Matematica, Cultura e Società

Rivista dell'Unione Matematica Italiana

Daniele Pasquazi

La geometria intuitivadi Leonardo da Vinci

Matematica, Cultura e Società. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **4** (2019), n.3, p. 237–258.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=RUMI_2019_1_4_3_237_0>

Matematica, Cultura e Società. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2019.

Matematica, Cultura e Società – Rivista dell'Unione Matematica Italiana
Serie I, Vol. 4, N. 3, dicembre 2019, 237-258

La geometria intuitiva di Leonardo da Vinci

DANIELE PASQUAZI
Università di Roma Tor Vergata
E-mail: pasquazi@mat.uniroma2.it.

Sommario: *Gli studi di Leonardo da Vinci sulla quadratura di superfici, testimoniati dalle tantissime figure geometriche raccolte nel Codice Atlantico, sono sicuramente meno noti delle sue pitture e delle sue macchine tecnologiche. Tuttavia il suo approccio geometrico, prettamente intuitivo e non vincolato a formalismi, ha ispirato diverse attività all'interno di un quadro teorico di ricerca in didattica della matematica, volto a motivare la scoperta individuale, a favorire il potenziamento delle capacità percettivo-sensoriali geometriche facendo realizzare disegni e usare materiali appositamente ideati. In questo modo si assecondano le modalità di apprendimento proprie degli alunni preadolescenti, in accordo con i recenti contributi delle neuroscienze. Inoltre, il processo che permette di arrivare ad aspetti più astratti partendo dallo studio di casi particolari, è determinante per la formazione di un pensiero razionale primitivo ma rigoroso.*

Abstract: *Leonardo da Vinci's studies on the squaring of surfaces, evidenced by many geometric drawings collected in the Codex Atlanticus, are certainly less known than his paintings and his technological machines. However his geometrical approach, purely intuitive and unconstrained by formalisms, has inspired various activities. The theoretical framework of this research in mathematics teaching is aimed at motivating individual discovery, favoring the enhancement of geometric perceptive-sensory capacities. This is achieved by making drawings and using specifically designed materials. In this way the learning modalities of the pre-adolescent pupils are supported, according to the recent contributions of the neurosciences. Furthermore, the process that allows us to arrive to more abstract aspects starting from the study of particular cases is decisive for the formation of a primitive but rigorous rational thought.*

1. – Introduzione

Definire quale sia stata la «professione» di Leonardo è impresa assai ardua a causa dei suoi diversi interessi che oggi inquadriamo in discipline molto distanti tra loro. Un'altra atipicità che ha reso il personaggio veramente unico è stata l'eccellente capacità che ha manifestato in ognuna di queste discipline affrontandole tutte, di fatto, con il medesimo approccio. A tal proposito Paul Valéry, scriveva: «Vedo Leonardo approfondire quella meccanica che egli chiamava il paradiso delle scienze con la stessa potenza naturale che lo animava nell'invenzione di volti puri. Entrambe le attitudini erano per lui il prodotto di una sola passione» ([**11**]).

La geniale intuizione di Franco Ghione, che lo ha portato a comprendere il contributo che Leonardo può fornire in ambito didattico, ci ha condotto a studiare quelle pagine del *Codice Atlantico* contenenti un numero incredibile di figure molte delle quali tracciate all'interno di un cerchio, altre simili a vere e proprie decorazioni. Dalle parole stesse di Leonardo abbiamo appreso il fine ultimo di questo suo incredibile lavoro, annunciato come fosse un gioco: trasformare figure complesse in altre per le quali sia banale determinare l'area. In sostanza, un tema geometrico caro a Leonardo, era l'equivalenza tra figure piane.

Accettato: il 9 dicembre 2019.

Tale argomento costituisce un nodo cruciale per l'insegnamento della matematica nella scuola del primo ciclo d'istruzione tale da giustificare le molte energie ad esso dedicate. Le attività che verranno qui di seguito presentate sono il frutto del nostro lavoro sinergico costituito da tanti incontri e relativi confronti. Da un recente esperimento, svolto direttamente nelle classi, sta emergendo che molti ragazzi di età compresa tra i 12 e i 14 anni, sottoposti ad adeguati test geometrici, tendono a confondere tra di loro i concetti di uguaglianza, equivalenza ed isoperimetria tra figure piane. E, cosa ancora più grave, si è rilevato che l'approccio risolutivo da loro preferito è per lo più quello aritmetico caratterizzato da un'applicazione sistematica di formule che portano a eseguire calcoli, spesso anche lunghi e farraginosi, anche quando la domanda posta non lo richieda esplicitamente.

Per modificare questo approccio è necessario sviluppare capacità di percezione geometrica che permettano di rilevare, comprendere e, conseguentemente, saper utilizzare le caratteristiche che definiscono una figura. Tale capacità è uno degli obiettivi più importanti da far raggiungere agli studenti al termine del primo ciclo d'istruzione: si riuscirà ad ottenere un maggior numero d'informazioni dall'osservazione di una figura se si sarà capaci di destrutturarla, di riconoscere le sue singole parti e i «ruoli» che ciascuna di queste può assumere nell'insieme. La conseguente ristrutturazione della figura sarà determinante per riconoscere uguaglianze, equivalenze ed isoperimetrie, riducendo la possibilità di generare confusione tra questi aspetti.

La nostra preoccupazione non riguarda solamente problemi strettamente geometrici ma anche aritmetici per i quali, grazie ad una contestualizzazione in ambito geometrico, si riesce a elaborare una strategia risolutiva efficace. Ciò deriva dal fatto che gli enti geometrici si possono concretizzare. In primo luogo, perché si possono disegnare attraverso un uso consapevole della riga e del compasso seguendo procedure semplici ma rigorose. Ma, quando la staticità dei disegni non aiuta a scoprire le proprietà più profonde delle figure, è più conveniente farle effettivamente costruire usando opportuni materiali. La loro manipolazione ha una valenza formativa elevatissima, come aveva già intuito Maria Montessori: recenti scoperte neuroscientifiche hanno dimostrato che il sistema motorio, favorendo lo sviluppo delle capacità senso-percettive, fornisce contributi fondamentali per la formazione dei nostri pensieri. È in questo modo che il movimento della figura o delle sue parti facilita l'analisi e la sintesi delle sue caratteristiche «invarianti» permettendo così la generalizzazione, in maniera rigorosa anche se ancora non formale, delle proprietà intuite in casi particolari. Tale processo, inquadrato all'interno di attività laboratoriali favorenti la scoperta individuale, è indispensabile per la genesi di un pensiero razionale compatibile con le capacità cognitive tipiche dei preadolescenti su cui si genereranno in futuro modalità di ragionamento più complesse.

Le difficoltà in matematica nascono frequentemente perché i concetti, specie quelli aritmetici e algebrici, sono presentati in modo troppo astratto per poter essere compresi dalla mente di un preadolescente. I risultati delle ricerche neuroscientifiche sono molto chiari su questo aspetto: la nostra mente apprende più facilmente se tali concetti vengono adeguatamente concretizzati. In tal senso, fare riferimento alla storia del pensiero matematico aiuta molto chi si occupa di didattica: non bisogna dimenticare che gli *Elementi* di Euclide, primo testo di teoria scientifica, sono caratterizzati da un rapporto esplicito e chiaro tra gli enti trattati e la pratica del disegno con riga e compasso.

Questi aspetti sono tutti da tenere in considerazione nell'elaborazione di un quadro teorico dal quale trarre spunto per la realizzazione di attività didattiche. Queste ultime dovranno poi essere sperimentate direttamente nelle scuole seguendo protocolli d'indagine convenzionali per rielaborare, con il maggiore rigore possibile, i dati ottenuti che potranno confermare o no le ipotesi fatte. Tale tipo di ricerca (sperimentale, evidentemente, ma ben diversa da quella teorica o applicata che si fa solitamente in matematica) può essere veramente utile se messa a disposizione degli insegnanti.

Gli spunti che Leonardo può fornire in didattica della matematica nella scuola del primo ciclo sono evidenti alla luce delle considerazioni, tutte prettamente intuitivo-geometriche, che egli ha riportato nelle didascalie che accompagnano le sue figure. Nessun calcolo e nessuna formula sono presenti e ciò comunica un messaggio molto chiaro: per comprendere un concetto, quale l'equivalenza, è necessario fare esclusivamente un lavoro di analisi delle figure e di sintesi delle eventuali proprietà. Sarà poi mediante un disegno rigoroso che si dimostrerà l'equivalenza cercata.

Leonardo ci fornisce anche indicazioni per imparare a riconoscere equivalenze attraverso il movimento delle figure in gioco che rendano evidente la trasformazione geometrica che sta avvenendo. Si può affermare ormai con certezza che gli studenti, per le capacità cognitive possedute, già piuttosto notevoli anche se ancora in pieno sviluppo, possono acquisire tali abilità. Sarà su queste che, quando saranno più grandi, attraverso l'uso di un linguaggio simbolico, potranno formalizzare le conoscenze raggiunte.

Si conclude facendo rilevare che la figura predominante presente nel *Codice Atlantico* è senza dubbio il cerchio. Questo fa pensare che, molto probabilmente, Leonardo volesse trovare una procedura per trasformarlo in un quadrato equivalente. Ciò potrebbe giustificare il numero veramente grande di tentativi effettuati. Gli insuccessi ottenuti non devono evidentemente averlo demoralizzato: ha continuato a provare e riprovare dimostrando passione e coraggio che ha del resto manifestato in ogni campo da lui esplorato. La figura di Leonardo assume, dunque, un'importanza anche di carattere psicologico. Il suo approccio e il suo carisma sono d'esempio per i ragazzi affinché insistano con il massimo impegno nelle attività nelle quali sono coinvolti fino al raggiungimento dell'obiettivo preposto: gli eventuali errori commessi non devono scoraggiare ma al contrario devono essere vissuti come passi in avanti nella ricerca della soluzione del problema oggetto di studio.

2. – Quadro teorico

Federigo Enriques fu matematico di fama internazionale per i suoi contributi in geometria algebrica, ma chi si occupa di didattica in matematica lo ricorda soprattutto per le sue significative ricerche in epistemologia e in storia della scienza. In un suo famoso articolo ([**4**]) asserì che l'apprendimento della matematica è più agevole e completo qualora avvenga attraverso uno sviluppo paritario e integrato delle capacità intuitive e logiche: queste costituiscono due aspetti inseparabili del pensiero che nascono e si sviluppano grazie alla loro interazione continua. Di fatto suggeriva di non fare l'errore di privilegiare una delle due a scapito dell'altra. Più recentemente, Laura Catastini, tra i primi insegnanti di matematica a occuparsi di neurofisiologia e di campi della psicologia riguardanti il funzionamento della mente, ha sottolineato che il *pensiero visivo*, localizzato nell'emisfero destro, e quello *analitico verbale*, localizzato nell'emisfero sinistro, siano due diversi strumenti appropriati d'indagine e che tali modalità di ragionamento debbano essere stimolate nella pratica didattica per facilitare negli studenti lo sviluppo di strategie mentali più armoniche ed efficaci ([**1**]). Queste idee sono oggi ampiamente confermate dalle neuroscienze: Stanislas Dehaene ha sottolineato l'assoluta importanza di favorire la continua comunicazione tra i nostri due emisferi e che un opportuno insegnamento della matematica svolge un ruolo di primaria importanza in tal senso ([**3**]).

Tali considerazioni ci suggeriscono di affrontare gli argomenti matematici dapprima mediante attività concrete (capaci di stimolare principalmente l'emisfero di destra) che facilitino successivamente l'elaborazione di un pensiero astratto (di pertinenza dell'emisfero sinistro). Questo modo di procedere è veramente importante specie se ci si rivolge a studenti del primo ciclo d'istruzione che si contraddistinguono per avere capacità di ragionamento e di astrazione piuttosto immature.

Una fonte fondamentale per ideare attività didattiche con tali caratteristiche sono gli *Elementi* di Euclide che devono essere proposti a scuola mantenendone i principi generali pur adeguandoli alle capacità degli studenti cui ci si rivolge. Quella elaborata da Euclide si può definire una vera e propria *teoria del disegno geometrico* che facilita l'associazione di concetti astratti, come il numero, con oggetti concretizzabili, come i segmenti. Si pensi, infatti, alla definizione I del Libro V che afferma: «di due grandezze omogenee la minore si dice parte della maggiore, quando quella misura questa esattamente». È proprio questa definizione di unità di misura che ci permette di dare concretezza al numero associandolo biunivocamente, rispetto ad un fissato sistema di riferimento, a ogni punto geometrico appartenente a una retta, ed esprimere così, sempre con un numero la lunghezza di un qualunque segmento. Tale definizione è veramente legata al nostro modo naturale di pensare: sappiamo che lungo tutto il solco intraparietale vi sono neuroni che si attivano alla presentazione di un simbolo numerico e, al tempo stesso, per la codifica di posizioni spaziali.

Un ulteriore apporto alla concretizzazione degli enti matematici è fornito dalla possibilità di poter disegnare le figure geometriche: Euclide descrive la costruzione mediante riga e compasso di ogni ente geometrico prima di dedurre le sue proprietà. Riteniamo estremamente formativo realizzare una figura seguendo anche solo una procedura descrittiva perché, in questo modo, si è stimolati a capire correttamente quanto letto per ottenere quanto richiesto. Inoltre, è di fondamentale importanza «governare» le costruzioni geometriche conoscendo le motivazioni di ogni singolo passaggio effettuato: sostenere affermazioni rette da un rigore direttamente deducibile dalla figura costruita permette di intuire le sue proprietà caratterizzanti e ciò, naturalmente, faciliterà la formulazione d'inferenze generali.

Il disegno però è «statico» e può essere osservato da un unico punto di vista che, a volte, non facilita lo sviluppo di un'adeguata capacità di percezione geometrica compromettendo, a sua volta, la capacità di astrazione. Costruendo, invece, le medesime figure attraverso un materiale che possa essere manipolato gli studenti sono portati a osservare da più punti di vista, fare riflessioni e congetture più ponderate, rilevare anche eventuali errori commessi e, quindi, auto correggersi.

Sull'importanza dell'uso dei materiali in didattica Maria Montessori aveva anticipato: «L'attività interiore è il capolavoro della mente creatrice – e noi non possiamo intervenire direttamente in esso. Siccome però la mente si costruisce a mezzo di una continua attività che è centrale (la mente) e periferica (i sensi, il movimento), possiamo assistere dall'esterno al suo lavorio. La periferia ci è accessibile.... Noi dunque è verso la periferia che ci rivolgiamo come educatori» ([**9**]). A conferma di queste intuizioni, le moderne ricerche neuroscientifiche hanno permesso di stabilire che gli atti motori consegnano alle aree cerebrali nuovi compiti di tipo cognitivo ([**10**]).

Osservando con attenzione i ragazzi di età compresa tra gli 11 e i 14 anni mentre lavorano con materiali, si nota un progressivo cambiamento nel loro approccio alla disciplina: è evidente, infatti, come essi non traggano più conclusioni solo relativamente agli oggetti a disposizione ma manifestino sempre più il desiderio di astrarre avendo maturato un piacere del tutto nuovo rispetto al passato verso la generalizzazione. Tuttavia almeno due aspetti caratterizzanti gli studenti della fascia di età considerata sono da ostacolo all'acquisizione di processi corretti. Innanzitutto i ragazzi sono ancora incapaci di tenere sotto controllo i diversi anelli di una lunga catena di deduzioni logiche necessarie per argomentare un'affermazione. Inoltre, sono molto impulsivi a causa evidentemente di un sistema decisionale ancora immaturo: tutto ciò, frequentemente, è causa, dopo una verifica in pochi esempi specifici, di affermazioni frettolose che vogliono avere la pretesa di essere considerate generali. È doveroso, dunque, intervenire quanto prima per facilitare lo sviluppo di un corretto pensiero razionale.

Si comprende pertanto quanto sia importante favorire processi di ragionamento razionali ma adeguati all'età: la manipolazione di strumenti didattici svolge un ruolo di primo piano in tal senso se in grado di favorire la costituzione di corretti *modelli mentali* ([**7**]). La formazione di questi ultimi è determinata dalla rilevazione di aspetti che rimangono invariati all'interno di una figura mentre vengono variate le sue dimensioni, i suoi angoli ecc. (naturalmente senza perdere le caratteristiche che la definiscono). La scoperta di queste *strutture stabili* è oltremodo importante qualora si comprendano le ragioni della loro stabilità. Capire tali ragioni è quindi fondamentale per la formazione di quei modelli a cui si faceva precedentemente riferimento. Questi saranno richiamati ogni volta si dovranno fare congetture predittive di carattere generale o risolvere situazioni specifiche nel caso di esercizi.

Poiché ci si avvale sostanzialmente di materiali che simulano le caratteristiche dell'oggetto matematico considerato, chiamiamo *dimostrazione figurata* la procedura che porta a riconoscere l'esistenza di una struttura stabile (prendiamo qui spunto da [**2**], dove si riferisce di Filolao che, secondo Giamblico, le avrebbe chiamate *dimostrazioni per natura e non per convinzione* ([**6**]). È molto importante acquisire questa capacità, tanto che la riteniamo uno degli obiettivi fondamentali da raggiungere alla fine del primo ciclo d'istruzione. Si tratta, infatti, di cominciare a procedere mediante un atto dimostrativo avente un certo rigore anche se, ancora decisamente non formale. È altresì evidente che non abbiamo ancora a che fare con le dimostrazioni assiomatico-deduttive caratterizzanti i teoremi euclidei (è presumibile, infatti, proporli nei gradi superiori dell'istruzione). Tuttavia, si ritiene la dimostrazione figurata propedeutica per fondare le basi del pensiero razionale.

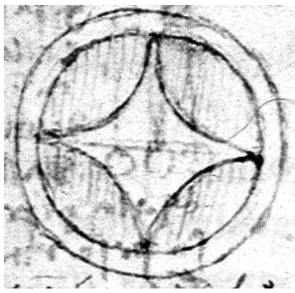
Si è constatato, attraverso una sperimentazione condotta direttamente nelle scuole i cui risultati verranno a breve pubblicati, che molti ragazzi frequentanti la scuola secondaria di primo grado non sempre riescono a stabilire in figure diverse l'eventuale uguaglianza delle aree oppure, in generale, in che rapporto si trovino. Abbiamo inoltre constatato che le difficoltà di percezione visiva aumentano sensibilmente nel caso in cui le superfici esaminate abbiano parti in comune. Infatti, poiché il nostro sistema di riconoscimento delle forme, sempre per meccanismi innati, è predisposto ad accorpare diversi elementi sensoriali sulla base di regole di organizzazione della percezione (teoria della Gestalt), capita a volte che possa addirittura ostacolare o comunque rendere più ardua la codifica dei costituenti delle figure che stiamo osservando. Queste difficoltà hanno frequentemente una causa comune e cioè l'incapacità di riconoscere la molteplicità dei «ruoli» che uno stesso elemento può assumere all'interno dell'intera configurazione considerata. È quanto mai opportuno rimuovere o, meglio ancora, evitare l'insorgenza di queste *fissità funzionali* attraverso un'adeguata educazione: queste infatti ostacolano quelle ristrutturazioni degli elementi del problema (già precedentemente accennate) necessarie all'ideazione di una corretta strategia risolutiva.

Concludiamo sottolineando come l'approccio geometrico di Leonardo da Vinci, emergente dallo studio del *Codice Atlantico*, s'inserisca perfettamente nel breve quadro teorico appena descritto: è per questo motivo che partendo dalle figure presenti nei suoi appunti sono state ideate diverse attività didattiche per la scuola del primo ciclo proposte con qualche differenza tra una classe e l'altra. Nei prossimi paragrafi tali attività saranno dettagliatamente descritte.

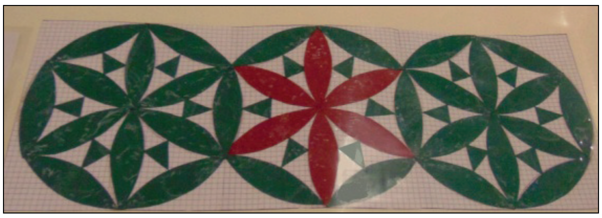
3. – La geometria intuitiva di Leonardo

Nel *Codice Atlantico* è raccolto un numero incredibile di figure geometriche estremamente interessanti da un punto di vista meramente matematico che sono, allo stesso tempo, vere e proprie decorazioni non a caso ritrovabili in diverse tipologie di pavimenti di epoche diverse. Tali figure, accompagnate dalle relative didascalie, hanno un valore formativo veramente notevole: le descrizioni di Leonardo sono esclusivamente di carattere intuitivo-geometrico senza ricorso a calcoli o formule.

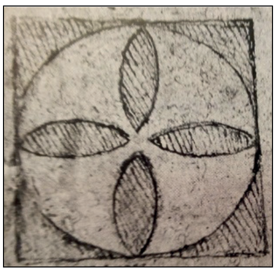
Particolare pavimento di epoca romana
Antiquarium di Lucrezia Romana, Roma



Codice Atlantico, Foglio 124 recto



IIC, I.C. 2° di Anagni
Riproduzione del pavimento della cattedrale di Anagni



Codice Atlantico, Foglio 762 versus

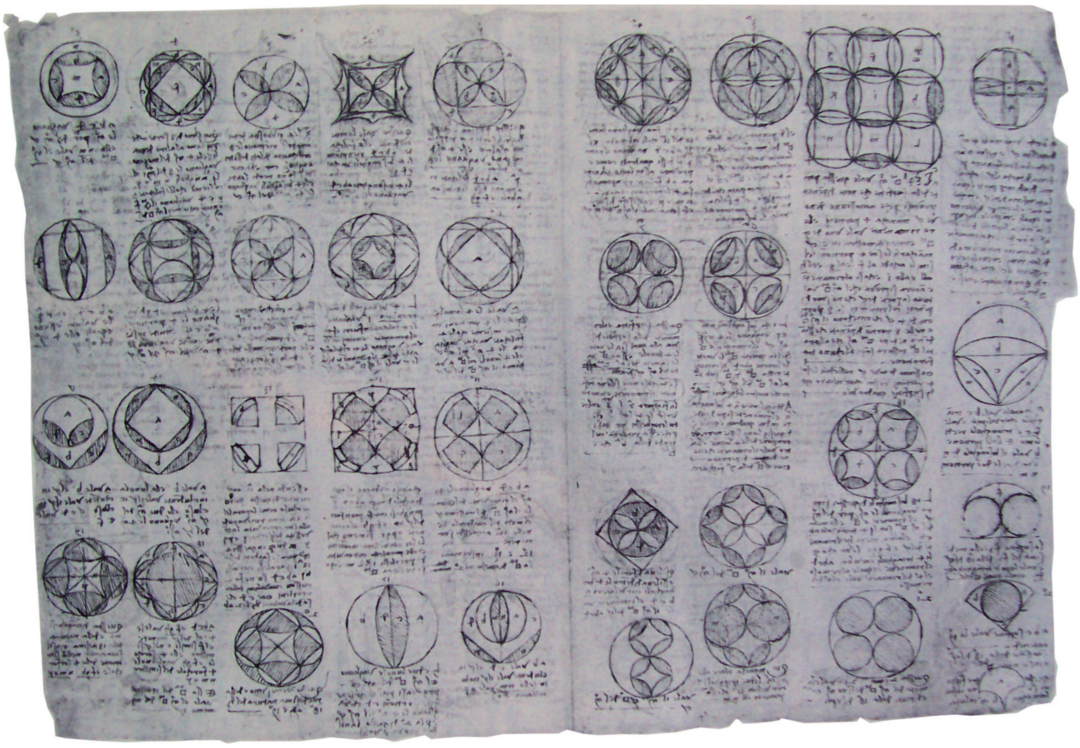
Nelle attività che andiamo a descrivere facciamo realizzare ai ragazzi i disegni in modo rigoroso con riga e compasso; in certi casi essi seguono scrupolosamente una procedura descrittiva che viene loro consegnata, mentre in altri sono loro stessi che devono comprendere i passaggi da eseguire osservando direttamente una figura di Leonardo (magari procedendo poi con la verbalizzazione dei passaggi effettuati). Questo lavoro è estremamente importante: gli studenti sono chiamati a decidere quale curva tracciare per prima, per esempio una circonferenza, per poi proseguire con il quadrato inscritto e tutte le altre curve. Così facendo vengono a contatto, in queste situazioni concrete, con il concetto non banale di indipendenza e dipendenza tra grandezze che, in seguito, useranno in molteplici situazioni decisamente più astratte.

Successivamente, lasciando spazio alla creatività artistica dei ragazzi, le figure vengono colorate anche mediante tecniche grafiche imparate in altre discipline; in tali occasioni si producono molto frequentemente contributi così belli da lasciare anche gli stessi insegnanti stupefatti. I seguenti lavori e tutti quelli che verranno riportati in questo articolo sono stati esposti alla mostra per i 500 anni dalla morte di Leonardo che si è tenuta nell'aula Magna della Macroarea di Scienze dell'Università di Roma Tor Vergata il 2 maggio 2019, completamente ideata, realizzata e animata dagli studenti di 14 classi di scuola secondaria di primo grado.

Essendo abituati a trovare in tutto ciò che Leonardo ha realizzato un unico filo conduttore ci si chiede perché si sia ostinato, in modo potremmo definire ossessivo, a realizzare tantissime figure di carattere prettamente geometrico tutte molto simili tra loro. Nel *Codice Atlantico* è riportato il fine ultimo di questo suo immenso lavoro, rivelato come avesse voluto realizzare un gioco: «de ludo geometrico, nel quale si dà il processo d'infinite varietà di quadrature di superfizie di lati curvi». E subito dopo: «Il quadrato è il fine di tutto il travagliamento delle superfizie geometriche. Ogni superfizie attende alla sua quadratura» che è «il fine della scienzia geometrica» (Foglio 272 versus).

Leonardo disegnava figure curvilinee o mistilinee all'interno di un cerchio colorandole o *depennandole* come diceva egli stesso. Evidentemente era sua intenzione evidenziarle rispetto al resto proprio perché di queste ci voleva parlare. La puntuale didascalia indicava la trasformazione necessaria per ottenere un quadrato equivalente. Perché proprio un quadrato? Se per le figure di partenza, molto belle da un punto di vista estetico, non è semplicissimo riuscire a quantificare la superficie occupata, per il quadrato, invece, questo compito è estremamente banale. Ma è possibile congetturare che, essendo il cerchio la figura decisamente predominante rispetto a tutte le altre, Leonardo fosse intenzionato a costruire proprio un quadrato che avesse la stessa area anche di un dato cerchio? Del resto, anche il cerchio è una «superfizie geometrica» e quindi anche per essa il quadrato rappresentava la «fine del travagliamento». Leonardo deve aver preso il problema della quadratura del cerchio come una vera e propria sfida su cui impegnare tutte le sue energie pur non arrivando mai (del resto come poteva?) alla soluzione del problema. Ma evidentemente,

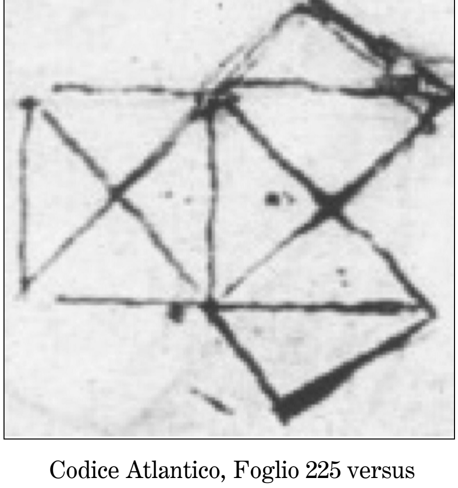
Realizzati da: IIF e IIG, SMS Umberto Nobile di Ciampino



Codice Atlantico, Foglio 471 versus.

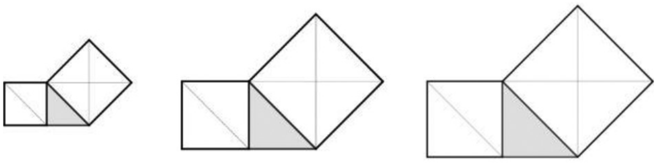
nonostante gli insuccessi, non si deve essere mai arreso. Si cimentò in molteplici tentativi mosso sicuramente da quella curiosità e dallo stesso coraggio manifestati in altri ambiti. Ma è proprio questa audacia che, pur non essendo stata sufficiente a permettergli di trovare una soluzione al problema della quadratura del cerchio, lo ha portato a realizzare decine e decine di figure nelle quali solo una parte di cerchio veniva trasformato in un quadrato risolvendo, di fatto, problemi affini a quello di partenza ma altrettanto interessanti. Attraverso racconti e aneddoti portiamo in classe anche questi aspetti che riguardano il carattere di Leonardo affinché siano di esempio per gli studenti ai quali ci rivolgiamo: riteniamo, infatti, che questi possano agevolarli nelle attività di tipo laboratoriali nelle quali sono tipicamente impegnati.

Leggendo le pagine del *Codice* si comprendono facilmente le argomentazioni utilizzate da Leonardo per quadrare le sue figure. Alla base vi è il problema della duplicazione delle figure geometriche o, più in generale, la costruzione di figure multiple rispetto ad una considerata di partenza. Cominciamo dalla più semplice tra queste ossia il quadrato. Come ottenere, dato un quadrato iniziale, quello di area doppia? Da una semplice applicazione del teorema di Pitagora applicato a un triangolo rettangolo isoscele. Ciò si può comprendere anche mediante l'osservazione dei disegni relativi che si ritrovano tra i fogli del *Codice*: il quadrato costruito sull'ipotenusa contiene 4 copie intere del triangolo di partenza che è contenuto invece due volte in ciascuno dei due quadrati costruiti sui cateti.

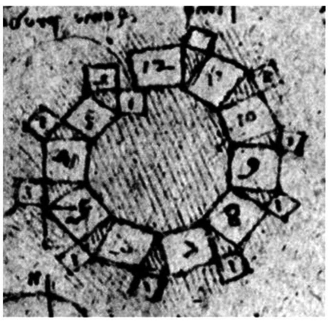


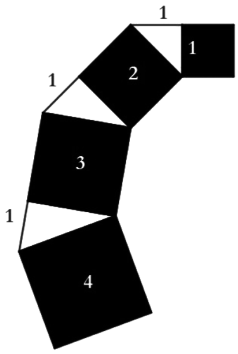
Codice Atlantico, Foglio 225 versus

Queste idee così semplici vengono sfruttate anche per far dedurre agli studenti proprietà generali: disegnando triangoli rettangoli isosceli di dimensioni diverse, si deduce che il quadrato sull'ipotenusa è sempre il doppio di quello sul cateto. Infatti, non è difficile evidenziare la struttura stabile rappresentata dalla permanenza dei triangoli rettangoli isosceli uguali a quello di partenza che si vengono a formare nei quadrati.



Ma Leonardo, come sempre animato in ogni sua attività da un forte potere creativo, si spinge oltre chiedendosi come ottenere un quadrato che sia un multiplo qualsiasi di quello di partenza. Iterando la precedente costruzione, infatti, ottiene quadrati di area tripla, quadrupla ecc. di quella di partenza. Infatti, se il lato del quadrato costruito sull'ipotenusa del triangolo rettangolo isoscele di cateto 1 viene considerato nuovo cateto di un altro triangolo rettangolo avente l'altro cateto sempre 1, si ottiene sulla nuova ipotenusa un quadrato di area 3. Al passo successivo un quadrato di area 4 e così via. In questo modo ha ottenuto bellissime spirali che ci trasmettono chiaramente un senso di dinamicità e allo stesso tempo di bellezza estetica grazie anche ai diversi aspetti di regolarità che possiedono (anche la ricerca di regolarità in un mondo che presenta per lo più irregolarità è stato un tema molto caro a Leonardo ([**11**]).





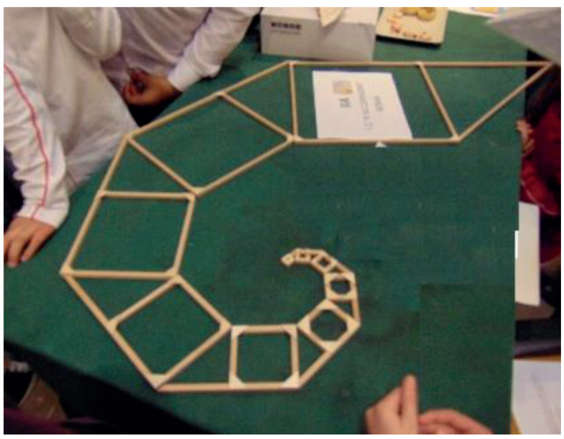
Codice Atlantico, Foglio 281 recto

È probabilmente per questo motivo che tale spirale suscita un notevole interesse negli studenti che frequentemente vogliono riprodurla con personale creatività, fantasia e gusto.

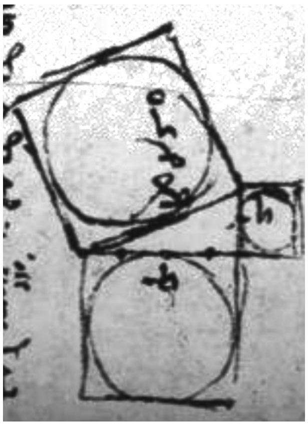
Da un'attenta osservazione delle figure di Leonardo rileviamo inoltre la volontà di determinare un sistema per duplicare, oltre ai quadrati, anche altre figure come cerchi o parti di esso. Per tali propositi è stato evidentemente decisivo per lui utilizzare una variante del teorema di Pitagora valido per cerchi inscritti ai quadrati costruiti sui lati del triangolo rettangolo: in tal caso i diametri dei tre cerchi sono rispettivamente uguali ai lati dei quadrati.

Un'animazione realizzata con software di geometria dinamica (qui simulata attraverso una successione d'immagini) di solito riesce a far congetturare che il cerchio che ha come diametro l'ipotenusa di un triangolo rettangolo incrementa la sua superficie all'aumentare della superficie di uno dei due cerchi costruito sul cateto. Questa deduzione, abbiamo costatato, fa intuire già a bambini della primaria che, analogamente a quanto accade per i

Realizato da: IIB2, I.C. A.M. Ricci Rieti

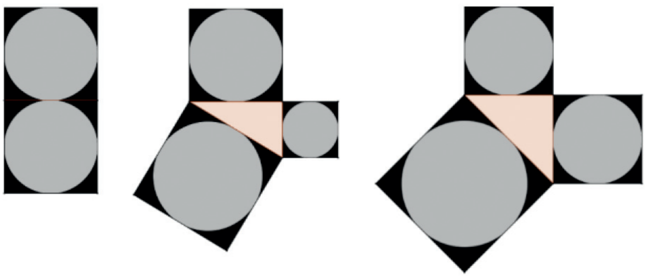


Realizzato da: IIA, I.C. P.M. Corradini, Roma



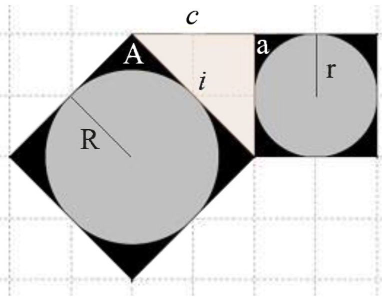
Codice Atlantico, Foglio 225 versus

quadrati, quando il triangolo diviene isoscele, il cerchio sull'ipotenusa è il doppio di quello che ha per diametro uno dei due cateti. Se gli studenti sono abituati a procedere per «visioni» di questo tipo saranno in futuro senz'altro agevolati nella formalizzazione dello stesso problema: considerato un triangolo rettangolo isoscele di cateto c e ipotenusa i, sapendo che il quadrato costruito sull'ipotenusa è il doppio di quello costruito sul cateto si ha $2c^2 = i^2$.



Ma anche un quarto di ciascun quadrato sarà ancora uguale e quindi $\frac{2c^2}{4} = \frac{i^2}{4}$ che può essere scritto come $2\left(\frac{c}{2}\right)^2 = \left(\frac{i}{2}\right)^2$. Osservando ancora la figura si può scrivere, in luogo dell'ultima formula, che $2r^2 = R^2$ avendo indicato con $r = \frac{c}{2}$ il raggio della circonferenza più piccola e con $R = \frac{i}{2}$ il raggio di quella più grande, da cui $2\pi r^2 = \pi R^2$.

Se poi, ad ogni passo, il lato del quadrato costruito sull'ipotenusa viene considerato come

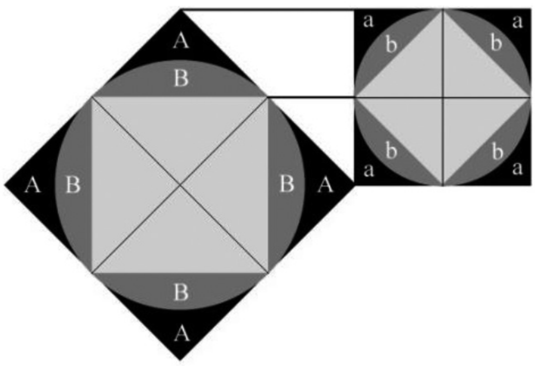


nuovo cateto di un triangolo rettangolo che abbia come altro cateto sempre c si può ottenere, analogamente a quanto accade per i quadrati, un cerchio la cui area è un multiplo qualunque di quello di partenza.

Considerando altre superfici mistilinee, parti di cerchio in genere, se ne possono costruire, alla stessa stregua, altre a esse simili che abbiano area multipla di una di partenza. Se infatti, osservando la precedente figura, sottraiamo il cerchio di area maggiore dal quadrato in cui è inscritto e rispettivamente il cerchio di area minore sempre dal quadrato in cui è inscritto, si avrà che

$$\mathbf{A} = 2\mathbf{a}$$

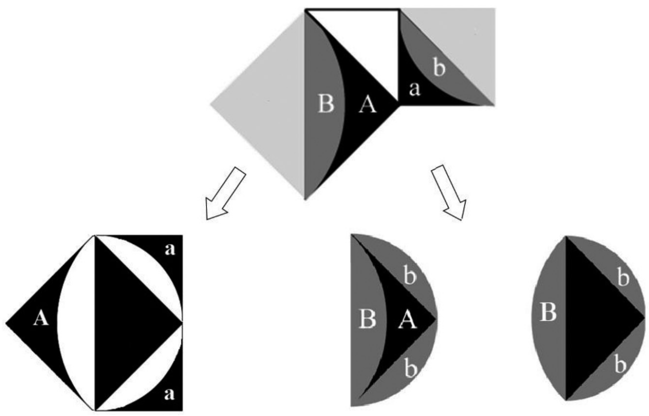
ossia che anche la figura mistilinea **A** è doppia di quella corrispondente **a**. Leonardo non ha assegnato alcun nome specifico a tali superfici. A volte accade, mentre si lavora in classe, che siano proprio gli studenti ad avere esigenza di voler coniare un nome per queste. Le proposte più interessanti sono state: *interstizio*, *ponte*, *cantuccio* (quest'ultimo è stato dato da bambini di Firenze). Il nome assegnato è tanto più appropriato quanto più si è stati in grado, attraverso questo, di sintetizzare le proprietà dell'oggetto che rappresenta. I ragazzi, inoltre, sono più motivati a



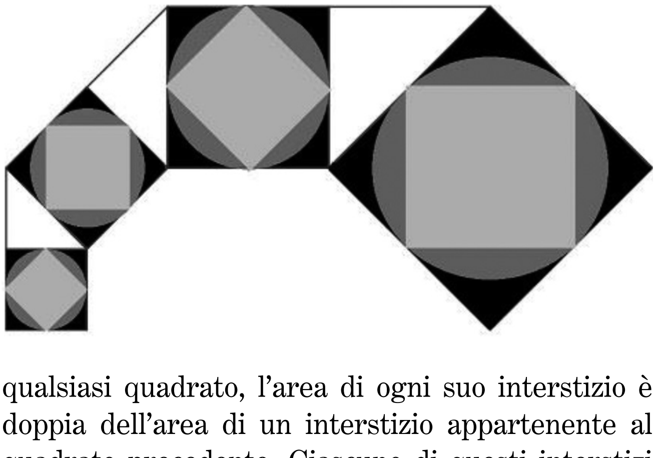
partecipare attivamente se consapevoli dell'importanza che il loro contributo può fornire alla lezione; infine, aspetto parimenti importante, un vocabolo coniato direttamente dallo studente e non imposto, si ricorda più volentieri e quindi più facilmente.

Sul quadrato maggiore si trovano altre superfici doppie delle corrispondenti presenti nel quadrato minore: poiché $\mathbf{A}+\mathbf{B}=2(\mathbf{a}+\mathbf{b})$, va da sé che $\mathbf{B}=2\mathbf{b}$, essendo $\mathbf{B}$ e $\mathbf{b}$ segmenti circolari che Leonardo chiamava invece *porzioni*.

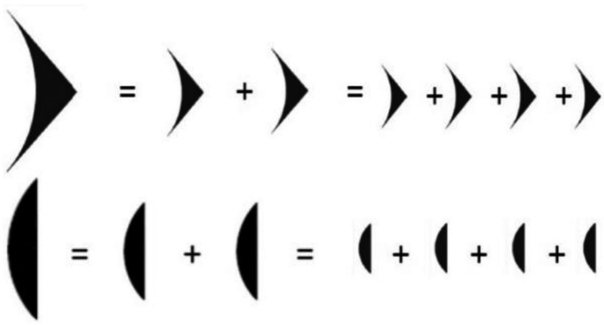
Anche solo osservando un particolare di quest'ultima figura si comprendono due ulteriori versioni del teorema di Pitagora valide per gli interstizi e per le porzioni.



Naturalmente, come in precedenza, si possono costruire spirali che abbiano, ad ogni passo, interstizi e porzioni di area doppia di quelle ottenute al passo precedente. Pertanto, considerando un

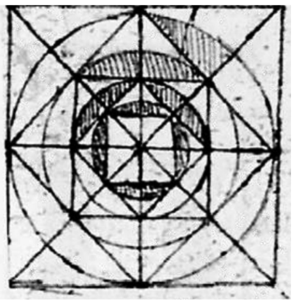


qualsiasi quadrato, l'area di ogni suo interstizio è doppia dell'area di un interstizio appartenente al quadrato precedente. Ciascuno di questi interstizi più piccoli avrà un'area che sarà doppia, a loro volta, delle aree di un interstizio appartenente al quadrato del passo prima e così via. La medesima relazione sussiste per le porzioni. Quanto appena detto può essere sintetizzato nella regola geometrica riportata qui in basso.



(1)

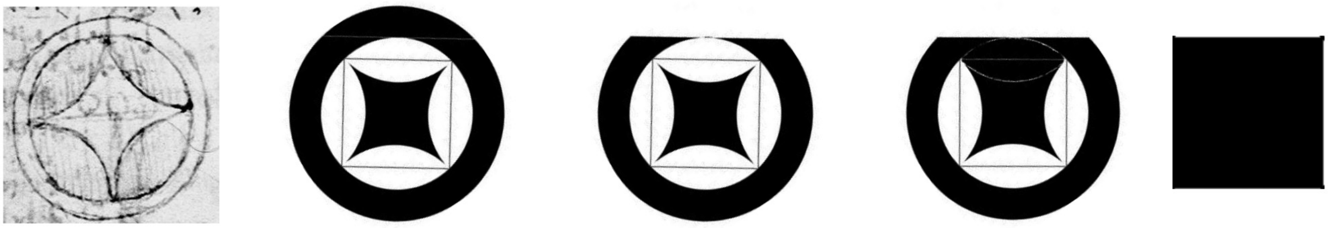
La relazione **(1)** tra figure simili ha ispirato Leonardo alla realizzazione di tantissimi disegni che troviamo nel *Codice*. Il disegno che si trova nel Foglio 271 recto, ad esempio, da una parte ci fa venire in mente un tentativo di voler «racchiudere» l'infinito in uno spazio finito, proposito ritrovabile ad esempio nelle xilografie di Escher; da un'altra, stimola e aiuta, allo stesso tempo, uno studente a immaginare in che modo possa essere iterato il passaggio dall'infinitamente piccolo all'infinitamente grande. È questo un altro esempio del forte potere immaginifico posseduto da Leonardo che deve averlo motivato a

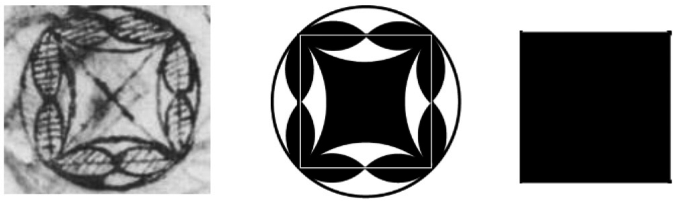


Codice Atlantico,
Foglio 271 recto

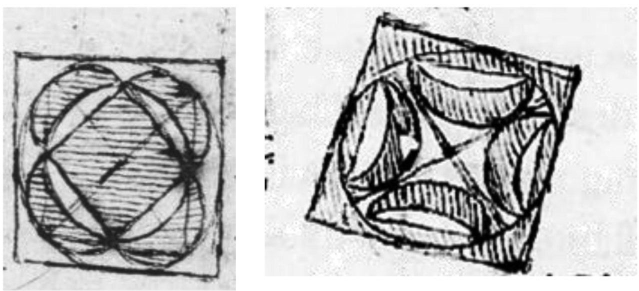
M.C. Escher,
Smaller And Smaller

realizzare ulteriori applicazioni grafiche sempre affascinanti dal punto di vista matematico ed estetico. Vediamo, infatti, qui di seguito alcuni esempi di trasformazioni (realizzabili mediante l'uso di riga e compasso) di figure curvilinee, solitamente contenute in un cerchio, in figure rettilinee equivalenti. Ci è sembrato opportuno utilizzare, anche per queste particolari trasformazioni, il termine *quadratura*. Derivano tutte da diverse applicazioni della relazione (**1**): basta sostituire, per quattro volte, due piccole porzioni al posto di una maggiore equivalente alla somma delle due.

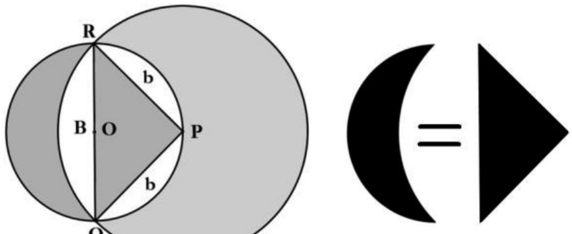




Tra queste figure ce ne sono altre sempre costituite da quadrati e cerchi ma contenenti una o più *lunule* diversamente orientate e disposte. Secondo Marcolongo ([8]), Leonardo deve esserne venuto a conoscenza leggendo un libro del famoso umanista suo contemporaneo Giorgio Valla che, per primo, adopera il termine *lunola*. Rimase evidentemente affascinato da questa figura curvilinea che, molto probabilmente, fu la prima ad essere quadrata. Pare, infatti, che Ippocrate di Chio (circa 470-410 a.C.) seguace di Pitagora, nel tentativo anch'egli di quadrare il cerchio, realizzò questa bellissima figura.

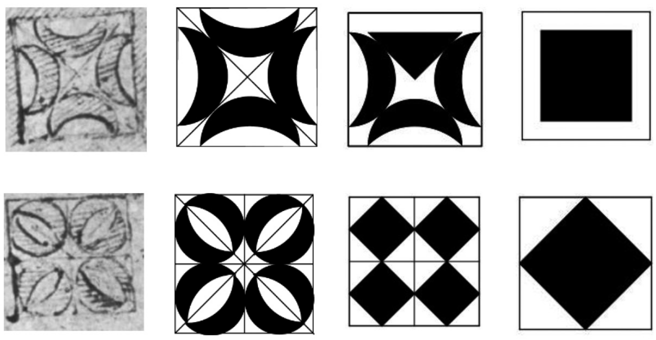


La sua costruzione è semplicissima: a partire da un triangolo rettangolo isoscele PQR con P vertice dell'angolo retto si tracciano due circonferenze: una di centro P e raggio PR, la seconda di centro O (punto medio di QR) e raggio OR. Quest'ultima racchiude il cerchio suddiviso nel triangolo dato PQR, le due porzioni **b**, la porzione **B** e la figura curvilinea grigia di estremi R e Q che è proprio la lunula da costruire. Il cerchio minore, se considerato diviso nelle sue due metà rispetto al diametro QR, in virtù ancora della (**1**), evidenzia la stupenda equivalenza tra il triangolo PQR e la lunula di estremi R e Q che



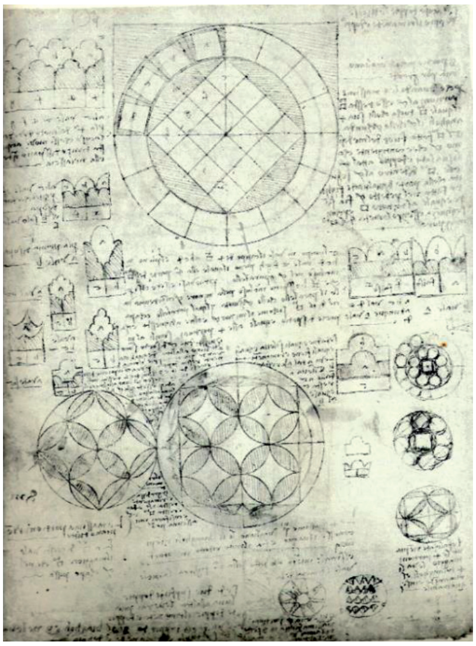
(2)

pertanto è quadrabile. Anche per le seguenti figure, dall'osservazione dei soli disegni, si riesce facilmente a comprendere in che modo possano essere quadrate tenendo presente la sola relazione (**2**).



Le equivalenze evidenziate dalle figure di Leonardo hanno una valenza didattica fondamentale. Si consideri quella tra la lunula e il triangolo. È questo un esempio molto semplice da comprendere ma al tempo stesso estremamente formativo in relazione alle difficoltà percettive che tipicamente rileviamo negli studenti: essi hanno l'opportunità di avere a che fare con due figure completamente differenti, l'una curvilinea e l'altra rettilinea, che tuttavia hanno la stessa area. Non solo. Come si vedrà in un prossimo paragrafo, si riesce a effettuare, mediante argomentazioni qualitative ma rigorose, anche un confronto tra i loro perimetri. Dunque, è con esempi di questo tipo che si contribuisce a ridurre, se non a cancellare, la confusione che gli studenti fanno tra il concetto di uguaglianza, equivalenza e isoperimetria.

Le tantissime figure che stiamo descrivendo si somigliano molto tra di loro a tal punto che, se non si osservassero con attenzione i fogli del *Codice*, si correrebbe il rischio di non vedere un altro tipo di figure riconducibili a veri e propri frammenti architettonici (se ne trovano per lo più nel Foglio 505 recto riportato in basso). Leonardo gioca anche con tali figure irregolari per scoprire un metodo per trasformarle in altre, generalmente rettangoli, per le quali sia semplice determinare la superficie.

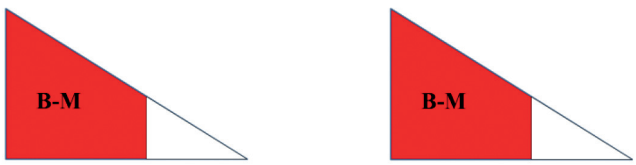


Codice Atlantico, Foglio 505 recto

È Leonardo stesso che, come di consueto, rende palesi le sue intenzioni svelandoci come intende effettuare le trasformazioni geometriche per evidenziare le equivalenze cercate. La didascalia, che è riportata sotto la figura in alto a sinistra del foglio 505 recto, infatti dice: «*abc* vale *defg* per la quarta del moto dove dice: la cosa che si muove acquista tanto di spazio, quanto ella ne lascia». L'approfondimento del significato di queste frasi ci ha consegnato spunti didattici interessantissimi volti a portare alla luce, anche in questo caso, relazioni tra disegno geometrico e deduzione logica.

Soffermiamoci per esempio sull'affermazione: «la cosa che si muove acquista tanto di spazio, quanto ella ne lascia». Leonardo, dunque, si affida al movimento come strumento per trovare la soluzione del problema posto. Se gli studenti riuscissero a «vedere» il possibile moto di elementi di una figura statica sarebbero in possesso di una strategia risolutiva di potenza straordinaria in grado di aumentare le loro capacità di percezione delle proprietà geometriche. Infatti, mediante una trasformazione continua di una figura in un'altra, si avrebbe modo di verificare la permanenza delle eventuali strutture stabili: ciò è di assoluta importanza perché alcune di queste sono indispensabili per comprendere l'equivalenza tra superfici diverse. Favorire queste soluzioni intuitive, vedremo, permetterà agli studenti di risolvere problemi che altrimenti avrebbero bisogno di un numero considerevole di calcoli difficilmente gestibili per la loro età.

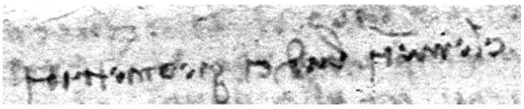
Le costruzioni geometriche per ottenere tali equivalenze, come si vedrà, sono conseguenza dell'applicazione sistematica della Nozione Comune 3 degli *Elementi* di Euclide. Questa recita: «se a cose uguali si sottraggono cose uguali le rimanenti saranno uguali». È, come si può facilmente costatare, un'affermazione generale valida non solo in ambito matematico (come del resto per tutte le altre Nozioni Comuni). Gli studenti sono invitati a riflettere, anche in questo caso, sulla differenza tra il concetto di uguaglianza e quello di equivalenza rendendosi conto in quali casi, considerati dalla Nozione Comune 3, si ottengono figure uguali e in quali equivalenti nell'eseguire la sottrazione tra figure geometriche (con una delle due propriamente contenuta nell'altra). Per facilitare la corretta formazione di modelli mentali si può utilizzare un materiale tipo il seguente: una cornice triangolare **B** detta *base* (di colore rosso in questo caso) e un triangolo simile al precedente ma di dimensioni più piccole, detto *figura mobile,* qui indicato con **M.** Quest'ultimo, inserito entro **B**, viene mosso per poter vagliare tutte le possibili situazioni rendendo evidente laddove ci sia effettivamente uguaglianza tra le superfici differenza **B - M**



e dove ci sia equivalenza. Naturalmente la scelta della forma triangolare è del tutto arbitraria.

4. – Le quadrature per sostituzione

Leonardo ha descritto la trasformazione di tantissime figure, generalmente curvilinee e contenute in un cerchio, presenti nel *Codice Atlantico*, alcune delle quali sono state mostrate nel precedente paragrafo. Queste, usando solo le regole (**1**) e (**2**), sono state trasformate in quadrati o comunque in figure rettilinee per le quali fosse semplice determinare l'area. Ci sembra quasi che Leonardo abbia voluto realizzare un gioco. È presumibile che la sua idea originaria fosse proprio questa anche se non risulta che sia mai stato

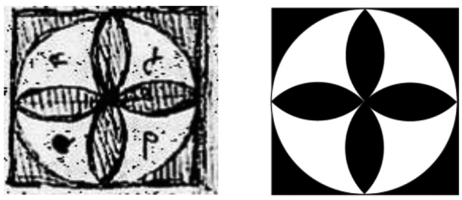


Elementi ludici geometrici, Codice Atlantico: Foglio 124 recto

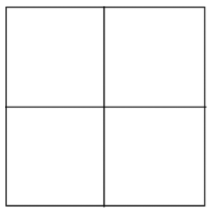
realizzato. Abbiamo concretizzato questa idea cercando di mantenere lo spirito ludico voluto da Leonardo realizzando un gioco particolarmente adatto a studenti frequentanti la scuola del primo ciclo ([**5**]). Lo scopo didattico di tale gioco è determinare il valore delle superfici «depennate» interne a cerchi e, quando possibile, il loro rapporto con quelle lasciate in bianco circostanti (si vedano, ad esempio, i disegni riportati in precedenza per descrivere alcune quadrature). Il problema posto dunque, pur avendo una formulazione semplice, non implica in genere risposte altrettanto ovvie perché non sono note formule per la determinazione dell'area di ciascuna di queste superfici. Poiché gli studenti solitamente

prediligono procedere mediante una via aritmetica nella risoluzione di un qualsiasi problema, manifestano inizialmente un certo disagio dichiarandosi incapaci di riuscire a trovare una soluzione. Le attività proposte nel gioco, invece, hanno l'obiettivo generale di stimolare un approccio percettivo-sensoriale per affrontare l'equivalenza tra superfici. Per tali propositi, è necessario che si facciano scoprire dapprima le regole (**1**) e (**2**) che abbiamo precedentemente esposto per mettere in condizione gli studenti di ideare e ad argomentare strategie risolutive efficaci. Allo stesso tempo, è indispensabile anche che provino in tutti i modi a destrutturare le figure di Leonardo: in questo modo è più facile riconoscere le parti che devono essere sostituite in base alle regole stabilite. Alla fine, considerando insieme le parti rimaste fisse e quelle nuove, si ottiene la quadratura della figura iniziale. Tutte queste operazioni sono facilitate se si ha un materiale con il quale si possano costruire e modificare concretamente le figure: ecco perché, oltre alle *tavole* con le riproduzioni dei disegni e le *basi* su cui lavorare, nel gioco si trovano interstizi, porzioni, lunule e triangoli in plexiglass.

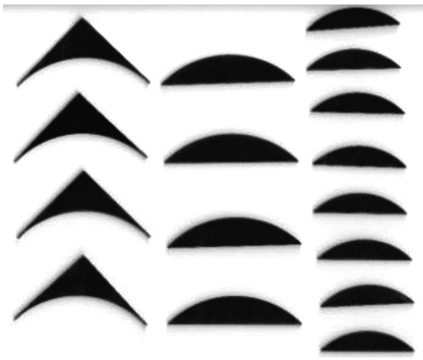
Vediamo nello specifico qualche esempio. Ai ragazzi viene consegnata una tavola riproducente un disegno di Leonardo come quello qui di seguito riportato



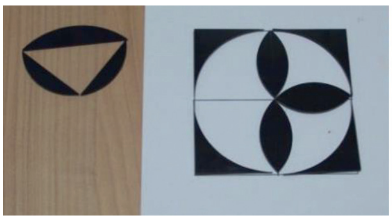
e la relativa base

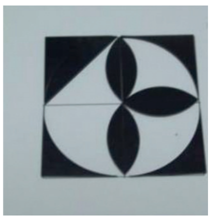


sulla quale vengono poggiati i pezzi in plexiglass in possesso: per questa figura sono 4 interstizi, 4 porzioni maggiori e 8 minori. La prima consegna è ricostruire la figura riportata sulla tavola utilizzando i pezzi

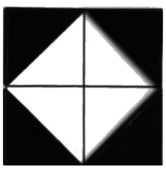


opportuni tra quelli in dotazione. Quelli che avanzano, in questo caso le 4 porzioni maggiori, devono essere utilizzati per effettuare le sostituzioni badando bene al fatto che, ad ogni passo, la nuova figura ottenuta sia equivalente a quella precedente. Capita frequentemente che alcuni studenti, osservando staticamente la costruzione realizzata, dichiarino di non riuscire a trovare una strada risolutiva del problema loro posto. È in queste circostanze che debbono essere spronati a lanciarsi senza paura di sbagliare, proprio come avrebbe fatto Leonardo, manipolando opportunamente i pezzi della figura: non è raro che, improvvisamente, capiscano come procedere. Nello specifico, sapendo che una delle porzioni maggiori avanzate è equivalente alla somma delle due minori in virtù della (**1**), si sostituiscono le due piccole con la maggiore.



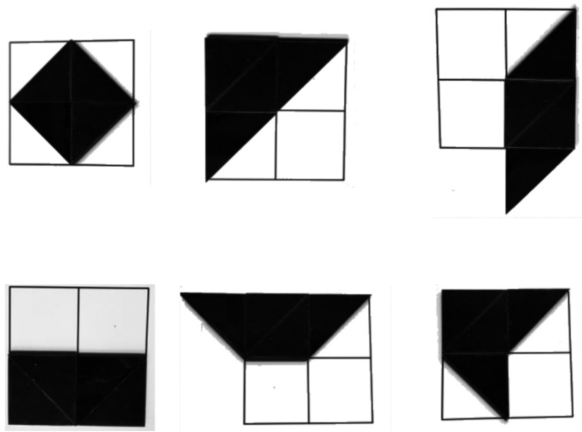


Ripetendo analoghe sostituzioni con le altre 3 porzioni rimanenti si otterrà alla fine la figura in basso della quale è semplice calcolare la superficie. Poiché ci si rende conto facilmente che i 4 triangoli neri possono riempire perfettamente anche lo spazio bianco interno, che ha anch'esso forma quadrata e area metà della maggiore, segue che l'area nera ha la stessa estensione di quella bianca. Inoltre, basterà, ad esempio, misurare con un righello il lato del quadrato bianco per determinare il valore di tutte le superfici.

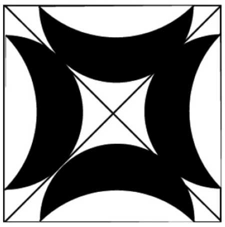


Ma questa esperienza concreta, basata sull'uso di appositi materiali, permette di comprendere la validità generale della proprietà appena trovata: se si considerasse un nuovo quadrato di lato diverso dal precedente e si congiungessero i punti medi dei suoi 4 lati, il poligono ottenuto sarebbe ancora un quadrato? Avrebbe sempre area metà di quello maggiore? Si riuscirà a dare una risposta corretta a queste domande se si individueranno le strutture stabili della figura che, in questo caso, sono rappresentate dagli otto triangoli rettangoli isosceli tutti uguali che, pur variando i lati del quadrato, si vengano sempre a formare nel suo interno.

Il materiale consente di fare anche un'altra operazione fondamentale ossia eseguire ulteriori trasformazioni della figura ottenuta: lo studente avrà così la possibilità di verificare direttamente come figure diverse possano comunque avere la stessa superficie. Questo è un modo sicuramente efficace per apprendere il concetto di equiscomponibilità.

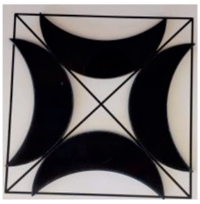
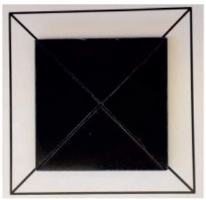


Va sottolineato che ogni figura presente nel gioco necessita generalmente, per essere quadrata, di una strategia risolutiva diversa da quella delle altre: ciò motiva i ragazzi, ogni volta, a riflettere sulle caratteristiche essenziali della figura esaminata anche sulla base dei pezzi a disposizione elaborando la risposta relativa senza potersi rifugiare in procedimenti da applicare meccanicamente. Vediamo, a tal proposito, la quadratura della superficie di color nero rappresentata nel seguente disegno di Leonardo: in esso sono rappresentate 4 lunule iscritte nei 4 grandi triangoli in cui è diviso un quadrato dalle sue stesse

diagonali. Con il materiale in dotazione, dopo aver riprodotto la figura con i pezzi in plexiglass opportuni,

si effettua la sua quadratura in virtù della regola (**2**). Il quadrato che si ottiene è uguale a quello visto in

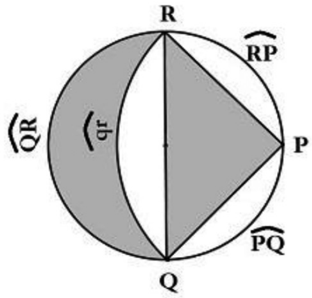
 

una precedente serie di immagini: quindi non solo si riesce a stabilire la misura dell'area della figura iniziale, così come il rapporto tra la superficie nera e quella bianca interna al quadrato, ma anche la sua equivalenza con altre figure di Leonardo.

Dopo aver eseguito due o tre quadrature di altrettante diverse figure, i ragazzi procedono più speditamente. Pertanto, per non rischiare di abbassare l'attenzione durante le attività, si può decidere di non dare più, per ogni singola tavola, i pezzi occorrenti a costruire la figura iniziale e quelli relativi per le sostituzioni. Lasciando quindi tutti i pezzi del gioco all'interno di una scatola saranno gli stessi studenti che dovranno trovare quelli necessari per costruire la loro figura e quelli per le relative sostituzioni. Si constaterà come la ricerca della soluzione, in questo modo, sarà molto più impegnativa.

Un'ultima considerazione: sono uguali tra di loro i perimetri del triangolo e della lunula su di esso costruita? Se si prova a fare questa domanda si constaterà che qualche studente risponderà sbrigativamente in maniera affermativa ritenendo di poter dedurre l'isoperimetria direttamente dall'equivalenza tra due figure. Ma il modo in cui la lunula è stata ottenuta permette di rispondere al quesito abbastanza facilmente: basterà infatti aver constatato, anche mediante esperienze empiriche, che il cammino più breve tra due punti sia quello rettilineo, per comprendere che il perimetro del triangolo sarà sicuramente minore del perimetro della lunula.

Infatti, in relazione alla figura in basso, $\overline{RP}+\overline{PQ} < \widehat{RP}+\widehat{PQ}=\widehat{RQ}$, intendendo con la notazione $\widehat{RP}$ l'arco di circonferenza di estremi R e P e, detto p(RPQ) il perimetro del triangolo rettangolo RPQ, segue che $\mathrm{p(RPQ)} = \overline{\mathrm{QR}}+\overline{\mathrm{RP}}+\overline{\mathrm{PQ}} < \widehat{\mathrm{qr}}+\overline{\mathrm{RQ}}$.

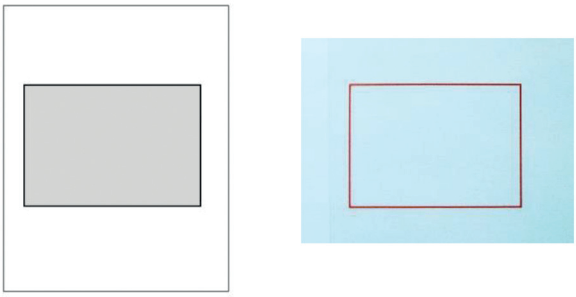


essendo $\widehat{\mathrm{qr}}+\overline{\mathrm{RQ}}$ il perimetro della lunula. Sono rare, o forse inesistenti, le occasioni nelle quali si chiede agli studenti di fare stime di misure di grandezze. Ma saper fare stime è un aspetto matematico molto importante: a volte, infatti, è proprio impossibile riuscire a determinare il valore esatto di una certa misura e quello che si può al più fare è determinare un suo estremo superiore o inferiore. È questo il caso del precedente esercizio: non è infatti fornita la lunghezza di nessun segmento. Inoltre, anche nel caso in cui tali lunghezze siano esplicitamente fornite, gli studenti devono essere abituati a non cadere nella tentazione di fare necessariamente calcoli.

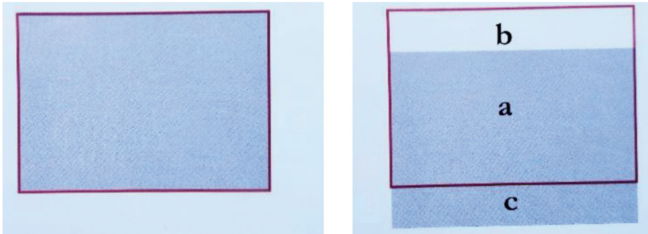
5. – Le quadrature in moto

Grazie ai diversi spunti ricavati dallo studio delle figure di Leonardo presenti nel Foglio 505 recto del *Codice Atlantico* si sono ideate altre attività didattiche per lo più rivolte ai ragazzi frequentanti la scuola del primo ciclo d'istruzione. L'obiettivo generale che ci si è proposto è stato, ancora una volta, quello di aiutare i ragazzi a basare il proprio ragionamento su aspetti percettivo sensoriali. Si sono pertanto motivati gli studenti a una ristrutturazione del problema posto facendo eseguire trasformazioni che simulino, ancora una volta, le costruzioni mediante riga e compasso al fine di ottenere nuove figure, rettangoli in questo caso, equivalenti a quelle di partenza per le quali sia più semplice determinarne l'area. La frase di Leonardo, che abbiamo già ricordato nel paragrafo 3 e che si trova in alto a sinistra del Foglio del Codice, ha fatto da guida per la progettazione delle nostre attività: infatti, come si vedrà, le equivalenze si dedurranno attraverso un movimento continuo di appositi materiali messi a disposizione degli studenti al fine di favorire l'individuazione di eventuali strutture stabili delle figure in grado di generare modelli mentali corretti.

Volendo procedere in maniera graduale si presentano inizialmente problemi la cui ricerca della soluzione sia piuttosto semplice. Il primo materiale utilizzato consiste in una tavola sulla quale è disegnato un poligono o una superficie curvilinea che costituisce la figura base e un lucido sul quale ne è riportata un'altra che rappresenta la figura mobile. Solo nella prima e nella seconda attività la figura base è uguale a quella mobile. Quest'ultima avrà sempre il bordo rosso per facilitare il suo riconoscimento perché, come si vedrà, dovrà essere sovrapposta alla base.

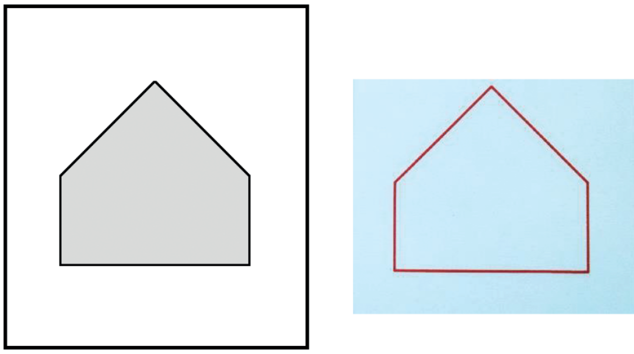


I ragazzi non appena hanno tra le mani il materiale, congetturando una possibile uguaglianza tra le figure osservate, sovrappongono il lucido sulla tavola facendo coincidere perfettamente i rettangoli e constatando così la loro effettiva uguaglianza. Sollecitandoli a eseguire una traslazione lungo una qualunque direzione parallela ai lati (per esempio lungo il lato più corto come in figura), osserveranno la formazione di diversi rettangoli, anche se va detto che non tutti riescono a percepirli a prima vista: ad

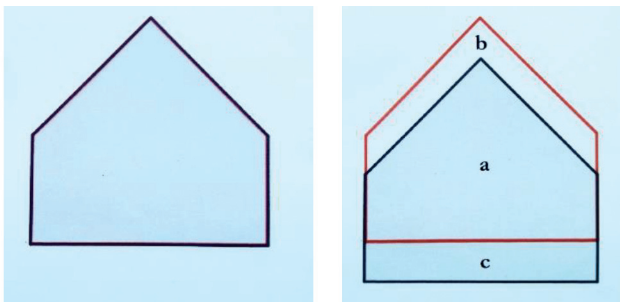


esempio, quello di partenza, che ora chiameremo **c** + **a**, poi **a** + **b**, **c**, **a**, e **b** ecc. Generalmente ci si accorge facilmente dell'uguaglianza tra i rettangoli **c** e **b** perché hanno stessa base e stessa altezza. Si fa notare che la superficie **b** rappresenta lo spazio che la figura mobile acquisisce durante il suo movimento traslatorio. Allo stesso tempo, poiché **c** è lo spazio che questa lascia nel verso opposto, i ragazzi si rendono conto che le caratteristiche di questo movimento sono riconducibili alle parole di Leonardo e ciò li affascina molto.

In un'attività successiva la base non è più costituita da un semplice rettangolo: infatti, si procede verso situazioni leggermente più complesse come quella di seguito rappresentata. Si fornisce ai ragazzi



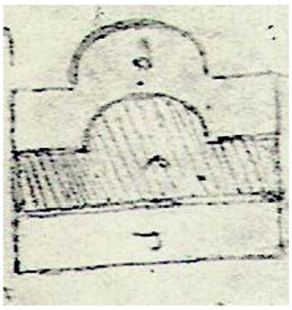
anche la relativa figura mobile su lucido: dopo la solita sovrapposizione e la conseguente traslazione, l'uguaglianza tra **c** e **b** è esclusa per ovvietà mentre la loro equivalenza non è più evidente come nel caso precedente.

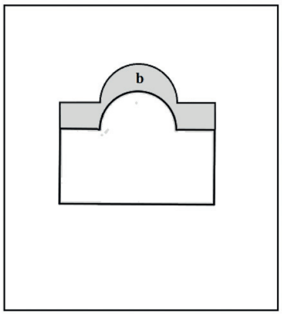


Conviene far fare un passo indietro andando a rivedere il precedente problema sotto un diverso punto di vista. Osservando, infatti, la figura ad esso relativa è opportuno che i ragazzi portino la loro attenzione sulla superficie racchiusa dal bordo rosso del lucido prima del suo movimento, cioè su $\mathbf{c} + \mathbf{a}$, e alla fine dello stesso, cioè su $\mathbf{a} + \mathbf{b}$. Poiché l'area della figura racchiusa deve essere sempre la medesima ne consegue necessariamente che $\mathbf{b} = \mathbf{c}$ per la già citata Nozione Comune 3. Naturalmente, nel caso del rettangolo, è la medesima conclusione a cui si era già pervenuti, ma la deduzione dell'equivalenza delle superfici **b** e **c** per mezzo della proprietà euclidea è utilizzabile in generale in quanto applicabile a figure qualunque e per questo è molto importante. Si può verificare infatti che, tornando all'ultimo problema posto, i ragazzi sono ora in grado di dedurre facilmente la superficie di **b**, essendo equivalente a **c**, misurando con un righello i lati di quest'ultima.

Pensando ancora ad una progressione didattica che proponga situazioni di difficoltà crescente si sono poste le stesse problematiche su figure aventi almeno un lato curvilineo.

Le seguenti attività, invece, prendono spunto direttamente dai disegni di Leonardo. Si può partire dallo studio della seguente figura: a titolo di esempio, riportiamo la didascalia relativa: «se da due equali si leva equali, equali fieno i rimanenti. Leva **a** dal **ab**, resta **b**; e leva **a** dallo **ac** resta **c** equale al **b**». Pertanto,



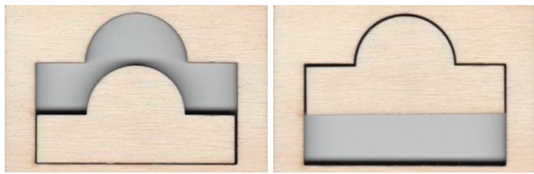


nella nuova attività si vuol fare determinare esplicitamente l'area della superficie **b** riproposta nella tavola consegnata ai ragazzi (anche nel disegno originale la superficie considerata è indicata con la lettera **b**: non dimenticare che Leonardo scrive in maniera speculare).

Oltre alla tavola si consegna un altro tipo materiale, realizzato in legno o in plexiglass, che mantiene le medesime caratteristiche del precedente al fine di perseguire gli stessi obiettivi didattici: questi è costituito da una cornice che racchiude la figura base e da una figura mobile che può muoversi nella cornice stessa che svolge il «ruolo» della figura rossa disegnata su lucido. Gli oggetti così costruiti sono

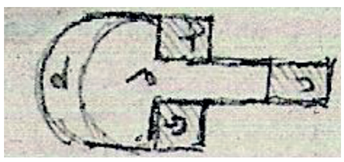
indubbiamente più belli specialmente al tatto rispetto ai precedenti, tanto da generare un'attrazione molto forte nei confronti degli studenti: ciò è molto importante specie nelle fasi iniziali del lavoro.

Grazie all'esperienza acquisita nelle precedenti attività di solito i ragazzi inseriscono la figura mobile nella cornice. Viene chiesto loro, come punto di partenza, di posizionarla in modo da ricreare la stessa situazione indicata dal disegno raffigurato sulla tavola. Se necessario si propone di sovrapporre tutti i materiali proprio sulla tavola per poter meglio confrontare tra di loro le superfici coinvolte (le misure delle figure devono, in tal caso, coincidere naturalmente). La superficie **b** è rappresentata dalla



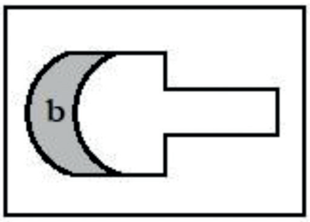
differenza tra la base e la figura mobile: muovendo quest'ultima fino alla posizione opposta, la differenza questa volta darà un rettangolo naturalmente equivalente a **b** e che permetterà di rispondere alla domanda posta.

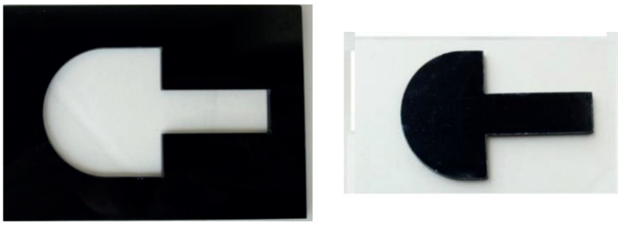
La seguente figura di Leonardo suggerisce invece la formulazione di un problema leggermente



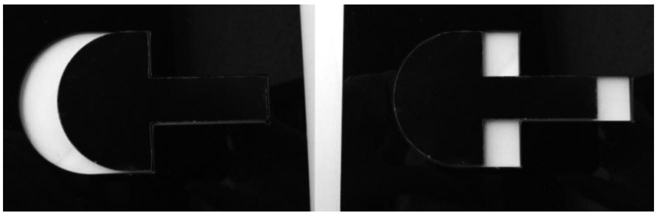
Codice Atlantico, Foglio 411 recto

diverso dai precedenti: come determinare l'area **b** nella seguente figura? Con il seguente materiale a

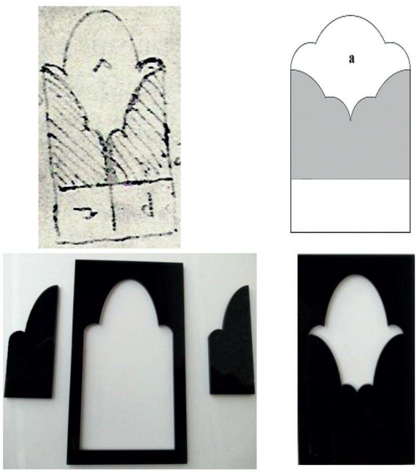




disposizione i ragazzi, ormai esperti, introducono la figura mobile nella base in modo che abbia la stessa posizione indicata dalla tavola; muovendola, si accorgono dell'equivalenza tra la superficie **b** e, in questo caso, tre piccoli rettangoli che, volendo, pensati posizionati in maniera opportuna, formeranno ancora una volta un unico rettangolo.

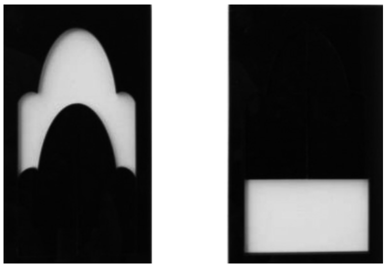


La determinazione dell'area della superficie **a** della seguente figura di Leonardo presenta solitamente molte difficoltà rispetto alle precedenti: come si vedrà, infatti, non sarà più sufficiente una semplice traslazione della figura mobile all'interno della base per determinare la soluzione del problema posto. Il materiale che si mette a disposizione degli studenti è costituito sempre da una figura base

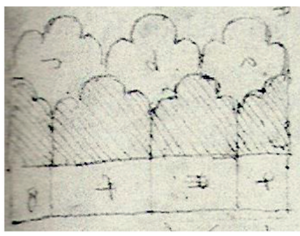


racchiusa da una cornice e, questa volta, due figure mobili, le quali, inserite opportunamente all'interno della base, permettono di riprodurre la figura di Leonardo.

Poiché le due figure mobili, nella posizione in cui sono state inserite, non possono effettuare alcun movimento si deduce che, in questo caso, non si potrà più attuare la solita strategia risolutiva. Tuttavia il fatto di non essere le due figure inseparabili fa venire in mente di fare l'unico spostamento possibile ossia d'invertirle: naturalmente le due superfici bianche, pur differenti, sono equivalenti. A questo punto, nella nuova disposizione, le due figure mobili potranno essere messe in moto contemporaneamente fino al raggiungimento della posizione opposta a quella di partenza. Si scoprirà così l'equivalenza delle superfici bianche con un rettangolo.

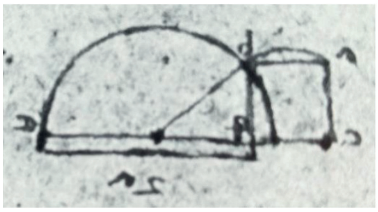


Raggiunto questo risultato si è in condizione di comprendere le parole di Leonardo che costituiscono la didascalia della figura in basso presente sul foglio 505 recto già presentato: «*abc* vale *defg*». La risoluzione del problema relativo a questa figura porta molta soddisfazione ai ragazzi che si entusiasmano nell'essere riusciti a interpretare le parole di Leonardo considerate inizialmente incomprensibili.



Anche in tali occasioni i ragazzi manifestano la necessità di coniare un'appropriata terminologia: è utile a dare quel minimo di formalizzazione che riduca il numero di parole da usare e che faciliti la trasmissione delle idee. Per questo, poiché tutte le figure di Leonardo che abbiamo visto in questo paragrafo sono trasformate in rettangoli equivalenti attraverso un movimento di figure opportune, la strategia risolutiva utilizzata è stata denominata *equivalenza in moto*.

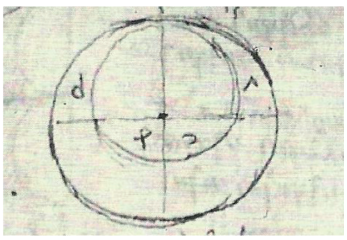
Vogliamo ricordare anche che, in generale, con un disegno mediante riga e compasso si può sempre trasformare un rettangolo in un quadrato: tenendo conto degli studenti a cui ci si rivolge, è possibile progettare un percorso adatto alle loro capacità che li porti a ricordare una successione dei passaggi per comprendere il significato di questa costruzione. La proposizione 14 del secondo libro degli *Elementi* di Euclide potrebbe essere ad esempio un valido supporto didattico. Tale proposizione, tra l'altro, doveva essere evidentemente nota anche a Leonardo visto che ritroviamo un suo disegno nel *Codice* direttamente riconducibile ad essa.



Codice Atlantico, Foglio 469 recto

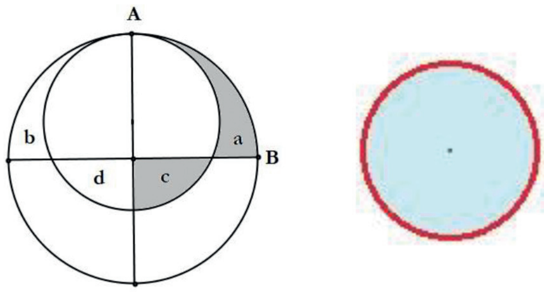
In definitiva, dato che un rettangolo è sempre trasformabile in un quadrato, si può dire che tutte le figure viste in questo paragrafo sono state quadrate. Inoltre, come detto, poiché le equivalenze sono state dedotte da un movimento è lecito parlare di *quadratura in moto*.

Si è già sottolineato quanto sia importante, nell'osservare una figura statica, essere capaci di percepire eventuali sue parti in movimento: ciò permette di generare quelle intuizioni utili alla risoluzione di problemi geometrici. Vediamo il seguente esempio che ci viene fornito ancora da Leonardo, presente nel foglio 422 Verso. Sotto al disegno relativo al problema egli scrive solamente: «ab falcate vagliano cd mezze porzioni, e li 2 circuli son doppi l'uno dell'altro». Scoprire questa equivalenza non è proprio banale

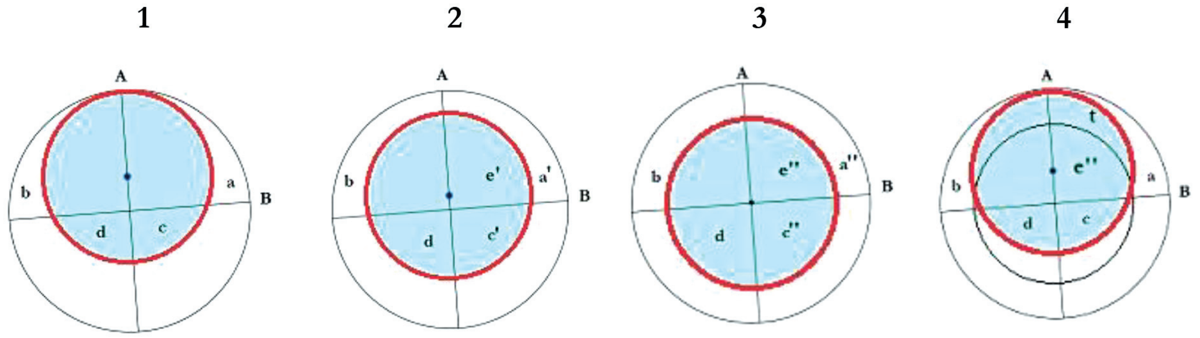


neanche per un adulto esperto in matematica; per questo, per agevolare il compito degli studenti, vengono consegnati loro una base riproducente il disegno di Leonardo dove il cerchio maggiore ha raggio **R** e un lucido su cui è rappresentata una figura mobile di forma circolare di raggio **r** che abbia area metà del precedente (e quindi di fatto uguale al cerchio più piccolo rappresentato nell'altra figura). Si può verificare abbastanza facilmente quest'ultima affermazione osservando che il diametro della figura mobile coincide con la distanza **AB**.

Con l'abitudine ormai acquisita nelle precedenti attività è presumibile, dopo aver sovrapposto il



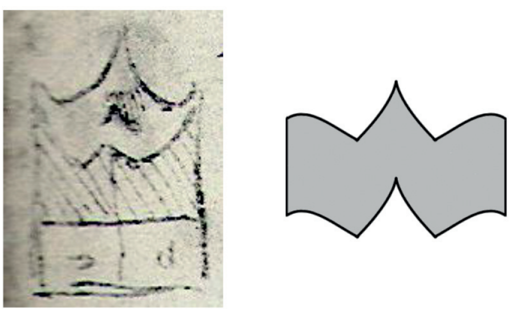
lucido sulla base facendo in modo che i due cerchi uguali coincidano, di cominciare l'esplorazione muovendo la figura mobile nelle varie direzioni; può venire in mente di vincolare tali movimenti, da un certo momento in poi, facendo in modo tale che il centro della figura mobile si sposti lungo uno dei diametri disegnati sulla figura di base, per esempio quello passante per **A** (è possibile che in classe sia lo stesso insegnante a fornire, in caso di necessità, tale suggerimento). Qui di seguito sono riportati alcuni disegni per simulare i movimenti descritti. Osservando il terzo si comprende che $\mathbf{a}'' = \mathbf{e}'' = \mathbf{c}''$; inoltre, detto **S** il semicerchio del lucido, si deduce che $\mathbf{S} = \mathbf{c}'' + \mathbf{e}''$. Gli studenti debbono spostare diverse volte il lucido prima di convincersi che la superficie che $\mathbf{a}''$ «perde» a favore di $\mathbf{e}''$ è uguale alla superficie che $\mathbf{c}''$ «perde» a favore di $\mathbf{e}''$. Non è importante che, inizialmente, il loro modo di esprimersi non sia «tecnico»: è fondamentale che invece riescano ad avere l'intuizione sopra descritta. Solo successivamente si potrà pretendere, eventualmente, una formalizzazione di quanto scoperto: se nella figura 4 si ricava che $\mathbf{S} = \mathbf{e}'' + \mathbf{t} + \mathbf{c}$, si avrà che $\mathbf{c}'' + \mathbf{e}'' = \mathbf{e}'' + \mathbf{t} + \mathbf{c}$ e, sempre per la già citata Nozione Comune 3, $\mathbf{c} = \mathbf{c}'' - \mathbf{t}$ e, allo stesso tempo,



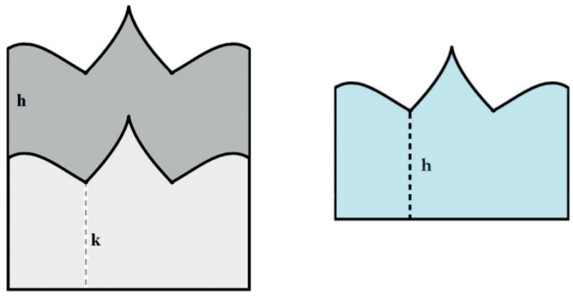
a = **a**″ − **t**. Dal confronto di queste due ultime relazioni si ha dunque che **a** = **c** che era quanto si doveva dimostrare. Riteniamo che l'idea formulata da Leonardo è straordinaria e dall'alto valore formativo: se non si intuisse il movimento del cerchio più piccolo all'interno di quello più grande l'equivalenza tra le due superfici **a** e **c** sarebbe estremamente difficile da dedurre a meno di lunghi e faticosi calcoli e quindi non adatti per un adolescente.

La seguente è un'ulteriore attività sempre ispirata dai disegni di Leonardo e finalizzata alla scoperta di equivalenza mediante una quadratura in moto: è da realizzare solo a conclusione delle precedenti esperienze. La riteniamo molto formativa perché sono gli studenti che devono costruire la base e, per la sua quadratura, la relativa figura mobile. Un disegno che si presta bene a questo tipo di attività è quello sotto ancora una volta tratto dal foglio 505 recto.

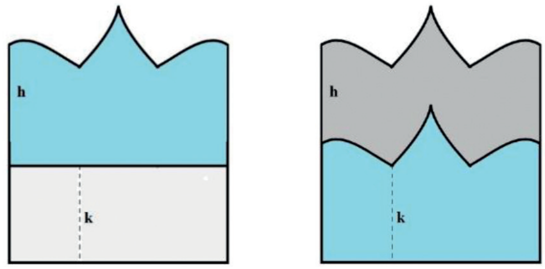
Si parte da una riproduzione di una parte di questa figura che è proprio la superficie da quadrare. Perciò che si richiede è necessario che gli studenti abbiano effettuato un lavoro di analisi delle quadrature



precedentemente affrontate e di sintesi delle proprietà generali. In questo modo saranno in grado di costruire la base: basterà capire che la distanza **k** deve essere uguale a **h**. Tale considerazione sarà utile anche per determinare l'altezza minima della figura mobile uguale alla figura inferiore che si è formata



sulla base. Detta **B** tutta l'area della superficie della base e **M** l'area della superficie della figura mobile, seguirà l'uguaglianza dell'area della superficie **B** – **M** in entrambe le figure che fornirà la quadratura della figura iniziale.



Quando si chiede agli studenti di inventare nuove figure da quadrare con la tecnica della quadratura in moto, in genere la loro fantasia non ha limiti: di seguito alcuni lavori prodotti con diversi materiali.

IIC - IIE, I.C. Giovanni Falcone, Grottaferrata

IID - IIE, I.C. Leonardo

Si ritiene che saper applicare la tecnica della quadratura in moto significa aver sviluppato un vero e proprio «sesto senso»: questo contribuisce a incrementare sensibilmente le capacità geometrico percettive decisive per la risoluzione di problemi nei quali si richiede di stabilire un'equivalenza tra due figure anche molto diverse tra loro.

6. – Conclusioni

È incredibile constatare l'interesse manifestato dagli studenti coinvolti nelle attività ispirate a Leonardo. La mostra da loro ideata e animata, della quale si è riportata in questo lavoro qualche immagine, è solo un esempio di che cosa essi siano in grado di realizzare quando si appassionano in ciò che fanno. Il loro impegno, infatti, è palpabile, la volontà di approfondire evidente, la curiosità sembra non avere limiti. Questi aspetti sono determinanti per l'apprendimento.

È fuori dubbio che l'attenzione portata su questioni puramente geometriche ha migliorato le capacità di percezione delle figure da parte degli studenti. Poiché la didattica è una scienza e, come tale, è in continua evoluzione, varrà sempre la pena di ridiscutere in futuro i dettagli delle varie proposte, sulla base della risposta dei ragazzi.

Come spiegare il coinvolgimento degli studenti in queste attività? Evidentemente sono molto affascinati dall'idea di occuparsi di ciò che ha interessato Leonardo. Questa constatazione conferma che una scelta mirata dei contenuti e dei temi da trattare, ispirata alla storia del pensiero matematico, è molto importante per suscitare motivazioni.

Occorre poi tenere sempre presenti gli obiettivi formativi che s'intendono far raggiungere agli studenti: la matematica descritta da Leonardo è assolutamente comprensibile per la mente degli adolescenti che frequentano il primo ciclo d'istruzione perché la ricerca di strategie risolutive è basata essenzialmente sull'intuizione geometrica stimolata dall'osservazione delle figure. Quindi può essere compresa senza l'ausilio di un linguaggio troppo tecnico che crea tante difficoltà agli studenti di questa età. I ragazzi, comunque, sono sempre stati incoraggiati a raggiungere conclusioni rigorose secondo un certo tipo di logica per loro sostenibile volta a formare un pensiero razionale.

L'approccio di Leonardo ci ha insegnato che la creatività artistica assume un ruolo importante in matematica: la bellezza estetica ha un forte potere attraente. In questo modo, anche quegli studenti solitamente non interessati a questa disciplina hanno la possibilità di avvicinarsi per «via laterali» realizzando disegni e arricchendoli da un punto di vista artistico, partecipando come tutti gli altri. Quando, a un certo punto, questi studenti porranno domande che richiederanno inevitabilmente approfondimenti, saranno invitati a fare considerazioni anche di natura matematica. Il ruolo svolto dai materiali, più volte menzionati in questo lavoro, è per questi ragazzi ancora più importante: l'entusiasmo che la scoperta, specie se autonoma, delle proprietà degli oggetti matematici che questi rappresentano può essere coinvolgente al punto da motivarli a cominciare ad interessarsi alla disciplina in un modo completamente nuovo rispetto al passato. Essere riusciti a far lavorare con passione studenti di solito disinteressati, come pure far lavorare con partecipazione attiva coloro che hanno delle difficoltà nello studio della matematica, sono grandi successi da un punto di vista didattico che, in questo caso, porterebbero la firma di Leonardo!

Desidero ringraziare sinceramente Benedetto Scoppola per i preziosi commenti e suggerimenti sul mio lavoro, tutti i docenti, genitori e soprattutto gli alunni che hanno partecipato alla mostra dedicata a Leonardo dando vita ad una giornata difficile da dimenticare. Per approfondimenti su tutte le attività realizzate, si può contattare l'autore dell'articolo al seguente indirizzo: pasquazi@mat.uniroma2.it.

L'autore è supportato dal Progetto del MIUR per i dipartimenti di Eccellenza assegnato al Dipartimento di Matematica, Università di Roma Tor Vergata, CUP E83C18000100006.

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

[1] LAURA CATASTINI, *Il pensiero allo specchio*, La Nuova Italia, 1990.

[2] LAURA CATASTINI e FRANCO GHIONE, *Immagini analogie e sassolini nei pitagorici*, Punti Critici, Anno II, n.3, 2000.

[3] Stanislas Dehaene, *Il pallino della matematica*, Raffaello Cortina Editore, Milano, 2010.
[4] Federigo Enriques, *Insegnamento dinamico*, Periodico di matematiche, s. IV, vol. I (1921), pp 6 - 16.
[5] Franco Ghione e Daniele Pasquazi, *I ludi geometrici di Leonardo da Vinci, un gioco per avvicinarsi al concetto di area*, Opera Nazionale Montessori, Roma, 2017.
[6] Giamblico, *Il numero e il divino*, Rusconi Libri, Santarcangelo di Romaga (Rn), 1995.
[7] P. Johnson Laird, *Modelli Mentali*, Il Mulino, Bologna, 1988.
[8] Roberto Marcolongo, *Leonardo da Vinci nella storia della matematica e della meccanica*, Atti Congresso Bologna 1 (1929), 275-293.
[9] Maria Montessori, *Psicogeometria*, Edizioni Opera Nazionale Montessori, Roma, 2011.
[10] Raniero Regni e Leonardo Fogassi, *Maria Montessori e le neuroscienze*, Fefè Editore, Roma, 2019.
[11] Paul Valéry, *Introduzione al metodo di Leonardo da Vinci*, Abscondita, Milano, 2007.


Daniele Pasquazi

Daniele Pasquazi, laureato in matematica presso l'Università "Tor Vergata" nel 1998, è insegnante di matematica dal 1999. Nel dipartimento di matematica della stessa università sta terminando un dottorato di ricerca in didattica, è docente a contratto per il corso "Laboratorio e didattica della matematica" e si occupa, inoltre, di formazione di docenti. L'attività di formazione docenti è svolta anche per il polo di Roma dell'Accademia Nazionale dei Lincei e per l'Opera Nazionale Montessori in merito al progetto di sperimentazione del metodo nella scuola secondaria di primo grado.