*Matematica, Cultura e Società*

Rivista dell'Unione Matematica Italiana

Franco Ghione

# Pensieri matematici nell'immaginario di Leonardo da Vinci

*Matematica, Cultura e Società. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1*, Vol. **4** (2019), n.3, p. 217–236.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=RUMI_2019_1_4_3_217_0>

Matematica, Cultura e Società. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2019.

Matematica, Cultura e Società – Rivista dell'Unione Matematica Italiana
Serie I, Vol. 4, N. 3, dicembre 2019, 217-236

# Pensieri matematici nell'immaginario di Leonardo da Vinci

FRANCO GHIONE
Affiliazione: Università di Roma Tor Vergata
E-mail: ghione@axp.mat.uniroma2.it

**Sommario:** *In questo lavoro si esamina il pensiero di Leonardo, fortemente immaginifico, ingenuo, intuitivo basato su una "logica delle immagini" di grande interesse anche didattico, alle prese con alcune idee matematiche: la prospettiva prima di tutto, ma anche i grandi problemi impossibili ereditati dalla matematica greca come la quadratura del cerchio o la duplicazione del cubo che Leonardo non può credere impossibili. Non mancano cenni sulle parabole e sulle ellisse di gran moda tra i pittori, a partire dal '400, per rappresentare lo scorcio di un cerchio. Idee che rinascono in occidente deboli echi della grande scienza araba di 5 secoli prima.*

**Abstract:** *We analyse here Leonardo's work which is strongly imaginative, ingenuous and intuitive. Leonardo's thinking, which is also very interesting for the related pedagogy, is based upon the 'logic of images' as expression of some very important mathematical ideas: firstly prospective drawing but also some problems inherited from the Greek mathematicians such as squaring the circle and duplicating the cube which Leonardo didn't believe were impossible to solve. Leonardo's work also includes nods to eclipses and parabolas, mathematical objects that were used by painters in the 1400s to represent the foreshortening of a circle. These ideas emerge in the west as weak echoes of the great scientific achievements of Arabic science of 5 centuries before.*

Penso che non sia possibile avvicinarsi ai pensieri matematici di Leonardo da Vinci, alle sue lunghe e a volte ossessive visioni, senza sforzarsi di capire la sua estrema diversità, il suo essere caso unico, punto singolare in uno spazio privo di possibili vicinanze che permettano accostamenti con altre personalità. Le difficoltà aumentano se pensiamo alla forma caotica di ciò che, a parte i dipinti, ci è rimasto. Quaderni, appunti, disegni, pensieri, note, sparsi confusamente in mezza Europa, spesso saccheggiati da mercanti senza scrupoli. La nostra principale fonte è il *Codice Atlantico* [1] – atlantico per il grande formato dei fogli – una raccolta miscellanea di 1750 unità riunite alla rinfusa e senza possibilità di datarle, in un unico codice dallo scultore Pompeo Leoni alla fine del '500 e poi ricomposto in 12 volumi. Il codice abbraccia l'intera attività di Leonardo dal 1478 fino alla morte ed è stato ristampato dall'editore Giunti nel 2000 in tre magnifici volumi con un accurato apparato critico che rende accessibile a ognuno l'immenso lavoro racchiuso in quei fogli. La lettura del Codice aumenta il nostro sbigottimento, la meraviglia, il disordine mentale e la nostra impresa ci appare ancora più difficile. Per fortuna ci vengono in aiuto alcune interessanti considerazioni di due importanti poeti del '900, vicini alla matematica, fortemente impressionati, in modi assai diversi, dalla figura di Leonardo da Vinci: Paul Valéry [2] che scrisse in età giovanile un lungo saggio, sul quale tornerò più avanti, sul *metodo* di Leonardo, simbolo emblematico di una logica per immagini e Leonardo Sinisgalli, che nel suo celebre *Furor mathematicus* [3] tornerà più volte sulla figura di Leonardo, scrivendo tra l'altro:

> Leonardo ha precisato come meglio ha potuto gli attributi fisici della *persona poetica*: lo scatto, l'impeto, tutte le facoltà di presentimento, tutta la gamma delle soluzioni irriflesse.

Mi è quindi impossibile tentare, come altri avevano pure tentato [4], di raccogliere i pensieri matematici di Leonardo e di esporli in modo lineare come tanti

*Accettato*: il 1 settembre 2019.

Fig. 1 – La Vergine, S. Anna e il Bambino (1510) Louvre, Parigi

quadri appesi, uno dopo l’altro, sulle pareti di una immaginaria galleria matematica, perché ognuno di questi pensieri non è solo matematico ma fa parte di un atto che coinvolge insieme fantasia, poesia, innocenza, speranze, ragionamento, analogia e soprattutto bellezza. È da qua che, dovendo comunque partire, possiamo iniziare: dalla bellezza che Leonardo ha ricercato in vari modi, per tutta la vita e con tutti i mezzi compresi quelli che la scienza e la matematica potevano suggerire.

Osservando questo straordinario dipinto, *La Vergine, S. Anna e il Bambino*, che Leonardo realizza nella sua piena maturità (a 56 anni circa), centrato su questo delicato movimento spazio-temporale, di tre generazioni – la madre Sant’Anna, la Madonna e il figlio con l’agnellino – faccio fatica a liberarmi dalla tentazione di pensare che la bellezza possa essere universale, indipendente dal contesto storico, culturale, geografico, che possa essere un valore assoluto, fuori dal tempo e da tutti riconosciuto come una dimostrazione di Euclide, una folgorante intuizione, un lampo divino reso concreto dalla geniale maestria dell’artista.

Torniamo in noi, lucidi, consapevoli della complessità che ingarbuglia ogni cosa, poiché ciò che ci ha per un attimo sedotti e che ci appare come un sogno, slegato da ogni realtà materiale, è invece in Leonardo, l’ultimo atto di un lungo processo di ricerca, l’ultimo atto di una continua tensione fatta di improvvise intuizioni e di instancabili tentativi, di rimandi a una cultura anche scientifica, lungamente praticata, che non deve sfuggirci nell’abbaglio della bellezza. Basta osservare nelle pagine dei suoi appunti gli studi dei volti umani non meno poetici e delicati di quelli che ritroviamo nei suoi celebri dipinti.

Fig. 2 – Cartone preparatorio 1500-1505 National Gallery London

I ritratti delle due donne, la madre e la figlia, che secondo alcuni rappresentano la madre naturale, con la quale Leonardo avrebbe vissuto da piccolo e la madre adottiva, una nobildonna che il padre, notaio in Firenze, prese come moglie, sono il frutto di una ricerca che durò tutta la vita. Ecco alcuni studi sui volti femminili il cui misterioso sussurro l'artista indagò lungamente.

Fig. 3a – Studio per testa di donna, Royal Collection, Windsor

Fig. 3b – Studio per la testa di Leda, Royal Collection, Londra

Non c'è forse una impensabile, magnifica, stessa poesia anche nei 50 poliedri che Leonardo dipinse per il suo maestro di matematica e amico Luca Pacioli per illustrare la sua *Divina proporzione*?


Fig. 4a

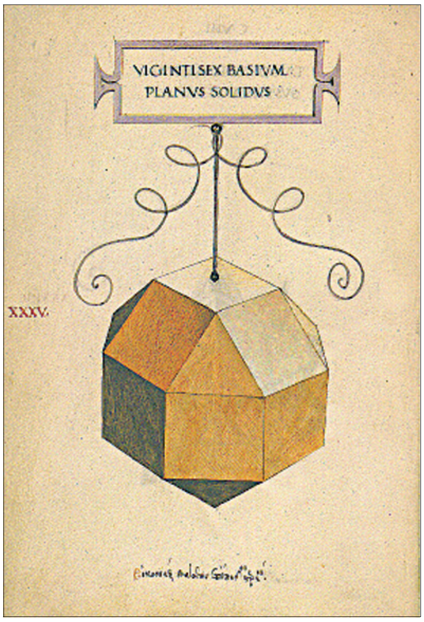


Fig. 4b

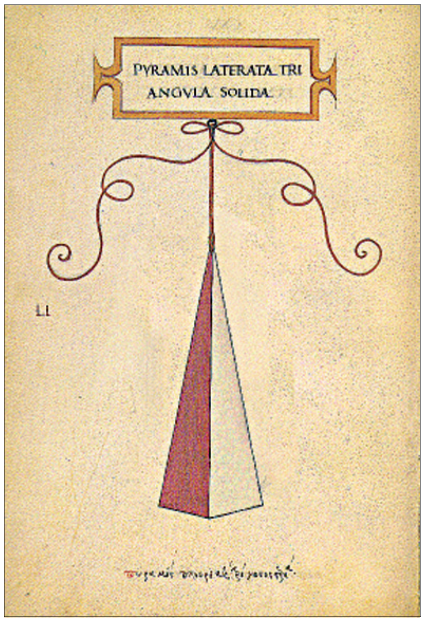


Fig. 4c

Quanta delicatezza nei colori, nella perfetta prospettiva, nel capriccioso snodarsi della fettuccia e, infine, nello stendardo che vorrebbe sancire l'antica identità verbale dell'oggetto: COLVMNA LATERATA PENTAGONA VACVA, VIGINTISEX BASIVM PLANUS SOLIDUS, PYRAMIS LATERA TRIANGVULA SOLIDA!

## La nascita della geometria proiettiva

Diversamente da quanto si potrebbe credere c'è molta matematica nell'humus che si viveva nelle botteghe degli artisti, nella cultura di ogni "arte" : dalla pittura, alla scultura, all'architettura, alla meccanica. È un'aria che pervade con più o meno intensità ogni bottega. Un vento che viene dall'oriente, che è passato per la Pisa di Fibonacci, e che ha riempito di sé le scuole d'abaco: le prime forme di alfabetizzazione matematica europee. Un vento carico di nuovi profumi che soffiava sulla nostra penisola portando con sé nuove rivoluzionarie idee ma anche un'aria antica. Non solo tornavano alla luce gli *Elementi* di Euclide o l'*Almagest* di Tolomeo, ma anche Archimede, Erone, la *Geografia* di Tolomeo che rese possibile il viaggio di Colombo e l'*Ottica* di Euclide che rese possibile lo sviluppo della prospettiva.

Filippo Brunelleschi era riuscito nel 1436, attraverso un'opera ingegneristica senza precedenti, a chiudere la grande cupola di Santa Maria del Fiore, come dirà Leon Battista Alberti *sì grande, erta sopra e' cieli, ampla da coprire con sua ombra tutti e' popoli toscani* [5], e, 25 anni dopo, malgrado la sua morte, suoi discepoli riuscirono a edificare la lanterna e posare con incredibili macchinari la gigantesca Palla dorata che la chiudeva, opera realizzata nella bottega di Andrea del Verrocchio, il maestro col quale il giovane Leonardo fece il suo apprendistato. In quei giorni Leonardo aveva 9 anni e deve aver visto realizzarsi quelle opere grandiose, e curiosato nel cantiere e sentito i fantastici racconti che ancora oggi aleggiano intorno a quella costruzione e al modo di realizzarla che pareva impossibile. Leon Battista Alberti aveva rotto drasticamente con la tradizione medioevale che voleva segrete le pratiche dei maestri di bottega e pubblicava sia in latino (1435) che in volgare (1436) il *De pictura* dove esponeva apertamente un suo *Modo ottimo* per rappresentare su un piano la profondità dello spazio. Vale la pena, per la ricchezza di contenuti e gli influssi che quest'opera ebbe su Leonardo, rileggere in senso moderno la visione albertiana. È intanto per lui la geometria, quella degli elementi di Euclide, da cui si deve partire:

> *Piacemi il pittore sia dotto, in quanto e' possa, in tutte l'arti liberali; ma in prima desidero sappi geometria. Piacemi la sentenza di Panfilo, antiquo e nobilissimo pittore, dal quale i giovani nobili cominciarono ad imparare dipignere. Stimava niuno pittore potere bene dipignere se non sapea molta geometria. I nostri dirozzamenti, dai quali si esprieme tutta la perfetta, assoluta arte di dipignere, saranno intesi facile dal geometra. Ma chi sia ignorante in geometria, né intenderà quelle né alcuna altra ragione di dipignere. Pertanto affermo sia necessario al pittore imprendere geometria.* [5, III.15]

Infatti aveva definito la prospettiva attraverso una operazione geometrica

> *niun'altra cosa cercarsi se non che in questa superficia* [quella del quadro] *si representino le forme delle cose vedute, non altrimenti che se essa fusse di vetro tralucente tale che la pirramide visiva indi trapassasse, ...adunque chi mira una pittura vede certa intersegazione d'una pirramide. Sarà adunque pittura non altro che intersegazione della piramide visiva, sicondo data distanza,* [5, I.12]

La *pirramide* cui Alberti si riferisce è quella che considera Euclide nella sua *Ottica* [6] che ha come base il contorno della cosa vista – che può avere una qualsiasi forma- ed è formata dalle semirette (i raggi visivi in Euclide) che dall'occhio colgono la cosa vista. Leonardo aveva bene imparato la lezione e ripeterà la stessa idea accompagnandola con una immagine esplicativa più di qualsiasi parola [7. Vol I, pg. 53]:

> *Prospettiva non è altro che vedere uno sito dirieto uno vetro piano e ben' trasparente, sulla superficie del quale siano segniate tutte le cose che sono da esso vetro indirieto: le quali si possano condurre per piramidi al punto dell'ochio e esse piramidi si tagliano su detto vetro.*

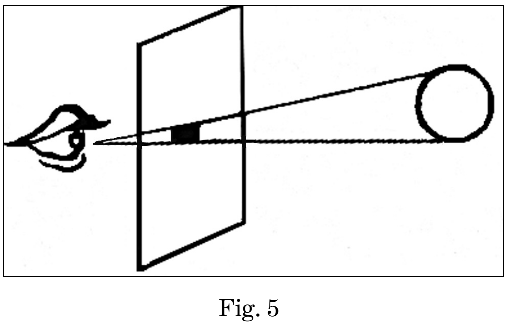

Fig. 5

Alberti propone ai pittori, matematici, scienziati futuri un progetto di ricerca che avrà bisogno, come vedremo, di diversi secoli prima di ritenersi compiuto:

> *Ora poi che dicemmo la pittura essere intercisione della pirramide, convienci investigare qualunque cosa a noi faccia questa intersegazione conosciuta.* [5, I.13]

Leonardo partecipa a questo nuovo progetto di ricerca a suo modo immaginando uno strumento pratico per conoscere questa *intersegazione* e con il quale rappresentare ogni cosa del mondo, anzi il mondo stesso:

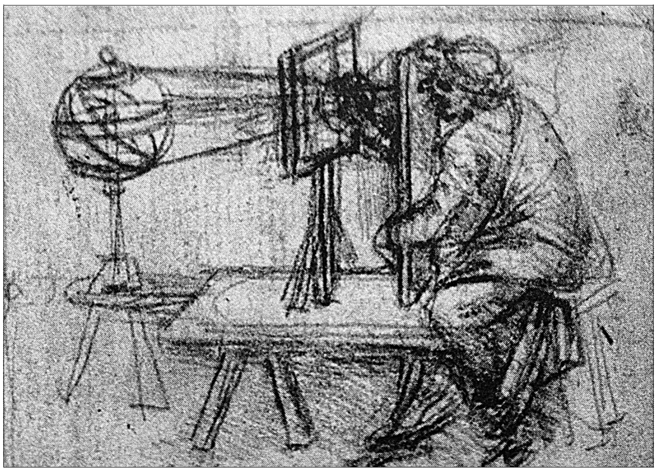

Fig. 6 – CA folio 5 r

Ma Alberti chiedeva una *investigazione* teorica, astratta, matematica e inizia queste ricerche con una sua proposta che ha in germe tutte queste caratteristiche. Intanto, rivoluzionando le impostazioni precedenti, compresa quella euclidea, per le quali gli oggetti di studio della geometria erano le diverse forme – triangoli, poligoni, circonferenze ecc. – indipendentemente dello spazio che le conteneva, ora è invece lo spazio *vuoto* l'oggetto di studio indipendentemente dai personaggi che si vorranno collocare all'interno. C'è dunque, crediamo per la prima volta, una oggettivazione dello spazio geometrico come oggetto in sé che proprio, e solo, per essere diventato oggetto può essere visto e anche rappresentato. Lo spazio nasce paradossalmente insieme a una sua qualche rappresentazione, nasce insieme all'occhio che lo guarda e perché possa essere guardato. Ma come definire lo spazio astratto, lo spazio vuoto? L'idea è molto semplice per un lettore contemporaneo, ma all'epoca doveva essere straordinaria. Cominciando da due dimensioni Alberti immagina questo "oggetto" – il *piano di terra* – come un pavimento vuoto insieme all'occhio che lo guarda lungo una fissata direzione che arriva fino all'infinito – il *razzo centrico* – e determina così, sul pavimento, delle *linee di profondità* con quella direzione e delle *linee trasverse* ad esse perpendicolari che formano un reticolato di rettangoli che Alberti immagina quadrati con il lato di un braccio, (un braccio perché è l'uomo la misura di ogni cosa) come fossero infinite mattonelle con le quali viene piastrellato questo astratto ed infinito pavimento. I raggi visivi che colgono i punti sul pavimento si proiettano sul *vetro tralucente* dove sarà possibile *investigare* il modo col quale questa *intersegazione* avvenga.

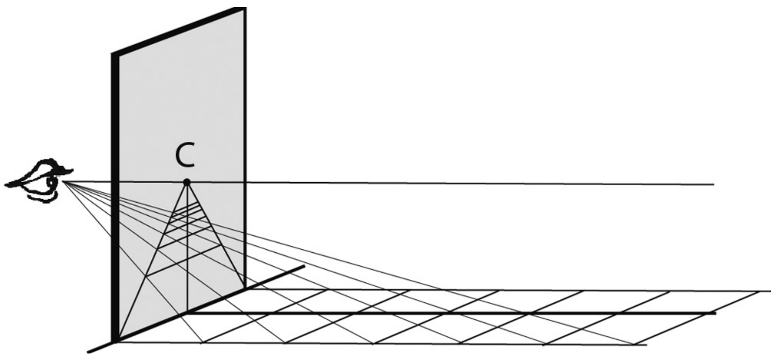


Fig. 7a

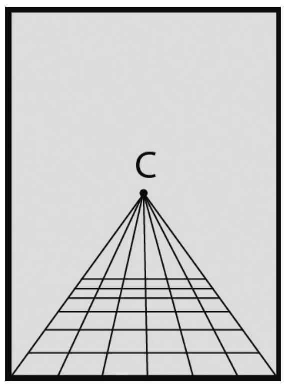


Fig. 7b

È con rigore e profondità geometrica che Alberti *intersega* la *pirramide* che ha come base questa rete di linee e come vertice l'occhio e scopre che le linee profondità si proiettano sulla superficie del quadro in segmenti che convergono verso un punto C, che Alberti chiama *punto centrico*, nel quale la direzione dello sguardo la interseca. Inoltre fornisce una regola precisa per costruire geometricamente dove si proiettano le linee trasverse: esse si proiettano in linee parallele che si avvicinano tra loro secondo precisi rapporti man mano che si allontanano dall'occhio. In questo modo sappiamo come si proiettano le singole mattonelle e, di conseguenza, ogni possibile punto del piano individuato dalla mattonella che occupa definibile, come il piano cartesiano, da due numeri interi. Alberti doveva essere molto orgoglioso di questi suoi risultati tanto da chiamare il suo metodo il *modo ottimo* ed affermare in relazione ai dipinti che ne discendevano:

> *quelle dimostrazioni quali, fatte da noi, gli amici, veggendole e maravigliandosi, chiamavano miracoli.* [5, I.19]

Il passaggio alle tre dimensioni è ora facile dato che la posizione dell'occhio individua anche una direzione verticale perpendicolare al piano di terra le cui linee si proiettano ancora verticalmente.

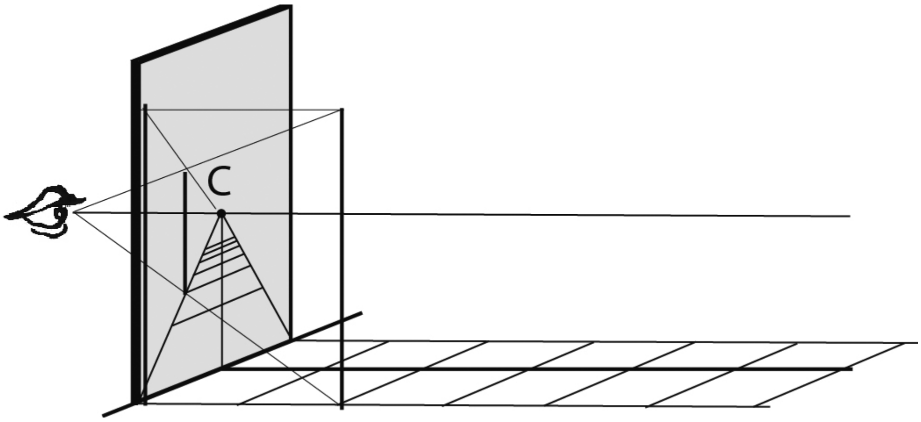


Fig. 8a

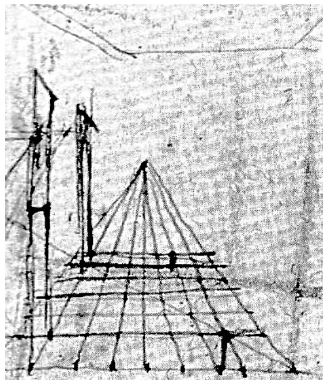

Fig. 8b – CA folio 44 r

Queste nuove idee, magari modificate, riaggiustate, semplificate, dovettero circolare nelle botteghe dei pittori, ognuna delle quali doveva aver escogitato un proprio metodo per rappresentare la profondità spaziale. Piero della Francesca, secondo Vasari [8, pg. 380] il *miglior geometra che fusse ne' tempi suoi*, scriverà intono al 1480 il magnifico trattato, il *De prospectiva pingendi*, cercando di seguire il metodo assiomatico deduttivo di Euclide quando ancora la matematica era fusa con le arti e i mestieri. Giusta Nicco-Fasola nella sua introduzione al *De prospectiva pingendi* scriverà nel 1942 una straordinaria analisi dei rapporti tra arte e scienza nel Rinascimento dove, tra l'altro, azzarderà l'opinione [9, pg. 11]:

> *Onde molti artisti sono scienziati e creatori di scienza, ma senza perdere, per il modo di questa loro attività, la notazione individuale, che massimamente distingue la scienza del Rinascimento da quella di Galileo. E che si debbano ad artisti i fondamenti di molte scienze ha influito per dare loro quella fisionomia, quell'esigenza di simmetria che durò abbastanza a lungo o forse ancora dura.*

## L'ultima cena

Certo Leonardo aveva assimilato con entusiasmo e passione le nuove idee che circolavano nelle più importanti botteghe d'arte tanto che tra i suoi tanti progetti mai terminati vi era anche l'intenzione di scrivere un trattato sulla pittura. Fu probabilmente il suo amico e discepolo Francesco Melzi, che stette vicino al maestro fino alla sua morte e ne ereditò le carte, a mettere insieme gli appunti di Leonardo sparsi in 18 codici oggi in gran parte dispersi, col titolo *Trattato della Pittura* [10, pg. 66] dove leggiamo:

> *Quelli che si innamorano della pratica senza scientia sono come nocchieri che entrano in naviglio senza timone o bussola, che mai hanno certezza dove si vadano. Sempre la pratica deve essere edificata sopra la buona teoria, della quale la prospettiva è guida e porta e senza questa nulla si fa bene.*

Il trattato, oltre alla prospettiva, contiene tutto ciò che possa avere a che fare con il dipingere: dai paesaggi, ai volti, ai corpi, ai vestiti, alla natura, alla morale e tra questo una interessantissima analisi geometrica delle ombre la cui valenza didattica non è stata ancora pienamente sfruttata se non da Emma Castelnuovo [11] che definiva una conica come l'ombra di una sfera.

Un esempio eccellente di come ricerche che oggi consideriamo indipendenti l'una dall'altra abbiano confluito, nel bene e nel male, nella realizzazione di uno dei più importanti capolavori di Leonardo: *Il cenacolo* a Santa Maria delle Grazie a Milano. Il dipinto è realizzato su una parete trattata con una nuova tecnica fisico-chimica, ideata da Leonardo che gli consentiva di correggere via via il dipinto e far risaltare meglio gli effetti luminosi. Purtroppo il risultato non fu buono perché il fondo trattato in quella maniera non resse l'umidità del luogo e il dipinto si deteriorò progressivamente. Tuttavia fu proprio questa nuova tecnica di preparazione del fondo, che gli permise di realizzare giorno dopo giorno, pennellata dopo pennellata, coi tempi che gli erano propri, il capolavoro che oggi, dopo vari restauri, possiamo pienamente godere.

Abbiamo ancora qualche schizzo preparatorio per fissare i movimenti, le posture, i volti, gli atteggiamenti emotivi degli apostoli che siedono attorno a Cristo nell'ultima cena.

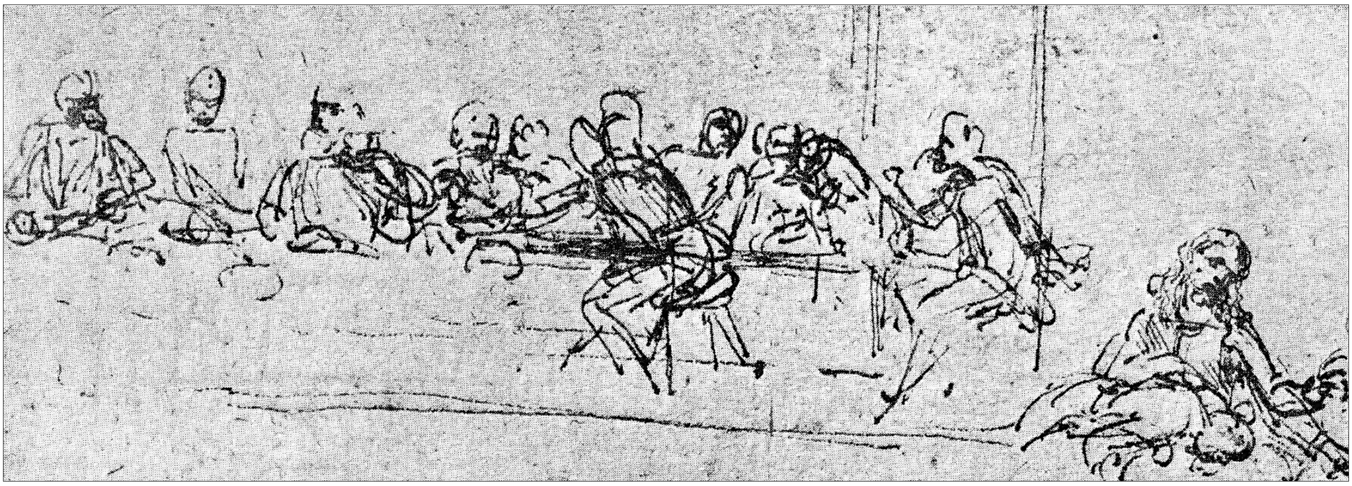

Fig. 9 – Richter, Vol I, PL XIV

C'è in Leonardo la consapevolezza dell'esistenza di una sorta di *intelligenza del corpo*, come dirà Sinisgalli, che attraverso l'anatomia e il movimento riesce a catturare l'attimo, a fissare lo stato capace di comunicare la voce interiore del corpo.

*L'eresia di Leonardo è tutta qui, nell'aver invertito i gradi della gerarchia. Noi siamo ancora impreparati a capire pienamente questa verità. Secoli e secoli di indagini ci hanno fatto trascurare la grandiosa sfera delle nostre attitudini fisiche. Noi ci siamo disprezzati come animali, e ci siamo venduti come angeli.* [3, pg. 70]

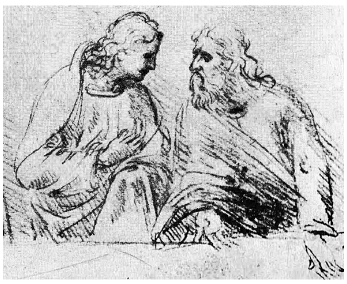

Fig. 10a

Fig. 10b – Richter, Vol I, PL XLVI

Fig. 10c

Non solo, la fisica, la chimica, l'anatomia, la dinamica si compenetrano in questo lavoro ma anche la geometria fa la sua parte, parte fondamentale senza la quale *nulla si fa bene.* Seguendo la lezione di Alberti, non sappiamo in quale preciso modo geometrico, Leonardo costruisce a monte lo spazio vuoto dove collocare gli apostoli seduti al tavolo e il Cristo. Il punto di fuga, che calamita lo sguardo di chi osserva il dipinto, è nei suoi occhi e da lì, da quel centro, ogni cosa si dispiega.

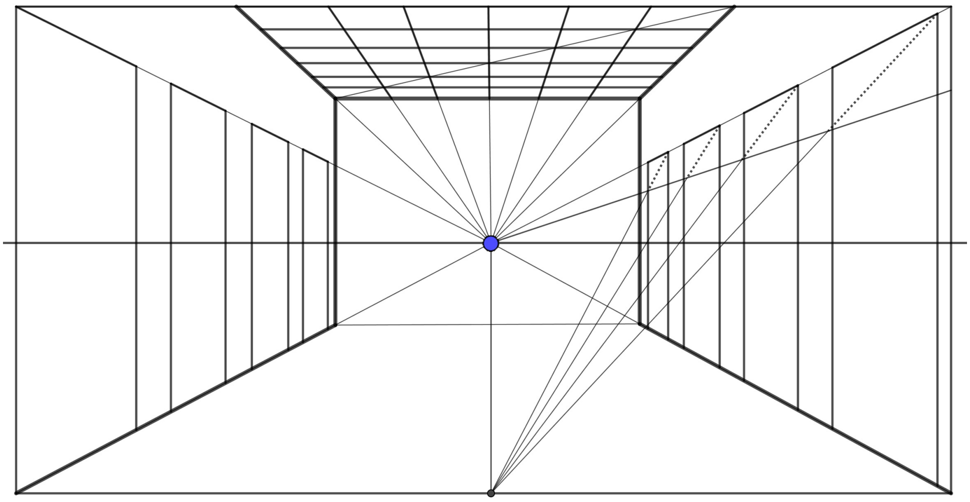

Fig. 11

La correttezza prospettica di un dipinto si può verificare tenendo conto di un teorema fondamentale che già troviamo nell'Ottica di Euclide ([6] teorema 6) secondo il quale segmenti paralleli, i cui prolungamenti si allontanano dall'occhio, si vedono convergenti. Nella figura, supponendo gli arazzi uguali e verticali, i segmenti evidenziati con un tratteggio, essendo diagonali di uguali rettangoli, sono nella realtà paralleli tra loro, essi sono quindi visti convergere e per questo, se desideriamo che la visione del dipinto coincida con la visione della realtà, i loro prolungamenti devono convergere. Cosa che, di fatto, avviene confermando l'esattezza matematica dell'impianto prospettico.

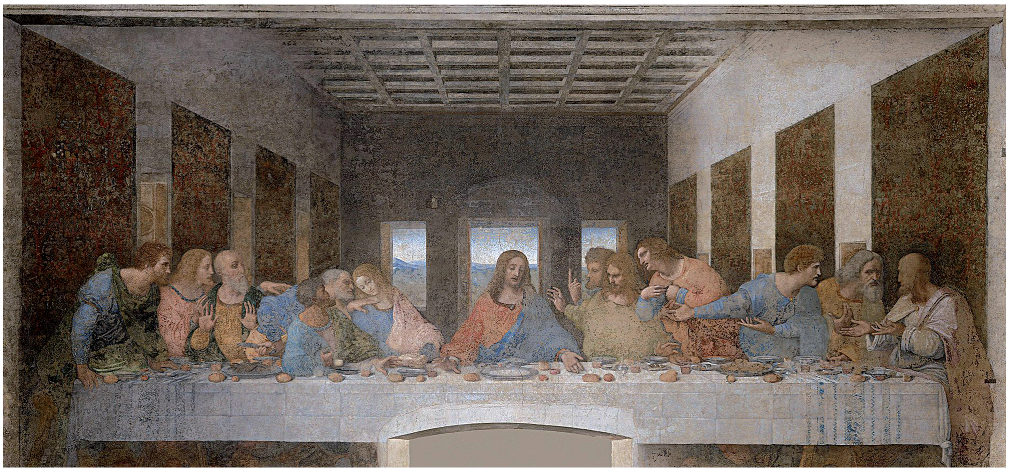

Fig. 12 – L'Ultima cena, Santa Maria delle Grazie, Milano, 1494-98

Il risultato è uno di quei *miracoli* dei quali parlava Alberti. L'affresco, con la sua perfetta costruzione prospettica, non solo nella trabeazione del soffitto, ma anche nel degradare degli arazzi sulle pareti, ci porta in quella stanza come se Leonardo avesse, per usare un termine moderno, *fotografato* il Cristo nel momento più drammatico della sua passione nell'atto di dire: "In verità, in verità vi dico: uno di voi mi tradirà".

I pittori, e Leonardo tra questi, avevano oramai messo a punto strumenti geometrici capaci di "fotografare" non solo un ambiente architettonico o una scena reale ma anche ciò che è solo immaginato dando all'immaginazione una nuova concretezza, una materialità capace di rivoluzionare la tecnologia, e la società intera. Pensiamo a come, sulla base dei disegni di Leonardo, si sia stati in grado, a distanza di 500 anni, di realizzare materialmente i suoi straordinari macchinari.

### Lo scorcio di una circonferenza

Il progetto di ricerca di Alberti che domandava di *investigare* su come un piano interseca una *pirramide* porterà a risultati molto interessanti per i pittori nel caso particolare relativo alla visione di una circonferenza. In questo caso la *pirramide* è un cono, non necessariamente retto, che ha come base una circonferenza e l'intersezione di questo cono col piano del quadro fornisce la giusta rappresentazione prospettica della circonferenza, rappresentazione che modifica la sua forma se vista di fronte o di sbieco. Alberti nel suo *De Pictura* aveva dato un metodo per disegnare questa linea a partire dallo scorcio di un poligono con molti lati (almeno 8) inscritto nella circonferenza, scorcio che poteva realizzarsi geometricamente per punti e poteva poi essere interpolato con una linea continua. La stessa cosa suggerisce Piero della Francesca nel suo *De prospectiva pingendi* [9 Tav. 4, Fig. XVII] da cui abbiamo preso questa immagine.

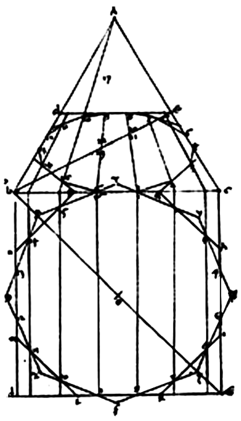

Fig. 13

Alberti poi con spirito pratico, molto leonardesco, suggerisce:

> *Forse sarebbe più brieve via corlo all'ombra? Certo sì, dove il corpo quale facesse ombra fusse in mezzo posto con sua ragione in suo luogo.* [5, II.34]

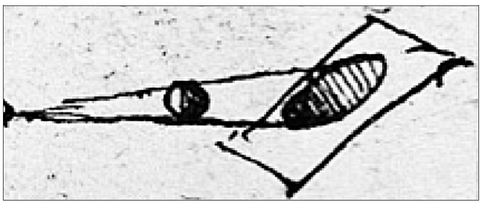

Fig. 14 – Richter, Vol I, PL VI

L'ellisse dovette piacere molto ai pittori dato che a partire dai primi decenni del '400 le aureole, che prima erano perfettamente circolari, diventano ellittiche. Ecco alcuni esempi rispettivamente in Filippo Lippi, Piero della Francesca, Pinturicchio:

Fig. 15a – (1443 ca)

Fig. 15b – (1450 ca)

Fig. 15c – (1475 ca)

Ancora prima anche Masaccio, entusiasta fautore della prospettiva, nel suo *Pagamento del tributo* del 1425, sembra affascinato da questa curva tanto da riproporla in abbondanza:

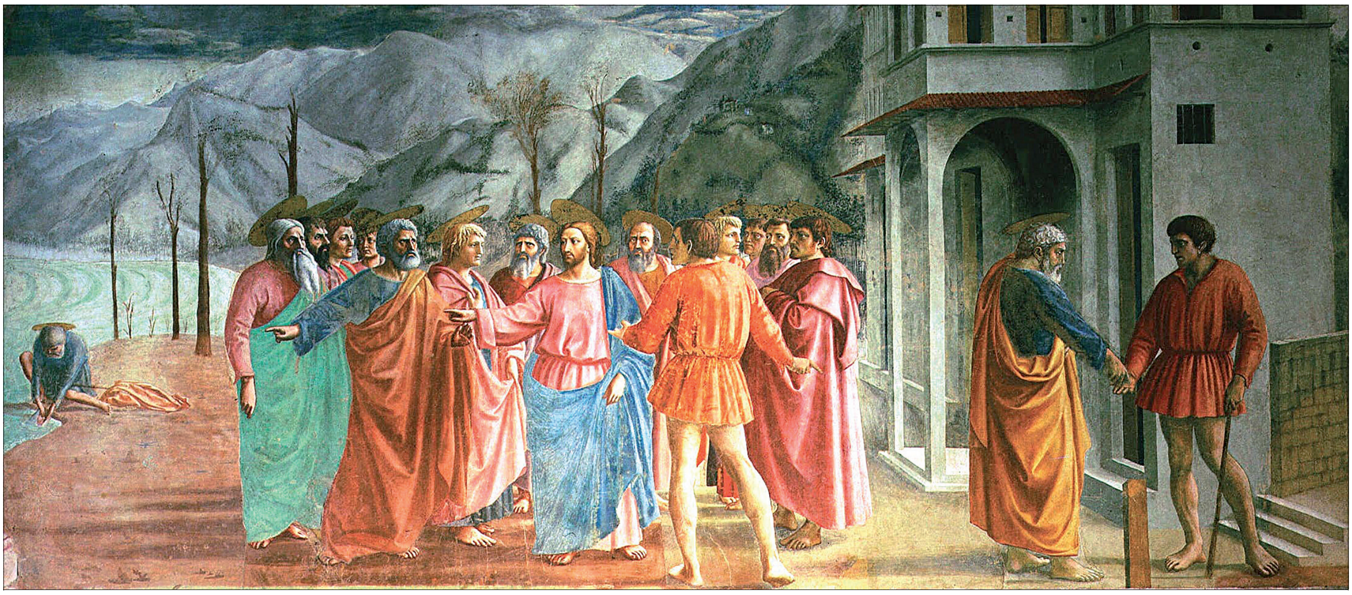

Fig. 16 – *Pagamento del tributo*. Santa Maria di Carmine, Firenze

Andrea del Verrocchio, col quale il giovane Leonardo fece il suo principale apprendistato, non era certamente da meno dei suoi colleghi tanto che nel suo celebre *Battesimo di Cristo* (del 1475 ca.) anche il calice battesimale viene rappresentato con una forma ellittica

Fig. 17 – A. Verrocchio, *Battesimo di Cristo*,
Galleria degli Uffizi, Firenze

Secondo il racconto di Vasari [8 pg. 559] il giovane Leonardo avrebbe dipinto talmente bene la figura dell'angelo a sinistra che tiene le vesti di Cristo, tanto *che fu cagione ch'Andrea mai più non volle toccar colori, sdegnandosi che un fanciullo ne sapesse più di lui.*

Abbiamo importato la figura del santo in una pagina di Geogebra, un software di geometria dinamica che consente di disegnare con grande precisione ogni tipo di conica, e abbiamo potuto verificare con quanta esattezza la forma dell'aureola disegnata da Leonardo è quella di una ellisse e non di un qualche ovale che le si avvicina.

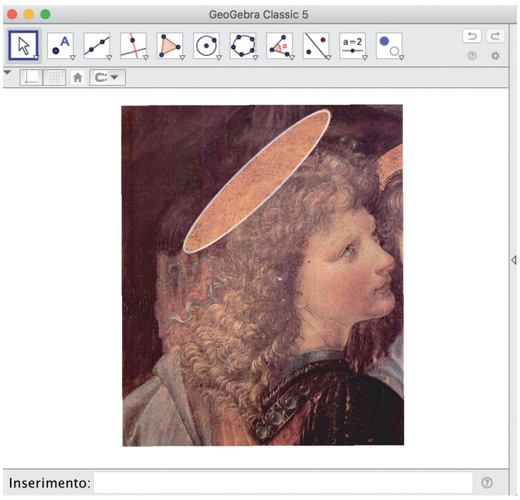


Fig. 18

Non sappiamo se per tracciare una ellisse tanto precisa ci fosse uno strumento specifico, come vi era già nel mondo arabo 4 secoli prima, o se i pittori usassero una costruzione geometrica più semplice o seguissero il suggerimento di Alberti ricalcando l'ombra di un disco circolare. Di sicuro sappiamo che Leonardo aveva trovato un modo molto semplice e geometricamente corretto per disegnare per punti una ellisse. Immaginate di vedere l'ellisse come intersezione di un cilindro circolare retto con un piano inclinato

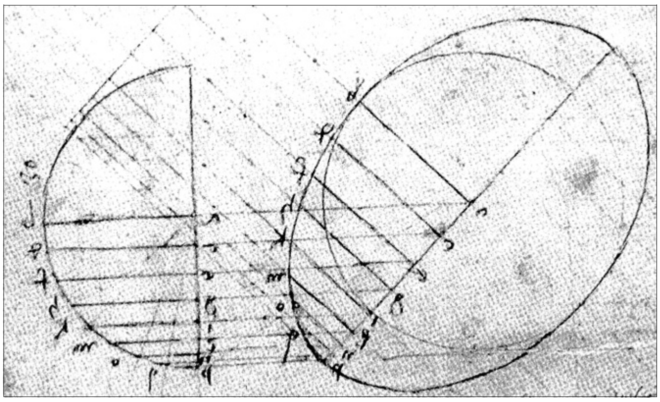

Fig. 19a – CA folio 318 r

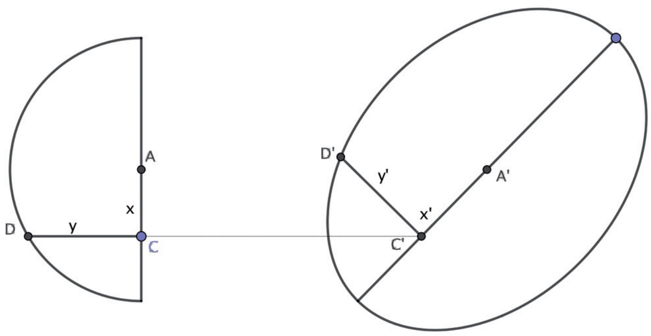


Fig. 19b – Trasposizione su un foglio dinamico GeoGebra.
Il punto C si può muovere sul diametro della circonferenza

pensate a un fascio di corde parallele della circonferenza e proiettatele secondo le generatrici del cilindro, sul piano inclinato: ci saranno uguali segmenti disposti però su un diametro più lungo. Nel caso considerato da Leonardo l'inclinazione del piano inclinato è di 45° e il diametro della circonferenza si dilata in un segmento secondo il fattore $\sqrt{2}$.

Leonardo, che non conosce un nome scientifico per indicare l'ellisse, la chiama *circolo regolare ovale,* o *figura ovale*, ha sicuramente ben chiara l'idea che essa si presenti come una dilatazione di una circonferenza in una delle due dimensioni cosa che gli permette di andare oltre il disegno e calcolare la sua area in rapporto a quella del cerchio, prefigurando il metodo degli indivisibili di Cavalieri e trovando una ellisse di area doppia:

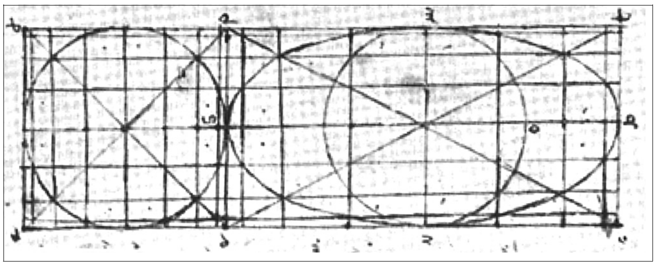

Fig. 20 – CA folio 1012 r

> *Mediante il moto retto si prova qui la figura ovale essere dupla al circolo posto nel medesimo parallelo di tal figura ovale.* (CA, folio 1012 r.)

Poiché questo è il modo col quale si presenta per la prima volta nella cultura ingenua di Leonardo l'ellisse, questo potrebbe anche essere un modo naturale col quale la si presenta per la prima volta agli studenti. Emma Castelnuovo [11, pg. 79] aveva ideato uno strumento didattico fatto da due asticelle uguali alle quali veniva applicato un tessuto elastico quadrato con i due lati paralleli fissati alle asticelle. Disegnando una circonferenza sul tessuto quadrato e allontanando le asticelle tra loro il quadrato si trasforma in rettangolo e la circonferenza in una ellisse. Crediamo che Leonardo non conoscesse i fuochi dell'ellisse con le loro proprietà ed è quindi impensabile per lui tracciare una ellisse col "metodo del giardiniere". L'uguaglianza delle due curve, quella "del giardiniere" e quella che dilata una circonferenza, è sicuramente un fatto molto notevole che nella didattica tradizionale viene difficilmente enfatizzato se pure, a volte, ne viene data una dimostrazione formale.

## Il cammino delle coniche di Apollonio

È il mese di settembre del 1219 San Francesco, armato della sua umiltà, si reca a Damietta, a pochi chilometri dal Cairo, dal sultano Malek al-Kamel per perorare la pace tra cristiani e mussulmani. L'impresa non ebbe successo malgrado il contributo politico che lo stesso Federico II cercò di dare alla causa della convivenza pacifica, perché le crociate continuarono con sempre maggiore crudeltà, con l'istigazione all'odio, alla violenza e creando un muro invalicabile, una frattura che perdurò per secoli e ancora perdura tra queste due civiltà, marcate, tra le altre cose, da un diverso ruolo attribuito alla scienza. Il corano più volte incoraggia l'uomo sulla via della ragione, dello studio della natura, della scienza. Un citatissimo detto di Maometto recita "Cercate la scienza foss'anche in Cina" mentre il cristianesimo guardava fin da subito alla scienza con sospetto se non con dichiarata ostilità. Gli studi matematici arabi al partire dell'VII secolo, le diverse scuole, la enorme moltitudine di scienziati impegnati nello sviluppo dell'aritmetica, della geometria, della teoria dei numeri, dell'algebra che loro hanno fondato, sono stati messi pienamente in luce solo recentemente dall'opera di numerosi storici della scienza araba tra cui Roshdi Rashed, che ha curato il terzo volume dell'enciclopedia Treccani di Storia della scienza, interamente dedicato ai contributi arabi nei diversi rami della scienza.

In particolare buona parte della teoria delle coniche di Apollonio, che qui interessa particolarmente per i suoi stretti legami con la prospettiva, ci è nota solo tramite la traduzione araba del matematico Thābit ibn Qurra (IX secolo), uomo di grande cultura, conoscitore dell'arabo, del greco e del siriaco. Questo testo doveva essere in origine un trattato sulle sezioni coniche in 8 libri, di questi i primi 4 sono sopravvissuti in greco con un commento del matematico bizantino Eutocio (V sec. d.C.) e di altri tre, dei quali manca l'originale greco, ci resta la traduzione in arabo. Queste curve furono da subito utilizzate nello studio degli specchi ustori (le parabole) e delle lenti (le iperboli) da Ibn Sahl, Ibn al- Haytham e altri matematici arabi a partire dal X secolo sfruttando le proprietà focali di queste curve. Venne anche ideato un *compasso perfetto*, capace di tracciare con continuità archi di circonferenze, ellissi, parabole e iperboli, descritto dettagliatamente dal matematico Abu Shal al Quni (X sec.) [12, pg. 428 ]. L'idea di questo strumento è molto semplice: si tratta di fissare un asse inclinato di un certo angolo $\alpha$ rispetto al piano orizzontale dove viene tracciata la curva, e ruotare intorno a questo asse una matita che formi con l'asse un angolo $\beta$ fissato, la punta della matita allungandosi e accorciandosi per incontrare il foglio da disegno traccia con continuità una linea che, a seconda dei valori dei due angoli fissi $\alpha$ e $\beta$ produce un differente arco di conica.

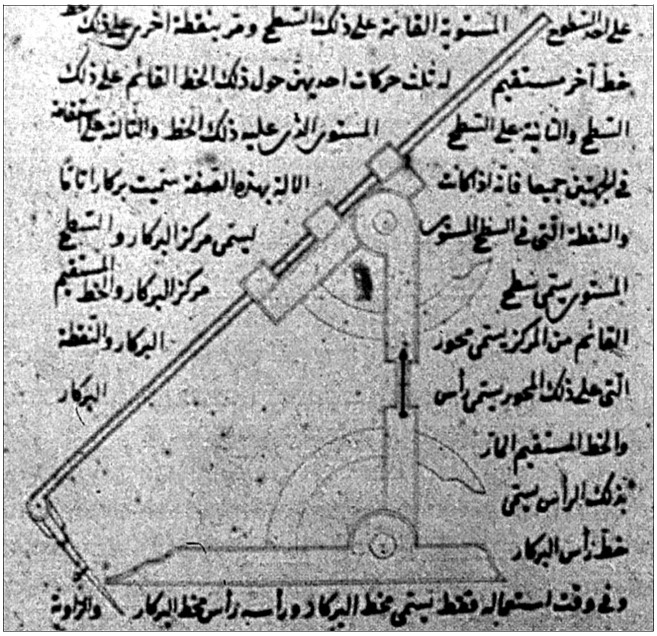

Fig. 21 – Il compasso perfetto di Abu Shal al Quni

Anche Ibn al-Haytham (XI secolo) nella sua *Ottica* usa le coniche dando per scontate alcune loro particolari proprietà. Questa opera, in parte tradotta in latino nel 1270 dal monaco polacco Vitellione, ebbe una certa diffusione in occidente ma contribuì molto poco alla diffusione della geometria delle coniche. Qualche cenno alle coniche si trova nella traduzione latina dell'opera dello stesso Ibn al-Haytham *Gli specchi ustori* realizzata da Gherardo da Cremona nel XII secolo. Si devono invece al lavoro dell'umanista Giorgio Valla (1447-1500) le prime traduzioni dal greco di opere scientifiche pubblicate postume a Venezia il 1501 nel *De expetendis et fugiendis rebus* [13], una sorta di voluminosa enciclopedia in 49 volumi dove compaiono tra le altre cose, nel primo volume, parte degli Elementi di Euclide, i tentativi per risolvere i grandi problemi insoluti della geometria classica, dalla quadratura del cerchio alla duplicazione del cubo, alcuni frammenti archimedei con i commenti di Eutocio, un po' di geometria sferica di Teodosio, accenni alle lunule di Ippocrate, la traduzione del *De cylindrica sectione* di Sereno ed anche alcune nozioni sulle coniche di Apollonio: 2 definizioni e 4 proposizioni del I libro e 2 proposizioni del secondo. Sono questi argomenti cari a Leonardo che sicuramente, con la sua estrema curiosità per le scienze e la matematica, ha attinto da questo testo raccogliendo suggestioni ed idee che svilupperà, come vedremo, a suo modo. Ma ben poco ha potuto trovare, nel lavoro di Valla, di matematicamente strutturato sulla teoria delle coniche e sulle loro applicazioni all'ottica; pensiamo invece che Leonardo abbia potuto aver sentore delle "magiche" e straordinarie ricerche provenienti dall'antico mondo islamico. Anche in questo campo, così poco esplorato – quali siano stati i rapporti tra la cultura scientifica islamica e quella cristiana nel XVI secolo – Leonardo potrebbe essere stato un caso a sé. Sappiamo di una sua amicizia con Tommaso Masini da Peretola [14] meccanico, idraulico, cesellatore, negromante, amante della pittura e della scultura, animatore di una bottega a Firenze dove Leonardo concepì, insieme a lui, straordinarie macchine come la coclea di Archimede o una bombarda che sparava a mitraglia e altre attività confinati a volte con pratiche occulte. Masini era sopranominato scherzosamente Zoroastro perché si riteneva fosse stato in Medio oriente, nella patria del mistico profeta iraniano. Forse con quel tramite alcune lontane idee, all'indice, potrebbero essere giunte fino a Firenze.

L'idea che si potesse pensare a una sorta di compasso capace di disegnare con continuità altre curve oltre alle circonferenze dovette aver affascinato la mente di Leonardo. Troviamo nel Codice Atlantico la descrizione di uno strumento simile al compasso degli arabi: in questo caso però l'asse del cono è verticale e il foglio da disegno, dove disegnare la conica, è inclinato di un angolo uguale all'angolo di apertura del compasso. Anche ora la matita può allungarsi o accorciarsi tramite un peso che la tiene sempre aderente al foglio. Abbiamo aggiunto al disegno leonardesco le lettere per rendere leggibile la scritta in basso a destra che recita soltanto *a,b,c rettangola e rettangola bcd, ab, dc sien parallele.*

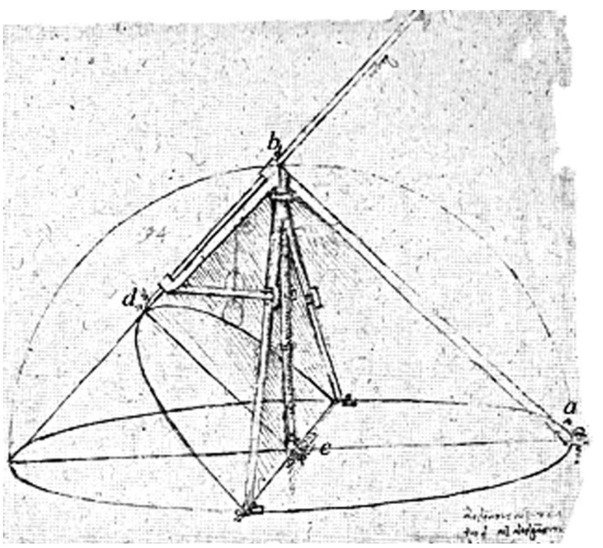


Fig. 22a – CA folio 1093 r

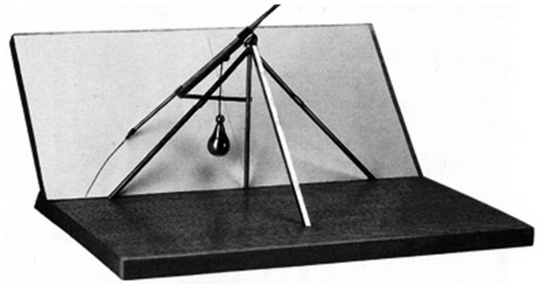

Fig. 22b

Cambiando l'inclinazione del piano si sarebbe potuto disegnare anche un arco di ellisse! Ma di questa idea non abbiamo trovato tracce.

Ma quale era l'interesse di Leonardo per la parabola?

Nel Codice Atlantico (folio 87 r.) troviamo questa interessante considerazione:

> *Se volessi fare una sfera in cavo, che, volgendola ai razzi del sole, ardessi ciò che si interponesse alla sua piramida, vuolsi fare il primo tratto una piramida che sia com'è figurato sopra, che* cd *entri due volte in* ab. *Poi piglia la metà della linea* db, *ch'è* e, *e sega insino al centro del fondamento della piramida, ch'è* c, *e con quella tagliatura fa la tua centina. E sappi che la piramide vuole essere tonda per altezza come un pane di zucchero.*

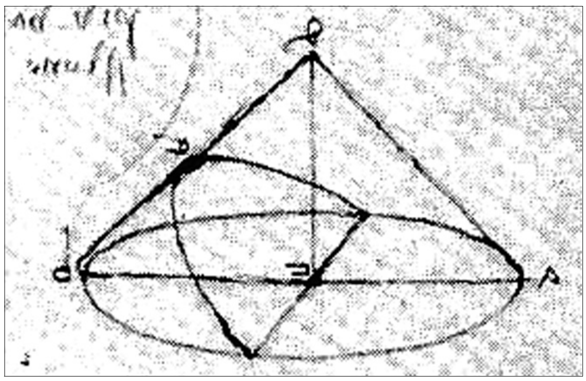

Fig. 23a – CA folio 87 r

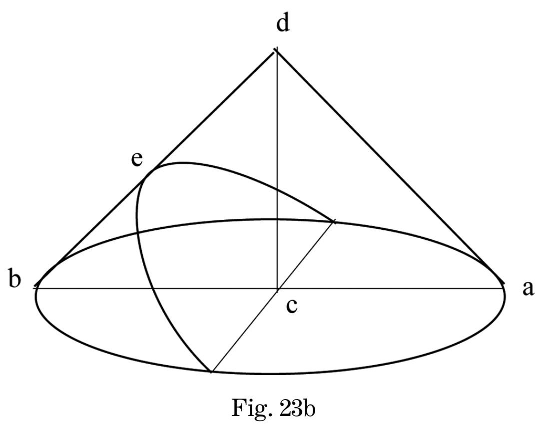


Fig. 23b

Il disegno riprende chiaramente la linea tracciata con lo strumento descritto precedentemente ma le misure non sembrano adatte per realizzare uno specchio ustore poiché la parabola che ha le misure indicate non ha il suo fuoco nel punto c. Forse Leonardo ha avuto qualche sentore di questi specchi realizzati dagli arabi secoli addietro perché le misure che lui assegna sono di poco diverse da quelle originali. La fonte principale e più antica su questo tema è un'opera di Diocle (II-I sec. a.C.) *Gli specchi ustori* [15] del quale non abbiamo l'originale greco, ma ampi brani recuperati dai matematici arabi nel IX secolo e utilizzati per costruire gli specchi. Questo lavoro è molto interessante perché Diocle inscrive in un opportuno rettangolo la cui base è il doppio dell'altezza, una linea formata da tutti i punti interni al rettangolo equidistanti dal punto F – detto fuoco – e da una retta – detta (da noi) direttrice – come mostra la figura:

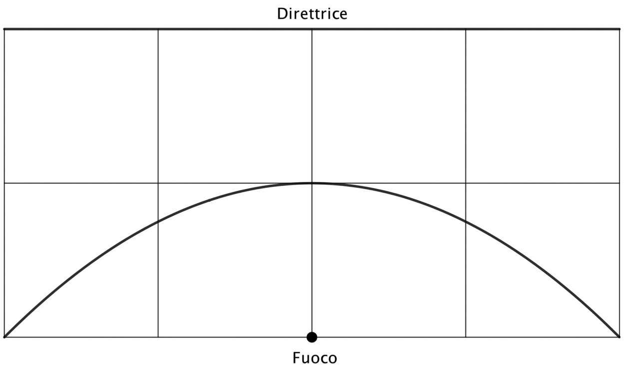


Fig. 24

Diocle dimostra poi che l'arco è un arco di parabola, cioè è ottenuto come opportuna sezione conica e che tutti i raggi perpendicolari alla direttrice si riflettono nel fuoco. La superficie ottenuta ruotando attorno all'asse perpendicolare alla direttrice e passante per il fuoco, se esposto in modo che i raggi del Sole siano paralleli a tale asse, concentra nel punto F una quantità di energia sufficiente ad accendere un fuoco. È questo il primo trattato dove compare, senza essere nominata, la direttrice di una parabola e questa curva viene descritta non più come intersezione di un cono con un piano ma come luogo di equidistanza. La costruzione di Leonardo ricorda da vicino quella di Diocle, ma nel caso che lui descrive il rapporto tra la base dell'arco di parabola e la sua distanza dal vertice anziché essere 4:1 è $2\sqrt{2} : 1$.

Un modo più diretto e ingenuo per produrre il fuoco potrebbe essere quello di disporre degli specchietti in modo tale che ognuno di questi rifletta la luce in uno stesso punto. Già il filosofo, astronomo, matematico al-Kindi [16], vissuto nella prima metà del secolo IX, aveva costruito uno specchio ustore in questo modo approssimando così un arco di parabola. Anche Leonardo ha l'idea di costruire uno specchio che rifletta un fascio di raggi paralleli in un unico punto unendo via via specchietti "infinitesimali".

Ecco come Leonardo costruisce passo dopo passo il suo specchio ustore:

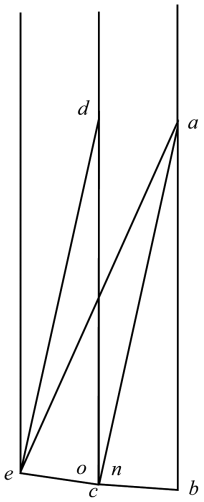


Fig. 25a

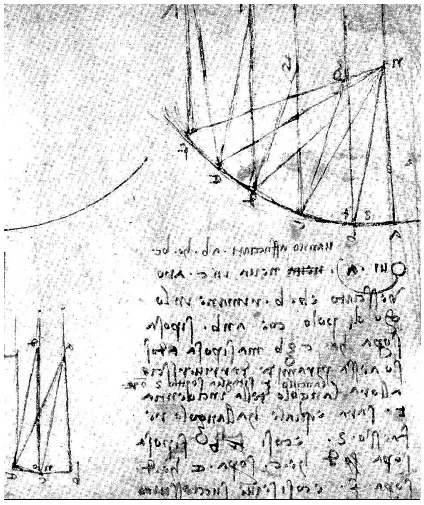

Fig. 25b – CA folio 240 v

> *abc* sarà il primo taglio e ne risulta che *dc* è la linea incidente e *ca* il razzo riflesso: or qui bisogna creare un angolo in *o*, il quale sia equale a *n* ; e far questo è necessario arriversciare *abc* e metterlo nel sito *cade*, tenendo la linea *an* sopra *do*. Di poi sopra la basa *cd* tira le linie *ac* e *ae*.

A questo punto il processo viene iterato applicando la stessa costruzione al triangolo *dae*.

Questa idea, molto simile a quella presa in esame da al-Kindi (IX sec.) nel suo libro *Sur les rayons solaires* [16, pg. 414], viene riproposta più volte anche nel codice Arundel, specificando (CA 751) come *arriversciare* con riga e compasso i triangoli in gioco.

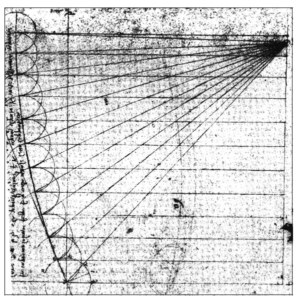

Fig. 26a – CA folio 751 v

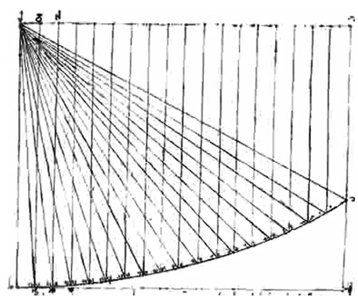

Fig. 26b – Codice Arundel 84

Non sappiamo se Leonardo avesse capito che questa curva è la stessa che si ottiene segando in modo opportuno un cono circolare retto anche perché la forma di questa curva è molto diversa da quella che ottiene con la sua parabola, né sappiamo se avesse chiara la doppia natura di questa curva: come luogo di equidistanza o come sezione di un cono circolare.

## La logica delle immagini

La macchina prospettica con la quale Leonardo riesce a fotografare la sua immaginazione sarà importantissima per sviluppare nella sua mente un particolare potentissimo pensiero non verbale, non ipotetico deduttivo, ma dotato comunque di proprie leggi di inferenza. Il poeta Paul Valéry, non digiuno di conoscenze matematiche, vedrà in Leonardo, il *simbolo* di un pensiero fondato sulla *logica delle immagini*, e gli dedicherà alcuni brevi interessanti saggi. Nel primo, scritto a 23 anni (1894) afferma [2, pg. 18] parlando di Leonardo:

> ...l'analogia è precisamente la facoltà di variare le immagini, di combinarle, di far coesistere la parte dell'una con la parte dell'altra e di scoprire, volontariamente o meno, le relazioni delle loro strutture. Il che rende indescrivibile l'intelletto che è il loro luogo. Lì le parole perdono la loro virtù. Esse si formano, balzano davanti ai suoi occhi; è lui che ci descrive le parole. ... È di lì infatti che scaturiscono le stupefacenti decisioni, le prospettive, le intuizioni folgoranti, le esattezze del giudizio, le illuminazioni, e anche le stupidaggini.

Per poi aggiungere nella Nota e Digressione del 1919 dedicata allo stesso argomento [2, pg. 68]

> Per quanto superficialmente lo avessi studiato, i suoi disegni, i suoi manoscritti, mi avevano come folgorato. Di quelle migliaia di note e di schizzi, serbavo l'impressione straordinaria di un insieme allucinatorio di scintille, strappate, grazie alle mosse più diverse, a un qualche fantastico congegno.

Infine nel pieno della sua maturità, nel 1930, chioserà, in margine ai due testi, alcuni commenti frutto di una ulteriore meditazione sul pensiero di Leonardo. Eccone uno per noi particolarmente significativo [2, pg. 57, il corsivo è nostro]

> Come ho affermato più sopra, i fenomeni della produzione mentale di immagini sono molto poco studiati. Resto fermo nella mia convinzione circa la loro importanza. Sostengo infatti che certe leggi, proprie di questi fenomeni, sono essenziali e inoltre dotate di una straordinaria generalità; e che le variazioni delle immagini, le restrizioni imposte a queste variazioni, le produzioni spontanee di *immagini-risposta* o di immagini complementari, consentono di raggiungere *mondi* assolutamente distinti come quelli del sogno, degli stati di estasi, della deduzione per analogia.

È questa dimensione che qui più di tutto ci interessa non solo perché è quella propria dell'intuizione geometrica alla base delle grandi visioni che nella storia hanno rivoluzionato il pensiero matematico, ma anche perché è fondamentale per una buona didattica della matematica. Già Laura Catastini nel 1990 [17], indagando sul ruolo, nella pratica didattica, delle neuroscienze allora agli esordi, aveva individuato l'importanza di riconoscere e sviluppare questo tipo di intelligenza facendo luce nei suoi lavori successivi sull'importanza e sulla possibilità di educare, anche attraverso la matematica, un pensiero colto capace di muoversi nei diversi registri – logico formale e immaginifico – che le neuroscienze mettevano in luce. In questa ottica Leonardo rappresentava e rappresenta un fantastico esempio capace di valorizzare le potenzialità di questo pensiero che in lui è certamente estremo.

Penso dovette fulminare l'intelligenza di Leonardo il Teorema di Pitagora nel quale probabilmente vedeva una forma di bellezza intellettuale, di bellezza matematica direi, fatta di significati e immagini che si combinano tra loro generando altre immagini e altri significati ancora.

Problemi all'apparenza difficili che d'un balzo trovano una soluzione immediata: come trovare un quadrato di area doppia?

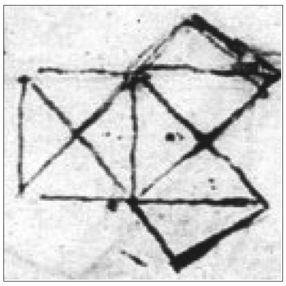

Fig. 27a – CA folio 225 v

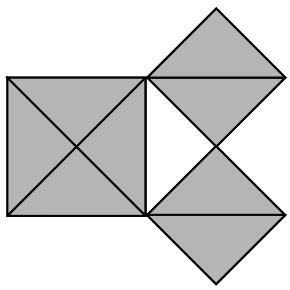

Fig. 27b

e come trovare il "quadrato somma"...... somma come tra due numeri?

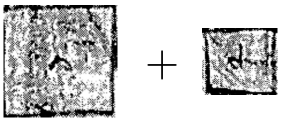
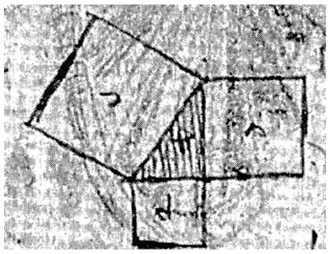

Fig. 28

e un quadrato che ha area tripla o quadrupla?

Ruotiamo la figura iniziale e sommiamo via via quadrati di area 1.

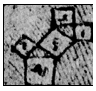

Fig. 29a

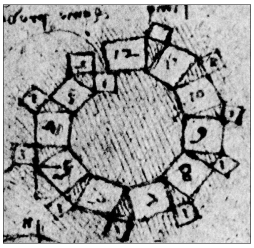

Fig. 29b – CA folio 281 r

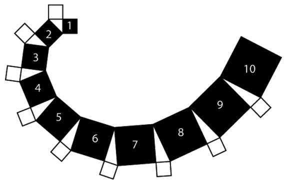


Fig. 29c

ne nasce una spirale infinita che genera tutti i "quadrati multipli"

Ma perché fermarsi ai quadrati? L'immaginazione ha un salto, si passa a Pitagora per i cerchi ...

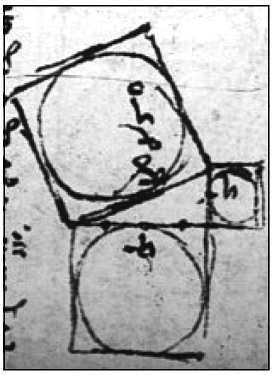

Fig. 30a – CA folio 225 v

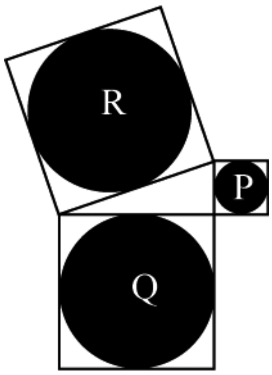


Fig. 30b

... e poi ai "cerchi multipli", a una spirale di cerchi ...

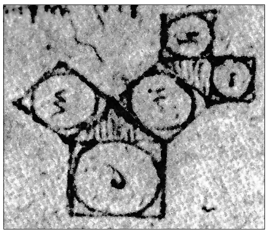

Fig. 31a – CA folio 281 r

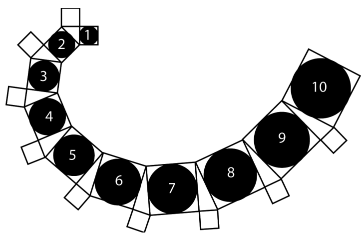


Fig. 31b

Dai cerchi è facile passare ai semicerchi e ad altre forme e ora avviene una nuova fulminazione.

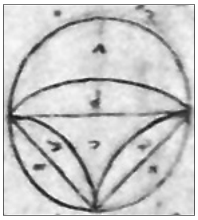

Fig. 32a – CA folio 471 r

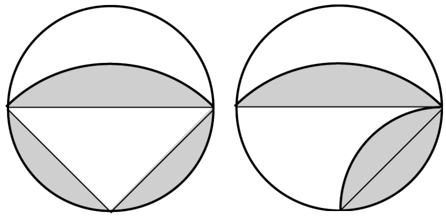

Fig. 32b

I due semicerchi uguali, quello di sopra e quello di sotto, levando superfici (grigie) equivalenti – equivalenti per una variante di Pitagora – danno luogo a un triangolo bianco (sotto) e a una lunula bianca (sopra) con la stessa area: abbiamo trovato un triangolo equivalente a una figura coi lati curvilinei! E ancora, nella figura di destra, altre due figure bianche equivalenti al triangolo.

Ecco le tre figure inaspettatamente equivalenti tra loro:

Fig. 33

Il "metodo" di Leonardo, come lo ebbe a definire - Valéry, è in piena funzione a contatto delle grandi sfide della matematica antica, di fronte all'impossibile a ciò che nessuno prima di lui era riuscito a risolvere: la quadratura del cerchio. A partire dalla equivalenza di una lunula con un triangolo Leonardo realizzerà centinaia e centinai di disegni nella speranza di trovare delle figure quadrabili fatte di vuoti e di pieni, di lunule, di "porzioni" di "interstizi" montati in modo sempre più complesso capaci alla fine di quadrare l'intera circonferenza.

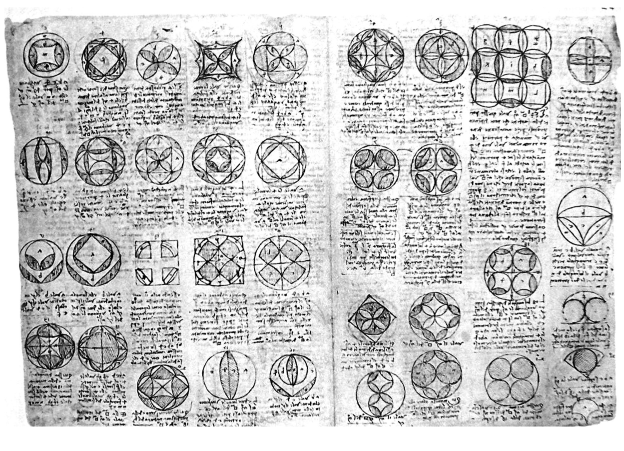

Fig. 34 – CA folio 471 v

Una sorta di ossessione che percorre tutto il Codice atlantico con forme, decine di centinaia, quadrabili o parzialmente quadrabili.

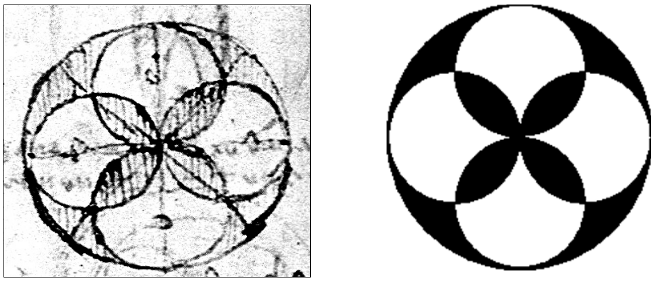

Fig. 35a-b – La parte bianca è quadrabile, CA folio 122 v

Forme spesso di grande bellezza dove il pieno è paradossalmente equivalente al vuoto creando un equilibrio inatteso.

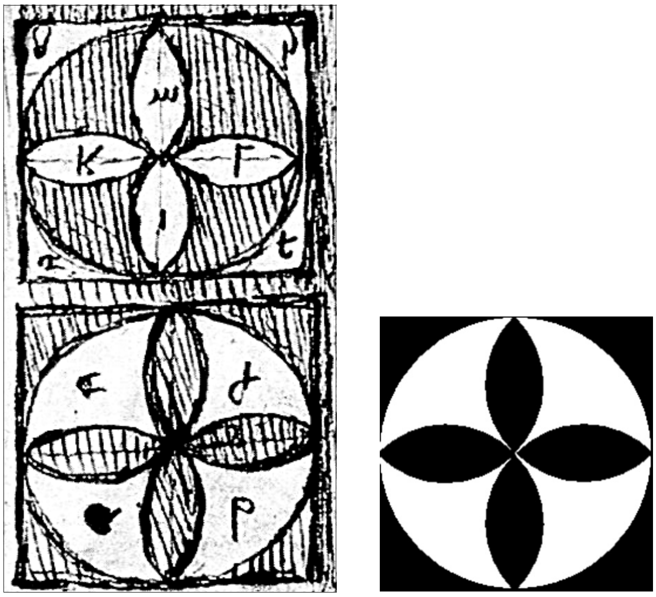

Fig. 36a-b – *val tanto il depennato quanto quel che non è depennato.* CA folio 225 v.

Un gioco infinito e l'intenzione, mai realizzata, di scrivere un libro intitolato *Ludi geometrici* dove queste figure si scompongono e ricompongono dando forme inattese e ricche di misteriose simmetrie. Daniele Pasquazi [18] darà forma a questo gioco e lo porterà con grande soddisfazione sua e dei suoi allievi nella scuola secondaria di primo grado e anche nella scuola primaria in collaborazione con l'Opera Nazionale Montessori.

Ma i pensieri di Leonardo sul teorema di Pitagora non si arrestano, una nuova grande intuizione lo porta a una temeraria generalizzazione nella quale anche il triangolo rettangolo si incurva seguendo quella logica che porta, immagine dopo immagine, ad andare oltre, verso un'idea che contenga quella vecchia come caso particolare e poi un'altra che vada ancora oltre e oltre ancora in una ricerca tutta matematica di un universale che tutto comprenda: le immagini qui a fianco possono avvicinarci al pensiero di Leonardo.

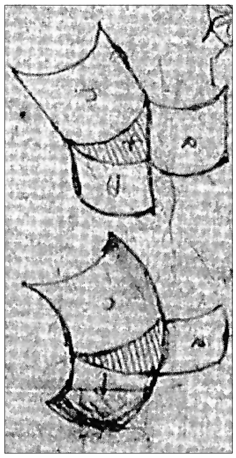

Fig. 37

Ecco come Leonardo vede questa somma di "quadrati" curvilinei su un triangolo esso stesso curvilineo. Afferma

> *Questi due quadrati a e b vagliano il terzo quadrato c e le curvità dei lati opposti di ciascun quadrato sono equali e simili infra loro.* (CA folio 451 r)

ed ecco la dimostrazione ... alla sua maniera!

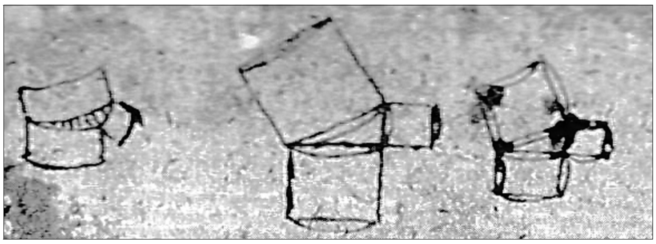

Fig. 38 – CA 451 folio r

Ma le indagine legate al Teorema di Pitagora non lo contentano ancora. Perché fermarsi alle due dimensioni? Come con un sol colpo siamo riusciti a duplicare il quadrato, come duplicare il cubo? Perché mai per il quadrato la cosa è semplicissima e per la duplicazione del cubo ancora insoluta? Probabilmente Leonardo aveva saputo – Valla ne parla diffusamente – dei tentativi infruttuosi dei maggiori matematici e filosofi greci e aveva accettato la sfida: per lui resta difficile da comprendere come non possa essere trovata una costruzione semplice per duplicare il cubo o per sommare due cubi.

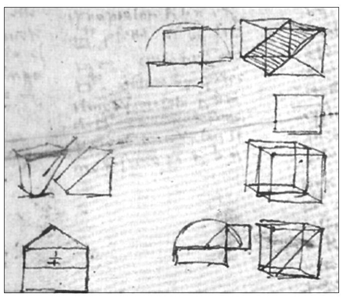

Fig. 39 – CA folio 428 r

I suoi tentativi devono essere stati frustranti:

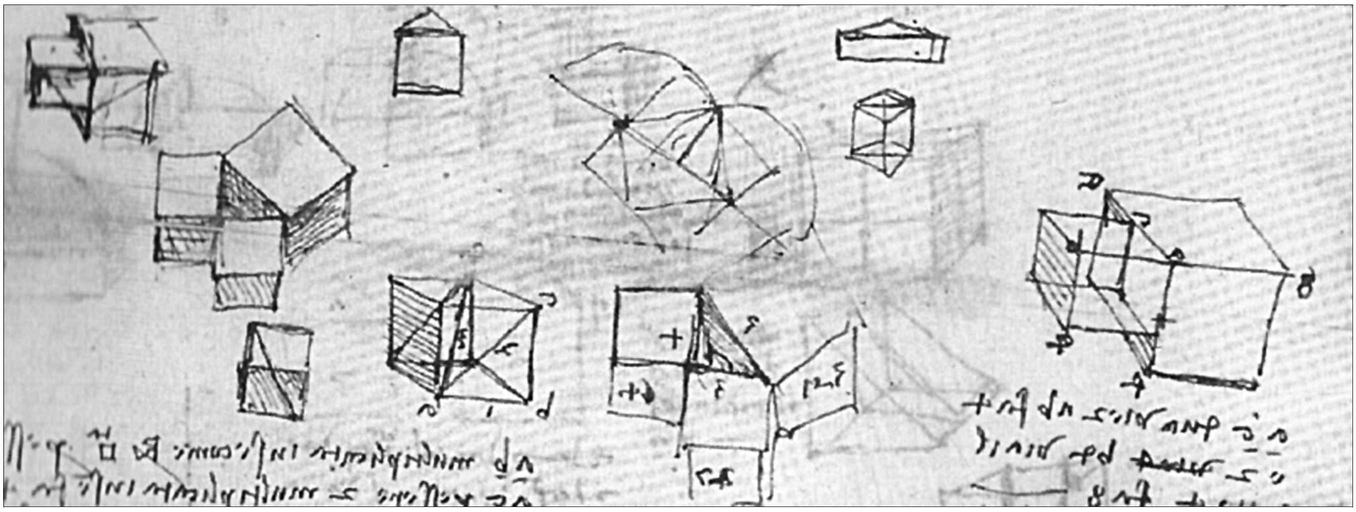

Fig. 40 – CA folio 428 r

ma Leonardo non si arrende e alla fine trova che un cubo di lato 5, a parte una certa *minuzia indicibile*, ha volume doppio di quello di lato 4.

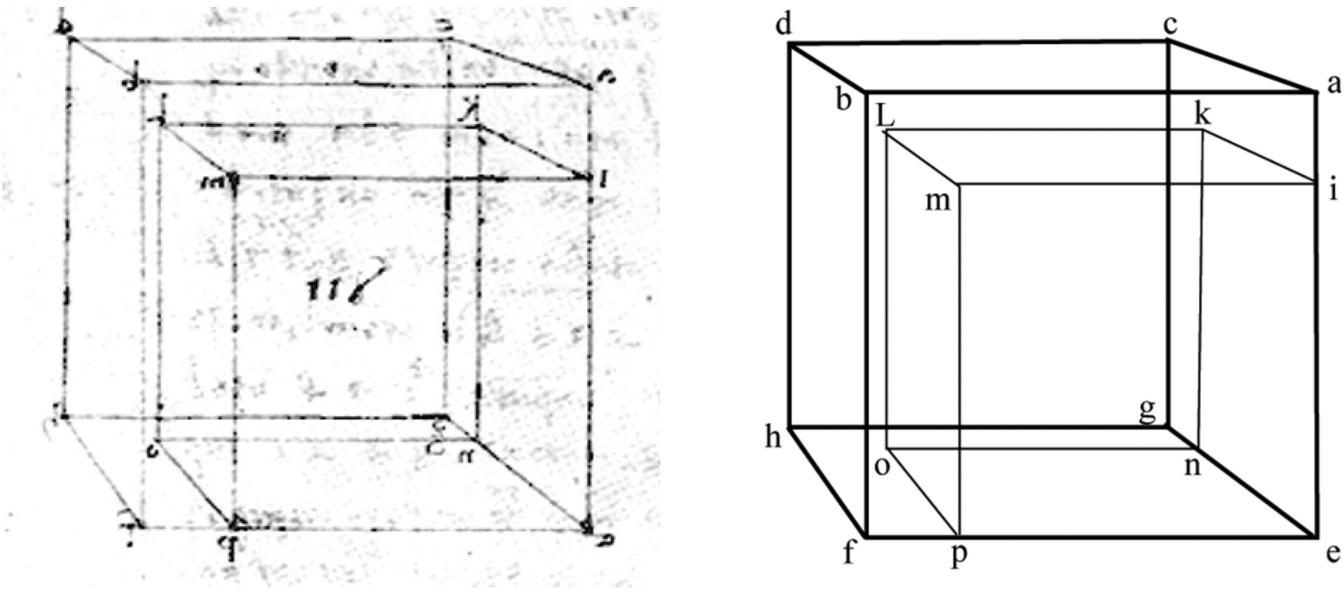


Fig. 41a (sinistra) e 41b (destra) – CA folio 161 r

> Se cubicamente multiplicherai in sé la linea *ie*, e'l simile farai colla linea *ae*, tu troverari avere composti due cubi de' quali la quantità dell'uno fia doppia della quantità dell'altro: cioè il cubo *abcd.efgh* sarà doppio del cubo *iKLm . enop.* Se la linia ie fussi 4 e la linia *ae* sarebbe 5 e oltra a di questo una certa minuzia indicibile, la quale con comodità si fa e con difficultà si dice. [CA folio 161 r.]

Infatti $\sqrt[3]{2} = 1,2599...$ che è di poco maggiore uno e un quarto: per il pittore è più che sufficiente!

## Il problema di Alhazen

Oltre che a problemi impossibili da risolvere, Leonardo si era dedicato anche ad altri problemi molto difficili ma non impossibili. Il più importante di questi è il celebre problema di Ibn al-Haytham, latinizzato in Alhazen, di cui abbiamo già parlato. Si tratta di capire come avviene il fenomeno della riflessione di un raggio di luce invece che su una superficie piana su una superficie sferica. Più precisamente, dato uno specchio sferico di centro O e due punti A (dove è posto l'occhio) e B (dove è posto un lume), come trovare il punto X sullo specchio (*il simulacro di tal luminoso*) in modo che il punto B si rifletta in A?

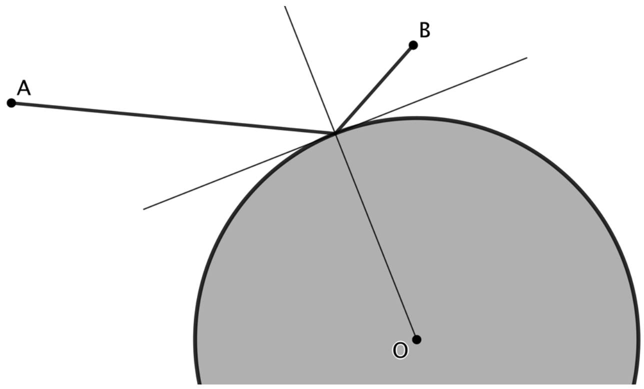


Fig. 42a – Il problema di Alhazen

Ibn al-Haytham fornisce una soluzione molto complicata preceduta da tre lemmi e dalla costruzione di una iperbole equilatera la cui intersezione con la circonferenza fornisce la soluzione del problema. Da un punto di vista analitico il problema conduce a una equazione di quarto grado che viene risolta, con un metodo molto diffuso nella matematica araba [19], intersecando due coniche, metodo del tutto inaccessibile senza una buona conoscenza della geometria di quelle curve e del modo di tracciarle con continuità.

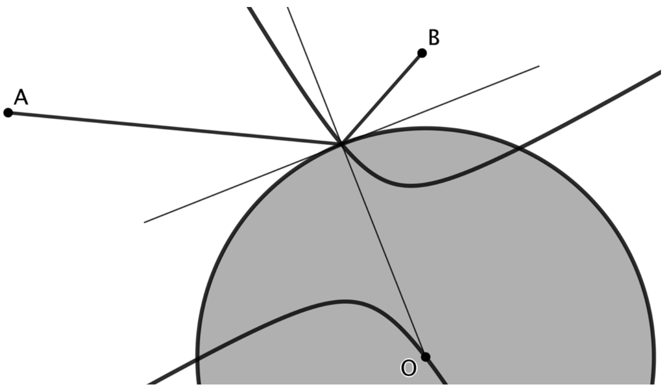


Fig. 42b – L'iperbole che risolve il problema

Alcuni matematici successivi tra i quali Galileo, Huygens, Barrow e molti altri affrontarono il problema dal momento che che la soluzione di Ibn al-Haytham che circolava era esposta in modo confuso e con molte inesattezze. Anche Leonardo si interessò a questo problema e lo risolse a suo modo, tagliando il nodo gordiano, inventando cioè uno strumento materiale col quale trovare di colpo la soluzione del problema.
Diamo una descrizione di questo strumento che riproduce nella sostanza l'idea di Leonardo. Consideriamo una asticella OX uguale al raggio del cerchio col punto O fisso nel suo centro in modo che tutto lo strumento possa ruotare intorno ad O. Nella asticella può scorrere il punto P al quale sono collegate altre due asticelle uguali PM e PN. Nei punti M e N sono applicate ulteriori due asticelle MX e NX che possono ruotare intorno al punto M, N e X mantenendo però fisse la distanze MX = NX = PM = PN. Muovendo il punto P lungo la scanalatura nell'asticella OX si vendono a formare dei rombi più o meno aperti mentre le due asticelle XA e XB, muovendo P e X, ricoprono la parte di piano esterno al cerchio. Inserendo il punto B nella scanalatura dell'asticella NX e muovendo X (e quindi P) fino a quando A non si trovi nell'asticella MX, troviamo il punto di riflessione X cercato per il quale l'angolo MXP è uguale all'angolo NXP.

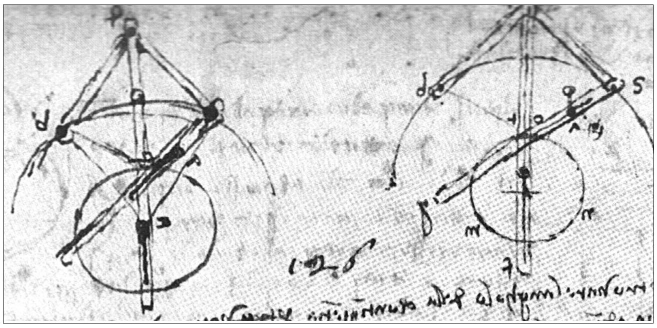

Fig. 43 – *Per trovare l'angolo di contingenza per via di strumento.* CA folio 495 r.

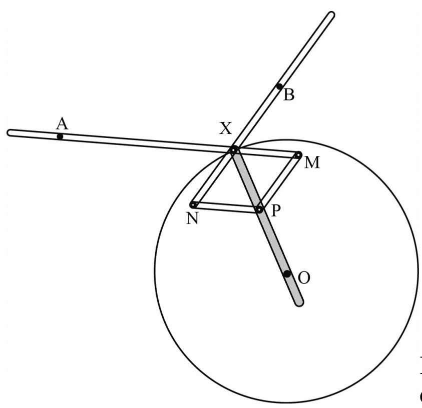


Fig. 44 – Lo strumento di Leonardo

Ancora una volta, con pochissimi strumenti matematici ma con una grande intuizione visionaria Leonardo, questa volta sì, arriva fino in fondo, e risolve *per via d'istrumento* un difficile problema sul quale grandi matematici e pensatori avevano posto con grande sforzo e senza successo la loro attenzione.

## Credits delle Immagini

*Fig. 1, Fig. 2, Fig. 3a, Fig. 3b, Fig. 6, Fig 12, Fig. 13, Fig. 15a, Fig. 15b, Fig 15c, Fig. 16 : pubblico dominio.*

*Fig. 17, Fig. 21: Creative Commons Attribution-Share Alike 4.0 International.*

*Fig. 4a, 4b, 4c: Centro "matematita", Immagini per la matematica.*

*Fig. 7a, Fig. 7b, Fig. 8a, Fig. 11, Fig. 18, Fig 19b, Fig. 23b, Fig. 24, Fig. 25b, Fig. 27b, Fig. 29c, Fig. 30b, Fig. 31b, Fig. 32b, Fig. 32c, Fig. 33a, Fig 33b, Fig. 33c, Fig 35b, Fig. 36b, Fig. 41b, Fig. 42, Fig. 44: realizzazioni dell'autore.*

*Fig. 8b, Fig. 19a, Fig. 20, Fig. 22a, Fig. 22b, Fig 23a, Fig. 25a, Fig. 26a, Fig. 26b, Fig. 27a, Fig. 28, Fig. 29a, Fig. 29b, Fig. 30a, Fig. 31a, Fig. 32a, Fig. 34, Fig. 35a, Fig. 36a, Fig. 37, Fig. 38, Fig. 39, Fig. 40, Fig. 41a, Fig. 43: riproduzioni dell'autore dal libro "Leonardo da Vinci, Codice Atlantico, Giunti Editori, Firenze, 2000".*

*Fig. 5, Fig. 9, Fig. 10a, Fig. 10b, Fig. 10c, Fig. 14: riproduzioni dell'autore dal libro "J. Richter, The Notebooks of Leonardo da Vinci, Dover Publications Inc., New York, 1970".*

## BIBLIOGRAFIA


[1] LEONARDO DA VINCI, *Il codice Atlantico*, Giunti editore, Firenze, 2000.

[2] P. VALÉRY, *Introduzione al metodo di Leonardo da Vinci*, Abscondita , Milano, 2007.

[3] L. SINISGALLI, *Furor Mathematicus*, Ponte delle Grazie, Firenze, 1992.

[4] R. MARCOLONGO, *Leonardo da Vinci nella storia della matematica e della meccanica*, Atti Congresso Internazionale di Matematica di Bologna, **1** (1929), pag. 275-293.

[5] LEON BATTISTA ALBERTI, *De pictura*, a cura di L. Bertolini, ed. Polistampa, Firenze, 2011.

[6] L. CATASTINI – F. GHIONE, *Le geometrie della visione*, Springer, 2004.
Il libro contiene anche un CD con una trascrizione integrale dell'*Ottica* di Eclide, del *De pictura* di Leon Battista Alberti e del *De prospectiva pingendi* di Piero della Francesca.

[7] J. RICHTER, *The Notebooks of Leonardo da Vinci*, Dover, Publications, Inc. New York, 1970. Questo testo in 2 volumi pubblicato la prima volta nel 1883 a Londra raccoglie, direttamente dalle fonti manoscritte, una vasta panoramica sui lavori di Leonardo da Vinci e anche un esteso indice dei manoscritti.

[8] G. VASARI, *Le vite de' più eccellenti pittori, scultori e architetti*, Newton Compton editori, Roma,1991.

[9] PIERO DELLA FRANCESCA, *De prospectiva pingendi*, con due note di E. Battisti e F. Ghione, Le Lettere, Firenze, 1984.
Questo volume riproduce in forma anastatica l'edizione critica del De prospectiva pingendi a cura di Giusta Nicco-Fasola edita da Sansoni nel 1942.

[10] LEONARDO DA VINCI, *Trattato della pittura* a cura di M. Dotti Castelli, Demetra, 1997.

[11] EMMA CASTELNUOVO, *Pentole, ombre, formiche*, La nuova Italia, Firenze, 1993.

[12] ENCICLOPEDIA ITALIANA TRECCANI, Storia della scienza, Vol 3, 2004.

[13] R. TUCCI, *Giorgio Valla e i libri matematici del "De expetendis et fugiendis rebus": contenuto, fonti, fortuna*, 2008. Tesi di dottorato, Università di Pisa.

[14] B. NARDINI, *Vita di Leonardo*, Giunti, 2004

[15] R. RASHED, *Les Catoptriciens grecs*, Les belles lettres, Paris, 2002.

[16] R. RASHED, Oeuvres philosophiques et scientifiques d'al-Kindi, Vol I, Optique et catoptrique, Brill Editore, Leiden, 1997.

[17] L. CATASTINI, *Il pensiero allo specchio*, La Nuova Italia, Firenze, 1990.

[18] F. GHIONE-D. PASQUAZI, I ludi geometrici di Leonardo da Vinci. Un gioco per avvicinarsi al concetto di area, Opera Nazionale Montessori, II ed. 2018.

[19] L. CATASTINI F. GHIONE R. RASHED, *Algebra. Origini e sviluppi tra mondo arabo e mondo latino*. Carocci Editore, Roma, 2016.


Franco Ghione

*Franco Ghione già professore di Geometria presso l'Università di Roma Tor Vegata ha sviluppato le sue ricerche in algebra omologica e geometria algebrica e in tempi recenti si è dedicato alla storia della matematica in chiave didattica pubblicando tra l'altro con Laura Catastini:* Le geometria della visione*, Springer 2004,* Algebra. Origini e sviluppi tra mondo arabo e mondo latino*. Carocci 2016,* Mondi non euclidei*, Il Mulino, 2018 e, con D. Pasquazi*, I ludi geometrici di Leonardo da Vinci. Un gioco per avvicinarsi al concetto di area, *Opera Nazionale Montessori, 2018.*