
Matematica, Cultura e Società

RIVISTA DELL'UNIONE MATEMATICA ITALIANA

ELEONORA CINTI

Il problema isoperimetrico: una storia lunga 2000 anni

Matematica, Cultura e Società. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. 4
(2019), n.2, p. 95–106.

Unione Matematica Italiana

[<http://www.bdim.eu/item?id=RUMI_2019_1_4_2_95_0>](http://www.bdim.eu/item?id=RUMI_2019_1_4_2_95_0)

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)*

SIMAI & UMI

<http://www.bdim.eu/>

Il problema isoperimetrico: una storia lunga 2000 anni

ELEONORA CINTI

Università di Bologna

E-mail: eleonora.cinti5@unibo.it

Sommario: *In questo contributo si ripercorrono alcune delle tappe fondamentali nella storia del problema isoperimetrico: dalla sua formulazione con i primi contributi risalenti all’antica Grecia, fino alla sua completa risoluzione nella metà del XX secolo. Vengono inoltre descritte possibili generalizzazioni del problema classico al caso di strutture anisotrope e il loro legame con lo studio della forma dei cristalli. Infine si richiamano risultati recenti nello studio di versioni quantitative di disuguaglianze isoperimetriche e il ruolo della teoria del Trasporto Ottimo nello studio di disuguaglianze geometriche.*

Abstract: *In this work, we describe some of the fundamental steps in the history of the isoperimetric problem: starting from the first contributions in the ancient Greece, until its complete resolution in the XX century. We also address some possible generalizations of the classical problem to anisotropic structures, and their relation with the study of crystal shapes. Finally, we recall some recent results in the study of quantitative versions of the isoperimetric inequality and the connection between geometric inequalities and the theory of Optimal Transport.*

1. – Introduzione

Il problema isoperimetrico è uno dei più antichi problemi matematici, se ne possono infatti trovare riferimenti già nella mitologia classica.

Nel primo Libro dell’Eneide, Virgilio descrive la fondazione di Cartagine da parte di Didone.

Didone, principessa di Tiro, fuggì dalla città natale dopo che suo fratello Pigmalione uccise il di lei marito e prese il potere. Dopo un lungo peregrinare, giunse sulle coste dell’Africa Settentrionale, in Libia, dove ottenne dal re Iarba il permesso di stabilirsi. Didone chiese a Iarba di poter costruire una nuova città e il re le concesse di prendere tanto terreno quanto ne poteva contenere una pelle di bue. La leggenda tramanda che l’astuta Didone tagliò la pelle di bue in tante striscioline sottili e le unì così da formare una sorta di lunga corda con la quale poter cingere la porzione di terra più grande possibile. Supponendo

che il tratto di costa su cui si andava a fondare la nuova città fosse perfettamente rettilineo, con quale forma conveniva a Didone disporre la corda in modo da racchiudere l’area più grande possibile?

*“Devenere locos, ubi nunc ingentia cernes
moenia surgentemque novae Karthaginis arcem,
mercaticque solum, facti de nomine Byrsam,
taurino quantum possent circumdare tergo.”*

*“Giunsero in questi luoghi, ov’or vedrai
sorger la gran cittade e l’alta rocca
de la nuova Carthago, che dal fatto
Birsa nomassi, per l’astuta merce
che, per fondarla, fèr di tanto sito
quanto cerchiar di bue potesse un tergo.”*

(Eneide, Virgilio, Libro I, 365-368)

Quello appena descritto è un problema matematico che viene solitamente chiamato problema *isoperimetrico*: a parità di perimetro, qual è la forma geometrica che racchiude l’area più grande? Visto in questo modo il problema isoperimetrico è un problema di *massimizzazione* (dell’area) fissata una

Accettato: il 10 luglio 2019.

certa quantità (il perimetro). Può equivalentemente essere formulato nel modo seguente: a parità di area, qual è la forma geometrica che ha minor perimetro? In tal caso diventa un problema di *minimizzazione* (di perimetro), ad area fissata.

La soluzione di tale problema dipende dalle condizioni al contorno: nel mito della fondazione di Cartagine, supponendo che il tratto di costa su cui costruire la nuova città sia perfettamente rettilineo, la forma ottimale per racchiudere la maggiore area possibile è il semicerchio.

Se invece di giacere sulla costa, la nuova città fosse stata costruita nell'entroterra, allora sarebbe convenuto disporre la corda in modo da formare un cerchio.

Nel mito di Didone il problema matematico è bidimensionale poichè ci immaginiamo di dover cingere una porzione di piano con una corda (una curva) in modo da poter racchiudere la più grande area possibile. Ma lo stesso problema può essere formulato in dimensione più grande e la soluzione è sempre la stessa: la palla è l'insieme col maggior volume a parità di area di superficie. Nello spazio tridimensionale i tipici oggetti portati come esempio della proprietà isoperimetrica della palla sono le bolle di sapone: a causa della tensione superficiale, le bolle cercano naturalmente di minimizzare la loro superficie a parità di volume di aria racchiusa.

Seppur la formulazione del problema isoperimetrico sia semplice, abbiamo dovuto aspettare 2000 anni prima di avere una sua completa risoluzione matematica! In questa nota ripercorriamo vari secoli di storia, vedendo i contributi che diversi studiosi hanno portato su questo tema, fino ad arrivare ad alcuni sviluppi recenti riguardanti generalizzazioni del problema isoperimetrico con applicazioni allo studio della forma dei cristalli.

2. – Il problema isoperimetrico dall'antichità ai giorni nostri

2.1 – Il contributo degli antichi greci

Il primo tentativo di dimostrare la proprietà isoperimetrica del cerchio (siamo dunque qui nel caso bidimensionale) è dovuto a Zenodoro, matematico greco vissuto intorno al secondo secolo avanti Cristo. Zenodoro scrisse un trattato sullo studio delle figure

isoperimetriche che è andato purtroppo perduto, ma che conosciamo attraverso l'opera *Mathematicae collectiones* di Pappo di Alessandria, matematico greco vissuto intorno al 300 d.C.. Riferimenti agli studi di Zenodoro si ritrovano anche nelle opere di Teone di Alessandria, anch'egli matematico vissuto nella seconda metà del IV secolo, nonchè padre di Ipazia, prima donna matematica storicamente conosciuta, tristemente nota per la tragica fine, quale vittima di fanatici religiosi cristiani.

Il ragionamento di Zenodoro si basava sulle seguenti due affermazioni:

- i) tra tutti i poligoni aventi lo stesso numero di lati e lo stesso perimetro, quello con area maggiore è quello regolare (avente cioè tutti i lati e tutti gli angoli uguali tra loro);
- ii) tra tutti i poligoni regolari aventi lo stesso perimetro, hanno un' area maggiore quelli con un numero di angoli (e di lati) maggiore.

Da queste affermazioni, egli dedusse che il cerchio (che possiamo immaginare di ottenere mandando all'infinito il numero di lati di un poligono regolare) fosse la figura piana con area maggiore a parità di perimetro. Per quanto l'idea di Zenodoro fosse essenzialmente giusta, nel suo argomento ci sono però diverse lacune, ragion per cui non possiamo considerarla una vera e propria dimostrazione.

2.2 – Il contributo di Jacob Steiner

Dall'antichità classica facciamo ora un salto di quasi 1500 anni per incontrare uno dei maggiori protagonisti nella storia del problema isoperimetrico: Jacob Steiner. Steiner fu un matematico svizzero vissuto nella prima metà del XIX secolo, diventato famoso per diversi suoi contributi nell'ambito della geometria. La "dimostrazione" di Steiner della proprietà isoperimetrica della palla si basa su quella che, oggi, viene comunemente chiamata la *simmetrizzazione di Steiner*. L'idea è quella di operare delle trasformazioni su un insieme dato (le simmetrizzazioni) che lo rendono più simmetrico e soddisfano le due seguenti proprietà: ogni volta che applichiamo una di queste trasformazioni, il nuovo insieme che otteniamo ha la stessa area e perimetro più piccolo (o uguale) dell'insieme di partenza. Descriviamo in modo più preciso questa tecnica nel caso

in cui l'insieme sia bidimensionale, ma lo stesso ragionamento vale in qualsiasi dimensione.

Sia E un sottoinsieme di \mathbb{R}^2 e sia v un vettore di \mathbb{R}^2 ; denotiamo un punto x di \mathbb{R}^2 con le coordinate $x = (x_1, x_2)$. Vogliamo definire il *simmetrizzato di Steiner* di E rispetto al vettore v . Per fissare le idee consideriamo $v = (0, 1)$, in tal caso la retta ortogonale a v passante per l'origine è l'asse x_1 , ovvero la retta di equazione $x_2 = 0$. Per ogni $x_1 \in \mathbb{R}$, poniamo

$$E_{x_1} := \{x_2 \in \mathbb{R} : (x_1, x_2) \in E\}.$$

(E_{x_1} non è altro che la sezione di E ottenuta fissando la prima coordinata x_1) e chiamiamo $\ell(x_1)$ la sua lunghezza. Si osservi che, in generale, E_{x_1} potrebbe non essere un segmento. Definiamo il simmetrizzato di Steiner E_v^* di E rispetto a v , l'insieme ottenuto nel seguente modo: preso un qualsiasi x_1 , rimpiazziamo E_{x_1} con un segmento di uguale lunghezza $\ell(x_1)$ ortogonale alla retta di equazione $x_2 = 0$ e centrato su di essa, ovvero

$$E_v^* := \left\{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : -\frac{\ell(x_1)}{2} \leq x_2 \leq \frac{\ell(x_1)}{2} \right\}.$$

(Vedi Figura 1).

Se l'insieme di partenza è n -dimensionale, la costruzione del simmetrizzato di Steiner è analoga. Dato un qualsiasi vettore $v \in \mathbb{R}^n$, indichiamo con v^\perp l'iperpiano ortogonale a v e passante per l'origine e con x' un generico punto di v^\perp . Il simmetrizzato di E rispetto a v si otterrà rimpiazzando per ogni $x' \in v^\perp$

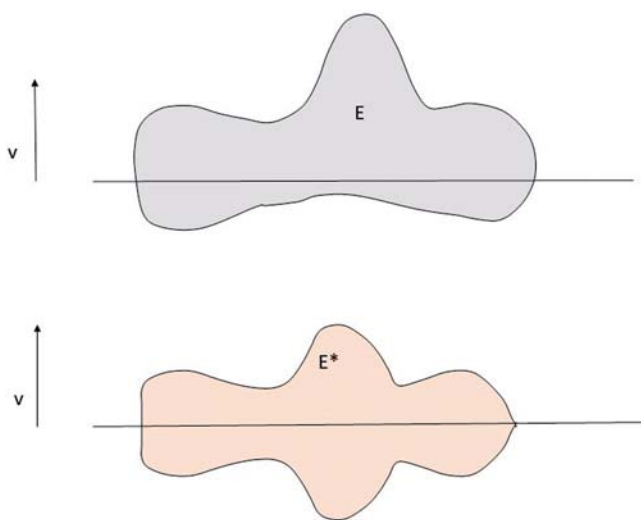


Figura 1. – Un insieme E e il suo simmetrizzato di Steiner E^* rispetto alla direzione v .

la sezione, ancora 1-dimensionale, $E_{x'}$ (ottenuta intersecando E con la retta ortogonale all'iperpiano v^\perp e passante per x') con un segmento di uguale lunghezza ortogonale all'iperpiano v^\perp e centrato su di esso. Per esempio, se $v = (0, \dots, 0, 1) \in \mathbb{R}^n$, il simmetrizzato di E rispetto a v si otterrà rimpiazzando per ogni $x' = (x_1, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$ la sezione $E_{x'} = \{x_n \in \mathbb{R} : (x', x_n) \in E\}$, con un segmento di uguale lunghezza ortogonale all'iperpiano $\{x_n = 0\}$ e centrato su di esso.

Come già anticipato, la proprietà cruciale di tale simmetrizzazione risiede nel fatto che preserva l'area (il volume) di un insieme e ne decresce il perimetro. Più precisamente valgono le seguenti tre affermazioni:

- $|E_v^*| = |E|$;
- $P(E_v^*) \leq P(E)$;
- se $P(E_v^*) = P(E)$, allora tutte le sezioni $E_{x'}$ (qualsiasi sia $x' \in v^\perp$) sono segmenti.

Qui e nel seguito indicheremo con $|E|$ il volume dell'insieme E e con $P(E)$ il suo perimetro e utilizzeremo i termini *volume* e *perimetro* per indicare la misura di un insieme e del suo bordo, indifferentemente in dimensione 2 o in dimensione più alta.

Date queste proprietà (che valgono qualunque sia la scelta del vettore v), Steiner pensò di aver dimostrato la proprietà isoperimetrica della palla: egli aveva infatti chiara l'idea che la palla fosse l'unico insieme che risulta simmetrico rispetto a tutte le possibili direzioni (ovvero la palla è l'unico insieme che coincide col suo simmetrizzato di Steiner, qualunque sia la scelta del vettore v). Tuttavia, quest'ultima affermazione, per quanto intuitiva, necessita di una dimostrazione rigorosa, come vedremo più avanti, nella Sezione 2.4.

Oltre a quella appena descritta, Steiner elaborò altre quattro dimostrazioni della proprietà isoperimetrica della palla ma, seppur egli credesse di aver risolto il problema isoperimetrico in modo rigoroso, tutte le sue dimostrazioni risultavano incomplete, come rilevò già il matematico tedesco Dirichlet. Infatti tutti i suoi argomenti presupponevano l'*esistenza di una soluzione*. In matematica accade spesso che dimostrare l'esistenza (ed eventualmente l'unicità) di una soluzione ad un dato problema (in questo caso, per esempio, un problema di minimo per il perimetro, fissato il volume) può

essere piuttosto ostico e per nulla ovvio. Sono infatti innumerevoli i problemi per i quali non esiste una soluzione e argomenti che presuppongono l'esistenza di una soluzione possono portare ad affermazioni errate.

La prima dimostrazione rigorosa, che colmava il gap dell'esistenza, fu una dimostrazione di tipo "analitico" (e non "geometrico") dovuta al matematico tedesco Weierstrass che si poteva applicare, però, in una classe di insiemi abbastanza regolari, per i quali è facile definire cosa si intenda per 'perimetro'.

Per risolvere il problema isoperimetrico nella classe di insiemi più generale possibile, ovvero la classe degli insiemi *misurabili* (insiemi che a priori possono avere forme arbitrariamente frastagliate, ben più generali di poligoni o insiemi con frontiera 'regolare'), si è dovuto aspettare un altro secolo.

2.3 – La nozione di perimetro di Ennio De Giorgi

Negli anni '50 del XX secolo il matematico italiano Ennio De Giorgi sviluppò tutto l'apparato teorico grazie al quale poté arrivare alla risoluzione completa del problema isoperimetrico.

De Giorgi, leccese di nascita, si formò e lavorò prima a Roma e poi, dal 1959, alla Scuola Normale di Pisa. Diede numerosi e fondamentali contributi nel campo delle Equazioni alle Derivate Parziali, del Calcolo delle Variazioni e della Teoria Geometrica della Misura. Citiamo, a titolo di esempio, la risoluzione del XIX problema di Hilbert, qualche anno prima che John Nash lo dimostrasse in modo indipendente e con tecniche diverse, e i contributi fondamentali nello studio della regolarità delle superfici minime.

Riguardo al problema isoperimetrico, abbiamo ricordato come la questione cruciale, rimasta ancora aperta dopo Steiner, fosse quella dell'esistenza di una soluzione. De Giorgi, partendo da alcune idee già introdotte precedentemente dal matematico napoletano Renato Caccioppoli [3, 4], sviluppò una nozione di *perimetro*, che si applica anche ad insiemi molto poco regolari e che coincide con la nozione che già esisteva e che tutti ci immaginiamo, nel caso di insiemi regolari. Allargando la classe di insiemi per i quali poter dare una nozione di perimetro, si allargava anche la classe in cui poter formulare il

problema di minimo che definisce il problema isoperimetrico.

Questo è esattamente quello che si fa spesso in matematica quando si vuole dimostrare esistenza di una soluzione per un determinato problema: il primo passo fondamentale è quello di definire quale sia una "buona" classe in cui cercare la soluzione. Tale classe deve, da un lato, contenere gli oggetti ragionevoli con i quali siamo soliti lavorare (nel caso in questione, gli insiemi regolari), e allo stesso tempo essere 'abbastanza grande' così che al suo interno sia possibile provare l'esistenza di una soluzione. Una volta che se ne sia dimostrata l'esistenza, a posteriori, si prova poi che tale soluzione gode in realtà di buone proprietà.

Scendiamo ora un po' più nel dettaglio matematico, vedendo qual è la definizione rigorosa di perimetro introdotta da De Giorgi in [6, 7]. Sia E un sottoinsieme misurabile di \mathbb{R}^n , chiamiamo *perimetro di E* la quantità

$$(1) \quad P(E) = \sup \left\{ \int_E \operatorname{div} \varphi(x) dx : \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n), \|\varphi\|_\infty \leq 1 \right\},$$

dove $\|\varphi\|_\infty$ indica la cosiddetta "norma del sup", ovvero $\|\varphi\|_\infty = \sup |\varphi|$.

Gli insiemi E per cui $P(E) < +\infty$ sono detti *insiemi di perimetro finito* o *insiemi di Caccioppoli*.

Osserviamo innanzitutto che per definire la quantità in (1) è sufficiente assumere che l'insieme E sia misurabile e non serve nessuna ipotesi di regolarità sul suo bordo, poichè l'integrale che compare nella definizione di $P(E)$ è fatto su E .

Inoltre si può facilmente vedere che tale definizione, coincide con la misura del bordo dell'insieme E nel caso in cui tale bordo sia abbastanza regolare.

Infatti, supponiamo che il bordo di E sia liscio, in modo che la sua normale esterna ν_E e l'elemento di superficie $d\sigma$ siano ben definiti.

Se $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ è un campo vettoriale tale che $\|\varphi\|_\infty \leq 1$, come semplice conseguenza del Teorema della Divergenza si ha che

$$\int_{\partial E} d\sigma(x) \geq \int_{\partial E} \varphi(x) \cdot \nu_E(x) d\sigma(x) = \int_E \operatorname{div}(\varphi(x)) dx.$$

Inoltre se scegliamo il campo vettoriale φ , in modo che si abbia $\varphi = \nu_E$ su ∂E , allora si ottiene che

$$\int_{\partial E} d\sigma(x) = \int_E \operatorname{div}(\varphi(x)) dx.$$

Dunque, per insiemi regolari vale proprio che

$$\int_{\partial E} d\sigma(x) = \sup \left\{ \int_E \operatorname{div}(\varphi(x)) dx \mid \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n), \|\varphi\|_\infty \leq 1 \right\} = P(E).$$

Ovviamente se l'insieme E non è regolare, alcuni oggetti con i quali siamo abituati a lavorare (per esempio la normale al bordo ν_E), potrebbero non essere ben definiti. Non entrando qui nei dettagli matematici, ci limitiamo a ricordare che nella teoria sviluppata da De Giorgi, viene introdotta una 'buona nozione' di *bordo*, la cosiddetta *frontiera ridotta* (che è in generale un sottoinsieme della frontiera topologica), utilizzando la quale continuano ad essere ben definiti molti degli oggetti e a valere molti dei risultati che siamo soliti usare quando lavoriamo con superfici lisce (per esempio, la normale, gli integrali di bordo, il Teorema della Divergenza).

Con la definizione di perimetro (1), De Giorgi diede una soluzione completa del problema isoperimetrico nella classe degli insiemi misurabili e in tutte le dimensioni in [8].

2.4 – La dimostrazione di De Giorgi

Descriviamo ora la dimostrazione di De Giorgi.

La prova dell'esistenza di una soluzione al problema di minimo, segue dal cosiddetto "metodo diretto" del Calcolo delle Variazioni, sul quale non ci soffermiamo in questa nota e usa in modo cruciale le buone proprietà della nozione di perimetro introdotta da De Giorgi.

Vediamo, invece, come dedurre che tale minimo, che indichiamo con \tilde{E} , è una palla. Ci limiteremo a descrivere le idee principali omettendo alcuni dettagli tecnici di teoria geometrica della misura. In particolare, supporremo che l'insieme \tilde{E} sia regolare; la giustificazione rigorosa dei passaggi, che sotto riportiamo, nel caso di insiemi non regolari costituisce una delle difficoltà del problema.

In questa seconda parte della dimostrazione, De Giorgi si avvale della simmetrizzazione di Steiner.

Il primo passo consiste nel dimostrare che \tilde{E} è convesso. Questa proprietà si vede nel modo seguente: preso un vettore $v \in \mathbb{R}^n$, consideriamo \tilde{E}_v^* il simmetrizzato di Steiner di \tilde{E} rispetto a v . Per le proprietà a) e b) della simmetrizzazione di Steiner e usando che \tilde{E} è un minimo del problema, abbiamo che

$$|\tilde{E}_v^*| = |\tilde{E}| \quad \text{e} \quad P(\tilde{E}_v^*) = P(\tilde{E}).$$

Dunque, per la proprietà c) si ha che tutte le sezioni $\tilde{E}_{x'}$ (qualunque sia $x' \in v^\perp$) sono segmenti. Poiché possiamo applicare questo ragionamento qualunque sia la scelta della direzione v , dal fatto che le sezioni sono segmenti, non è difficile dedurre che \tilde{E} è convesso.

Mostriamo ora che \tilde{E} è una palla. Chiamiamo U la proiezione di \tilde{E} su \mathbb{R}^{n-1} . Poiché \tilde{E} è convesso, abbiamo che esistono due funzioni g_1 e g_2 definite su U e a valori reali, tali che g_1 è convessa, g_2 è concava e \tilde{E} può essere scritto come

$$\tilde{E} = \{(x', x_n) \in \mathbb{R}^n : x' \in U, g_1(x') < x_n < g_2(x')\}.$$

Inoltre, per come abbiamo definito il simmetrizzato \tilde{E}_v^* , si ha che

$$\tilde{E}_v^* = \left\{ (x', x_n) \in \mathbb{R}^n : x' \in U, -\frac{g_2(x') - g_1(x')}{2} < x_n < \frac{g_2(x') - g_1(x')}{2} \right\}.$$

Scriviamo ora il perimetro di \tilde{E} e del suo simmetrizzato usando l'espressione del perimetro per il grafico di una funzione. Si ha che

$$P(\tilde{E}) = \int_U \sqrt{1 + |\nabla g_1|^2} + \int_U \sqrt{1 + |\nabla g_2|^2},$$

e

$$P(\tilde{E}_v^*) = 2 \int_U \sqrt{1 + \frac{|\nabla(g_1 - g_2)|^2}{4}}.$$

Ricordiamo che, per la minimalità di \tilde{E} , $P(\tilde{E}) = P(\tilde{E}_v^*)$ e, poiché la funzione che a t associa $\sqrt{1 + t^2}$ è convessa, se ne deduce che necessariamente deve essere $\nabla g_2 = -\nabla g_1$, cioè $g_2 = -g_1 + c$ e dunque \tilde{E} coincide

col suo simmetrizzato \tilde{E}_v^* , a meno di traslazioni. Osservando che questo argomento può essere ripetuto qualsiasi sia la scelta della direzione v in cui si simmetrizza, si conclude che \tilde{E} deve essere necessariamente una palla.

3. – Il problema isoperimetrico ed il trasporto di massa

Quella che viene oggi comunemente chiamata la Teoria del Trasporto Ottimo, nacque in Francia nella seconda metà del '700. Il matematico francese Gaspard Monge, che fu anche Ministro della Marina durante la Rivoluzione ed ebbe un ruolo fondamentale nella creazione del sistema delle grandi scuole politecniche francesi (le Écoles Polytechniques), formulò per la prima volta nel suo lavoro *Mémoire sur la théorie des déblais et des remblais* nel 1781 (si veda [18]) il seguente problema:

‘Quando si deve trasportare della terra da un luogo all’altro, è d’uso dare il nome di Déblai al volume di terra che si deve trasportare, e quello di Remblai allo spazio che essa deve occupare dopo il trasporto. Essendo il prezzo del trasporto di una molecola, a parità di tempo impiegato, proporzionale al suo peso e allo spazio che deve percorrere, e di conseguenza il prezzo del trasporto totale dovendo essere proporzionale alla somma dei prodotti delle molecole moltiplicate per lo spazio percorso da ciascuna, ne consegue che, essendo il déblai e il remblai dotati di forma e posizione, non è indifferente che una certa molecola del déblai sia trasportata in un luogo o in un altro del remblai, esiste invece una certa distribuzione da seguire delle molecole dal primo al secondo, in modo che la somma dei prodotti sia minima possibile, e il prezzo del trasporto totale sia altrettanto minimo. [...] È la soluzione a questo problema che mi propongo di trovare qui’.

In altre parole: dato uno scavo di terra, qual è il modo migliore di trasportare il materiale estratto, in un posto dove possa essere utilizzato per una nuova costruzione? Poichè il trasporto ha un costo, con il termine “migliore” si intende col minor costo possibile. Monge suppose che il costo di trasporto per unità di massa fosse proporzionale alla distanza da coprire.

Si può ovviamente generalizzare questo problema, scegliendo funzioni costo diverse (per esempio il quadrato o una qualsiasi altra potenza della distanza).

In realtà Monge non risolse il problema e ci vollero circa due secoli, con i contributi fondamentali di diversi matematici tra cui ricordiamo Kantorovich, Brenier, Sudakov, Ambrosio, Evans, Gangbo, per vedere progressi e giungere ad una risoluzione completa. A partire da questi studi, diversi matematici, tra i quali ricordiamo McCann, Otto, Caffarelli, Villani e Figalli, hanno usato la Teoria del Trasporto per ottenere risultati in svariati ambiti, quali, ad esempio, le Equazioni alle derivate Parziali, la Fluidodinamica, la Geometria Differenziale.

Nella sezione precedente abbiamo descritto una delle tante possibili dimostrazioni della disuguaglianza isoperimetrica, che si basa sulle simmetrizzazioni di Steiner. Nel XX secolo, diversi matematici si accorsero che la teoria del trasporto poteva essere efficacemente usata per dimostrare disuguaglianze geometriche, tra le quali, appunto, la disuguaglianza isoperimetrica. L’idea è quella di definire una *mappa di trasporto* T che goda di certe proprietà e che trasporti, appunto, un generico insieme E nella palla B avente lo stesso volume e far vedere che il perimetro di E è più grande del perimetro di B . Questa idea funziona con diverse possibili scelte della mappa di trasporto T .

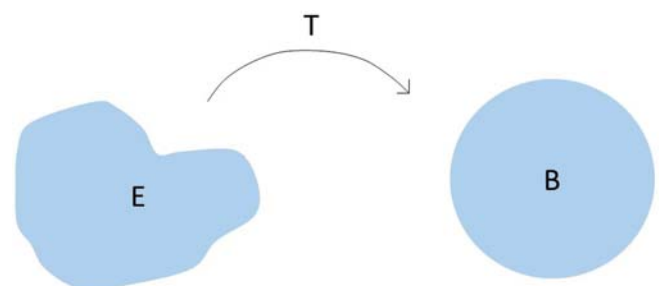


Figura 2. – La mappa T porta l’insieme E nella palla B , mantenendo preservato il volume

La prima dimostrazione della disuguaglianza isoperimetrica basata sul trasporto, usava la cosiddetta *mappa di Knothe*, dal nome del matematico tedesco Herbert Knothe (vedi [16]). L’idea di Knothe è stata poi ripresa e generalizzata da Gromov in

[17]. Qui la descriviamo, utilizzando un'altra mappa di trasporto, la cosiddetta *mappa di Brenier*.

L'idea è la seguente: sia E un qualsiasi sottoinsieme di \mathbb{R}^n e sia B la palla di \mathbb{R}^n centrata nell'origine e avente lo stesso volume di E . Senza ledere la generalità, possiamo supporre che B abbia raggio unitario. Brenier dimostrò l'esistenza di una mappa T che porta punti di \mathbb{R}^n in punti di \mathbb{R}^n (e che risulta essere la mappa gradiente di una funzione convessa) con due cruciali proprietà:

- $T(x)$ appartiene alla palla B qualunque sia x ;
- il determinante della matrice Jacobiana di T è uguale a 1 ($\det \nabla T = 1$).

Un altro ingrediente che ci servirà nella dimostrazione della disuguaglianza isoperimetrica è la cosiddetta disuguaglianza tra la media aritmetica e la media geometrica, che ci dice quanto segue:

dati n numeri positivi $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, la loro media aritmetica è sempre più grande della loro media geometrica, ovvero

$$\frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n}{n} \geq (\lambda_1 \cdot \lambda_2 \dots \lambda_n)^{\frac{1}{n}}.$$

Applicheremo questa disuguaglianza agli autovalori della matrice ∇T , ricordando che il prodotto degli autovalori non è altro che il determinante della matrice che, per la scelta di T , sappiamo valere 1, mentre la somma degli autovalori non è altro che la divergenza della mappa T (ovvero la traccia di ∇T).

Ricordiamo infine che se B è una palla di \mathbb{R}^n , allora $P(B) = n|B|$.

Usando questi fatti, si ha che

$$\begin{aligned} P(B) &= n|B| = n \int_B 1 \, dx = n \int_E (\det \nabla T(x))^{\frac{1}{n}} \, dx = \\ &= n \int_E (\lambda_1 \cdot \lambda_2 \dots \lambda_n)^{\frac{1}{n}} \, dx \\ (2) \quad &\leq n \int_E \frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n}{n} \, dx = \int_E \operatorname{div} T \, dx = \\ &= \int_{\partial E} T \cdot \nu_E \, d\sigma \leq P(E), \end{aligned}$$

dove, nell'ultima uguaglianza abbiamo utilizzato il Teorema della Divergenza.

Abbiamo dunque dimostrato che se $|E|=|B|$, allora $P(B) \leq P(E)$, che non è altro che la proprietà isoperimetrica della palla.

4. – La forma dei cristalli

Cosa ha a che fare la forma dei cristalli col problema isoperimetrico? Abbiamo già citato, come esempi fisici della proprietà isoperimetrica della palla, le bolle di sapone. Le bolle di sapone hanno una forma sferica poichè risolvono un problema fisico di minimizzazione dell'energia: l'energia totale di legame sull'interfaccia della bolla non è altro che l'integrale sulla sua superficie della tensione superficiale, dunque l'energia totale sarà tanto più piccola quanto più piccolo sarà tale integrale (a parità di volume racchiuso). Nel caso delle bolle, la tensione superficiale (ovvero la densità di tale energia di interfaccia) non dipende dall'orientazione, e dunque l'energia minima sarà ottenuta minimizzando l'area della superficie esterna a volume fissato.

Cosa succederebbe se invece la tensione superficiale non fosse costante lungo la superficie esterna di un oggetto, ma dipendesse dalla direzione che ha la normale alla superficie in un determinato punto? Questo è precisamente quello che avviene nelle strutture cristalline.

Siamo di solito portati a pensare alla tensione superficiale come a un fenomeno che riguarda i fluidi; in realtà, ogni volta che due diverse sostanze sono a contatto, si sviluppa una energia di superficie nell'interfaccia che le separa. Se le sostanze che si considerano sono *anisotrope*, come appunto i cristalli, la densità di energia di interfaccia in un determinato punto dipende dall'orientazione della superficie intorno a quel punto.

Per tradurre questo concetto con un linguaggio matematico, introduciamo una funzione di anisotropia $H : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, +\infty)$ definita sulla sfera unitaria $(n-1)$ -dimensionale. Sia E un sottoinsieme di \mathbb{R}^n che rappresenta il nostro solido (la situazione fisica si ha ovviamente nel caso $n=3$, ma il ragionamento vale in ogni dimensione) e per ogni punto x sulla sua superficie esterna ∂E , sia $H(\nu_E(x))$ la tensione superficiale di E nel punto x , dove $\nu_E(x)$ rappresenta la

normale al bordo di E in x . Ovviamente se l'insieme E non è regolare (come avviene appunto nel caso di un cristallo) v_E potrebbe non essere ben definita. Non entrando qui nei dettagli matematici, ci limitiamo a ricordare che in tal caso la nozione giusta di bordo da usare è quella di *frontiera ridotta*, ricordata precedentemente e che, con tale nozione, i passaggi che qui scriviamo formalmente, possono essere giustificati rigorosamente. Supponendo quindi di non avere problemi di regolarità, l'energia totale di interfaccia che il nostro cristallo vorrà cercare di minimizzare sarà dunque data da

$$P_H(E) := \int_{\partial E} H(v_E(x)) d\sigma,$$

dove di nuovo denotiamo con $d\sigma$ la misura di superficie. Già Gibbs, scienziato americano vissuto nella seconda metà dell'800, nel suo lavoro *On the equilibrium of heterogeneous substances* [14], aveva concluso che la forma ideale di un cristallo in equilibrio dovesse essere determinata dal problema di minimizzazione dell'energia totale a volume fissato.

Il problema matematico da risolvere, in questo caso, è dunque il seguente:

qual è la forma che deve avere E per rendere P_H minimo, fissato il volume di E ?

Se H è costante, sappiamo già che la soluzione è la palla. Cosa succede per un H generico? La soluzione di questo problema, la cosiddetta *costruzione di Wulff*, venne proposta da Georg Wulff nel 1901 [21]. Egli era giunto alla seguente conclusione:

Dato il volume di un poliedro, la minima energia di superficie, sarà raggiunta se la distanza delle sue facce da un determinato punto è proporzionale alla costante di capillarità.

Qui la costante di capillarità va intesa come tensione superficiale.

L'espressione matematica dell'insieme di Wulff associato alla funzione di anisotropia H è la seguente:

$$W_H := \{x \in \mathbb{R}^n : x \cdot v \leq H(v) \text{ per ogni } v \in S^{n-1}\}.$$

Si osservi innanzitutto che con questa definizione, l'origine appartiene all'insieme $\overline{W_H}$ e che W_H è l'intersezione dei semispazi della forma $\{x \cdot v < H(v)\}$

per tutti i vettori $v \in S^{n-1}$ e dunque W_H è un insieme convesso. Nel caso di un'anisotropia costante, $H \equiv 1$, W_H non è altro che la palla unitaria euclidea. Si può vedere che in generale W_H è la palla unitaria associata ad una determinata norma.

In generale, ci possono essere diverse funzioni H che danno origine alla stessa forma di Wulff, ma si può dimostrare che ne esiste una sola con la seguente proprietà: tutti gli iperpiani $\{x \in \mathbb{R}^n : x \cdot H(v) = 1\}$ associati ai vettori unitari v , sono tangenti al convesso W_H . Tale funzione è chiamata la *funzione supporto di W_H* ed è data dall'espressione

$$(3) \quad \tilde{H} = \sup_{x \in W_H} x \cdot v.$$

Per la proprietà geometrica sopradescritta, la funzione supporto è la più piccola funzione sulla sfera S^{n-1} tra tutte le funzioni che danno origine allo stesso insieme di Wulff.

In realtà Wulff non dimostrò l'ottimalità dell'insieme W_H e ci vollero i contributi di diversi matematici prima di arrivare ad una dimostrazione completa e nella più totale generalità, della costruzione di Wulff.

Nella sezione precedente abbiamo mostrato due diverse possibili dimostrazioni della disuguaglianza isoperimetrica classica, una che utilizza le simmetrizzazioni e una che utilizza il trasporto di massa. Per quanto riguarda il problema isoperimetrico anisotropo, proprio a causa delle anisotropie intrinseche al problema, una dimostrazione che si basi sulle simmetrie non sembra essere la più adatta. Ed infatti, la prima dimostrazione della disuguaglianza isoperimetrica anisotropa, data dalla matematica Jean Taylor [20], utilizzava un'altra disuguaglianza geometrica: la *disuguaglianza di Brunn-Minkowski*.

Tale disuguaglianza afferma quanto segue:

Per ogni coppia di sottoinsiemi compatti A e B di \mathbb{R}^n vale che

$$(4) \quad |A + B|^{\frac{1}{n}} \geq |A|^{\frac{1}{n}} + |B|^{\frac{1}{n}}$$

e l'uguaglianza vale solo quando A e B sono due corpi convessi aventi la stessa forma, ovvero uno si ottiene dall'altro attraverso un movimento rigido (traslazioni e rotazioni).

Qui la somma di Minkowski $A + B$ indica l'insieme $A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}$.

Un altro ingrediente fondamentale nella dimostrazione dell'ottimalità della forma di Wulff è il cosiddetto *contenuto di Minkowski*.

Per introdurlo ci mettiamo in una situazione isotropa e consideriamo il perimetro classico, sarà così più semplice capirne il significato e più naturale vederne l'estensione al caso anisotropo.

Sia $\varepsilon > 0$, consideriamo un insieme F e il suo allargato di ε che indichiamo con F_ε . L'allargato di un insieme non è altro che l'insieme dei punti che distano meno di ε dall'insieme stesso. Possiamo immaginare di ottenerlo facendo rotolare una pallina euclidea di raggio ε centrata sul bordo F , lungo tutto il bordo di F . Tale insieme si può scrivere nella forma

$$F_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^n : d(x, F) < \varepsilon\} = F + \varepsilon B_1,$$

dove $d(x, F)$ indica la distanza di un generico punto x da F , B_1 indica la palla unitaria centrata nell'origine e la somma nell'ultimo membro indica la somma di Minkowski prima introdotta (vedi Figura 3).

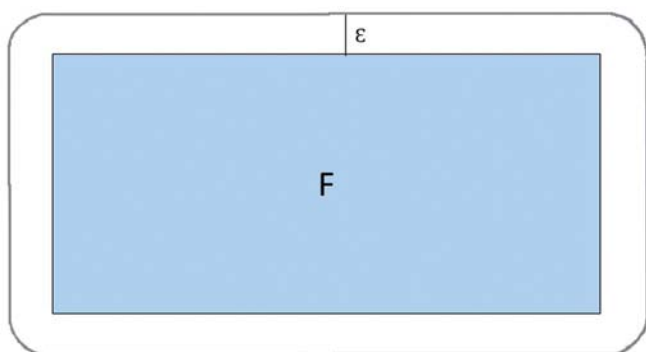


Figura 3. – L'allargato F_ε di un insieme F è l'insieme dei punti a distanza minore di ε da F .

Si può intuire che se consideriamo il rapporto tra il volume della strisciolina di ampiezza ε che stiamo aggiungendo (che si ottiene sottraendo il volume di F dal volume del suo allargato F_ε) e l'ampiezza ε e ne facciamo il limite per $\varepsilon \rightarrow 0$, il risultato ci dà la misura del bordo di F . È facile vederlo se per esempio come F consideriamo un rettangolo. Si può dimostrare che questo fatto vale per tutti gli insiemi abbastanza regolari; più precisamente se F è un insieme *rettificabile*, allora

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{|F + \varepsilon B_1| - |F|}{\varepsilon} = P(F).$$

Se vogliamo generalizzare questa nozione di contenuto di Minkowski ad una situazione anisotropa, la cosa che risulta naturale fare è la seguente: quando definiamo l'allargato del nostro insieme, invece di aggiungere una pallina euclidea (la palla è proprio l'insieme isoperimetrico per il perimetro classico), aggiungiamo un convesso diverso dalla palla, che sarà in qualche modo il convesso "giusto" associato alla nostra anisotropia. Utilizzando le notazioni che abbiamo introdotto prima, se W_H è un convesso, \tilde{H} la sua funzione supporto definita in (3), P_H^\sim è il perimetro anisotropo associato all'anisotropia \tilde{H} , allora vale che

$$(5) \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{|F + \varepsilon W_H| - |F|}{\varepsilon} = P_H^\sim(F),$$

per ogni insieme F abbastanza regolare.

Inoltre per la forma di Wulff W_H^\sim , vale la relazione $P_H^\sim(W_H^\sim) = n|W_H^\sim|$ (esattamente come per la palla unitaria euclidea vale $P(B_1) = n|B_1|$).

Vediamo ora come, utilizzando il contenuto di Minkowski e la disuguaglianza di Brunn-Minkowski, sia possibile dimostrare la disuguaglianza isoperimetrica anisotropa.

Usando le notazioni precedentemente introdotte, per la disuguaglianza di Brunn-Minkowski abbiamo che

$$\begin{aligned} |F + \varepsilon W_H^\sim| - |F| &\geq (|F|^{\frac{1}{n}} + \varepsilon |W_H^\sim|^{\frac{1}{n}})^n - |F| \\ &= |F| \left(1 + \frac{\varepsilon |W_H^\sim|^{\frac{1}{n}}}{|F|^{\frac{1}{n}}} \right)^n - |F| \\ &\geq n\varepsilon |F|^{\frac{n-1}{n}} |W_H^\sim|^{\frac{1}{n}}, \end{aligned}$$

dove, nell'ultima stima, abbiamo usato la disuguaglianza di Bernoulli $(1 + t)^n \geq 1 + nt$, per $t \geq -1$.

Dividendo ora per ε e facendo il limite per $\varepsilon \rightarrow 0$, dalla (5) segue che

$$P_H^\sim(F) \geq n|F|^{\frac{n-1}{n}} |W_H^\sim|^{\frac{1}{n}} = P_H^\sim(W_H^\sim) \left(\frac{|F|}{|W_H^\sim|} \right)^{\frac{n-1}{n}},$$

dove l'ultima uguaglianza si deduce dal fatto che, come già ricordato, $P_H^\sim(W_H^\sim) = n|W_H^\sim|$.

Abbiamo dunque dedotto che se F è un insieme avente lo stesso volume di W_H^\sim , allora

$$P_H^\sim(F) \geq P_H^\sim(W_H^\sim),$$

che è ciò che volevamo dimostrare. Vale in realtà un'affermazione più forte: così come per il problema isoperimetrico classico, anche il problema isoperimetrico anisotropo ammette un'unica soluzione (a meno di traslazioni) e dunque, la forma di Wulff è l'unico insieme che minimizza il perimetro anisotropo a parità di volume.

Concludiamo questa sezione con la seguente osservazione. Nella sezione precedente abbiamo visto due possibili dimostrazioni della disuguaglianza isoperimetrica classica. Come già precedentemente osservato, quella basata sulle simmetrizzazione non si adatta al caso delle forme di Wulff, proprio a causa delle anisotropie intrinseche al problema. Invece, la dimostrazione basata sul trasporto di massa può essere replicata facilmente nel caso anisotropo: basta inserire in modo opportuno l'anisotropia nella catena di disuguaglianze (2). Il trasporto ottimo si rivela dunque uno strumento più flessibile che permette, di nuovo, di dare una dimostrazione alternativa dell'ottimalità della forma di Wulff.

5. – La disuguaglianza isoperimetrica quantitativa

In anni recenti, particolare interesse è stato rivolto allo studio di versioni *quantitative* della disuguaglianza isoperimetrica o, detto in altro modo, alla *stabilità* di tale disuguaglianza (si veda il contributo [12] per una esauriente descrizione di tale problema). La domanda alla quale si vuole rispondere è la seguente:

supponiamo di avere un insieme E che abbia perimetro che differisce di poco da quello della palla avente lo stesso volume, ovvero sia E un insieme che soddisfi

$$|E| = |B| \quad e \quad P(E) = P(B) + \delta,$$

dove B indica una palla e $\delta > 0$ è un numero reale abbastanza piccolo.

Possiamo allora dire che E è "vicino", in un qualche senso, ad essere la palla, e possiamo misurare tale "vicinanza" in modo quantitativo in termini di δ ?

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} d_H(E, B_1(x)) \leq \begin{cases} C \sqrt{P(E) - P(B_1)} & \text{se } n=2 \\ C \sqrt{(P(E) - P(B_1)) \log \frac{1}{P(E) - P(B_1)}} & \text{se } n=3 \\ C(P(E) - P(B_1))^{\frac{2}{n+1}} & \text{se } n \geq 4, \end{cases}$$

La prima risposta a questa domanda è stata data per sottoinsiemi convessi del piano da Bernstein [1] e Bonnesen [2] all'inizio del '900. Più precisamente essi dimostrarono quanto segue:

se $E \subset \mathbb{R}^2$ è un insieme convesso avente lo stesso volume del disco unitario B_1 , cioè $|B_1| = |E|$, allora esistono due dischi concentrici di raggi R_1 ed R_2 tali che

$$B_{R_1} \subset E \subset B_{R_2} \quad e \quad (R_2 - R_1)^2 \leq \frac{P(E)^2 - P(B_1)^2}{4\pi}.$$

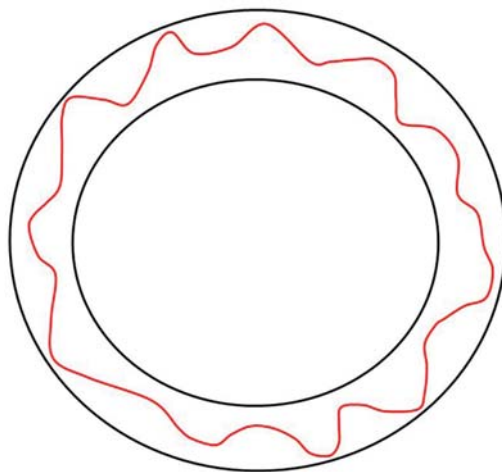


Figura 4. – Il bordo dell'insieme E è contenuto tra due circonferenze concentriche di raggi R_1 e R_2 .

La prima generalizzazione a tutte le dimensioni di tale risultato, venne data da Fuglede nel 1989 [11]. Nel risultato di Fuglede, la nozione di distanza che indica quanto l'insieme E si discosti dalla palla unitaria B_1 , è la cosiddetta *distanza di Hausdorff* che ricordiamo essere definita come segue: per ogni coppia di insiemi E ed F , poniamo

$$d_H(E, F) = \inf\{\varepsilon > 0 : E \subset F_\varepsilon, F \subset E_\varepsilon\},$$

dove E_ε e F_ε denotano gli allargati degli insiemi E ed F . Fuglede dimostrò che per ogni convesso di \mathbb{R}^n , è possibile stimare la distanza di Hausdorff tra E e B_1 con il cosiddetto *deficit isoperimetrico* $P(E) - P(B_1)$. Più precisamente, egli provò che

dove $B_1(x)$ indica la palla unitaria centrata in x e C è una costante positiva che dipende dalla dimensione n .

Vorremmo ora capire se è possibile dare una qualche stima quantitativa rimuovendo l'ipotesi di convessità. La prima cosa che risulta naturale osservare è che se ci mettiamo nella classe degli insiemi misurabili, allora la distanza di Hausdorff non è più una buona nozione di distanza per la quale aspettarsi stime in termini del deficit isoperimetrico. Infatti basta definire un insieme E aggiungendo ad una palla B una pallina piccolissima ma a distanza grande da B , per accorgersi che una disuguaglianza alla Fuglede non può essere vera: in tal caso, infatti, il deficit isoperimetrico di E è piccolo ma la distanza di Hausdorff da B è molto grande. Guidati da questo esempio, sembra ragionevole definire una distanza che tenga in conto di quanto differiscono E e B in *misura*.

Definiamo l'*indice di asimmetria*, detto anche *asimmetria di Fraenkel*, nel seguente modo. Sia E un qualsiasi sottoinsieme misurabile di \mathbb{R}^n e sia $B_R(x)$ la palla di \mathbb{R}^n di centro x e raggio R avente lo stesso volume di E , poniamo

$$(6) \quad \mathcal{A}(E) = \min_{x \in \mathbb{R}^n} \frac{|E \Delta B_R(x)|}{R^n},$$

dove $E \Delta F$ denota la differenza simmetrica tra insiemi, ovvero $E \Delta F = (E \setminus F) \cup (F \setminus E)$. Osserviamo che con tale definizione di asimmetria, se anche aggiungiamo un insieme di misura molto piccola a distanza grande da una certa palla B , come facevamo nell'esempio precedente, l'asimmetria dell'insieme così ottenuto sarà piccola, ed in particolare piccola quanto la misura della pallina che aggiungiamo.

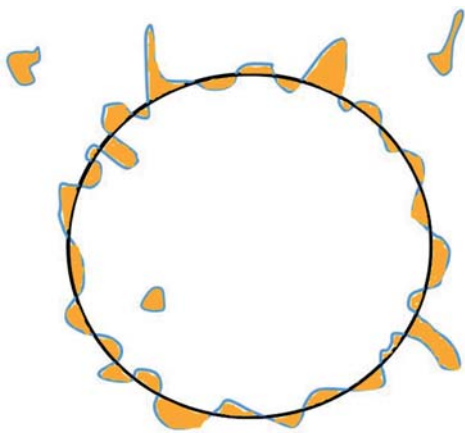


Figura 5. – L'indice di asimmetria $\mathcal{A}(E)$ è dato dalla misura di $E \Delta B$, rappresentata dalla parte colorata in arancione.

Definiamo infine il *deficit isoperimetrico* come

$$(7) \quad \delta(E) = \frac{P(E) - P(B_R(x))}{R^{n-1}}.$$

Si osservi che con queste definizioni, sia l'asimmetria che il deficit risultano quantità invarianti per riscalamento.

Vogliamo ora capire se è possibile dare una stima dell'asimmetria $\mathcal{A}(E)$ in termini del deficit $\delta(E)$ per un insieme misurabile E .

Nel 1992 Hall [15], usando alcuni contributi precedenti ottenuti insieme ad Hayman e Weitsman, provò che se E è un insieme misurabile di \mathbb{R}^n , allora

$$\mathcal{A}(E) \leq C(n)(\delta(E))^{\frac{1}{4}}.$$

Si osservi che la dipendenza dalla dimensione n entra solo nella costante e non nell'esponente sul deficit.

Hall osservò inoltre che l'esponente non potesse essere migliore di $1/2$, come si può vedere considerando un ellissoide con piccola eccentricità per il quale è possibile fare un calcolo esplicito, e giunse a formulare la seguente congettura

CONGETTURADI HALL. – Esiste una costante $C(n) > 0$, dipendente da n , tale che

$$\mathcal{A}(E) \leq C(n)(\delta(E))^{\frac{1}{2}}.$$

Tale congettura rimase aperta per diversi anni e venne dimostrata per la prima volta nel 2008 da Fusco, Maggi e Pratelli [13]. Questa prima dimostrazione utilizza le simmetrizzazioni; in particolare si utilizza la simmetrizzazione di Schwartz (che nel piano coincide con la simmetrizzazione di Steiner definita precedentemente). L'idea è quella di ridursi al caso di insiemi simmetrici rispetto ad ogni piano coordinato e poi provare una stima quantitativa per tali insiemi.

Nella sezione precedente abbiamo parlato di perimetro anisotropo, sottolineando come non fosse affatto chiaro come ottenere una dimostrazione della disuguaglianza isoperimetrica anisotropa che si basasse sulle simmetrizzazioni. Viene dunque ora naturale chiedersi: è possibile dare una versione quantitativa della disuguaglianza isoperimetrica anisotropa? In particolare, ci si chiede se valga l'analogo del risultato di Fusco, Maggi e Pratelli in questo caso, cioè una stima del tipo

$$(8) \quad \mathcal{A}_H(E) \leq c(n)(\delta_H(E))^{\frac{1}{2}}.$$

Ora l'asimmetria \mathcal{A}_H e il deficit δ_H saranno naturalmente associati all'anisotropia H , cioè la loro definizione sarà analoga alle (6)-(7), dove però alla palla sarà sostituita la forma di Wulff W_H e al perimetro, il perimetro anisotropo P_H .

In questo caso la stima quantitativa con esponente ottimo (8) è stata dimostrata da Figalli, Maggi e Pratelli [10], utilizzando il trasporto di massa. L'idea è quella di utilizzare le proprietà della mappa di Brenier e introdurre elementi quantitativi nella catena di disuguaglianze (2).

Ricordiamo che esiste una terza dimostrazione della disuguaglianza isoperimetrica quantitativa, dovuta a Cicalese e Leonardi [5], che utilizza la teoria della regolarità delle superficie minime.

Concludiamo questo contributo ricordando che nell'ultimo decennio grande interesse è stato rivolto allo studio della stabilità di diverse disuguaglianze geometriche e funzionali. Per esempio, oltre alla disuguaglianza isoperimetrica classica, sono state fornite versioni quantitative di disuguaglianze isoperimetriche con pesi, disuguaglianze di Sobolev e log-Sobolev, disuguaglianze spettrali, sia utilizzando tecniche di simmetrizzazione che di trasporto. A tale proposito, citiamo il contributo [9], nel quale Figalli, Maggi e Pratelli hanno utilizzato la teoria del trasporto ottimo per dimostrare una versione quantitativa della disuguaglianza di Brunn-Minkowski che, come abbiamo visto nella sezione precedente, è stata uno degli ingredienti fondamentali nella prima dimostrazione della disuguaglianza isoperimetrica anisotropa.

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

- [1] F. BERNSTEIN, *Über die isoperimetrische Eigenschaft des Kreises auf der Kugeloberfläche und in der Ebene*, Math. Ann. 60 (1905), no. 1, 117-136.
- [2] T. BONNESEN, *Über das isoperimetrische Defizit ebener Figuren*, Math. Ann. 91 (1924), no. 3-4, 252-268.
- [3] R. CACCIOPPOLI, *Elementi di una teoria generale dell'integrazione k -dimensionale in uno spazio n -dimensionale*, Atti IV Convegno UMI, (1951).
- [4] R. CACCIOPPOLI, *Misura e integrazione sugli insiemi dimensionalmente orientati*, Note I e II, Rend. Accad. Naz. Lincei, (1952).
- [5] M. CICALESE, G.P. LEONARDI, *A selection principle for the sharp quantitative isoperimetric inequality*, Arch. Rat. Mech. Anal. 206 (2012), 617-643.
- [6] E. DE GIORGI, *Definizione ed espressione analitica del perimetro di un insieme*, Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur., (1953).
- [7] E. DE GIORGI, *Su una teoria generale della misura $(r-1)$ -dimensionale in uno spazio ad r dimensioni*, Ann. Mat. Pura Appl. (4) 36, (1954), 191-213.
- [8] E. DE GIORGI, *Sulla proprietà isoperimetrica dell'ipersfera, nella classe degli insiemi aventi frontiera orientata di misura finita*, Atti Accad. Naz. Lincei Mem. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat. Sez. I (8) (1958), 33-44.
- [9] A. FIGALLI, F. MAGGI, A. PRATELLI: *A refined Brunn-Minkowski inequality for convex sets*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire 26 (2009), no. 6, 2511-2519.
- [10] A. FIGALLI, F. MAGGI, A. PRATELLI, *A mass transportation approach to quantitative isoperimetric inequalities*, Invent. Math., 182 (2010), 167-211.
- [11] B. FUGLEDE, *Stability in the isoperimetric problem for convex or nearly spherical domains in \mathbb{R}^n* , Trans. Amer. Math. Soc. 314 (1989), 619-638.
- [12] N. FUSCO, *The stability of the isoperimetric inequality*. Vector-valued partial differential equations and applications, 73-123, Lecture Notes in Math., 2179, Fond. CIME/CIME Found. Subser., Springer, Cham, (2017).
- [13] N. FUSCO, F. MAGGI, A. PRATELLI, *The sharp quantitative isoperimetric inequality*, Annals of Math. 168 (2008), 941-980.
- [14] J. W. GIBBS, *On the Equilibrium of Heterogeneous Substances*, Transactions of the Connecticut Academy of Arts and Sciences, 3, (1874-1878) 108-248, 343-524. Reproduced in both The Scientific Papers (1906), pp. 55-353 and The Collected Works of J. Willard Gibbs (1928), pp. 55-353.
- [15] R. R. HALL, *A quantitative isoperimetric inequality in n -dimensional space*, J. Reine Angew. Math. 428 (1992), 161-176.
- [16] H. KNOTHE, *Contributions to the theory of convex bodies*, Michigan Math. J. 4 (1957), 39-52.
- [17] V. D. MILMAN, G. SCHECHTMAN, *Asymptotic Theory of Finite-dimensional Normed Spaces*. With an appendix by M. Gromov. Lecture Notes in Mathematics, vol. 1200. Springer, Berlin (1986), viii+156 pp.
- [18] G. MONGE, *Mémoire sur la théorie des d'eblais et des remblais*, Histoire de l'Académie Royale des Sciences de Paris, (1781), pp. 666-704.
- [19] J. STEINER, *Einfacher Beweis der isoperimetrischen Hauptsätze*, J. reine angew. Math., 18 (1838), 281-296.
- [20] JEAN E. TAYLOR, *Crystalline variational problems*. Bull. Amer. Math. Soc. 84 (1978), no. 4, 568-588.
- [21] G. WULFF, *Zur Frage der Geschwindigkeit des Wachstums und der Auflösung der Kristallflächen*, Z. Kristallogr. 34 (1901), 449-530.



Eleonora Cinti

Ha conseguito il Dottorato di Ricerca nel 2010 presso l'Università di Bologna e l'Universitat Politècnica de Catalunya a Barcellona. Dal 2010 al 2017 ha lavorato come postdoc presso l'Istituto Max Planck di Lipsia, l'Istituto Weierstrass di Berlino, le Università di Pavia, Bologna e Torino. Dal 2017 è Ricercatrice presso l'Università di Bologna. La sua attività di ricerca riguarda il campo del Calcolo delle Variazioni e delle Equazioni alle Derivate Parziali.