*Infini absolu consideré dans la Grandeur* e ricordiamo che, a proposito degli indivisibili, Gerdil cita direttamente d'Alembert, che all'articolo *Différentiel* dell'*Encyclopédie* afferma che l'ipotesi che si è soliti fare nel calcolo di grandezze infinitamente piccole ha il solo scopo di abbreviare e semplificare i ragionamenti, essendo di fatto essi riconducibili, in base alla metafisica che d'Alembert esamina in profondità, a niente altro che a limiti di quantità finite.

Gerdil riporta, concordando, l'osservazione dell'enciclopedista francese secondo la quale gli stessi geometri partigiani del calcolo differenziale lo hanno danneggiato, alcuni perché non l'hanno ben capito e altri perché l'hanno male spiegato rendendo possibile un movimento di detrattori. Afferma Gerdil che lo stesso Leibniz, resosi conto delle obiezioni che si potevano portare contro gli infinitesimi, arrivò ad ipotizzare la teoria degli *incomparabili* [Leibniz 1689] ([11]), secondo la quale gli infinitesimi vanno intesi come quantità piccolissime rispetto alle altre grandezze in gioco, così ad esempio la terra si può ritenere un punto ed il diametro della terra una linea infinitamente piccola rispetto al cielo, ipotesi che è ineccepibile teoricamente, ma che porta di conseguenza risultati approssimati, contro la richiesta del rigore matematico.

Assunto come principio fondamentale che l'impossibilità dell'infinito attuale nella quantità sia una verità suscettibile di dimostrazione, Gerdil mette alla prova tale principio affrontando una ad una un certo numero di questioni matematiche: la conclusione è che l'uso dell'infinito e dell'infinitesimo attuale può essere evitato mediante il concetto di limite e ha solo funzione di semplificazione del calcolo. I vari punti sono intitolati da Gerdil con il nome di *prove*: la prima, la seconda, etc. fino alla settima e ultima.

PRIMA PROVA

formazione della successione dei numeri naturali

Tramite questa prova Gerdil intende dimostrare che non ha senso considerare un numero naturale infi-

([11]) Leibniz usa le seguenti parole: "*Se non si vogliono accettare quantità infinitamente piccole, si possono considerare quantità tali da poter essere considerate incomparabili e che producano un errore di piccolissima entità, minore di ogni dato piccolo valore. Così come la terra si può ritenere un punto e il diametro della terra una linea infinitamente piccola rispetto al cielo, allo stesso modo si può dimostrare che se (in un triangolo) ad un angolo si oppone una base incomparabilmente minore degli altri due lati, tale angolo sarà incomparabilmente minore di un angolo retto ....*"

nito, né i numeri naturali nella loro totalità. A tale scopo asserisce che le prove principali che egli userà non poggiano sull'idea dell'infinito considerato in sé stesso, ma su rapporti costanti tra quantità finite che, essendo essenziali alla successione naturale dei numeri, provano necessariamente che ogni numero possibile è finito. Egli riprende qui e completa analoghe considerazioni che si trovano in *Essai d'une démonstration mathématique de l'existence de Dieu.*

La successione dei naturali deve godere delle proprietà seguenti:

1. un insieme qualunque di termini e di unità fa parte della successione naturale dei numeri;
2. ogni naturale possibile entra nella successione naturale e ne fa parte;
3. la successione naturale è formata mediante l'aggiunta continua di unità a unità;
4. ogni numero che ne segue un altro non può sorpassarlo che per un'unità;
5. ogni numero che ha un rapporto finito con un numero finito è necessariamente finito.

Sulla base di questi principi la successione dei numeri naturali può essere aumentata all'infinito, mediante addizione continua di unità a unità in modo che, comunque sia assegnato un numero, se ne potrà sempre trovare uno più grande. Questa proposizione, poi, non ha bisogno di prove, poiché è un assioma di Euclide ([12]).

È interessante osservare come Gerdil imposti una dimostrazione per affermare che ogni numero possibile è finito: "*consideriamo infatti un qualsiasi numero grande: esso sarà finito e potrà essere aumentato; il numero successivo non lo potrà superare che di una unità e, pertanto, avrà rapporto finito con esso e sarà anch'esso finito. Poiché tale rapporto seguiterà per tutto il corso della successione naturale, ogni numero che si vorrà aggiungere sorpasserà il precedente solo di una unità e sarà quindi un numero finito. Ora non c'è nessun numero nella successione dei naturali a cui questo ragionamento non possa essere applicato, dunque ogni numero possibile è finito*".

L'infinito non è quindi un numero, ma può essere visto come un limite dell'aumento della grandezza, in maniera tale, specifica Gerdil, che tale limite non è mai raggiunto dalla grandezza, né può mai coincidere con essa. Si tenga presente che nella definizione di d'Alembert di limite data nell'omonimo articolo dell'*Encyclopédie* è detto espressamente che il limite non è mai raggiunto dalla grandezza, né può mai coincidere con essa. Precisamente la definizione nel caso finito è la seguente: "*On dit qu'une grandeur est la limite d'une autre grandeur, quand la seconde peut approcher de la première plus prés que d'une grandeur donnée, si petite qu'on la puisse supposer, sans pourtant que la grandeur qui approche puisse jamais surpasser la grandeur dont elle approche; en sorte que la différence d'une pareille quantité à sa limite est absolument inassignable.*"

La difficoltà di questa definizione sta nella sua generalità: essa s'intende, secondo la moda del tempo, applicabile a quantità di una medesima classe di grandezze omogenee, per le quali è definita la differenza, che nel caso specifico, si richiede sia inassegnabile, cioè, definizione nella definizione, sia una grandezza che non può mai superare una grandezza data comunque piccola la si possa immaginare.

Il difetto principale della definizione precedente consiste nel fatto che essa prescinde dal concetto di funzionalità. La variabilità è insita nel verbo "approcher", ma non è specificata la dipendenza da una variabile indipendente e non è colto il gioco della variabilità in funzione di questa.

Per quanto riguarda Gerdil, sebbene anche alla sua trattazione si possa fare la critica precedente, egli ha idee abbastanza chiare circa la nozione di limite sin dal suo saggio *Della nozione dell'esteso geometrico*, opera commentata e ammirata dal Journal de Savants, da d'Alembert e dall'astronomo francese Jean Jacques Mairan (1678-1771). In tale lavoro Gerdil espone alcune considerazioni molto sottili sul calcolo differenziale, che mutua sostanzialmente da Newton, traducendole nel linguaggio continentale.

([12]) A rigore la proprietà in questione segue o dalla definizione di ordinamento dei numeri naturali oppure, come fa Gerdil, dall'intuizione, per cui, per ogni naturale n, $n+1$ risulta maggiore di n. Il riferimento a Euclide [Elementi, libro V, def. IV] non è appropriato in quanto Euclide si riferisce a classi di grandezze omogenee continue. Ma Gerdil si riferisce a Euclide riveduto da Tacquet nella sua *Arithmeticae theoria et praxis.*

La valutazione della variabilità come elemento centrale nella discussione sui limiti è quindi presente ovunque in quest'opera. Ad esempio Gerdil sottolinea che quando in una curva "*un geometra suppone tra due ordinate una differenza infinitamente piccola, una tale differenza non è una quantità stabile, fissa e determinata ... ma una quantità in sé stessa indeterminata; e che può determinarsi minore e minore all'infinito; sicché venendo determinata qualunque data differenza, possa il geometra supporre il suo infinitamente piccolo minore, e minore indefinitamente*" [Gerdil 1845, vol II, 569].

Scrive poi: "*Bisogna ammettere nell'esteso geometrico un vero flusso: essendo cotesto esteso divisibile all'infinito, né avendo parti attualmente determinate, se ne possono sempre in quello determinare di minori e minori all'infinito. Una parte così determinata, ma che il geometra può sempre supporre minore di qualunque altra, si chiama infinitamente piccola. E così si dice non perché sia attualmente data, ma per la possibilità che v'ha di fare sempre cotesta parte interminatamente minore di qualunque attualmente assegnabile all'infinito*". In tal caso la variabile dipendente non è una grandezza numerica e si suppone ordinata in una successione infinitesima, cioè data in funzione dei naturali: da cui nasce il flusso non altrimenti specificato. Per il resto la definizione è simile a quella data precedentemente di differenza infinitamente piccola di due ordinate di una curva.

Come si vede siamo ad un passo dalla definizione di infinitesimo, come quantità variabile, in modo simile a quanto troveremo esposto nel *Cours d'Analyse* di Cauchy [Grabiner 1981]. Si intravede nelle parole usate la nozione intuitiva di funzione, non ancora chiarita ed espressamente chiamata in gioco a denotare la variabilità: è la nozione vagamente oscura designata spesso, come già del resto la esprime Newton, con la parola flusso. Gerdil fornisce subito un esempio in cui ha modo di collegare nella tendenza verso un limite la relazione che hanno le variabili dipendente e indipendente, senza esplicitare la distinzione dei ruoli. Si tratta della procedura per il calcolo della sottotangente alla parabola (di equazione $x = y^2$, che però Gerdil non indica): si suppone inizialmente che un tratto della parabola, attorno al punto in cui, alla maniera di Cartesio, è supposta già tracciata la tangente, coincida con la tangente, commettendo un errore tanto più piccolo quanto più piccolo è il tratto in cui la retta e la curva coincidono. Dice Gerdil: "*come la differenza infinitamente piccola di un'ordinata infinitamente prossima ad un'altra alla differenza infinitamente piccola delle ascisse corrispondenti, così questa ordinata alla sottotangente*". Vale la pena proseguire nella citazione: "*Ora l'eccesso infinitamente piccolo dell'ordinata infinitamente prossima all'altra non è già un mero nulla .... Ma se cotesta differenza fosse una quantità reale determinata in sé stessa .... sarebbe altresì determinato l'errore nella maniera di determinare per via di quel metodo la sottotangente, né potrebbe cotesto errore sminuirsi ... Ma se quella differenza si considera non già come una quantità determinata in sé stessa, ma come una quantità indeterminata, che per essere divisibile all'infinito, può sminuirsi all'infinito, potrà con ragione l'analista supporre il suo errore sempre minore all'infinito di qualunque si volesse assegnare, e finalmente considerando il rapporto, che è come il limite a cui le ordinate accostandosi sempre all'infinito dovrebbero arrivare,...egli osserva che quel rapporto sarebbe la somiglianza dei triangoli. Non è dunque che si arrivi mai a codesta somiglianza dei triangoli supponendo il corso all'infinito di una ordinata verso l'altra; ma veggendo, che con un tal corso all'infinito si va accostando altresì all'infinito a quel limite di somiglianza*". Da queste considerazioni l'analista deduce che la sottotangente è doppia dell'ascissa [Gerdil 1845, vol II, 570].

Ritorniamo alla definizione di d'Alembert. Un'obiezione secondaria riguarda l'uso del verbo *surpasser*, che fa pensare che la grandezza approssimante debba essere minore della grandezza limite (fatto subito smentito dagli esempi addotti) e, come viene più volte ribadito, che il limite non possa essere mai raggiunto. Le considerazioni di Gerdil forniscono le possibili motivazioni alla base di una simile restrizione: infatti ad esempio nella suddivisione di una grandezza in parti minori di ogni grandezza assegnata, mai si perverrà, secondo Gerdil, allo zero che ne rappresenta il limite. Allo stesso modo, se si considerano i numeri naturali, se ne potranno aggiungere unità a unità indefinitamente, ma mai si perverrà all'infinito, che pure della successione è il limite.

Si presenta di fatto nella successione naturale una situazione simmetrica, ma inversa, a quella che si presenta nel caso di una curva e del suo asintoto: la curva si avvicina all'asintoto sempre di più "*de manière* (Gerdil riporta la definizione di d'Alembert nell'articolo *Asymptote* dell'*Encyclopédie*) *que la distance à cette courbe ne devient jamais zéro absolu, mais peut être trouvée plus petite qu'aucune grandeur donnée*".

A tale proposito Gerdil considera il caso particolare dell'iperbole e osserva che il suo comportamento rispetto all'asintoto non si deduce dall'idea di infinito, ma da un rapporto costante tra quantità finite, precisamente tra la potenza di questa curva e tutti i trapezi rettangoli formati da una porzione dell'asintoto e da due rette condotte dall'asintoto alla curva.

Riferendosi all'iperbole rappresentata nella Figura 4 di equazione $x^2 - y^2 = k^2, k > 0$, la proprietà è subito verificata osservando che il quadrato Q di area $x^2 - k^2$ (potenza dell'iperbole) è equivalente al doppio del trapezio rettangolo di basi k e x e altezza $x - k$. È immediato verificare che, se esistesse un punto in comune tra la curva e l'asintoto, tale proprietà diventerebbe impossibile perché la relazione suddetta si ridurrebbe all'uguaglianza $x^2 = x^2 - k^2$. Per giustificare che la curva e l'asintoto non hanno in comune il punto all'infinito Gerdil anziché utilizzare procedimenti che si basano sull'idea d'infinito e che potrebbero presentare dei lati oscuri preferisce subito utilizzare, con un'impostazione di carattere cartesiano, l'invariabilità di certi rapporti geometrici, metodo che, come lo stesso Gerdil afferma, spesso userà anche nel seguito.

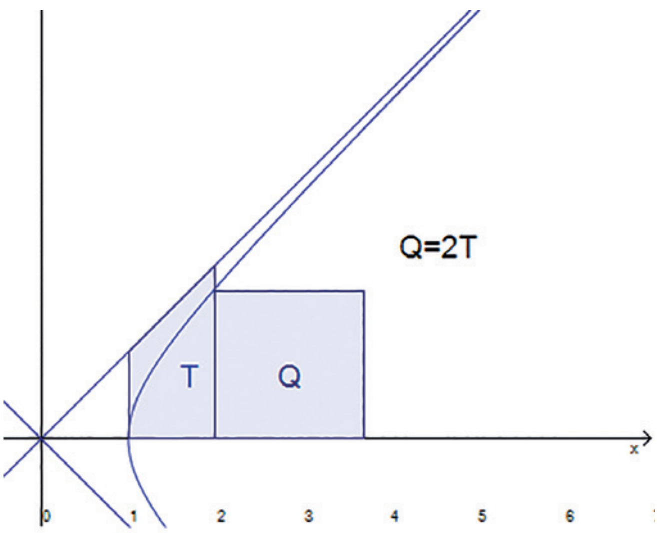

Fig. 4. – Una proprietà dell'iperbole

Quindi, tornando alla definizione di d'Alembert, la differenza tra curva e asintoto non diviene zero assoluto, ma tende al limite zero.

Bisogna osservare che Gerdil, oltre a negare l'esistenza di un ultimo numero naturale, non prende in considerazione la totalità dei numeri naturali come un insieme chiuso, così come avverrà negli anni 70 del secolo successivo ad opera di Cantor, ma come un insieme aperto cui continuamente si possono aggiungere nuovi elementi. Afferma infatti a pagina 23: "*Uno spirito ingiusto potrebbe ritenere che la successione dei numeri naturali non potrebbe crescere all'infinito se essa non esistesse già come un'infinità attuale di numeri. I numeri non si estraggono come le monete da una cassaforte, ma lo spirito forma la successione naturale per la potenza che ha di ripetere le sue idee e di aggiungere unità a unità*".

Gerdil spesso sembra rimproverare agli altri autori di non rendersi conto che criteri diversi vanno usati quando si passa dal finito all'infinito. È vicino in questo all'"*immortale Galileo*" (così citato a più riprese nella *Introduzione allo studio della religione* e in particolare contro i nuovi tolemaici), che, nella prima giornata dei *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze*, osserva con meraviglia che i quadrati dei numeri naturali sono solo una parte dei naturali stessi eppure sono tanti quanto questi. Si noti che il passo precedente è commentato da Gerdil nell'*Essai d'une démonstration mathématique de l'existence de Dieu* e trasformato in una dimostrazione dell'impossibilità dell'infinito attuale [Gerdil 1845, vol II, 356]. Ma, contrariamente a Gerdil, Galileo è sostenitore della teoria degli indivisibili, che è strettamente legata all'ammissione dell'infinito attuale, pur con consapevolezza della complessità dei problemi connessi. Infatti dice, per bocca di Salviati: "*ricordiamoci che siamo tra gli infiniti e gli indivisibili, quelli incomprensibili dal nostro intelletto finito per la loro grandezza, questi per la loro piccolezza*".

Altre volte Gerdil, con lo scopo di pervenire a risultati paradossali, imita le argomentazioni spericolate del Fontenelle, che nel suo trattato aveva spesso trasportato proprietà valide nel caso finito all'infinito: ad esempio dimostra che, a differenza delle successioni finite, nella successione naturale non può esservi ultimo termine, ∞, perché non c'è il termine che precede ∞; infatti se $\infty - 1$ fosse finito, allora il suo successore dovrebbe parimenti esserlo, se invece fosse infinito non sarebbe più passibile di ulteriori accrescimenti. Questa è un'altra prova che non esiste un ultimo numero naturale. Il discorso è simile a quello fatto da Buffon: "*Ma si potrà dire: l'ultimo termine della successione naturale 1, 2, 3... non è forse infinito? .... Sembra che i numeri alla fine debbano diventare infiniti poiché sono sempre suscettibili di aumento. Risponderò dicendo che questo aumento di cui sono suscettibili prova chiaramente che non possono essere infiniti. Aggiungo anche che in questa successione non esistono ultimi termini, e che supporre l'esistenza di un ultimo termine significherebbe distruggere l'essenza della successione che consiste in un susseguirsi di termini che possono essere seguiti da altri termini, e questi da altri ancora, tutti però della stessa natura dei precedenti, cioè tutti finiti e composti da unità. Così quando si pensa che una successione abbia un ultimo termine, e che questo termine sia infinito, si va contro la definizione di numero e la definizione generale di successione*" [Newton, 1740, IX e X].

Lo stesso Buffon aggiunge poi che la maggior parte degli errori nel campo della metafisica deriva dal fatto che si considera l'idea di privazione come una realtà; posizione espressa anche da d'Alembert nell'articolo *Infini* dell'*Encyclopédie.*

Sull'impossibilità di un massimo per la successione dei naturali Gerdil ritorna più volte; in un altro momento, per dimostrare che è assurdo considerare la successione $1, 2, 3, \cdots$ con ultimo termine ∞, asserisce che poiché ogni volta che abbiamo una successione (finita): $1, 2, 3, \cdots, m$ la somma $1 + m$ è uguale alla somma $n + n + 1$ dei due termini intermedi (a rigore, se m è dispari $1 + m$ è uguale al doppio del termine intermedio), allora deve esistere n tale che $1 + \infty = n + n + 1$, da cui deduce $2n = \infty$, cioè $n = \frac{\infty}{2}$, valore senza dubbio infinito; iterando il precedente ragionamento si otterrebbe l'esistenza di un $x = \frac{\infty}{4}$, ancora infinito; iterando indefinitamente si determinerebbe l'esistenza di una successione

$$\frac{\infty}{2}, \frac{\infty}{4}, \frac{\infty}{8}, \cdots, \frac{\infty}{\infty} = 1.$$

Quindi, asserisce Gerdil, discendendo dall'infinito assoluto per tutti i gradi della successione naturale fino all'unità si perverrebbe all'assurdo di termini tutti infiniti, tranne l'unità.

Anche Galileo, dopo le osservazioni sulla successione dei quadrati dei numeri naturali, fa un esempio che suscita meraviglia più che chiarire la sua idea e costituisce un paradosso sul tipo di quelli che Gerdil propone nella sua memoria: ha già dimostrato che i quadrati son tanti quanti i numeri e così i cubi e qualsiasi altra potenza. Ora quanto più alto è il grado tanto più rarefatte sono le potenze, pur restando sempre infinite, perché tante quanti i numeri. Eppure "*tanto più ci discostiamo dal numero infinito; dal che ne seguita che, tornando indietro (poiché tal progresso sempre più ci allontana dal termine ricercato), se numero alcuno può dirsi infinito, questo sia l'unità.*" Ed infatti l'unità è quadrato, è cubo, è quarta, quinta etc. potenza. "*E queste sono delle meraviglie che superano la capacità della nostra immaginazione, e che devriano farci accorti quanto gravemente si erri mentre altri voglia discorrere intorno a gl'infiniti con quei medesimi attributi che noi usiamo intorno a i finiti*" [Galilei 1990, 47].

SECONDA PROVA

non esistono in geometria punti all'infinito

Gerdil, riferendosi alla Figura 5 da lui stesso disegnata, ammette che una retta possa essere prolungata indefinitamente ma confuta la credenza di alcuni geometri che si possa trovare su di essa un punto che disti da un prefissato altro suo punto d'una distanza infinita.

Esegue a proposito un ragionamento che si può riassumere al seguente modo: se una retta AB passa per un punto all'infinito, sia esso B, allora una parallela

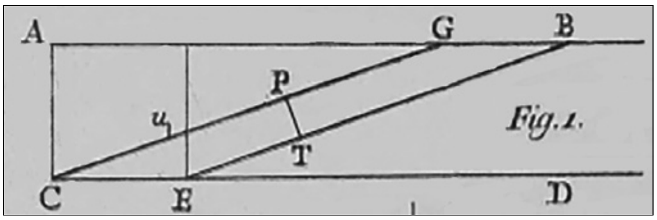

Fig. 5. – Impossibilità di un punto "all'infinito" comune a due rette parallele

ad essa, sia CD, passa per lo stesso punto all'infinito, contro l'ipotesi che le due rette AB e CD prolungate indefinitamente conservino il loro parallelismo.

Infatti, siano C ed E due punti della retta CD, si congiunga E con B e si tracci per C la parallela a EB, che incontra AB in un punto G, anch'esso a distanza infinita da A: ci sarà allora un parallelogramma $CGBE$ formato da due rette finite CE e GB e due infinite, CG e EB. Sul lato EB si tracci la perpendicolare TP che misura la distanza dei due lati CG, EB: allora o questa distanza può essere ancora diminuita o è assolutamente nulla. Se la distanza TP può essere diminuita, allora i punti B e G possono essere spostati indietro sulla retta AB, ma allora non sono più punti a distanza infinita da A. Quindi deve essere $TP = 0$: allora la retta CG deve coincidere con EB. Ora la retta CG non può coincidere con EB a meno che CG non coincida pure con CD. Infatti, se CG coincide con EB allora il punto u sulla retta CG di intersezione con la perpendicolare a CD passante per E viene a coincidere con E e, quindi, tutta la retta CG coincide con la retta CD. Quindi i punti G e B della retta AB devono trovarsi pure sulla retta CD, contro il supposto parallelismo. Il ragionamento ovviamente non è convincente, perché se $TP = 0$ allora i punti C ed E coincidono e, quindi, dall'essere CG coincidente con EB non segue che CG coincide con CD in quanto, in base al ragionamento fatto, non si può evincere che le due rette CG ed EB abbiano più di un punto in comune.

Gerdil osserva inoltre che l'espressione di alcuni geometri che ritengono che due parallele si incontrino all'infinito non è in contrasto con le sue idee; tale espressione va intesa nel senso che se due rette non possono incontrarsi se non a una distanza infinita, allora possono essere riguardate come parallele in quanto essendo infinitamente piccola la loro inclinazione reciproca, non può che essere nulla ([13]). Ma tale supposizione non implica che tali rette possano attualmente essere prolungate a una distanza infinita come prova il seguente esempio.

Si suppongano le due rette AC e BD tangenti alle due estremità del diametro AB di un cerchio O e quindi parallele. Se si suppone che queste due rette

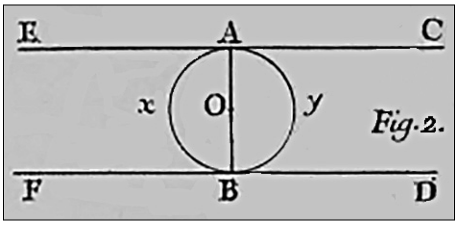

Fig. 6. – Due rette parallele non possono né convergere né divergere

prolungate ad una distanza assolutamente infinita nella direzione AC, BD debbano concorrere ad un punto infinitamente lontano dal diametro AB si dovrà supporre per la stessa ragione che prolungandole nella direzione opposta AE, BF esse dovranno presentare da quest'altro lato un allontanamento infinito. Detti x e y i due semipiani determinati dalla retta AB, si ha che AE e BF non possono concorrere dal lato x senza supporre un'inclinazione infinitamente piccola da tale lato, e non possono essere inclinate dal lato x a meno che non si divarichino dal lato y. E viceversa. Bisognerebbe quindi considerarle convergenti e divergenti allo stesso tempo, ciò che ripugna (Figura 6).

TERZA PROVA

proprietà della curva logaritmica

Gerdil chiama *curva logaritmica* il grafico della restrizione della funzione 2^x ai valori negativi di x. Confronta le ordinate dei punti di tale grafico, osservando che, dividendo l'asse delle ascisse in parti uguali tramite gli opposti dei numeri naturali, si forma la successione $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots$ delle ordinate, che è una progressione geometrica decrescente.

Gerdil ragiona riferendosi alla Figura 7 da lui stesso disegnata.

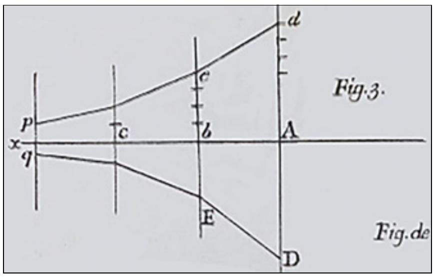

Fig. 7. – Il comportamento "all'infinito" della funzione esponenziale

([13]) È bene ricordare che nell' *Essai d'une démonstration mathématique*, Gerdil ribadisce che il nulla assoluto dell'inclinazione delle rette parallele esclude ogni inclinazione anche infinitamente piccola [Gerdil 1845, Vol. II, 356]

Ciò che Gerdil vuole dimostrare è che la *curva logaritmica* non può che incontrare l'asintoto ad una distanza assolutamente infinita, quindi, ribadendo quanto detto nella prova precedente, geometricamente non la incontrerà mai, non esistendo alcun punto sulla retta a distanza infinita da un suo punto al finito.

Lo dimostra nel seguente modo: se l'asse x potesse diventare tangente alla curva la frazione $\frac{1}{2^\infty}$ (simbolo usato dallo stesso Gerdil) dovrebbe essere uguale allo zero assoluto, o almeno dovrebbe essere un'entità infinitamente piccola incapace di una ulteriore decrescita, perché se, per assurdo, non fosse così, cioè se l'ordinata potesse ulteriormente diminuire, la sua distanza dall'asse x sarebbe comunque sempre positiva e quindi non ci sarebbe tangenza come supposto.

Ora le due ipotesi precedenti sono entrambe impossibili: infatti l'ordinata $\frac{1}{2^\infty}$ può essere ulteriormente e indefinitamente diminuita in quanto, d'accordo con quanto afferma d'Alembert nell'articolo *Différentiel* dell'Encyclopédie, supposta infinitesima del primo ordine può dare luogo a infinitesimi di secondo, terzo ordine e, in generale, di qualunque ordine.

Infatti, d'accordo con i matematici, una quantità attualmente infinita è una quantità che avendo ricevuto tutti gli accrescimenti finiti possibili, non può che riceverne infiniti: nello stesso modo le quantità infinitamente piccole non possono che essere diminuite dividendole per quantità infinite ottenendo infinitesimi di ordine superiore e, in conclusione, la frazione $\frac{1}{2^\infty}$ da un lato non può ovviamente considerarsi zero assoluto né, d'altro canto, per quanto detto, non può essere ancora diminuita.

Gerdil considera poi, nello stesso piano cartesiano, il grafico della funzione esponenziale -3^x e lo confronta con il precedente, disegnandolo e distinguendo le due curve. Ripete per tale curva le considerazioni precedenti e conclude: se le due *curve logaritmiche* parimenti dovessero essere tangenti al loro asse comune dovrebbe accadere che i due valori $\frac{1}{3^\infty}$ e $\frac{1}{2^\infty}$ coincidano e siano entrambi nulli e questo è assurdo.

Quindi il ragionamento di Gerdil è il seguente: pur considerando una *curva logaritmica* le cui ordinate sono più vicine all'asse x, il comportamento della curva riguardo alla tangenza con l'asse delle x non cambia.

In conclusione: non c'è alcun punto di contatto tra una *curva logaritmica* ed il suo asintoto; una siffatta curva e l'asintoto "s*i potrebbero incontrare se l'asse delle ascisse fosse infinito assolutamente, cioè se fosse composto da un numero attualmente infinito di parti*".

E perciò: "*un insieme composto da un numero attualmente infinito di termini è impossibile*".

QUARTA PROVA

non è vero che una curva dotata di asintoto lo incontri all'infinito

Con questa quarta prova vengono ulteriormente chiariti alcuni punti cui si è accennato nella precedente. Gerdil infatti ricorda che nel suo trattato sulle sezioni coniche de l'Hopital aveva asserito che nell'iperbole gli asintoti possono essere riguardati come delle tangenti che toccano l'iperbole nei loro punti estremi, all'infinito [de l'Hopital 1720, 108], ciò che sembra sottintendere la possibilità d'un infinito attuale. Ma nello stesso trattato l'autore afferma pure che l'iperbole e il suo asintoto essendo prolungati si avvicinano sempre di più in modo che la loro differenza diventa minore di qualunque quantità data e che però essi non si possono mai incontrare perché si incontrano solo all'infinito dove non si può mai arrivare ([14]).

Gerdil critica la prima delle due asserzioni di de l'Hopital secondo la quale l'asintoto diventa tangente alla curva nell'estremità cercando di portarla all'assurdo in svariate maniere. Egli sottolinea il fatto che esattamente della sua idea è Jean Baptiste de la Chapelle nel suo *Traité des sections coniques* [de la Chapelle 1750], dove anzi la questione è analizzata sottilmente dal seguente punto di vista ([15]): quando, dice de la Chapelle, per dimostrare l'eguaglianza di

([14]) In [de l'Hopital 1696, 55] viene usata l'espressione ripresa da Gerdil: "*l'on voit que l'Hyperbole ... et son asymptote ... (étant prolongées) s'approchent de plus en plus, de sorte qu'enfin leur distance devient moindre qu'aucune donnée; et que cependant elles ne se peuvent jamais rencontrer, puisqu'elles ne se joignent que dans l'infini où l'on ne peut jamais arriver.*"

([15]) Alla pagina 229 del *Traité* di de la Chapelle è spiegata l'etimologia greca della parola asintoto, letteralmente *senza incontro.*

due grandezze ci si serve del principio che due quantità sono eguali se la loro differenza è più piccola di qualunque grandezza data bisogna distinguere se il limite cui le grandezze tendono è al finito o all'infinito; nel primo caso ci sarà eguaglianza, perché si dimostrerà l'impossibilità di assegnare qualsiasi differenza, ma nel secondo caso, poiché il limite è a una distanza infinita è come se non ci fosse limite; dunque i termini di paragone mancano e il principio non ha più luogo e fidarsi di esso porterebbe alla conclusione contraddittoria che gli asintoti dell'iperbole non la possono mai incontrare e che ciò nondimeno l'incontrano (16).

Gerdil dimostra ancora le assurdità che derivano dall'ipotesi di tangenza, evidenziando che essa presuppone, da un lato, che l'iperbole abbia un'estremità e, dall'altro, che sia attualmente infinita. È possibile? Ma, osserva Gerdil, questo è ancora un argomento metafisico. Usa allora un argomento strettamente matematico: è ben noto (17), asserisce, che il segmento di tangente all'iperbole compreso tra gli asintoti è diviso a metà dal punto di tangenza.

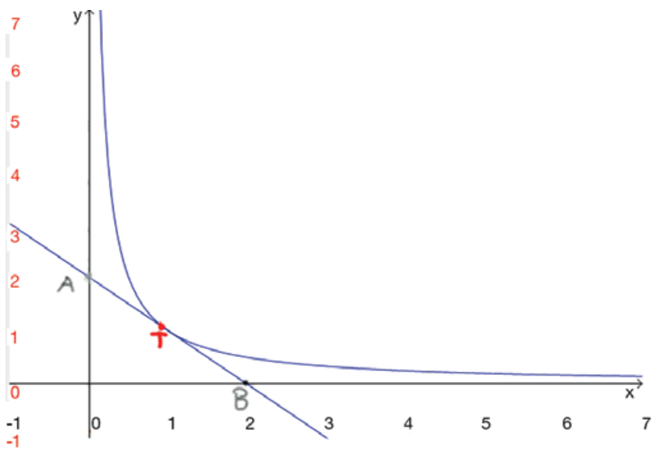

Fig. 8. – Proprietà della tangente

(16) Nel Primo Libro di [Newton 1687] il Lemma I recita: "*Quantitates ut et quantitatum rationes, quae ad aequalitatem tempore quovis finito constanter tendunt, et ante finem temporis illius propius ad invicem accedunt quam pro data quavis differentia, fiunt ultimo aequales*". É il principio cui forse si riferisce de la Chapelle.

(17) Gerdil ha fatto riferimento per questa e la seguente proprietà dell'iperbole oltre che al trattato del de la Chapelle, dove sono esposte alla pagina 235, anche al fondamentale trattato di de l'Hopital [de l'Hopital 1720]. Si tratta di proprietà che si dimostrano semplicemente con la geometria analitica.

E questo accade per ogni punto dell'iperbole. Ma allora l'asintoto divenuto tangente all'infinito dovrebbe parimenti essere diviso in due parti eguali dal punto di contatto. Quindi l'asintoto, dopo il punto di tangenza dovrebbe, abbandonata l'iperbole, prolungarsi ancora infinitamente al di là di questo in modo che la parte al di là sia eguale alla parte al di qua. Su questo punto Gerdil sottilmente ironizza affermando che non è il caso di credere ch'egli voglia protestare contro la possibilità di un infinito doppio di un altro infinito. Egli intende invece sottolineare la difficoltà che nasce dall'ipotesi di tangenza, contraria alla natura dell'iperbole, come ci si rende conto immaginandola come intersezione di un cono, per

Qui ripercorriamo la dimostrazione geometrica svolta nel trattato di de l'Hopital. La Proposizione IV del Libro Terzo, pagina 53 recita: "*Se si tracciano per due punti qualunque M e N di un'iperbole due rette Hh e Ll parallele tra loro e delimitate dagli asintoti, allora i rettangoli $HM \cdot Mh$ e $LN \cdot Nl$ saranno eguali fra loro*". Per la dimostrazione di questo teorema de l'Hopital fa uso di una proprietà di semplice verifica (art. 91, pag.52) di cui non riportiamo la dimostrazione e precisamente che se da un punto M dell'iperbole si traccia la perpendicolare all'asse principale, dette R e r le intersezioni di tale perpendicolare con gli asintoti, il prodotto $RM \cdot Mr$ è costante al variare di M sull'iperbole. Dimostriamo ora la Proposizione IV come fa de l'Hopital. Tracciate per i punti M e N le perpendicolari Rr e Kk all'asse principale, è chiaro che i triangoli MRH, NKL e Mrh, Nkl sono simili avendo i lati corrispondenti paralleli. Quindi:

$RM : KN = HM : LN$ e $Nk : Mr = Nl : Mh$. Ma abbiamo appena osservato che $RM \cdot Mr = KN \cdot Nk$ ossia $RM : KN = Nk : Mr$.

Confrontando con le precedenti relazioni si ricava $HM : LN = Nl : Mh$, cioè $HM \cdot Mh = LN \cdot Nl$ c.v.d.

Una conseguenza è il Corollario II, pagina 53: "*Se si traccia per un punto qualunque N di un'iperbole una retta che incontra gli asintoti nei punti L e l e l'iperbole in un altro punto n, allora le parti NL e nl di tale retta comprese tra i punti dell'iperbole e le intersezioni con gli asintoti saranno eguali tra loro*".

Infatti per la Proposizione precedente applicata ai due punti N e n si ha $Nl \cdot LN = nl \cdot Ln$, da cui $Nl : nl = Ln : LN$; sottraendo si ricava da quest'ultima proporzione $(Nl-nl) : nl = (Ln-LN) : LN$ e quindi, tenendo presente che $Nl-nl = Ln-LN=Nn$, si trae la richiesta eguaglianza $nl = LN$.

La conseguenza immediata del Corollario II è enunciata solo molto dopo, Proposizione XXIII del Libro Sesto, pag. 177: "*Se una linea retta FG delimitata dagli asintoti di una iperbole le è tangente in un punto A, essa è divisa a metà da A*".

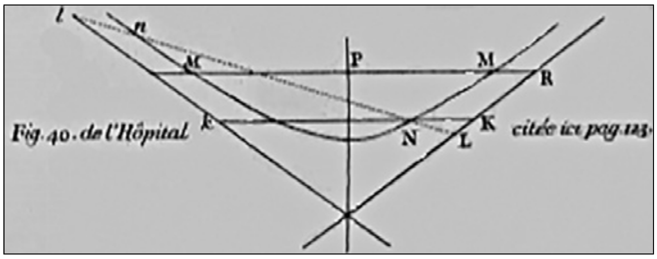

Fig. 9. – Proprietà della secante

cui si vede subito che essa e il suo asintoto debbono egualmente estendersi.

Per provare ancora l'assurdità della concezione dell'asintoto come tangente all'infinito all'iperbole, Gerdil riprende un'argomentazione basata su una proprietà che è una generalizzazione della precedente proprietà delle tangenti all'iperbole. La proprietà è la seguente: considerata un'iperbole e una secante che intersechi gli asintoti nei punti L e l e l'iperbole nei punti N e n allora risulta: $ln = NL$, come evidenziato nella Figura 9.

Asserisce Gerdil che, poiché la precedente proprietà è verificata comunque si considerino i due punti sull'iperbole, se si prende il punto N sulla curva vicino alla sommità e la linea Ll in modo che vada a finire nel punto di contatto infinito, dovrà ancora essere $ln = NL$, contro l'idea di contatto. E aggiunge: si potrebbe evitare la difficoltà dicendo che nell'estremità ln coincide sia con la curva che con l'asintoto, ma allora la curva dovrebbe coincidere con l'asintoto, ciò che è assurdo.

A questa prova fu aggiunta una nota di Lagrange [Grabiner 1981, 38] che riferisce del metodo per la ricerca degli asintoti consistente nel determinare in un primo momento tutte le tangenti alla curva nei suoi vari punti e nel far tendere poi all'infinito il punto di tangenza. Afferma Lagrange che in tal modo il calcolo corregge l'errore, che consiste nel supporre che l'asintoto sia una tangente, con un passaggio al limite, per cui poi l'asintoto non è più una tangente, ma il limite di tangenti e la conclusione è un risultato corretto. Lo stesso avviene, generalmente, afferma Lagrange, nel calcolo infinitesimale, quando ad esempio Leibniz considera la curva come costituita da infiniti segmenti infinitesimi e la tangente come il prolungamento di uno siffatto di tali segmenti: in tal modo ci si trova in presenza di una secante e non di una tangente, ma nel calcolo l'errore infinitesimo che si commette è compensato da un altro errore che consiste nel trascurare quantità infinitesime. Più rigoroso è il calcolo di Newton: egli considera che una secante diventa tangente solo se i due punti vengono a coincidere e vengono considerate evanescenti le quantità di cui si ricercano le prime e ultime ragioni. La maggiore semplicità del calcolo fa però preferire il primo al secondo metodo.

QUINTA PROVA

successioni crescenti indefinitamente e regole vere al finito ma non all'infinito

Gerdil cerca di giustificare relazioni del tipo $1+1+1+\cdots=\infty$, sostanzialmente come relazioni di limite e non, come alcuni credono, perché a primo membro dell'eguaglianza precedente compare una quantità che ha preso tutti gli accrescimenti possibili. Al riguardo riporta le idee dell'abate Deidier: questo autore ritiene che si possa calcolare l'andamento delle progressioni infinite crescenti allo stesso modo delle decrescenti e ne calcola i valori infiniti, senza però svelare le ipotesi su cui basa i ragionamenti. Così $1+2+3+4+\cdots=\dfrac{\infty^2}{2}$, la somma di un'infinità di quadrati di termini consecutivi è $\dfrac{\infty^3}{3}$, la somma di un'infinità di cubi di termini consecutivi è $\dfrac{\infty^4}{4}$ e così via.

Gerdil ritiene che questi calcoli abbiano una loro utilità e quindi cerca di darne una spiegazione in termini di limite. Calcola la somma dei quadrati dei numeri da a a μ utilizzando la formula già nota:

$$(a+1)^2+(a+2)^2+\cdots+\mu^2=\left(1+2^2+\cdots+\mu^2\right)-$$

$$-\left(1+2^2+\cdots+a^2\right)=\frac{\mu^3}{3}+\frac{\mu^2}{2}+\frac{\mu}{6}-\left(\frac{a^3}{3}+\frac{a^2}{2}+\frac{a}{6}\right).$$

La formula è vera nel caso di un numero finito di termini ([18]). Se ora μ è supposto infinito tutti i termini dopo il primo, nell'ultima somma, sono infinitamente piccoli rispetto al primo e ottiene pertanto il risultato $s^2=\dfrac{\infty^3}{3}$.

([18]) Ai fini di quanto segue Gerdil avrebbe potuto considerare solo la somma dei primi μ termini.

Gerdil giustifica accuratamente tale passaggio con una procedura al limite. Si tratta di rispondere alla domanda: perché nell'espressione $\infty^3 + \infty^2$ si può sopprimere ∞^2? Egli afferma, se ∞^3 e ∞^2 significassero un ultimo cubo o quadrato, la frazione $\frac{\infty^2}{\infty^3} = \frac{1}{\infty}$ non sarebbe più suscettibile di diminuzione e conseguentemente nell'espressione $\infty^3 + \infty^2$ si potrebbe trascurare ∞^2 ottenendo non un risultato esatto, ma solo approssimato. Se invece ∞^3 e ∞^2 sono figure, cioè simboli, che rappresentano piuttosto due successioni indeterminate, l'una di cubi e l'altra di quadrati , che si può sempre supporre grandi quanto si vuole in virtù della loro infinita progressione, allora la frazione $\frac{\infty^2}{\infty^3} = \frac{1}{\infty}$ è tanto piccola quanto si vuole perché rappresenta a sua volta una successione indeterminata, i cui termini positivi col procedere indefinitamente sono a loro volta minori di ogni grandezza prefissata. Non si può meglio esprimere il corso di queste possibili diminuzioni che eliminando i termini che ne limiterebbero la decrescenza senza fine, cioè ponendoli eguali a zero. Così l'eguaglianza $s^2 = \frac{\infty^3}{3}$ non deve essere riguardata come un'eguaglianza tra due quantità fisse, ma (dice Gerdil) come la "flussione" di due termini considerati in un corso infinito di accrescimenti, nel quale la differenza del loro rapporto dall'unità ([19]) può sempre essere dimostrata minore di una qualsiasi quantità data.

Nell'ultima parte della prova Gerdil discute animatamente, ampiamente e usando paragoni di carattere quasi poetico l'improponibilità di un ultimo termine d'una successione infinita. È un'illusione immaginare l'ultimo termine di una successione come un punto fisso posto a una distanza infinita, che lo spirito potrebbe raggiungere superando l'intervallo che lo separa da noi con operazioni moltiplicate all'infinito. Questo punto è invece un punto mobile che arretra come lo spirito avanza e si trova sempre ad una medesima distanza.

([19]) Sembra che così si possa correttamente tradurre il termine "*disproportion*".

SESTA PROVA

progressioni decrescenti indefinitamente e paradosso di Zenone

Gerdil considera la progressione geometrica decrescente di ragione $\frac{1}{2}$ e di primo termine 1:

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots$$

ottenuta considerando le lunghezze dei segmenti che si determinano dividendo successivamente a metà il segmento AB di lunghezza unitaria:

$$A\underline{\hspace{3cm}}C\underline{\hspace{1.5cm}}D\underline{\hspace{0.8cm}}E\underline{\hspace{0.4cm}}F\underline{\hspace{0.4cm}}B$$

Egli afferma, riferendosi alla figura da lui stesso disegnata (Figura 10) che, come concretamente (attualmente) la suddivisione del segmento non può essere portata a termine, così non può esistere un ultimo termine della progressione.

Infatti, se esistesse questo ultimo termine, "0", allora il rapporto tra "0" ed il suo antecedente dovrebbe essere $\frac{1}{2}$, ma ciò è palesemente assurdo perché è assurdo che il rapporto tra 0 ed una qualsiasi quantità finita sia $\frac{1}{2}$.

Ribadisce, quindi, che una progressione decrescente infinita si debba intendere come una successione che non finisce (infinito potenziale) e non una successione attualmente infinita con termini successivi dal primo all'ultimo che la completa.

Affermando la differenza sostanziale tra progressione geometrica finita e progressione geometrica infinita Gerdil osserva, a questo punto, che si potrebbe obiettare che il calcolo per ottenere la somma di una e dell'altra progressione è analogo. Inoltre il numero 0 nel calcolo della somma della progressione infinita ha lo stesso ruolo dell'ultimo termine nel calcolo della somma della progressione finita.

Sulla base degli *Elementi* di Euclide (proposizione 35, libro nono) Gerdil ricava la seguente formula

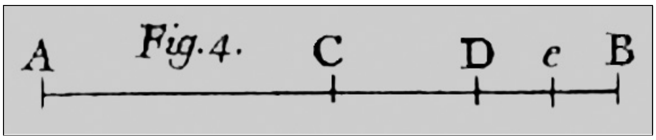

Fig. 10. – La dicotomia del segmento unitario

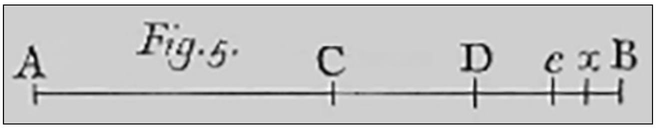

Fig. 11. – La situazione "assurda" della dicotomia del segmento unitario con un "ultimo" intervallo di ampiezza positiva

per la somma dei termini di una progressione geometrica finita:

$$1 + a + a^2 + a^3 + \cdots + a^n = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a}$$

ed afferma che per calcolare la somma di una progressione infinita (S) si può ragionare in modo simile: "*come il primo termine meno il secondo sta al secondo così il primo sta alla somma di tutti quelli che lo seguono*" ([20]):

$$(1 - a) : a = (1 - 0) : (S - 1)$$

Quindi la somma della progressione geometrica di ragione a e di primo termine 1 è data da:

$$S = \frac{1}{(1 - a)}.$$

Gerdil afferma che tutto ciò non deve portare alla convinzione dell'esistenza di un ultimo termine 0, bensì al fatto che i termini della successione vadano progressivamente decrescendo. Il fatto di considerare 0 come ultimo termine va inteso come un "*artifizio di calcolo*".

Egli esamina, riferendosi alla figura da lui stesso riportata (Figura 11), anche la possibile situazione di un ultimo termine (x) non 0 ma quasi uguale a 0: sostiene che "*questa non è possibile perché la progressione troverebbe il suo limite nel punto x e ciò è contrario alla natura della progressione che deve oltrepassare il punto x e tendere all'infinito verso il limite B*".

Gerdil ("*mi si consenta di spendere ancora qualche parola per esporre alcune idee relative a questo soggetto*") per ribadire la correttezza del calcolo nell'analogia tra il caso finito ed il caso infinito afferma che ciò che conta nel procedimento non è il susseguirsi di infiniti termini della progressione bensì la proporzione costante che sussiste tra loro ("*ora per trovare questa quantità per mezzo del calcolo non è affatto necessario supporre che nella progressione vengano inclusi tutti i termini che potrebbero comporla: è sufficiente conoscere il rapporto dei primi due termini, rapporto che, essendo lo stesso per tutta la progressione, mostra il limite che la serie dei suoi termini dovrebbe raggiungere, qualora la si potesse sviluppare per intero*").

Inoltre, una volta eseguita la suddivisione del segmento nelle infinite parti, per forza di cosa la somma di tutte queste infinite parti deve ridare il segmento unitario ("*qualora si supponesse che il segmento AB potesse essere assoggettato ad ogni suddivisione possibile, tuttavia questa infinità di parti rimesse insieme non potrebbe dar forma ad altro che allo stesso segmento AB; e non essendo i termini della progressione altro che quelle stesse parti che risultano dalla suddivisione del segmento AB, ne segue che la somma di tutti questi termini, ove li si supponesse completamente sviluppati, altro non potrebbero formare che quello stesso segmento AB*").

In conclusione, questo calcolo è assoggettato a questi due vincoli che sono indipendenti dal numero assolutamente infinito di termini della progressione.

Paradosso di Zenone

Gregorio da San Vincenzo, nel suo *Opus geometricum* del 1647, dimostrò che il paradosso di Achille e la tartaruga poteva essere risolto sommando una serie geometrica infinita. La finitezza della somma dimostrava che Achille poteva superare la tartaruga in un istante ed un punto definiti. Gregorio diede la prima enunciazione esplicita del fatto che una serie infinita rappresenta una grandezza, la sua somma, che chiama limite della serie. Egli dice che "*il termine di una progressione è la fine della serie che la progressione non raggiunge, anche se viene continuata all'infinito, ma a cui si può avvicinare in misura inferiore a qualunque intervallo dato*". Come afferma Kline nella sua *Storia del pensiero matematico*, Gregorio fece molte altre affermazioni che sono meno precise e meno chiare della prece-

([20]) Gerdil ricava la formula per la somma di una progressione geometrica infinita nello stesso modo in cui la ricavò F. Viète, in *Varia responsa* del 1593, dalla già citata proposizione di Euclide, ponendo uguale a zero (*nihil*) l'ultimo termine della successione.

dente, ma portò dei contributi all'argomento e influenzò molti allievi.

A tale riguardo Gerdil afferma che il paradosso di Zenone ci aiuta a convincerci della fallacia dell'infinito attuale.

> "*Supponiamo, diceva Zenone, che Achille proceda 10 volte più veloce di una tartaruga; se la tartaruga ha una lega di vantaggio, Achille non potrà mai raggiungerla perché mentre Achille percorrerà questa lega, la tartaruga avrà percorso la decima parte della seconda lega e, mentre Achille percorrerà la decima parte della seconda lega, la tartaruga avrà percorso la decima parte di questo decimo, e così via fino all'infinito.*" Afferma Gerdil che ci sono due modi per risolvere il paradosso:

1° MODO: posta uguale a 1 la lunghezza di una lega e indicando con x il cammino percorso dalla tartaruga, quando Achille la raggiungerà $1+x$ esprimerà la distanza a cui si trova la tartaruga e, dato che Achille è 10 volte più veloce, $10x$ rappresenterà il cammino percorso nello stesso tempo da Achille; di conseguenza $10x = 1 + x$, il che riporta x ad $\frac{1}{9}$ di lega e ciò ci dice che Achille raggiungerà la tartaruga dopo che la tartaruga avrà percorso $\frac{1}{9}$ di lega.

2° MODO: determinare la somma dei termini della progressione geometrica decrescente di ragione $\frac{1}{10}$ e di primo termine $\frac{1}{10}$: $\frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1000}, \cdots$ per calcolare il limite oltre il quale la tartaruga non può andare.

Usando la formula precedentemente considerata si ottiene: $s = \dfrac{\frac{1}{10}}{1-\frac{1}{10}} = \dfrac{1}{9}$.

Gerdil, quindi, ribadisce in questo modo la compatibilità tra la situazione reale, il calcolo puramente algebrico (il 1° MODO) e il calcolo della somma dei termini della progressione geometrica di ragione $\frac{1}{10}$ e di primo termine $\frac{1}{10}$ (il 2° MODO) "*basato sul concetto di limite*".

Egli espone le sue convinzioni sul Paradosso di Zenone citando l'abate Deidier e le sue riflessioni al riguardo: "*L'argomento di Zenone* – dice Deidier – *sarebbe inconcludente se non si scegliesse una tra le due scelte possibili: o Achille avrebbe dovuto impiegare un'infinità di passi per percorrere la prima lega, nel qual caso non sarebbe mai arrivato a percorrerla per intero, oppure i passi che lui avrebbe fatto percorrendo* $\frac{1}{10}$ *di lega sarebbero rimpiccioliti di 10 volte e così via, nel qual caso non avrebbe mai potuto raggiungere la tartaruga.... ma l'una e l'altra di queste supposizioni sono tanto ridicole quanto impossibili.*"

Complessivamente il discorso di Gerdil (come quello di Deidier) non è molto convincente: egli si preoccupa solo di provare che il cammino percorso da Achille eguaglierà, ad un certo punto, quello percorso dalla tartaruga o che un tratto finito di cammino possa essere suddiviso potenzialmente in un numero infinito di percorsi secondo una data proporzione, ma non accenna al fatto che se Achille si soffermasse per un tempo finito ed eguale in tutte le posizioni, allora, come asserisce Zenone, non raggiungerebbe mai la tartaruga, anche se i tratti parziali compongono un percorso finito. Il paradosso avrebbe senso, in particolare, se il tempo (o un segmento) fosse pensato come costituito da indivisibili della stessa durata (lunghezza) non nulla, di modo che una sua divisione in infinite parti comporterebbe l'assurdo di una durata (lunghezza) infinita.

Invece Achille raggiunge la tartaruga per la continuità del tempo e dello spazio, perché nelle infinite posizioni intermedie non sosta, ma transita, e i tempi si assottigliano nelle stesse proporzioni degli spazi, ciò che rende possibile il superamento all'istante $T = t + t/10 + t/100 + t/1000 + \cdots = 10t/9$, t essendo il tempo che Achille impiega a percorrere la prima lega. Sull'argomento si può consultare, ad esempio [Cajori 1915].

Gerdil accetta, quindi, l'idea di un infinito che si compone, ad esempio, in un segmento o in un intervallo di tempo in modo potenziale, e che permetta la deduzione della lunghezza o della durata complessiva, cioè, usando una parola della Scolastica, accetta l'infinito sincategorematico.

Prima di introdurre la settima e ultima prova esposta nel *Mémoire de l'Infini Absolu consideré* *dans la Grandeur*, è bene ricordare che già nel saggio *Della nozione dell'esteso geometrico e delle proprietà che ne risultano* Gerdil ha dedicato molto spazio al problema dell'incommensurabilità e, in particolare, all'impossibilità del calcolo aritmetico delle radici quadrate di numeri non interi. Sulla questione ritornerà pure nell' *Eclaircissement sur ce que la théorie des incommensurables semble offrir de plus misterieux*, in cui si sofferma a lungo per fornire una dimostrazione geometrica della impossibilità della radice quadrata aritmetica di due: in verità una dimostrazione rigorosa inoppugnabile non è data, ma si producono molte argomentazioni, delle quali alcune appaiono a tratti oscure.

Innanzi tutto Gerdil definisce le unità concrete omogenee: nel caso di figure piane si tratta di quadrati unitari eguali tra loro. Dividendo allora un quadrato, composto da quattro unità, in due rettangoli eguali, nessuno dei due rettangoli potrà mai trasformarsi in quadrato mediante una trasposizione delle due unità che li compongono. E quand'anche si dividessero tali unità ciascuna in quattro unità concrete, queste otto unità mai potrebbero disporsi in modo da formare un quadrato e così continuando indefinitamente. La spiegazione sta nel fatto che i rettangoli hanno area 2 e il quadrato il cui lato è medio proporzionale tra 1 e 2 risolve il problema; ma tale media non può essere espressa con un numero intero in quanto non ci sono numeri interi compresi tra 1 e 2.

Gerdil di fatto suppone che se fossero commensurabili lato e diagonale di un quadrato, il rettangolo di area 2 sarebbe equivalente a un quadrato di lato unitario la cui diagonale sarebbe eguale ad un multiplo del lato. Come sia effettivamente possibile ridursi a questo caso Gerdil non lo spiega, ma si sofferma molto per dimostrare che se il lato è eguale a uno, la diagonale non può essere espressa da un intero. La conclusione è che un quadrato di area 2 non è mai propriamente un quadrato formale, ma un rettangolo equivalente a un quadrato geometrico, ovvero mentre è possibile costruire geometricamente un quadrato con area doppia dell'area di un quadrato assegnato, quindi come una parte integrante e non metafisica e astratta dell'estensione, tale operazione non è aritmeticamente possibile, nel senso che non fornisce un numero razionale. Quindi $\sqrt{2}$ non è un numero.

La procedura impiegata richiama alla mente una di quelle ben più rigorose che si impiegano per provare che lato e diagonale di un qualsiasi quadrato non possono essere espressi entrambi da numeri interi. Infatti, supposto per assurdo che lato e diagonale del quadrato siano espressi entrambi mediante multipli interi dell'unità lineare, per il teorema di Pitagora si dedurrebbe subito che la diagonale è pari; congiungendo il punto medio della diagonale con un vertice opposto del quadrato si ottiene un quarto di quadrato, cioè un triangolo rettangolo isoscele che avrebbe ancora per l'ipotesi fatta tutti i lati interi, in particolare il lato del quadrato di partenza, in quanto ipotenusa dell'ultimo triangolo ottenuto, sarebbe pari e pertanto se eravamo partiti da un quadrato con lato dispari, si avrebbe un assurdo; altrimenti si potrebbe portare l'altezza sull'ipotenusa dell'ultimo triangolo ottenuto dal vertice opposto e proseguire in tal modo: si giungerebbe ad un assurdo sicuramente se il lato del quadrato di partenza non è una potenza di due. Se invece il lato del quadrato di partenza è del tipo 2^n, che è poi il caso preso in considerazione da Gerdil, dopo n iterazioni si perverrebbe ad un triangolo rettangolo isoscele in cui i due cateti sono eguali a 1 e l'ipotenusa è intera: caso impossibile come provato da Gerdil.

Gerdil considera anche diversi problemi collegati al precedente: ad esempio ricorda che una situazione analoga al problema della radice di 2 si presenta nel caso della costruzione della sezione aurea, problema geometricamente risolubile con riga e compasso, ma che non ha, come il precedente, soluzione aritmetica.

Passiamo ora alla settima e ultima prova.

SETTIMA E ULTIMA PROVA

metodi di approssimazione

Gerdil afferma: "*la radice quadrata di un numero che non è un quadrato perfetto fornisce un ulteriore e molto significativo esempio dell'impossibilità che una successione sia composta da un numero (attualmente) infinito di termini*". Egli motiva tale affermazione con il fatto che, a detta dei migliori matematici del tempo, il valore esatto della radice è impossibile, e ne deduce come conseguenza che è impossibile una successione di frazioni spinta fino all'infinito assoluto, quale dovrebbe risultare da un processo di approssimazioni portato al suo completamento e quindi all'infinito assoluto. Ne segue che "*Tout assemblage composé d'une infinité absolue de termes est réellement impossible*". Pertanto a tale "*assemblage*" Gerdil si rifiuta di dare il nome di numero. Le difficoltà sorte nelle prove precedenti sono state superate con l'uso di passaggi al limite. Perché ora Gerdil non pensa agli irrazionali come limiti di razionali? Nella definizione di limite bisogna conoscere il limite cui la successione tende, in modo da poter verificare che la differenza tra tale limite e il termine generale della successione può essere arbitrariamente piccolo. È la stessa difficoltà che incontra, circa sessant'anni dopo, Cauchy, il quale la risolve introducendo il criterio di convergenza tramite il quale si può stabilire l'esistenza del limite di una successione senza conoscerne l'effettivo valore: la dimostrazione di tale criterio è però non completa se non è fornita una preliminare definizione di numero irrazionale. Per Cauchy gli irrazionali, tra cui le radici dei numeri naturali non quadrati perfetti, erano definiti, sulla base dell'intuizione geometrica, come limiti di quelle frazioni approssimanti che lo stesso Gerdil considera. Pertanto anche il criterio di convergenza di Cauchy non era completamente indipendente dalla geometria della retta. Solo negli anni 70 dell'800 Cantor e Dedekind definiscono i numeri reali irrazionali mediante l'uso dell'infinito attuale, con la conseguente completa aritmetizzazione dell'analisi e il superamento definitivo della preclusione di Gerdil.

A proposito è interessante ricordare [Bottazzini 2018, 233] che Cantor in una lettera del 1885 a Gustaf Eneström, assistente di Mittag-Leffler, pubblicata nella *Zeitschrift für Philosophie* protesta contro coloro che, come Cauchy e Gerdil, per difendere la loro fede, utilizzano una proposizione del tutto falsa quale l'impossibilità dell'infinito attuale.

Ma torniamo alle parole di Gerdil: egli vuole sottolineare la differenza tra il numero infinito di cifre di una progressione geometrica – considerata nella SESTA PROVA – e il numero infinito di cifre dopo la virgola dell'approssimazione della radice quadrata di un numero che non è un quadrato perfetto. I termini della progressione geometrica sono governati da una determinata proprietà e questo permette il calcolo della loro somma. Invece la successione infinita determinata dall'approssimazione della radice quadrata è composta da termini che, dopo la virgola, si susseguono indefinitamente senza un criterio apparente. Gerdil sostiene che si può calcolare il limite di una successione quando i termini si susseguono seguendo una certa legge che appare a lui fondamentale al fine della individuazione del limite stesso: riappare, quindi, in questo caso particolare, in una forma più chiara e matura, la necessità, già altrove sottolineata, di collegare il concetto di limite con la nozione di funzionalità.

Gerdil conclude il suo saggio con le seguenti parole *"l'impossibilità dell'infinito attuale nella grandezza sia discreta sia continua non esclude assolutamente l'idea dell'infinito assoluto in quanto attributo dell'Essere senza restrizioni. Gli scrittori più precisi hanno sempre avuto cura di distinguere l'infinito metafisico dall'infinito matematico: lo stesso Fontenelle riconosce che l'infinito metafisico, di cui afferma noi abbiamo naturalmente l'idea, non può applicarsi né ai numeri né all'estensione. È proprio dall'idea stessa di questo infinito, considerato nella maniera più astratta, che deriva in qualche forma la possibilità che noi abbiamo di aumentare col pensiero la grandezza all'infinito aggiungendo unità a unità; in modo che è sempre vero dire che l'infinito in potenza suppone l'infinito in atto.... Ma sarebbe uscire dai confini di questa memoria l'entrare in discussioni puramente metafisiche*".

Conclusioni

Al di là dell'intento apologetico delle verità di fede, Gerdil conduce una profonda analisi critica del concetto di infinito, accoglie l'analisi di d'Alembert, ne comprende la forza innovativa e ne presenta in più punti un avanzamento. Innanzitutto nella definizione delle nozioni di infinitesimo e di infinito, nozioni che sono esplicitamente collegate alla variabilità e considerate nel loro significato potenziale di tendenza ad un limite. Quello che manca, ripetiamo, non è l'idea che alla base dei concetti in esame debba esservi la variabilità, che, come è stato sottolineato più volte, è spesso richiamata. Quello che manca è la definizione di che cosa debba intendersi per quantità variabile in termini di quantità numerica variabile. Cauchy inizia il suo

Cours d'Analyse con la definizione di funzione, e prosegue chiarendo il concetto di quantità a cui farà riferimento, dicendo: "*Applicheremo la denominazione di quantità unicamente alle quantità reali positive o negative*", specificando subito che ogni grandezza data sarà denotata da un numero. Al di là di questa ovviamente fondamentale precisazione, ci sembra che la successiva definizione di limite non si discosti di molto da quelle di d'Alembert e Gerdil: "*Quando i valori successivamente attribuiti ad una medesima variabile si approssimano indefinitamente a un valore fisso, in modo da differirne tanto poco quanto si vuole, quest'ultimo è detto limite di tutti gli altri*". Il salto conclusivo, con l'esplicazione del gioco svolto da variabile indipendente e variabile dipendente avverrà solo dopo circa altri 50 anni, con la definizione statica di Weierstrass. Così Cauchy si presenta come un elemento di collegamento tra il passato non solo di Leibniz e Newton, ma ancora di più di d'Alembert e Gerdil (e per quest'ultimo è già stata richiamata la profonda contiguità) e il futuro di Weierstrass e degli studi sulle funzioni regolari e patologiche che caratterizza la seconda metà dell'800.

Bisogna altresì tenere presente che con Cantor e la teoria degli insiemi l'infinito attuale ha fatto il suo ingresso definitivo nella pratica e nell'educazione matematica, grazie alla potenza della sua impostazione, che rende tra l'altro possibile una definizione rigorosa degli irrazionali.

Contrariamente a quanto lo stesso Cantor afferma, G. Veronese (1854-1917) in forma chiaramente critica, nelle *Osservazioni su alcune dimostrazioni contro l'infinito e l'infinitesimo attuale* [Veronese 1891, 667-668], trova che Gerdil a momenti è a un passo dall'infinito cantoriano e, forse, avrebbe potuto pervenirvi se la sua preoccupazione principale non fosse stata la finalità apologetica, quel voler dimostrare l'impossibilità dell'eternità dell'universo. Veronese riporta, per sostenere tale idea, un passo del *Essai d'une démonstration mathématique de l'existence de Dieu* [Gerdil, vol. II, 358], dove in particolare è ribadito che non c'è alcun numero possibile che non entri dentro la serie naturale in quanto non c'è numero che non possa esserle aggiunto e, quindi, la successione dei numeri naturali "*non può essere infinita in atto se non comprende tutti i numeri possibili e tutta la possibilità dei numeri*". Veronese a questo pensiero paragona la seguente frase di Cantor: "*Sarebbe contraddittorio parlare di un numero massimo della serie dei numeri naturali; tuttavia si può immaginare un nuovo numero, che chiameremo ∞, e che servirà ad esprimere che tutto l'insieme dei naturali è dato secondo la legge nella sua successione naturale, o come un ente già formato*". Quindi Cantor inventa un nuovo numero, che poi metterà in relazione con gli altri e che è completamente al di fuori della successione naturale, di cui Gerdil, come si è visto sopra, nega l'esistenza. Veronese non cita, però, il passo di Gerdil che segue quello esposto in precedenza e che potrebbe rafforzare l'idea di un accostamento di Gerdil a Cantor, non solo per il tema trattato ma anche per la possibilità di innovazione che vi compare in germe, precisamente. "*Dunque se uno esprime la successione naturale dei numeri divenuta attualmente infinita mediante il segno ∞, questo segno rappresenta tutta la collezione di tutti i numeri possibili. Dunque al di fuori di ∞ non c'è alcun numero possibile. Dunque $\infty + 1$ e, a maggior ragione, $\infty + \infty$, sono delle idee contraddittorie*".

In questo passo c'è l'accettazione di ∞ come possibile rappresentante di un insieme infinito, non è ∞ a essere contraddittorio, perché non è un numero, è il trattarlo come numero che è sbagliato.

Ci troviamo di fronte ad una sorprendente posizione di Gerdil riguardo l'infinito in atto; altrove ha scritto che i numeri non si estraggono come da uno scrigno e qui allo scrigno è stato dato addirittura un nome. Ma di fatto è solo una breve parentesi, poi quando Gerdil impiega il simbolo ∞ nella sua trattazione, l'uso è di tutt'altro genere, sostanzialmente abbreviazione di una relazione di limite.

BIBLIOGRAFIA

[Berkeley 1734] BERKELEY, G. 1734. *The Analyst, or, A discourse addressed to an infidel mathematician.* London (traduzione italiana di N. de Pisapia, 1997, *L'analista*, Istituto Italiano per gli Studi Filosofici, Napoli).

[Bottazzini 2018] BOTTAZZINI, U. 2018. *Infinito,* collana "Intersezioni", serie "Raccontare la matematica". Il Mulino, Bologna.

[Boyer 1949] BOYER, C. 1949. *The History of the Calculus and its Conceptual Development*. Dover, New York.

[Boyer 1976] BOYER, C. 1976. *Storia della matematica*. Isedi, Milano.

[Cajori 1915] CAJORI, F. 1915. *The history of Zeno's arguments on motion.* The American Mathematical Monthly, 22, N. 4.

[Cantor 1886] CANTOR, G. 1886. *Über die verschiedenen Ansichten in Bezug auf die actual unendlichen Zahlen*. Zeitschrift für Philosophie und philosophische Kritik.

[Cauchy 1868] CAUCHY A. 1868. *Sept Leçons de Physique Générale, avec appendices Sur l'impossibilité du nombre actuellement infini, L'antiquité de l'homme, La science dans ses rapports avec la foi, par M. l'Abbé Moigno*. Gauthier-Villars, Paris.

[d'Alembert 1754] LE ROND D'ALEMBERT, J. B. 1754. *Asymptote, Différentiel, Infini, Limite, Série.* Articoli dell'Encyclopédie.

[de la Chapelle 1750] DE LA CHAPELLE, J. B. 1750. *Traité des sections coniques, et autres courbes anciennes.* Quillau, Paris.

[de L'Hopital 1696] DE L'HÔSPITAL, G. F. A. 1696. *Analyse des infiniment petits, pour l'intelligence des lignes courbes*. De l'Imprimerie Royale, Montalan, Paris.

[de L'Hopital 1720] DE L'HÔSPITAL, G. F. A. 1720. *Traité analytique des sections coniques et de leur usage pour la résolution des équations dans les problèmes tant déterminez qu'indéterminez*. Ouvrage posthume, Montalan, Paris.

[Deidier 1740] DEIDIER, A. 1740. *La mésure des surfaces et des solides par l'arithmétique des infinis et les centres de gravité.* Jombert, Paris.

[Dupont e Roero 1991] DUPONT, P. E ROERO, C. S. 1991. "*Leibniz 84", Il decollo enigmatico del calcolo differenziale*. Mediterranean Press.

[Fasciolo Bachelet 2001] FASCIOLO BACHELET, S. 2001. *Il pensiero filosofico di Giacinto Sigismondo Gerdil*, in Barnabiti Studi 18 (2001) 29-96; consultabile anche online:
http://www.storicibarnabiti.it/PDF/BS%2018%20bachelet.pdf

[Fontenelle 1727] FONTENELLE, B. 1727. *Élements de la geometrie de l'infini.* De l'Imprimerie Royale, Paris.

[Galilei 1990] GALILEI, G. 1990. *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze attinenti alla meccanica ed i movimenti locali*. a cura di E. Giusti, Einaudi, Torino.

[Gerdil 1845] GERDIL, G. S. 1845. *Opere edite ed inedite del cardinale Giacinto Sigismondo Gerdil*. Vol. II, Firenze, presso G. Celli.

[Grabiner 1981] GRABINER, J. V. 1981. *The origins of Cauchy's rigorous calculus*. Cambridge.

[Lagrange 1797] LAGRANGE, J. L. 1797. *Théorie des fonctions analytique contenant les principes du calcul différentiel*, De l'Imprimerie de la République, Prairal, Paris.

[Leibniz 1689] LEIBNIZ, G. G. 1689. *Tentamen de motuum coelestium causis*. Acta Eruditorum, Lipsiae.

[Newton 1687] NEWTON, I. 1687. *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, London.

[Newton 1740] NEWTON, I. 1740. *La méthode des fluxions, et les suites infinies*. Paris.

[Newton 1744] NEWTON, I. 1744. *Opuscola mathematica, philosophica et philologica*. apud Marcum-Michaelen Bousquet, Lausannae et Genéve.

[Piantoni 1851] PIANTONI, G. 1851. *Vita del cardinale Giacinto Sigismondo Gerdil Barnabita, e analisi di tutte le stampate sue opere*. Roma.

[Stella 2001] STELLA, P. 2001. *Appunti per una biografia di Giacinto Sigismondo Gerdil.*
http://www.barnabiti.net/wp-content/uploads/2013/12/Barnabiti_Studi_18.pdf

[Tacquet 1651] TACQUET, A. 1651. *Cylindricorum et annularium libri IV*. Antwerp.

[Torricelli 1919] TORRICELLI, E. 1919. *Opere*. Edizione faentina curata da G. Loria e G. Vassura, seconda parte del volume primo.

[Valabrega 2004] VALABREGA, R. 2004. *Un anti-illuminista dalla cattedra alla porpora. Giacinto Sigismondo Gerdil professore, precettore a corte e cardinale*. Deputazione subalpina di storia patria, Torino.

[Veronese 1891] VERONESE, G. 1891. *Osservazioni su alcune dimostrazioni contro l'infinito e l'infinitesimo attuale*. in Fondamenti di Geometria a più dimensioni e a più specie di unità rettilinee, Padova.

[Wallis 1656] WALLIS, J. 1656. *Arithmetica infinitorum, sive nova methodus inquirendi in curvilineorum quadraturam, aliaque difficiliora matheseos problemata*. Oxford.

Nel presente articolo si fa riferimento all'Edizione Fiorentina delle Opere di Gerdil e ad alcuni documenti presenti negli Atti dell'Accademia delle Scienze di Torino.

Ma le Opere sono anche stampate nelle seguenti edizioni:

- *Delle Opere dell'Eminentissimo sig. Card. Giacinto Sigismondo Gerdil*, 1784-1791, Nuova edizione illustrata di note e accresciuta di opere inedite, a cura di Filippo M. Toselli, in 6 volumi, Bologna, Istituto delle Scienze.
- *Opere edite ed inedite del Card. Giacinto Sigismondo Gerdil*, 1806-1821, a cura di Leopoldo Scati e Antonio M. Grandi, in 20 volumi, Roma.
- *Opere edite ed inedite del Card. G.S. Gerdil*. 1853-1857, Nuova collezione a cura di Gaetano Milone e Carlo Vercellone, in 7 volumi, Napoli, Tipografia del Diogene.

In particolare, le Figure 5, 6, 7, 9, 10 e 11 riportate nel testo sono quelle originali, fotografate dal saggio*: Eclaircissement sur la notion et la divisibilité de l'étendu geometrique (Mercure de Paris mois de Fevrier 1761).*

Loredana Biacino

Loredana Biacino, ora in riposo, è stata professore associato di Analisi Matematica presso la facoltà di Scienze dell'Università "Federico II" di Napoli. Ha compiuto studi nell'ambito della derivazione di ordine frazionario e sue applicazioni e nell'ambito delle misure di dimensione frazionaria, della logica a più valori e della storia della matematica.

Gabriella Viola

Gabriella Viola, ricercatore confermato, insegna attualmente Analisi Matematica presso il Dipartimento di Matematica "G. Peano" dell'Università di Torino. Ha insegnato, in precedenza, Analisi all'Università di Genova e all'Università "La Sapienza" di Roma. Il suo campo di ricerca e di studio ha riguardato le equazioni differenziali alle derivate parziali di tipo lineare e non lineare, le equazioni funzionali e, recentemente, si è interessata alla storia della matematica.