Matematica, Cultura e Società

Rivista dell'Unione Matematica Italiana

Agnese Ilaria Telloni, Carlo Toffalori

Tra Hilbert e Poincaré. Matematica: intuizione o rigore?

Matematica, Cultura e Società. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **4** (2019), n.2, p. 159–178.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=RUMI_2019_1_4_2_159_0>

Matematica, Cultura e Società. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2019.

Matematica, Cultura e Società – Rivista dell'Unione Matematica Italiana
Serie I, Vol. 4, N. 2, agosto 2019, 159-178

Tra Hilbert e Poincaré.
Matematica: intuizione o rigore?

AGNESE ILARIA TELLONI
Università Politecnica delle Marche
E-mail: agnesetelloni@gmail.com

CARLO TOFFALORI
Università di Camerino
E-mail: carlo.toffalori@unicam.it

Sommario: *Riferiamo e commentiamo la controversia di inizio Novecento tra Hilbert e Poincaré sull'importanza di logica e teoria degli insiemi nello sviluppo della matematica. Ne traiamo spunto per discutere la contrapposizione di lunga data tra intuizione e rigore nel progresso della matematica, ma anche per sottolineare, attraverso la citazione di vari passi e aforismi celebri dei due scienziati e di altri loro autorevoli colleghi come Weyl, Weil, Brouwer, Klein, Kovalevskaya, Severi, Enriques, la sorprendente verve che vari grandi matematici dimostrano come scrittori – non solo di teoremi, ma anche di se stessi e delle loro idee.*

Abstract: *We report and comment on the controversy of the early twentieth century between Hilbert and Poincaré on the importance of logic and set theory in the development of mathematics. We take it as a starting point for discussing the longstanding dichotomy between intuition and rigor in the progress of mathematics, but also for emphasizing, through the quotation of various passages and famous aphorisms of the two scientists and of some other authoritative colleagues of them, such as Weyl, Weil, Brouwer, Klein, Kovalevskaya, Severi, Enriques, the surprising verve that various great mathematicians show as writers – not only of theorems, but also of themselves and their ideas.*

1. – La scienza per la scienza

Leggiamo ne *Il poeta e i pazzi*, opera dello scrittore inglese Gilbert Chesterton (1874-1936), che *"il cerchio è insieme un'eternità e una prigione"*. Ma forse è lecito estendere questa duplicità all'intera matematica, dove pure si distinguono due poli contrapposti, l'intuizione e il rigore, l'invenzione e la logica, e viene naturale associare al secondo l'ufficio del carceriere e al primo l'idea dell'eternità – come dire libertà e infinito.

"La matematica non è né più né meno che la parte esatta del nostro pensiero", affermava Brouwer [1]. Ma, ciò premesso, rimane appunto da chiarire se, ad assisterla in questa sua funzione, sia più la logica o l'intuizione.

L'antitesi investe persino il tema dell'insegnamento e dell'apprendimento. L'interrogativo diventa allora: come educare a ragionare? Con l'esercizio regolare e insistito, come si sosteneva una volta, oppure, come oggi si preferisce, col gioco, col laboratorio, con la scoperta, con la cooperazione creativa di studenti con maestri o professori?

A prescindere dalla didattica, la questione generale animò oltre un secolo fa un dibattito appassio-

Accettato: il 30 luglio 2019.

(1) Di Luitzen Brouwer (1881-1966) parleremo per esteso nel capitolo 8. La frase citata si trova sul sito www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Quotations/Brouwer.html

nato, per certi versi una contesa, tra due geni dell'epoca: Henri Poincaré contro David Hilbert.

Intendiamoci: i due furono certamente accomunati dall'amore per matematica e ricerca. Leggiamo per esempio all'inizio di *Scienza e metodo* [Po2], uno dei saggi più famosi di Henri Poincaré (1854-1912) ([2]): *"L'uomo di scienza non studia la natura perché ciò è utile; la studia perché ci trova gusto, e ci prova gusto perché la natura è bella"*. Una bellezza *"intellettuale"*, sottile e *"riposta"* perché derivante *"dall'ordine armonioso delle parti"*, e tuttavia una bellezza a tutto tondo, che Poincaré per primo assaporò e che soprattutto la matematica sa svelare ed esaltare, in quanto ponte naturale tra filosofia e fisica, tra amore della sapienza e conoscenza del mondo.

Né fu da meno David Hilbert (1862-1943), che enunciò simili principi in vari passi della sua opera, e in particolare nell'articolo del 1930 *Conoscenza della natura e logica*, che per molti versi può considerarsi il suo testamento scientifico ([3]). Vi elogiava lui pure la matematica come luce e regina di ogni scienza: *"Noi non riusciamo a dominare una teoria scientifica della natura"*, scriveva, *"finché non abbiamo estratto e totalmente disvelato il suo* ***nucleo matematico****"* ([4]). Ma sottolineava anche come la matematica possegga una sua intrinseca nobiltà, che prescinde dallo studio spicciolo della realtà. Osservava infatti, menzionando Jacobi, che *"l'unico scopo di ogni scienza è l'onore dello spirito umano"* e *"da questo punto di vista un problema della teoria pura dei numeri ha lo stesso valore di un problema che serve per le applicazioni"*.

Tutti e due, Poincaré e Hilbert, credettero quindi convintamente in una *"scienza per la scienza"*, bella di per sé. Anzi, Poincaré la difese a spada tratta, sempre in *Scienza e metodo*, scagliandosi con *"inaspettata durezza"* ([5]) contro Tolstoj, il grande scrittore russo, il quale contestava questa concezione e riteneva che la scienza dovesse *"lasciarsi guidare dall'utilità"*. Replicò Poincaré che *"l'utile è solo ciò che può rendere l'uomo migliore"*. E proseguì:

> *"Basta aprire gli occhi per rendersi conto che tutte le conquiste dell'industria, che hanno arricchito un così gran numero di «uomini pratici», non sarebbero mai state realizzate se fossero esistiti soltanto questi uomini pratici, se costoro non fossero stati preceduti da pazzi disinteressati, morti in miseria, che non hanno mai pensato al profitto e ciò nondimeno avevano una guida diversa dal proprio esclusivo capriccio.* [...] *questi pazzi hanno risparmiato ai loro posteri la fatica di pensare."*

Ebbene, Hilbert sottoscrisse alla lettera queste parole nel suo saggio appena citato.

Non mancarono poi tra i due espressioni di reciproca stima. Hilbert, di qualche anno più giovane, celebrò Poincaré come *"il più brillante matematico della sua generazione"* e *"al tempo stesso profondamente fisico e astronomo"*. Poincaré contraccambiò tributando più volte a Hilbert il suo rispetto e dichiarando per esempio, dei *Fondamenti della Geometria* del 1899 [Hi1], che erano opera *"giustamente ammirata e più volte premiata"*.

Ma su certi aspetti chiave della matematica le visioni dei due tesero a divergere. Così, di quegli stessi *Fondamenti* hilbertiani di cui professava così alta considerazione, Poincaré confessò che non li avrebbe mai raccomandati a uno studente a motivo della loro eccessiva astrattezza. *"Del resto"* aggiunse *"potrei anche farlo, e senza timori eccessivi, sapendo che* [lo studente] *non andrebbe molto avanti nella lettura"*. Quanto a Hilbert, egli rimproverò in qualche occasione a Poincaré erronee convinzioni ([6]) e infelici concezioni ([7]) che ostacolavano e talora sbarravano il corretto progresso della matematica.

Attriti non da poco, dovuti certamente a una diversa sensibilità di fondo. Un altro grande matematico del Novecento, Stanisław Ulam (1909-1984), ri-

([2]) Scritto nel 1908.

([3]) Tutti i saggi di Hilbert citati in questo articolo si possono trovare in [Hi2]. In particolare *Conoscenza della natura e logica* si trova alle pp. 301-311.

([4]) L'enfasi in neretto, qui e quasi sempre nelle citazioni che seguono, è nostra.

([5]) Citiamo qui Hilbert e *Conoscenza della natura e logica*, p. 310.

([6]) Nei *Fondamenti della matematica*, p. 279 in [Hi2].

([7]) In *Problemi della fondazione della matematica*, p. 292 in [Hi2].

levò per esempio (8) che Poincaré *"conosceva molta fisica"*, mentre Hilbert non possedeva *"un vero e proprio intuito in materia"*, pur avendo scritto *"articoli molto importanti sulle tecniche e sulla logica della fisica"*. In verità Hilbert contribuì significativamente alla teoria della relatività, anticipò la meccanica quantistica e fornì strumenti matematici appropriati per la nuova fisica (9). Ma forse il suo apporto fu, come dire?, elitario e signorile e rimase intimamente matematico. Poincaré ebbe invece atteggiamento più aperto verso tutte le scienze naturali.

Ecco, può essere davvero che le frizioni tra i due si colleghino a questa diversa predisposizione. Ma esse dipesero anche dall'opinione differente che Hilbert e Poincaré maturarono sul ruolo in matematica di logica e intuizione.

Discuteremo allora nelle pagine che seguono questa loro controversia, le motivazioni e le conseguenze, insieme ai pareri che in merito espressero altri illustri matematici, come il già citato Brouwer, Felix Klein, André Weil, Hermann Weyl e molti altri – con un secondo intento in verità, che però sveleremo solo alla fine dell'articolo.

2. – Le ali e le dande

Henri Poincaré predilesse l'invenzione e riservò critiche taglienti a un rigore cieco e ottuso. Ecco in proposito un'illuminante antologia di citazioni, tratte ancora da *Scienza e metodo* [Po2].

- *"La logica"*, non dunque il sonno goyesco della ragione, ma il suo pedissequo esercizio, *"talvolta genera mostri"*.
- *"Per parte mia, nella logistica non vedo che intralci all'invenzione. Di certo non aiuta a essere più concisi, anzi, il contrario; e se ci vogliono 27 equazioni per provare che 1 è un numero, quante ce ne vorranno per dimostrare un vero teorema?* [...] *È forse più sicuro, ma di certo non si va più veloci.*
  No, non ci date ali, ci fate camminare con le dande."

(8) Nel suo libro del 1983 *Avventure di un matematico* [Ul].
(9) Il suo apporto è descritto anche nella sua biografia [Re].

- *"La logica rimane* [...] *sterile, se non è fecondata dall'intuizione."*
- *"Le regole della logica perfetta sono tutta la matematica? Sarebbe come dire che l'arte di giocare a scacchi si riduce alle regole di movimento dei pezzi"*.

Insomma, quando si fondano solo sulla logica, le scienze matematiche rischiano di ridursi a *"un coacervo arbitrario di inutili sottigliezze"* e ciò nonostante pretendono ugualmente di imporsi *"non solo a noi, ma alla natura stessa. Incatenano, per così dire, il Creatore"* (10).
Al contrario

- l'intuizione è indispensabile *"per colmare **l'abisso che separa il simbolo dalla realtà**"*,
- il matematico che ne fosse sprovvisto *"sarebbe come uno scrittore che fosse ferrato in grammatica ma mancasse di idee"*.

L'intuizione corrisponde poi ben più del rigore a quel gusto estetico che secondo Poincaré anima la vera scienza. Jacques Hadamard (1865-1963), che fu lui pure matematico di prim'ordine, nonché grande ammiratore di Poincaré, sviluppò in [Had] un'analisi della facoltà dell'invenzione in matematica, e vi sostenne tra l'altro ch'essa è frutto di una scelta soggettiva *"governata perentoriamente dal senso della bellezza"*.

Attenzione però: anche a parere di Poincaré l'intuizione ha i suoi limiti. Quando opera da sola non sa garantire *"il rigore, e nemmeno la certezza"*. Se quindi spesso dischiude analogie insospettate, talvolta invece induce a convinzioni fallaci. Ad esempio, *"ci suggerisce* [falsamente] *che ogni curva ha una tangente, vale a dire che ogni funzione continua ha una derivata, e questo è falso"*. Poincaré allude qui alla sorprendente esistenza di funzioni continue ma non differenziabili in qualche, o addirittura in ogni punto del proprio dominio – contraria all'intuito, ma attestata dalla ragione. La prima e forse più famosa

(10) Quest'ultima frase si trova nell'altro saggio fondamentale di Poincaré, *La scienza e l'ipotesi* [Po1]. Salvo avviso contrario, le citazioni che l'articolo fa del matematico francese derivano invece da *Scienza e metodo* [Po2].

di queste apparenti stranezze (funzioni ovunque continue e non derivabili) è la *funzione di Weierstrass*, che il matematico tedesco introdusse nel 1872 [Fa], [Kl]. Essa associa a ogni reale x la somma della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} a^n \cos(b^n \pi x)$$

dove a è un reale strettamente compreso tra 0 e 1 e b è un intero positivo dispari per cui $ab > 1 + \frac{3}{2}\pi$. Quindi si tratta in realtà di una famiglia infinita di funzioni, al variare di a e b: in particolare è 7 il minimo valore di b che può accompagnarsi a un qualche a.

Si legge che, di fronte a questa e simili novità, molti matematici rimasero sconcertati se non scandalizzati. Poincaré in testa. Prima di lui si può semmai citare Charles Hermite (1822-1901), che del resto era stato suo professore all'École Polytechnique parigina, e che espresse in merito, nel 1893 in una lettera a Stieltjes, un commento tutt'altro che lusinghiero. Lo troviamo riferito in [Kl, volume 3, p. 956]. Dichiara le funzioni continue e mai derivabili un "*male deplorevole*" da fuggire "*con terrore e orrore*".

Poincaré non fu per niente più tenero. Sono proprio queste funzioni, infatti, i "*mostri*" partoriti dalla logica di cui parlavamo a inizio capitolo. Poincaré rincara anzi la dose, rimpiangendo le "*oneste funzioni*" di una volta, che servivano sempre a qualcosa, al contrario di queste nuove bizzarrie, che gli sembrano fatte solo per dar torto ai grandi matematici del passato e denunciarne presunte fallacie formali. Weierstrass, agli occhi di Poincaré, è solo un logico, costruttore di niente – ma a questo proposito, conviene sottolineare il diverso atteggiamento di Hadamard, che in [Had] riconosce invece in tutta l'opera del matematico tedesco il valore dell'intuizione.

Del resto, oggi sappiamo che le funzioni mai derivabili "prevalgono" sotto vari punti di vista tra tutte le funzioni continue di una variabile reale (si veda per esempio [Hu]). Quanto poi alle loro applicazioni, c'è solo l'imbarazzo della scelta, ché esse variano dai moti browniani ai frattali, dalla teoria delle onde alla matematica del caos [Fa].

Prendiamo comunque atto che Poincaré riconobbe, sia pure a malincuore, la fallibilità della pura intuizione. Rimase tuttavia ben saldo nelle sue certezze di fondo: "[n]*egli edifici eretti dai nostri grandi architetti, a che ci serve ammirare l'opera del muratore se non si riesce a capire il progetto del maestro? Questa visione d'insieme, la logica non può fornircela; è all'intuizione che dobbiamo richiederla*". Insomma, il dettaglio e l'eccezione ostacolano e pregiudicano una consapevolezza superiore, e la logica è soprattutto dettaglio.

Altri la pensarono diversamente, e Hilbert tra loro. Ma prima di esporre le loro opinioni, per concludere almeno temporaneamente il discorso su Poincaré, proponiamo due altre sue citazioni, brevi ma rilevanti, riguardanti quell'ambito didattico cui egli fu sempre interessato. La prima, che per i futuri insegnanti è sì "*indispensabile una conoscenza approfondita e rigorosa dei fondamenti*", "[m]*a questa non è una ragione sufficiente per non educarli all'intuizione; si formerebbero infatti una falsa idea della scienza, se ne considerassero sempre un unico aspetto, e d'altra parte non sarebbero in grado di sviluppare nei loro allievi una qualità che a loro stessi fa difetto*". La seconda, che una buona definizione è non quella che "*soddisfa alle regole della logica*" ma "*quella che viene compresa dagli alunni*".

Passiamo allora a Hilbert, che scrisse lui pure pagine emozionanti sul senso della matematica. Lo fece in particolare nella prima metà del saggio *Problemi matematici* del 1900 ([11]) – quello che raccoglie la lista famosissima di 23 questioni da lui proposte in quell'anno ai colleghi ricercatori. Vi sottolineò anzitutto come un campo della conoscenza si mantenga vitale "*finché offre un'abbondanza di problemi*" e che, al contrario, "*una scarsità di problemi signific*[hi] *la sua morte o la fine del suo sviluppo*". Ma poi tenne a distinguere all'interno della matematica quei problemi che sono "***imposti** dall'astronomia*" o comunque "***necessari** per la conoscenza dei più semplici e fondamentali fenomeni naturali*" – si noti la scelta significativa degli aggettivi che abbiamo messo

([11]) Bellissima: da raccomandare, e non solo a parer nostro, a tutti gli studenti dei corsi di laurea in matematica. Anche questo saggio si può trovare in forma quasi completa e in italiano all'interno di [Hi2], alle pagine 145-162.

in neretto, sia pure filtrata dalla traduzione in italiano – e altri che nascono per la *"libera invenzione dell'intelletto umano"*, quindi dalla creazione dello spirito. Ed è a quest'ultimo che spetta, almeno in matematica, il ruolo del protagonista.

> *"Con lo sviluppo di una disciplina matematica* [...] *lo spirito umano* [...] *trae da se stesso, e spesso senza riconoscibili stimoli esterni, nuovi e fecondi problemi* [...] *ed* ***emerge in primo piano come il vero e proprio soggetto interrogante"***

– e lo spirito umano, secondo Hilbert, si esprime soprattutto col libero pensiero. Qui forse Poincaré obietterebbe che "[l]*a mente fa uso della sua facoltà creatrice solo quando l'esperienza gliene impone la necessità*". Ma Hilbert insisterebbe a elogiare il "*gioco, alterno e sempre rinnovantesi, tra pensiero ed esperienza"* sul quale a suo avviso si basano *"quelle numerose e sorprendenti analogie, e quella apparente armonia prestabilita, che il matematico percepisce così spesso nelle problematiche, nei metodi e nei concetti dei diversi settori della conoscenza."*

Non che Hilbert disconosca così l'importanza dell'intuizione. Ammette anzi che perfino la teoria pura dei numeri si affida talora alla sfera dell'inconscio, al talento, a una sorta di indefinibile predisposizione matematica: "[i]*n aritmetica, né più né meno che in geometria,* [...] *ricorriamo a certe* ***combinazioni rapide, inconsapevoli, non definitivamente sicure****, fidandoci di una certa sensibilità aritmetica verso il modo di agire dei segni aritmetici, senza la quale progrediremmo nell'aritmetica altrettanto poco quanto senza l'immaginazione geometrica faremmo nella geometria"*.

Sembra però che secondo Hilbert la priorità spetti al rigore logico del ragionamento: *"il requisito della deduzione logica mediante un numero* ***finito*** *di inferenze è nient'altro che il requisito del rigore,* [...] *di proverbiale importanza in matematica"*. Per dirla con le parole del suo allievo Hermann Weyl (1885-1955), la logica è, se non altro, *"l'igiene che il matematico pratica per conservare sane e forti le sue idee"* ([12]).

([12]) Citato da American Mathematical Monthly 99 (1992), p. 861.

Ma come suggerisce la precedente citazione, nella visione hilbertiana il rigore non è affatto *"nemico della semplicità"*, al contrario suscita e facilita le soluzioni più rapide e dirette: una visione precisa dei problemi chiarisce, aiuta e orienta nelle soluzioni.

Soprattutto, rigore non è sinonimo di rigidità: è semmai essenzialità, sobrietà, austerità, ma non va confuso con ottusità, pretesa di assolutezza, chiusura. Non imbriglia, come le dande: aiuta invece a volare.

3. – Carezze furtive

Poincaré riservò pagine autobiografiche molto belle e avvincenti all'intuizione, alla notte dell'ispirazione e al lampo improvviso dell'illuminazione. Esemplari sono quelle che in *Scienza e metodo* raccontano la gestazione della teoria delle funzioni fuchsiane: un caffè bevuto la sera contro le abitudini, la conseguente difficoltà di assopirsi, le idee che si accavallano e si urtano nella mente insonne, *"fino a che due di loro, per così dire, si agganci*[ano] *per formare una combinazione stabile"*. Oppure, in altro caso, un bagliore che arriva subitaneo e senza preavviso nel mentre, salendo su un omnibus, si mette il piede sul predellino. Poincaré riferisce poi che durante una passeggiata su una scogliera gli sovvenne, *"sempre con le stesse caratteristiche di subitaneità e di certezza assoluta"*, l'idea dell'analogia tra le trasformazioni usate per definire le funzioni di Fuchs e quelle della geometria euclidea.

Questa insorgenza inattesa e improvvisa di una soluzione a lungo cercata affascinò Hadamard, che prese le mosse proprio da questo racconto per quell'analisi profonda e accurata della psicologia dell'invenzione matematica e della sua dimensione dell'inconscio che già citavamo [Had].

L'analogia come chiave della risoluzione dei problemi, assieme alla gioia tutta intellettuale con la quale il matematico vi si abbandona, è celebrata nella descrizione suggestiva che André Weil (1906-1998) ci consegna in [We1]. Intuizione significa appunto, secondo Weil [Ma3, lettera alla sorella Simone del 26 marzo 1940], anche *"facoltà di vedere un rapporto tra cose apparentemente del tutto dissimili"*, ricerca, quindi, di affinità nascoste. E, annota Weil, *"nulla è più fecondo di queste oscure analogie,* *questi indistinti riflessi fra una teoria e un'altra, queste carezze furtive, queste indecifrabili foschie*". Leggiamo ancora nell'autobiografia [We2]:

> *"Ogni matematico che sia degno di questo nome ha conosciuto, anche se solo sporadicamente, questi stati di lucida esaltazione nei quali i pensieri si concatenano come per miracolo, e nei quali anche l'inconscio, quale che sia il significato che si vuole attribuire a questo termine, pare avere un suo ruolo* [...] *Il piacere che ne deriva, a differenza di quello sessuale, può durare molte ore, talora perfino per alcuni giorni."*

Poi però fatalmente *"l'illusione svanisce, il procedimento diventa certezza, le teorie gemelle rivelano la loro origine comune prima di scomparire"*. Alla poesia subentra la prosa, alla metafisica la matematica, al godimento cerebrale una teoria rifinita e patinata, *"la cui fredda bellezza non saprà più emozionarci"*.

Sempre nella lettera alla sorella Simone, Weil descrive il suo lavoro di matematico come la decifrazione di un *"testo trilingue"* di cui si possiedono unicamente in ciascun testo *"frammenti slegati"* e tra le varie lingue *"brandelli di dizionario"*. Allude qui al tentativo di collegare rami apparentemente distanti della matematica, quali la teoria dei numeri, lo studio delle curve su campi finiti e la teoria delle superfici di Riemann. Stavolta però questo lavoro complesso di traduzione, rappresentazione e approfondimento non si figura più come un'illuminazione casuale e inaspettata, ma come la ricerca di una visione unificante della matematica, in opposizione alla spinta centrifuga che porta alla divaricazione progressiva dei settori di ricerca. ([13])

4. – L'idra di Lerna

Torniamo alla contesa tra Hilbert e Poincaré. Tra le sue principali ragioni stavano certamente alcune novità della matematica del tempo:

- il progetto di Gottlob Frege (1848-1925) e Richard Dedekind (1831-1916) di *"fondare l'aritmetica"* e suo tramite l'intero edificio matematico *"sulla pura logica"* ([14]),
- l'avvento della teoria dei numeri transfiniti di Georg Cantor (1845-1918),
- la teoria degli insiemi che li sorreggeva entrambi.

Il primo di questi punti rimase solo un'utopia irrealizzata. Il secondo e il terzo invece si svilupparono e sono oggi parte integrante della scienza matematica. Quando però comparvero, suscitarono, al pari del sogno di Frege e Dedekind, fiere resistenze e dichiarate ostilità. Quelle di Leopold Kronecker (1823-1891), per cominciare. Ecco come Hilbert ne riassume la posizione nel saggio *Nuova fondazione della matematica* [Hi2, pp. 189-213].

> *"Kronecker coniò il motto: il numero intero l'ha creato il buon Dio, tutto il resto è opera dell'uomo. Conformandosi a esso, egli, **il dittatore classico del divieto**, proibì rigorosamente ciò che per lui non era numero intero."*

E ancora, in *Sui fondamenti della logica e dell'aritmetica* [Hi2, pp. 163-175]: *"egli* [Kronecker] *accetta **come un dogma** il numero intero"* – ostinazione che finisce con ottenebrarlo e gli impedisce di ammettere che perfino "*il concetto di numero intero deve e può avere una fondazione*".

In verità non sembra che il summenzionato aforisma di Kronecker sulla genesi divina degli interi,

([13]) André Weil collaborò, insieme ad alcuni colleghi del gruppo Bourbaki, al così detto *programma di Langlands*, che prende il nome dal matematico canadese Robert Langlands (1936-), vincitore del premio Abel nel 2018, che lo intraprese proprio a partire da una lettera scritta allo stesso Weil nel 1967. Il programma mira a unificare teoria dei numeri e geometria attraverso teoremi di collegamento fra i concetti più avanzati dei settori coinvolti.

([14]) Frege è stato grandissimo logico e filosofo della matematica. Creatore di un linguaggio simbolico con cui esprimere il pensiero, l'ideografia, fu anche, appunto, il massimo fautore del progetto logicista di fondazione dell'aritmetica sulla logica. Dedekind è nome più familiare per i matematici, per i suoi contributi alla definizione dei concetti di numero naturale e numero reale, e per il suo apporto alla nascita dell'algebra moderna.

pur celeberrimo, figuri scritto da qualche parte. Si legge semmai che fu pronunciato durante una conferenza berlinese del 1886. Come che sia, Kronecker manifestò chiaramente il suo ostracismo non solo verso i numeri transfiniti di Cantor, ma verso gli stessi numeri reali, la cui definizione rigorosa si era avuta proprio in quegli anni, per l'esattezza nel 1872, a opera di Dedekind, Cantor, Weierstrass e altri. Kronecker ritenne di doverli rifiutare a motivo della loro costruzione artificiosa, eccessivamente astratta e, soprattutto, macchiata dichiaratamente di *infinito* – infinita essendo, e per di più aperiodica, cioè imprevedibile, la rappresentazione decimale di ogni numero irrazionale.

Hilbert per converso non risparmiò le sue ironie né a Kronecker né a chi, come Weyl e Brouwer, ne condivise ed estese le posizioni finitistiche e costruttiviste. Li accusò di cercare di *"fondare la matematica gettando a mare tutto quello che a loro pare scomodo"*, di instaurare, come già detto, *"una dittatura del divieto"*, di perseguire non una rivoluzione benefica, ma un *"putsch"* autoritario. Registrò semmai con sollievo che Kronecker, nonostante il suo accanimento, tuttavia *"non riuscì ad abolire il numero irrazionale"* e neppure i numeri transfiniti di Cantor; concesse invece a Weyl e Brouwer, se non altro, il merito d'essersi degnati di conservarne almeno *"un mozzicone"*.

Tra gli oppositori delle teorie di Cantor, come e ancor più di Kronecker, si schierò Poincaré. La sua critica in *Scienza e metodo* è categorica: *"Non esiste infinito attuale: i cantoriani lo hanno dimenticato, e sono caduti in contraddizione"* – quale contraddizione, lo spiegheremo tra poco. Quanto a Frege, abbiamo già abbondantemente riferito dell'insofferenza di Poincaré verso troppe sottigliezze logiche. Converrà però aggiungere in proposito un'ulteriore citazione, che è tratta nuovamente da *Scienza e metodo* ed evoca stavolta l'idra di Lerna, il mostro mitologico dalle molte teste contro cui combatté Ercole in una delle sue fatiche – e da ogni testa che riusciva a tagliare ne risorgevano due. Alludendo dunque ai logici e ai cantoriani che cesellavano con perseveranza le loro teorie senza scoraggiarsi di fronte a nessun fallimento, scrisse Poincaré:

> *"È giunto il momento di fare giustizia di queste esagerazioni. Non che io speri di convincerli* [si intende i seguaci di Cantor] [...] *D'altronde, quando si rifiuta una delle loro dimostrazioni, si può star sicuri che la si vedrà ricomparire con delle modifiche insignificanti, e alcune di queste sono già rinate più volte dalle loro ceneri, come l'idra di Lerna con le sue famose teste che ricrescevano ogni volta che le si tagliava. Ercole si è salvato perché la sua idra aveva soltanto nove, o forse undici, teste; ma qui ce ne sono troppe, ce ne sono in Inghilterra, in Germania, in Italia, in Francia, e persino lui sarebbe costretto a lasciar perdere."*

5. – Il fiore più bello

Si parlava dell'infinito. Per Hilbert *"non è mai realizzato"*: non nella realtà, e nemmeno nella mente. "[E]*sso non è presente in natura e,* ***senza speciali precauzioni***, *non è ammissibile* [neppure] *come fondamento del nostro pensiero razionale"*. Espresse questa sua convinzione in un altro saggio famoso, che risale al 1925 e si intitola *Sull'infinito* [Hi2, pp. 233-266], e la ribadì pochi anni dopo in *Conoscenza della natura e logica*. Ma, pur muovendo da tali premesse, Hilbert ritenne che l'infinito fosse

- l'idea che più ha stimolato l'intelletto,
- il concetto che più ha bisogno di chiarificazione,

dunque, se accostato con la dovuta cautela, argomento degnissimo dell'interesse matematico. Accolse quindi con entusiasmo, a differenza di Kronecker e Poincaré, la teoria dei numeri transfiniti di Cantor, celebrandola come *"il fiore più bello dello spirito umano"*. Lo fece proprio nel saggio *Sull'infinito*, che non a caso contiene la frase che è divenuta aforisma famoso: ***"Dal paradiso che Cantor ha creato per noi, nessuno deve poterci mai cacciare"***. Era appunto questo l'obiettivo hilbertiano: controbattere le critiche e le riserve allo studio cantoriano dell'infinito – il paradiso creato per noi – e affermarne la piena legittimità.

Anche l'articolo dove Cantor sviluppa più approfonditamente i suoi concetti, potremmo dire il suo manifesto – le *Grundlagen* (i *Fondamenti di* *una teoria generale delle molteplicità)* ([15]) – contiene passaggi appassionanti, come il seguente:

> *"la matematica merita – e lo merita essa sola – il nome di libera, un attributo che, se stesse a me scegliere, io preferirei a quello ormai usuale di «pura»* [...] ***l'essenza della matematica****, infatti,* ***sta proprio nella sua libertà****"*

– aforisma almeno altrettanto celebre quanto quello hilbertiano.

Cantor difende con queste parole la via rivoluzionaria da lui intrapresa, cioè la trattazione matematica di un infinito né teologico né potenziale. Lo fa con dovizie di riferimenti anche filosofici, criticando ovviamente il dettato aristotelico e scolastico *"infinitum in actu non datur"*, richiamando poi e commentando le posizioni in materia di una grande varietà di pensatori, da Locke a Cartesio, da Spinoza a Leibniz e Kant. Ma Cantor soprattutto rivendica la creatività matematica, che grazie al *"puro pensiero"* consente di sviluppare teorie nuove e meravigliose, anche laddove – all'infinito – nessuna evidenza può soccorrere e l'unica ancora di riferimento è il rigore logico. Anzi, è proprio per questa ragione che solo la matematica pura merita d'essere dichiarata *"libera"*, tant'è che, nel seguito del discorso, Cantor nega lo stesso attributo di libertà all'*altra* matematica, quella applicata, perché essa è volta alla descrizione della natura, dunque assoggettata *"sia nel fondamento sia negli scopi"* alle informazioni e alle imposizioni che la realtà le trasmette, priva in definitiva del *"soffio vivificante del libero pensiero matematico"*.

Le *Grundlagen* contengono però una definizione tanto attraente quanto impacciata del concetto di insieme, presentato come *"ogni* ***Molti che si possa pensare come Uno****, ovvero ogni classe composta di elementi determinati che possa essere unita in un tutto da una legge"*. Frase enigmatica, che affonda le sue radici, come lo stesso Cantor sottolinea, nel dialogo *Filebo* di Platone e nel concetto di *miktón* che lì viene esaminato – il passaggio dall'infinito e indeterminato al finito e definito. L'idea di insieme svolgerebbe in matematica un ruolo analogo. Ma, a prescindere da queste nobili radici, bisogna ammettere che la nozione, nel modo in cui Cantor la esprime, mantiene una sua intrinseca vaghezza, che poi finisce con l'esporre l'intera teoria alle contraddizioni condannate da Poincaré.

La più famosa tra esse è il *paradosso di Russell* che riproduce tra gli insiemi l'ambiguità dell'antica antinomia del mentitore. Là si osservava come chi afferma di mentire mente nella misura in cui dice la verità. Tradotto da Bertrand Russell (1872-1970) nel *mondo nuovo* di Cantor il paradosso diventa: *l'«insieme» degli insiemi che non si appartengono si appartiene se e solo se non si appartiene* – quindi non è un insieme. Né questo è l'unico imbarazzo che sugli insiemi affiorò in quegli anni tra fine Ottocento e inizio Novecento. Al contrario, si scoprì un'abbondanza di analoghe situazioni che, per citare ancora Poincaré, *"avrebbero fatto la gioia di Zenone di Elea e della scuola di Megara"*. *"E allora tutti a cercare un rimedio"*, ad affannarsi cioè a correggere i precedenti fallimenti ed elaborare nuove teorie, come le teste dell'idra. Aneliti destinati tuttavia all'insuccesso, almeno secondo Poincaré: "*Per parte mia penso, e non sono il solo, che l'importante sia non introdurre mai enti che non si possano definire completamente in un numero finito di parole"* – riferimento evidente ai goffi tentativi di rappresentare compiutamente gli insiemi. Ostinandosi ad attuarli, l'intero sistema di Cantor finisce per assomigliare sempre più a *"un bel caso clinico"*, e gli sforzi di ripararne gli inghippi suscitano al più gli stessi sentimenti di curiosità professionale che può provare un medico chiamato a diagnosticarlo.

Qualche anno dopo, Poincaré ripropose il suo scetticismo nell'altra opera *Ultimi pensieri*, pubblicata postuma nel 1913 [Po3]. Osservò che *"un uomo, per quanto chiacchierone, non pronuncerà mai nella vita più di un miliardo di parole"*. Desunse che un oggetto *"la cui definizione contiene un miliardo di parole più una"* si potrebbe di conseguenza cancellare dall'analisi scientifica. Sobrietà e precisione sarebbero consigliabili. Poincaré prese però atto della cocciutaggine con cui i cantoriani ammettevano in matematica concetti e descrizioni di lunghezza persino infinita.

([15]) La traduzione italiana si trova all'interno di [Ca].

6. – Una scienza senza ipotesi

Opposta fu la visione di Hilbert. Già nel 1899, come sappiamo, egli si era preoccupato nei *Fondamenti* di ricostruire l'intera geometria su salde basi assiomatiche ma anche in termini estremamente astratti. La medesima strada andava seguita, a suo avviso, in ogni teoria degna di questo nome, dentro e fuori la matematica. Come lui stesso scrisse nel 1922, "[p]*rocedere assiomaticamente non è altro che pensare consapevolmente*" ([16]). Già nel 1918, in un saggio dal titolo significativo, *Pensiero assiomatico* [Hi2, pp. 177-188], aveva espresso la sua ferma convinzione:

> *"Io credo: tutto ciò che può essere oggetto del pensiero scientifico, non appena è maturo per la formazione di una teoria, cade sotto il metodo assiomatico e per suo tramite sotto la matematica."*

Quanto poi agli assiomi di una teoria, essi devono intendersi come *"poche, ma ben individuate proposizioni"* che stanno *"alla base della costruzione dell'intelaiatura dei concetti"* e che da sole *"bastano per costruire, secondo principi logici, l'intera intelaiatura"*.

Si diceva di quanto rarefatta fosse l'impostazione hilbertiana. Già nel caso della geometria e dei *Fondamenti*, essa ci appare sì elegante e raffinata, ma del tutto slegata dalla realtà. Gli enti geometrici elementari, cioè *"punti, rette, piani"*, sono battezzati semplicemente, sin dalle prime pagine, *"cose"*. Le affermazioni che li riguardano, poi, sono espresse in maniera talmente teorica da prestarsi a ogni possibile generalizzazione e da applicarsi ugualmente bene ad altri universi, perfino disgiunti dalla geometria, purché soggetti a identiche premesse assiomatiche, fossero anche questi universi, invece che *"punti, rette, piani"*, *"amore, legge, spazzacamini"* (un caso paradossale menzionato proprio da Hilbert in una lettera a Frege del 29 dicembre 1899), oppure *"tavoli, sedie, boccali di birra"* (un altro esempio a lui attribuito dalle sue biografie) ([17]).

([16]) In *Nuova fondazione della matematica* [Hi2, pp. 189-213].

([17]) Rimandiamo al riguardo al recente libro di Gabriele Lolli [Lo].

Ad avvalorare allora l'edificio che in questo modo si innalza, così immateriale ed etereo, non possono essere più l'evidenza o l'esperienza quanto, semmai, altre qualità: forse finezza, eleganza e bellezza, secondo il criterio estetico caro a Poincaré; oppure, per restare nell'ambito delle caratteristiche formali delle teorie scientifiche, rigore, coerenza, assenza di contraddizioni – ed è questa l'opzione di Hilbert, che nella summenzionata lettera a Frege appunto dichiara: *"Se assiomi arbitrariamente stabiliti non sono in contraddizione, con tutte le loro conseguenze, allora sono veri* [...]. *Questo è per me il criterio della verità e dell'esistenza"*. L'impostazione tradizionale così si rovescia, il rigore precede l'evidenza.

Non che la matematica si riduca in questo modo a un sistema assoluto e monolitico, a un comandamento unico e inderogabile. Al contrario, essa consente una pluralità di concezioni perfino alternative – come dimostrano le geometrie euclidee e non – soggette tuttavia all'unico parametro della coerenza. La matematica può definirsi al limite come *"una scienza senza ipotesi"*, libera di trattare l'argomento che vuole e di sceglierne gli assiomi più appropriati. Infatti per la propria fondazione, Hilbert lo ribadisce, non ha bisogno *"né del buon Dio (come Kronecker)"*, né della bellezza o dell'intuizione predilette da Poincaré, ma di *"una condizione, una sola ma assolutamente necessaria"* da tutelare, *"e questa è la dimostrazione della non-contraddittorietà"*.

La premessa si applica naturalmente anche agli insiemi, che quindi necessitano non di definizioni più o meno maldestre, ma di un inquadramento chiaro e coerente. Nel loro caso fu Ernst Zermelo (1871-1953), uno dei collaboratori di Hilbert, l'*"interprete congeniale"* di queste istanze. Va a lui infatti il merito di aver "*stabilito le assunzioni necessarie alla costruzione assiomatica della teoria degli insiemi e con ciò* [...] *precisato gli strumenti che Cantor e Dedekind avevano usato in modo indefinito e in parte inconsapevolmente"* (*Problemi della fondazione della matematica*, [Hi2, pp. 291-300]). In effetti gli assiomi di Zermelo, rielaborati successivamente dal matematico Abraham Fraenkel (1891-1965), costituiscono ancor oggi il sistema di riferimento più diffuso e rassicurante per la teoria degli insiemi e, suo tramite, per ogni matematico al lavoro. Lo si denota

ZF, dalle iniziali dei suoi creatori, o *ZFC* nella versione ampliata con l'assioma della scelta (la *C* finale sta allora per la parola inglese *choice*). Della sua coerenza, dunque del requisito essenziale della non-contraddittorietà, parleremo tra poco. Tuttavia *ZF* e *ZFC* paiono risolvere e superare il paradosso di Russell e simili antinomie.

A sostenere una buona teoria matematica, oltre agli assiomi concorrono, a parere di Hilbert, pure le dimostrazioni: ove l'evidenza cessa di soccorrere, allora sono la grazia e la forza di un ragionamento ad accreditare un sistema matematico ben strutturato. Vediamo come, tornando al tema dell'infinito.

Alcuni anni dopo, Hermann Weyl, che, come sappiamo, di Hilbert fu allievo, pur maturando opinioni diverse dal maestro, giunse a definire la matematica *"la scienza dell'infinito"* ([Wy1], *Dio e l'universo*, p. 37, oppure [Wy3], righe iniziali). E tuttavia, delle resistenze che Kronecker, Poincaré e altri frapposero anche solo ad ammettere in matematica un simile argomento s'è già abbondantemente riferito. A questi atteggiamenti recalcitranti, a chi in particolare riteneva i numeri interi i soli meritevoli di attenzione, Hilbert ribatté nel suo saggio *Sull'infinito* nei termini che seguono.

Traiamo pure ispirazione dal calcolo aritmetico. Esso prende avvio dalle cifre $0, 1, 2, 3, \ldots, 9$, dalle operazioni $+, \cdot, -$ e dalle relazioni $=, \leq$ per formare prima i numeri, poi le loro somme, i loro prodotti ed espressioni sempre più complicate, e finalmente uguaglianze e diseguaglianze che collegano queste espressioni, come $2+3=3+2$ o $22 \leq 21+4$. Si affida poi all'astrazione algebrica e al calcolo letterale, i quali impiegano variabili a, b, ..., per rappresentare i numeri e con l'aiuto di queste variabili costruiscono leggi generali come $a+b=b+a$, che poi a ogni singolo valore di a, b si applicano. Numeri, somme, prodotti, uguaglianze sono stringhe ***finite*** di simboli, ed è proprio questa loro finitezza che contribuisce ad avvalorarli agli occhi di Kronecker.

Ma allora allo stesso modo, rileva Hilbert, si può costituire un calcolo, non più aritmetico ma deduttivo, che si applica non più a cifre, numeri ed espressioni, ma a proposizioni esplicite (ipotesi, tesi, teoremi) e alle loro congiunzioni, disgiunzioni, negazioni e implicazioni. Questo calcolo si affida nuovamente per la sua formalizzazione a segni logici $\&, \vee, \rightarrow, \neg$ per indicare i connettivi "e", "o", "non", "se ... allora" e a variabili $P, Q, \ldots$ per denotare in astratto le proposizioni: costruisce di conseguenza affermazioni come $P \rightarrow Q$ (*se P allora Q*) ed elabora a loro riguardo leggi determinate che indirizzano il ragionamento. Una dimostrazione è, allora, in definitiva una sequenza ***finita*** di affermazioni che dalle ipotesi conducono alla tesi nel rispetto di queste regole di deduzione.

L'intero approccio resta quindi rigorosamente finitario come nel caso degli interi, ed è proprio questa sua caratteristica a garantirne la bontà: "[l]*'operare con l'infinito può venir reso sicuro solo dal finito"*. Non però come espediente tattico, come cavallo di Troia per tacitare i tradizionalisti. Sosterrà anzi Hermann Weyl che la matematica per natura inventa costrutti finiti per decidere questioni intimamente legate all'infinito – e ***questa***, concluderà, ***è la sua gloria*** [Wy3, righe iniziali].

Tornando a Hilbert, si noti come l'immagine che egli dà della dimostrazione prefiguri pure la moderna informatica, i bit, la programmazione, e volendo addirittura la deduzione automatica e l'intelligenza artificiale: una computazione che va a buon esito è infatti una sequenza finita di passi che conduce dall'input all'output seguendo le istruzioni di un programma.

7. – Il pianoforte logico

Un impianto così concettuale e raffinato, diciamo pure aristocratico, non poteva certo piacere a Poincaré, che infatti non mancò di disapprovarlo ne *La scienza e l'ipotesi* [Po1].

Gli assiomi, per cominciare. Per Poincaré non possono ridursi a semplici pedine teoriche di un gioco mentale governato dalla coerenza. Così facendo – ricordiamo la frase già citata a inizio articolo – le verità matematiche pretendono di incatenare perfino il Creatore e s'arrogano di imporsi alla natura. Intendiamoci: di ipotesi, cioè di fondamenti, di punti di appoggio e di partenza, c'è sicuramente bisogno. Ma queste ipotesi devono essere *"verificabili"* e, solo se *"confermate dall'esperienza"*, *"diventano verità feconde"*. Al limite si possono ammettere altre ipotesi addizionali, purché esenti da errore, se servono a fissare il pensiero, dunque come strumento tecnico. Occorre tuttavia diffidare di un terzo genere di ipotesi, che sono tali solo in apparenza, e nella sostanza *"si riducono a definizioni o convenzioni camuffate"* e pretendono di imprigionare la realtà con gli editti della mente: infatti *"questi decreti possono imporsi alla scienza"* ma *"non alla natura"*.

Non ha senso allora una scienza senza ipotesi, che si limiti ad assumere le proprie premesse anarchicamente, tramite *"decreti arbitrari"* e *"definizioni mascherate"*, per costruirci poi sopra, quasi per passatempo, prescindendo da ogni verosimiglianza, un repertorio sconfinato dei casi teoricamente possibili.

Né Poincaré risparmia frecciate velenose alla geometria hilbertiana delle "cose" (punti, rette e piani) e agli eccessi della sua astrazione: *"Che mai siano queste cose non solo lo ignoriamo, ma non dobbiamo nemmeno cercare di scoprirlo. Non ne abbiamo alcun bisogno, e anche chi non avesse mai visto né punti, né rette, né piani, potrebbe fare geometria non meno bene di noi"*. Il passo è famoso, come pure quello che lo segue subito dopo, violentemente avverso a una concezione troppo fredda e meccanica della dimostrazione: *"Resta inteso che per dimostrare un teorema non è necessario, e nemmeno utile, sapere ciò che esso vuole dire. Il geometra si potrebbe benissimo sostituire con il «pianoforte logico» di Stanley Jevons"* – un macchinario di quell'epoca, antesignano dei moderni computer. E ancora: "*o se si preferisce, si potrebbe ideare una macchina nella quale si introducono da una parte gli assiomi per raccogliere i teoremi all'estremità opposta, come quella leggendaria macchina di Chicago nella quale i maiali entrano vivi per uscirne alla fine trasformati in prosciutti e salsicce. Al pari di tali macchine, il matematico non ha alcun bisogno di capire ciò che sta facendo"*.

Non che si possano ammettere in matematica le contraddizioni, e in effetti Poincaré riconosce a Hilbert di essere riuscito brillantemente a escluderle finché ha considerato la geometria, ma solo perché ha potuto avvalersi della naturale corrispondenza che lega quest'ultima alla realtà, e quindi affidarsi forse inconsciamente all'evidenza, all'intuizione, a una qualche concretezza per individuare assiomi plausibili.

Poincaré, in verità, non condivide neppure in geometria il gusto hilbertiano di astrarre e generalizzare, sostituendo, per intendersi, spazzacamini o boccali a punti, rette e piani. Scrive: quand'anche una nozione matematica trovi una sua perfetta sistemazione concettuale, *"una definizione molto raffinata e molto rigorosa"* che non susciti più incertezza nel matematico puro, poi quella nozione deve comunque confrontarsi con la prova dei fatti, con realtà e applicazioni, dunque col mondo degli spazzacamini o delle birre, più sensatamente con le scienze fisiche. Ma a quel punto la sua purezza teorica rischia di rivelarsi insufficiente, perché la nozione dovrà raffrontarsi a *"un oggetto concreto che spesso ne è soltanto un'immagine grossolana"*: "[a]*sserire che questo oggetto soddisfa, almeno approssimativamente, alla definizione, significa enunciare una verità nuova, che solo l'esperienza può mettere al riparo da ogni dubbio e che non ha più il carattere di postulato convenzionale"*.

La situazione precipita quando si passa dalla geometria all'insiemistica. Trattandone nei suoi *Ultimi pensieri* [Po3], segnatamente nel capitolo su *La logica dell'infinito* (pp. 249-268), Poincaré prende sì atto dello sforzo lodevole di Zermelo *"di porre un sistema di assiomi a priori, che gli permettano di stabilire tutte le verità matematiche senza essere esposti a contraddizione"*. Ma poi avanza forti riserve sul risultato.

Zermelo, infatti, a differenza di Hilbert con la geometria, non ha alcuna realtà a sostenerlo. Anzi, proprio l'intenzione dichiarata di fondare tutta la matematica sugli insiemi e la conseguente necessità di far *"tabula rasa"* del passato (sempre [Po3], p. 260) e ricominciare tutto da capo impediscono che prima degli insiemi si trovino verità stabilite e *"una scienza già fatta"*. Gli assiomi di Zermelo, dunque, vorrebbero bastare a se stessi, ma sono dettati dall'unica preoccupazione di evitare contraddizioni. Né riescono fino in fondo in questo loro intento, proprio perché *"avrebbe*[ro] *bisogno di fondarsi su altre verità già stabilite"*, che invece non preesistono. I postulati non possono *"ricavare il loro valore da una sorta di decreto arbitrario, bisogna che siano evidenti di per se stessi"*. D'altra parte *"l'evidenza non* *si dimostra"*. Al massimo si può *"cercare di penetrare il meccanismo psicologico"* che la genera.

"Ed ecco da dove viene la difficoltà: Zermelo ammette certi assiomi, e ne respinge altri che, a prima vista, possono sembrare evidenti quanto quelli che mantiene" appunto perché, *"se li avesse conservati tutti, sarebbe caduto nella contraddizione"*, cioè nei paradossi di Russell eccetera. Quindi si trova costretto a operare una scelta. Ma quella da lui compiuta non convince Poincaré: *"Non solo essi* [gli assiomi di Zermelo] *non mi sembrano evidenti, ma quando mi si domandi se sono esenti da contraddizione, non so cosa rispondere. L'autore ha creduto di evitare"* i paradossi emersi fino ad allora. *"Ma se ha chiuso bene il suo ovile, non sono sicuro che non vi abbia rinchiuso dentro anche il lupo"*.

Del resto la storia, e nello specifico i teoremi di incompletezza di Gödel, ci insegnano che *ZF* e *ZFC* non sanno autocertificare la propria coerenza, ammesso e non concesso che la possiedano. L'ipotesi cantoriana del continuo, per esempio, è indipendente da entrambi: sulla loro base non si dimostra, né si confuta – a meno che *ZF* e *ZFC* siano incoerenti.

8. – Pensieri e pensatori

Questo capitolo è solo un breve intermezzo, che prende spunto dal paragone di Poincaré tra una matematica troppo formale e schematica e il pianoforte logico di Jevons. Analogo timore viene espresso anche da Hermann Weyl, secondo il quale una dimostrazione matematica moderna rischia di assomigliare sempre più a una verifica automatica, a una *"catena complicata di conclusioni formali e computazioni, eseguite alla cieca, anello per anello"*, a dettagli tecnici che prevalgono a scapito dell'unico fattore che realmente conta, cioè l'idea [Wy4].

C'è in realtà chi esprime posizioni ancor più radicali, convinto che un'evoluzione di tal fatta sia non un rischio o un accidente, ma la conseguenza logica e ineluttabile dell'essenza stessa della scienza. Dichiara Heidegger [He] che *"la scienza non pensa"*. Non può farlo, secondo il filosofo, per almeno due motivi fondamentali: il primo, che è tautologica, si limita cioè a inferire ciò che è già implicitamente presente nelle sue premesse e nelle sue assunzioni; e il secondo, che è acritica, cioè incapace di interrogarsi sul proprio senso e sulla propria missione. Così essa procede, con la matematica che ne costituisce il nucleo essenziale, in modo puramente tecnico, secondo i dettami di un pensiero solo calcolante.

Tornando al pianoforte logico: rileva tuttavia Felix Klein (1849-1925) in [Kl2] che è pur sempre il matematico che *"per suo sussidio"* inventa la macchina – quella di Jevons e quant'altro ([18]) – e che *"per i propri scopi intelligenti le indica i compiti da eseguire"*: è lui dunque a restare la mente e il regista. Klein deplora invece quei matematici che si dedicano esclusivamente a investigare in astratto *"su cose prive di senso e su teoremi che non dicono nulla"*, dimenticando invece l'essenziale. Cita nell'occasione il collega Johannes Thomae (1840-1921), che aveva designato *"pensatori senza pensiero"* questi meri esecutori di regole formali. Tra parentesi: si noti come l'espressione richiami il citato aforisma heideggeriano. In verità Thomae, sulla scia di Kronecker, aveva sostenuto che gli oggetti aritmetici più complicati ed elaborati degli interi non fossero altro che semplici segni, e la loro trattazione niente più che un calcolo vuoto, una pura manipolazione formale.

Le riflessioni di Klein sembrano anticipare una svolta basilare della storia della matematica, e della vita dei matematici, nei tempi moderni, ossia la nascita e l'impiego di macchine calcolatrici capaci di eseguire compiti sempre più complessi, incluso il ragionamento. Di fronte alla sfida delle dimostrazioni automatiche e alla possibilità di ottenere con l'aiuto di un programma tutte le conseguenze logiche di un certo numero di proposizioni, sembra proprio che, se una funzione rimane ancora al matematico, questa consista appunto nello sviluppare un pensiero pensante e creativo, nell'indirizzare e nel prevedere direzioni feconde di analisi e ricerca.

Quanto a logica e intuizione, Klein ritenne la prima insufficiente e la seconda essenziale nella ri-

([18]) In verità William Stanley Jevons (1835-1882) è ricordato soprattutto come economista, ma è reputato anche logico e matematico.

cerca matematica, e quindi necessario il loro equilibrio; distinse anzi [Kl1] tra un'intuizione *ingenua*, che corrisponde a un primo stadio di indagine e scoperta, e un'intuizione *raffinata*, che procede verso uno sviluppo logico rigoroso; paragonò poi nel complesso la matematica a *"un albero che sprofonda le sue radici ognora più nel terreno, mentre erge liberamente sempre più in alto i suoi rami ombrosi"* – fuor di metafora, la matematica si fonda sulle conoscenze "elementari" già sedimentate ma muove verso nuovi orizzonti di ricerca avanzata, approfondisce le une tramite l'altra ma ispira quest'ultima tramite le prime, e concilia così l'analisi rigorosa e la tensione inventiva. Come per le piante, Klein indicò nel ricambio organico tra queste due parti – il passato come fondamento del futuro, e il futuro come occasione di costante riflessione sul passato – la linfa per il progresso dell'intera disciplina.

Un'altra felice similitudine viene proposta da Klein in [Kl2] su intuizione e rigore, soprattutto in tema di insegnamento della matematica: ([19])

> *"Quando dalla valle si sale su una montagna molti percepiscono come gradevole l'area sempre più pura e rarefatta; però non è affatto vero che l'ulteriore rarefarsi dell'aria aumenti sempre più la sensazione di benessere fisico, anzi c'è un limite oltre il quale l'esistenza non è più possibile. Così, io penso che l'entusiasmo dei logici per l'eliminazione di ogni intuizione sia alquanto avventato."*

Quando si parla di intuizione in matematica, il primo nome che viene in mente è tuttavia quello già citato di Luitzen Brouwer. È lui infatti a essere ritenuto il principale esponente, se non il padre, dell'intuizionismo matematico. Del resto Brouwer condivise molte delle idee di Poincaré e, pur distaccandosi di conseguenza da quelle di Hilbert, ebbe tuttavia la fortuna di collaborare per qualche tempo anche col matematico tedesco. Scrisse poi in gioventù, nel 1905, un saggio ([20]) singolarissimo, appassionato e controverso, fieramente avverso non solo alla matematica, ma alla scienza nel suo complesso, così come tradizionalmente concepite. Già il titolo *Vita, arte e mistica* è rivelatore. Brouwer propugna infatti per ogni uomo la ricerca prioritaria di un Sé interiore più autentico, basata sulla mistica dell'anima e aliena da ogni vincolo intellettuale o intellettualistico. A questa via di purificazione interiore non contribuiscono allora né la scienza asservita all'industria o, peggio ancora, a se stessa, né tanto meno la logica, che *"equivale a vivere solo nel cervello"* ed è quindi solo una *"chimera"*.

Convinzioni così categoriche si approfondiscono, e si ammorbidiscono forse, con gli anni, a cominciare dalla tesi di dottorato *Sui fondamenti della matematica* [Br2], posteriore di due anni. Nella sostanza però non cambiano. Secondo Brouwer, gli oggetti matematici sono pure creazioni dello spirito pensante, che trascendono il linguaggio. Sono dunque costruzioni senza parole, e in questo senso intuizioni. Pur sempre, però, costruzioni. Come dire che un concetto matematico non può accreditarsi solo con astrazioni e sofismi. Per intendersi: il numero che vale 1 se la congettura di Goldbach è vera, e 0 altrimenti, non è né 0 né 1, e semplicemente non esiste – almeno finché la congettura di Goldbach non sarà risolta e dotata di una sua esplicita dimostrazione.

È per analoghi motivi che Brouwer rifiuta i numeri cardinali infiniti di Cantor, ammettendo al più $\aleph_0$ come culmine della sequenza dei numeri naturali. Accetta tuttavia il concetto matematico di continuo, preoccupandosi anzi di conciliarlo col proprio punto di vista.

Quanto alla logica, a parere di Brouwer essa studia solo parole, dunque si può accettare al massimo come componente della matematica, ma non certo come suo fondamento.

9. – Noi dobbiamo sapere

Riprendiamo il discorso principale. In *Scienza e metodo*, Poincaré si scaglia pure contro gli eccessi dei simbolismi. Osserva per esempio, criticando la pasigrafia di Peano: *"Non è facile ammettere che la parola «se» acquisti, qualora la si scriva* ɔ, *una virtù che non possedeva quando era scritta in latino"*. Rinnova poi le critiche all'astrazione e al for-

([19]) Riprendiamo qui la traduzione in italiano di [Gi].
([20]) Pubblicato da poco in italiano, con un bel commento di Paolo Zellini [Br].

malismo nelle dimostrazioni matematiche, sottolineando ancora il ruolo di intuizione e sensibilità:

"Una dimostrazione matematica non è una mera giustapposizione di sillogismi; sono sillogismi disposti in un certo ordine, e l'ordine nel quale sono disposti questi elementi è molto più importante degli elementi stessi. Se ho il senso – per così dire l'intuizione – di tale ordine, in modo da discernere con una sola occhiata l'insieme del ragionamento, non devo più aver paura di dimenticare uno di quegli elementi".

E ancora:

"Può forse destare meraviglia il fatto di invocare la sensibilità a proposito di dimostrazioni matematiche che, a quel che sembra, possono avere a che fare solo con l'intelligenza. Ma ciò significherebbe dimenticare [Poincaré torna qui a insistere su un pensiero che gli sta evidentemente a cuore] *il senso della bellezza matematica, dell'armonia dei numeri e delle forme, dell'eleganza geometrica: un vero e proprio senso estetico che tutti i veri matematici ben conoscono. E tutto questo è appunto sensibilità."*

Ma, preso atto della raccomandazione di Poincaré, torniamo al programma di Hilbert, e all'utopia di stabilire una varietà di teorie matematiche tutte singolarmente coerenti, e anzi capaci di suffragare da sole la propria assenza di contraddizioni. L'altra qualità che Hilbert richiede a queste teorie è la completezza, cioè la dote di far piena luce su ogni proposizione che le riguardi.

La fiducia nella possibilità di risolvere in matematica ogni interrogativo sensato ricorre per ogni dove, come un leitmotiv, nella saggistica di Hilbert, sin dal 1900 e dai *Problemi matematici*. Già lì infatti leggiamo che, per quanto inaccessibili possano apparire i dilemmi da sciogliere, *"noi* [cioè Hilbert, o più in generale la comunità matematica] *abbiamo comunque la sicura convinzione che la loro soluzione deve riuscire mediante un numero finito di inferenze puramente logiche".*

"Questa convinzione della risolubilità di ogni problema matematico è per noi un potente stimolo durante il lavoro. ***Dentro di noi udiamo continuamente l'appello: «Ecco il problema, cerca la soluzione. La puoi trovare mediante il puro pensiero; perché in matematica non c'è l' 'Ignorabimus'»"*** – cioè una dichiarazione di resa di fronte a interrogativi troppo complicati.

Hilbert ripeterà le stesse parole in *Sull'infinito* e le rinnoverà pure in *Conoscenza della natura e logica*: *"Per i matematici non esiste l'ignorabimus, e a mio parere non esiste nemmeno per la scienza della natura.* [...] *Al posto dello stolto ignorabimus, la nostra parola d'ordine è invece:* ***noi dobbiamo sapere, noi sapremo"*** – un'esortazione che non a caso fu considerata come una sorta di epigrafe del suo autore e compare sulla lapide della sua tomba a Göttingen. Di lì a qualche mese, i teoremi di incompletezza di Gödel smentiranno quell'illusione: ci sono in matematica, e addirittura già in aritmetica, problemi irrisolvibili, verità indimostrabili e sconosciute. E tuttavia pure i risultati di Gödel si possono interpretare come una conferma parziale della visione hilbertiana. La quale è comunque dinamica, inesausta e aperta a orizzonti sempre nuovi. Non c'è quindi in matematica secondo Hilbert – e perfino Gödel lo attesta – un punto di arrivo. Al contrario *"esiste un'immensa abbondanza di problemi e, appena un problema viene risolto, al suo posto emergono innumerevoli nuovi problemi"*. La matematica non è un *"oggetto finito basato su leggi fisse e univocamente determinate"* ma, perfino nella visione finitaria di Hilbert, è sempre protesa verso il nuovo, come un *"qualcosa in via di evoluzione"*: così Ulam in [Ul]. Anche per Hermann Weyl *"matematizzare"* è un'attività creativa che sfida ogni razionalizzazione completa oggettiva ([21]). I teoremi di Gödel rappresentano una tappa fondamentale di questa progressiva acquisizione di coscienza e di una continua maturazione. Non nella direzione auspicata da Hilbert, ma certo in pieno accordo col suo spirito scientifico.

([21]) Da www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Quotations/Weyl.html

10. – Noi sapremo

Il lettore si sarà giustamente domandato lo scopo ultimo dei discorsi che si è sin qui sorbito: solo il racconto di una storia di matematica, sovrabbondante di citazioni e condotto talora al limite del chiacchiericcio? Non che la controversia tra Hilbert e Poincaré vada sottaciuta e non meriti rispetto e interesse. Ma il nostro secondo intendimento, che vorremmo almeno accennare in questi capitoli finali, è diverso, e cioè: presentare i matematici come scrittori. Non tuttavia di dimostrazioni e teoremi, ma di se stessi, delle proprie vite e delle proprie opinioni.

Godfrey Hardy (1877-1947) paragonò in [Har] il matematico al pittore e al poeta, perché, come loro, *"creatore di forme"* – più durature però, perché *"fatte di idee"*: *"il pittore"*, invece, *"crea forme con i segni e i colori, e il poeta con le parole"*.

Eppure i passi che abbiamo letto, anzitutto di Poincaré e Hilbert, ma poi anche di Cantor, Weil eccetera, sono fatti di parole oltre che di idee, e sono spesso freschi, brillanti, estrosi, concisi, appassionati, appassionanti, talora traboccanti di vis polemica, in definitiva godibili.

Sono sì inframezzati, nei testi originari, da lunghe digressioni scientifiche, che qui abbiamo omesso, ritenendole interessanti per gli specialisti ma presumibilmente ostiche per il lettore comune, e che del resto sono inevitabili – per Hilbert e Poincaré come per chiunque altro, è impossibile parlare di matematica senza usare un po' di matematica. Ma al netto di questi legittimi intermezzi gli stessi brani si mostrano avvincenti e spiritosi, al punto di ispirare una gran varietà di aforismi rimasti famosi. Persino gli stili della prosa sono diversi e suggeriscono distinte visioni della matematica e dello spirito che ne promuove lo sviluppo. Così Poincaré è asciutto e diretto, efficace e persuasivo, prodigo di esemplificazioni e metafore, pronto a cogliere e rapido a esprimere i punti fondamentali della discussione. Hilbert è più nobile, talora solenne ma mai retorico, lui pure incisivo e immediato quando è il momento. Cantor è colto, a tratti magniloquente e sostenuto, spesso fervido e veemente, se non febbrile. André Weil pare invece, almeno nella corrispondenza con la sorella Simone [We3], elitario, quasi scontroso quando parla di matematica, e restio a confidarsi. Si lamenta anzi che presentare le sue idee ai non-specialisti sia come *"spiegare una sinfonia a dei sordi"*. Ma lì e altrove ci consegna pagine finissime sul piacere sottile della ricerca e della scoperta di analogie.

Sembra insomma che i matematici, o almeno quei matematici che abbiamo menzionato, scrivano molto bene, e non sfigurino affatto come prosatori e saggisti. Inoltre manifestano una cultura vasta e aperta, che non si ferma solo alla loro disciplina, ma spazia disinvoltamente perfino tra filosofia e scienze naturali.

Tanto vale per Weil, Cantor, Poincaré, Hilbert, ma anche per svariati loro colleghi. Anzi, il tema dei matematici scrittori è vastissimo, oseremmo dire sconfinato, una sua sistemazione completa quasi proibitiva, e certamente pretenzioso ogni nostro tentativo di trattarlo in poche pagine. Ma, ripromettendoci semmai di approfondirlo in un qualche futuro, vorremmo qui insinuarlo, concentrandoci peraltro su pochi nomi, scelti tra quelli che abbiamo già incrociato. Hardy, per esempio. Nelle sue pagine si incontrano altre frasi memorabili. *"Archimede sarà ricordato quando Eschilo sarà dimenticato, perché le lingue muoiono ma le idee matematiche no"*, scrive in [Har] proseguendo il confronto tra matematici e poeti e dichiarando la preminenza dei primi – forse Hardy ha qui in mente Voltaire e l'aforisma che troviamo alla voce *Immaginazione* del suo *Dizionario Filosofico* [Vo, p. 1969]: *"Nella matematica c'è tanta immaginazione da restarne stupefatti. Archimede era dotato di tanta immaginazione almeno quanto Omero"*.

A proposito di Cantor, poi, lo stesso Hardy celebra il teorema sul *"carattere non numerabile del continuo"*, dunque l'avvento dei numeri transfiniti, definendolo semplice da dimostrare, eppure bello e profondo; capace quindi di evidenziare, della matematica, non solo la serietà, ma pure l'incanto. Hardy tiene però a distinguere tra due matematiche: *"la vera matematica dei veri matematici"* e *"la matematica banale"*, la vena creativa che fu di Cantor, Poincaré e Hilbert opposta al calcolo arido e grigio.

A inizio Novecento Bertrand Russell, a quei tempi filosofo e matematico giovane e promettente, ma destinato a diventare da lì a qualche decennio Premio Nobel per la letteratura, paragonò in *Misticismo e logica* [Ru] la matematica alla scultura. Scrisse per la precisione che "[l]*a matematica, vista* *nella giusta luce, non possiede soltanto la verità, ma anche una bellezza suprema, una bellezza fredda e austera, come quella della scultura"* – forse così fredda da non emozionarci più, come deplorato da Weil. Eppure proprio André Weil ribadisce la similitudine in [We3], comparando la matematica a *"una sorta di scultura in una materia estremamente dura e resistente"*. Ricorda poi il *"memorabile sonetto"* in cui Michelangelo esprime *"l'idea (più o meno platonica) che il blocco di marmo all'uscita della cava contenga già l'opera scolpita, e che il lavoro dell'artista consista nel togliere quel che vi è di troppo"*. Cita come esempio, sempre di Michelangelo, la Pietà Rondanini. Rileva che pure il matematico, come lo scultore, è *"sottomesso al filo, al controfilo, a ogni curvatura e anche alle asperità della materia con cui lavora"* e che *"questo conferisce alla sua opera una specie di oggettività"*. Conclude che perfino la matematica è opera d'arte, soggetta a un piacere anche estetico – *"in quanto tale inspiegabile"*.

Tornando a Russell: sempre in *Misticismo e logica* leggiamo che la matematica pura (quella che indaga l'infinito e la teoria degli insiemi) *"può essere definita come la materia nella quale non sappiamo mai di che cosa stiamo parlando, né se ciò che stiamo dicendo è vero"* – altro aforisma che è facile incontrare spulciando i siti della rete. Ad ascoltarlo viene da domandarsi se, enunciandolo, Russell parlasse sul serio o scherzasse, anticipando di quasi trent'anni il paradosso dei teoremi di incompletezza di Gödel: ricordando però l'arguzia dell'autore e il suo *humour* britannico, si può anche ammettere la seconda ipotesi.

Osserva a ogni modo Ulam [Ul] che, almeno fino all'inizio del Novecento, e cioè al tempo in cui Russell componeva il suo aforisma, *"c'è sempre stata una schiera di pochi matematici"*, e tra questi Poincaré, Hilbert e Weyl, che, *"sia esplicitamente che implicitamente, hanno fornito idee e prospettato nuove strade all'intera comunità matematica"* – tutta senza eccezioni. Questi pochi matematici erano allora capaci di una visione d'assieme, e dunque sapevano di che cosa parlavano e ne apprezzavano la verità. Lo stesso Ulam riferisce in proposito il parere di Stefan Banach (1892-1945) secondo cui *"i buoni matematici vedono analogie tra teoremi e teorie, ma i migliori vedono analogie tra le analogie"*. Ulam si duole tuttavia che una tale ricchezza di conoscenze e di orizzonti si sia ormai perduta nei tempi moderni, così votati, anche in matematica, alla specializzazione. Dubita anzi che già nella sua stessa epoca (*Avventure di un matematico* uscì come si è detto nel 1983) esistesse tra i matematici viventi chi fosse in grado di capire tutti i teoremi che venivano pubblicati.

Weil aveva condiviso qualche anno prima la medesima impressione e il medesimo timore. Le matematiche moderne, aveva rilevato, *"hanno assunto non solo un'estensione ma anche una complessità tali che è diventato urgente – se la matematica deve continuare a esistere senza scindersi in una miriade di minuscoli spezzoni di ricerca – compiere un enorme lavoro di unificazione che assorba in alcune teorie semplici e generali tutto il sostrato comune delle diverse branche della scienza"*: passare dunque tramite l'approccio assiomatico dal piacere metafisico delle carezze furtive a una codifica sistematica di ogni analogia conosciuta. Aspirazione forse utopistica – Weil riconosce appunto che "*ci sono pochissimi uomini capaci di abbracciare tutto il fronte di una scienza*" –, priva poi di ogni fascino o gloria – usando una metafora militare, Weil accosta chi la persegue a quanti, nelle retrovie di un esercito, si occupano di salmerie, comunicazioni e *"simili mansioni subalterne"*. E tuttavia aspirazione legittima, e anzi impegno inderogabile, se lui pure, André Weil, ritenne di impegnarcisi in prima persona insieme ad autorevoli colleghi, nel discusso progetto bourbakista e anche nel *programma di Langlands*, citato nella nota 13 alla fine del capitolo 3. L'intuito quindi non basta, e va tradotto in rigore. *"Le leggi della matematica moderna"* infatti *"proibiscono di dare forma scritta alle intuizioni, che non ammettono né un enunciato preciso né, a maggior ragione, una dimostrazione"*: opinione che avrebbe suscitato l'approvazione forse di Hilbert, ma non di Poincaré.

Venendo di nuovo ai grandi matematici di una volta, ancora capaci di una visione universale: s'è detto che Ulam riconosce a Poincaré e Hilbert questa competenza superiore, e il genio di vedere analogie tra le analogie. Con una differenza tra i due, quella che abbiamo già evidenziato all'inizio dell'articolo, e che si può riassumere qui spiritosamente con l'aneddoto, ancora ripreso da Ulam, secondo cui, nella vetrina di un negozio, l'insegna *"Qui si lava biancheria"* può celare all'interno sia una lavanderia che un laboratorio di insegne. Questa sarebbe in definitiva la differenza tra la fisica e la matematica: la prima atterrebbe alla realtà, la seconda all'astrazione. Insomma, davanti al cartello il fisico tenderebbe a pensare a una lavanderia e il matematico a un laboratorio di insegne. E qui starebbe pure la diversa sensibilità di Poincaré e Hilbert – entrambi peraltro perfettamente consapevoli dell'altra interpretazione, quella meno affine alle loro convinzioni.

11. – Matematici italiani

Concludiamo con due appendici brevi ma doverose – solo cenni sommari, premesse di auspicabili sviluppi futuri. Nella prima segnaliamo come l'attenzione al rapporto tra logica e intuizione, espressa con la dovuta serietà ma pure con scrittura agile e fresca, trovi validi rappresentanti anche nella matematica italiana. Ci limitiamo a pochi esempi, tra i tantissimi che potremmo proporre. Si riferiscono a grandi matematici, quasi contemporanei di Hilbert se non di Poincaré. Riguardano l'ambito didattico, cioè l'educazione alla razionalità verso cui pure il matematico francese fu così sensibile. Raccomandano il giusto equilibrio di logica e intuizione, anzi il privilegio della seconda e l'uso cautissimo della prima.

Così Francesco Severi (1879-1961) mette sì in guardia [Se2] dal rischio di trasformare *"l'insegnamento della matematica in una mescolanza indistinta di osservazioni empiriche, d'intuizione e di raziocinio"*, dunque sia da *"analisi troppo minute"* che da *"sintesi troppo nebulose"*. Consiglia però di dissimulare la *"trama logica"* anche attingendo all'intuizione: perché "[a] *ragionare s'insegna* [...] *ragionando bene; non anatomizzando il ragionamento"*.

Già in [Se1] Severi aveva affrontato l'argomento. Tra l'altro, quest'ultima nota risale al 1919, quindi a un secolo fa. Si potrebbe tuttavia sostenere che mantiene una sua piena attualità, non solo perché è stata ripubblicata in tempi più recenti [Ve], ma anche perché esprime preoccupazioni, che si potrebbero trasferire tali e quali al giorno d'oggi, su certa impreparazione e certa immaturità delle matricole e sulla miopia e sulla superficialità di ministeri e politici. Ma soprattutto la riflessione di Severi nuovamente sconsiglia, nell'insegnamento della matematica, un uso sovrabbondante della logica. La quale è sì sottile, ma di per sé solo *"il meccanismo che trasforma ed elabora i dati intuitivi"*. Dunque, se adoperata in dosi esagerate, rischia di provocare *"indigestioni del cervello"*, *"costretto a ingerire un cibo troppo pesante"*. Al contrario, *"per l'educazione dell'intelletto occorre in primo luogo sviluppare l'intuizione"*, che è *"facoltà creatrice"*, *"sintesi di sensazioni, di osservazioni e di esperienze"*. Anzi, Severi ritiene che, almeno nei primi gradi delle scuole, l'insegnamento debba essere *"esclusivamente intuitivo"* e abolire ogni definizione formale e ogni catena di deduzioni logiche. L'imperativo è: puntare sulle idee e non sul rigore.

Sull'intuizione matematica, poi, Severi richiama in certi passi, e sia pure alla lontana, Poincaré, quando parla dell'illuminazione improvvisa che rischiara *"della luce più vivida"* un concetto che era sin lì apparso *"oscuro ed astruso"*. Osservazione che evidentemente si applica a tutta l'attività matematica (e, se è per questo, anche scientifica o letteraria) e non solo al suo apprendimento.

In tema appunto di insegnamento, preoccupazioni analoghe a quelle di Severi sono manifestate da un altro grande matematico italiano del primo Novecento, Federigo Enriques (1871-1946) – il quale [En] ritiene che, nell'educazione, l'intuizione e la logica siano non *"facoltà distinte dell'intelligenza"*, ma *"aspetti inscindibili di un medesimo processo attivo"*. Enriques distingue poi *"una logica in piccolo e una logica in grande"*, cioè *"l'analisi raffinata del processo del pensiero esatto (quasi la veduta microscopica degli elementi che formano il tessuto della scienza) e – per contro – lo studio delle connessioni organiche del sistema, cioè la veduta macroscopica della scienza"*. Paventa che, *"nelle preoccupazioni dei nostri educatori matematici"*, la prima prevalga sulla seconda.

Enriques riprende anche l'immagine kleiniana della matematica come albero. Matematiche elementari e superiori contribuiscono entrambe, senza *"iato o scissura"*, alla vita di questa *"tenera pianticina"*.

Suggerimenti – quelli di Severi ed Enriques – preziosi oggi come quando vennero formulati, e tanto più apprezzabili e incisivi perché scritti in maniera colta e articolata, matematici nell'asciuttezza e nella misura, ma spesso arguti, vivaci e coloriti nella forma. Tantissimi altri se ne potrebbero aggiungere, di Peano e Castelnuovo, Vailati e de Finetti, Campedelli, Lombardo Radice e Speranza. Ma, come promesso, confidiamo di trattarne un'altra volta.

12. – Matematiche scrittrici

Ci accorgiamo d'aver parlato di molti matematici, ma solo di uomini. A scusarci sta un dato di fatto oggettivo seppur doloroso, e cioè l'ostracismo che per millenni ha allontanato se non escluso le donne dall'istruzione e dalla scienza, in matematica e non solo.

Tanto valeva anche ai tempi di Hilbert e di Poincaré, che furono però anche in questo spiriti aperti. Il secondo per esempio è ritratto mentre conversa affabilmente con Marie Curie nella fotografia ufficiale dell'edizione 1911 del prestigioso convegno Solvay di fisica e chimica – e nell'occasione lei è l'unica donna presente, in compagnia di ben 23 colleghi maschi, tra cui anche Einstein. Del primo, invece, si ricorda la battaglia sostenuta insieme a Felix Klein all'Università di Göttingen, perché l'allora giovane e promettentissima Emmy Noether fosse chiamata come *Privatdozent* al Dipartimento di Matematica. Si racconta anzi che, di fronte al rifiuto di altri colleghi, contrari a concedere a una donna un simile onore, Hilbert non sapesse capacitarsi, obiettando che la scienza non fa distinzioni di sesso e le Università non sono stabilimenti balneari – ai quali in quell'epoca maschi e femmine accedevano solo separatamente ([22]).

Hermann Weyl fu della Noether collega a Göttingen e con la Noether esule negli Stati Uniti all'avvento del nazismo. A lei dedicò un toccante elogio funebre al momento della sua scomparsa prematura e improvvisa nel 1935 [Wy2], definendola *"una grande donna matematica, la più grande che la storia ha conosciuto"* e una *"roccia"* mascolina solo per il carattere – ammesso e non concesso che la forza e la determinazione interiori siano virtù solo virili – e celebrandola per aver riplasmato in algebra e teoria dei numeri *"l'approccio assiomatico in un potente strumento di ricerca invece di un mero aiuto alla spiegazione logica dei fondamenti matematici"* – insomma, per il suo rigore geniale, illuminato e chiarificante.

Più o meno all'epoca di Cantor e Poincaré, se non di Hilbert, visse poi Sonia Kovalevskaya, che ebbe vita breve ma intensa (1850-1891) e fu non solo grande matematica – allieva di Weierstrass, la prima donna a ottenere un dottorato in matematica, e la prima a ottenere una cattedra in un'università europea – ma anche femminista, spirito libero e perfino scrittrice. Con la sorella Anna, che coltivò lei pure passioni letterarie, entrò in contatto con Dostoevskij. Ci ha lasciato, tra l'altro, un libro di memorie giovanili [Ko1] e un breve romanzo postumo parzialmente autobiografico, *Una ragazza nichilista* [Ko2]. Quest'ultimo propone la storia di una donna, prima adolescente in una famiglia decaduta della nobiltà di campagna, poi giovane generosa e idealista impegnata contro l'oppressione zarista. La narrazione è fresca, poetica nella descrizione della natura e del mondo campestre, fine nell'analisi psicologica, non scevra di leggere ironie nel ritratto della nobiltà russa e delle sue ipocrisie. Tra parentesi: per la protagonista, che come s'è detto è una sognatrice utopista, un matematico è solo *"una sorta di originale che si occupa di risolvere delle sciarade espresse in cifre: se si poteva perdonargli quest'ubbia assolutamente innocente, era però difficile evitare per lui un certo spregio riguardo a questa sua debolezza"*.

Diversa è l'immagine di matematici e matematica che ci consegnano alcune frasi famose della Kovalevskaya – oggi diventate altrettanti aforismi. Le riportiamo prima di finire, traendole da [Os, p. 136]. Ci parlano di una scienza matematica che è soprattutto intuizione e fantasia, mai però disgiunte dalla realtà.

A chi si meraviglia della sua duplice vocazione, di matematica e scrittrice, la Kovalevskaya risponde affermando che la matematica non è solo *"scienza arida"*, ma al contrario *"richiede un grande im-*

([22]) L'episodio è riferito, per esempio, da [Os] alle pagine 144-45.

maginazione" – echeggia dunque qui lei pure Voltaire, e anticipa Hardy. Citando poi il suo maestro Weierstrass, aggiunge poi che *"è impossibile essere un matematico senza essere un poeta in fondo all'animo"*. In proposito mette in guardia dal pregiudizio che il poeta debba per forza inventare qualcosa che non esiste, e dal pericolo di confondere immaginazione e pura invenzione. Sostiene che *"il poeta ha solo da percepire ciò che gli altri non percepiscono, vedere più a fondo di quanto fanno gli altri"*. *"E altrettanto"*, conclude, *"deve fare il matematico"*.

Si rinnova così, nello scritto della Kovalevskaya, la celebrazione delle qualità di fantasia e immaginazione della matematica migliore, della sua capacità di visione superiore, insieme tuttavia al riconoscimento ammirato del fascino delle *"eterne, immutabili leggi della scienza"*.

Si potrebbe sommessamente aggiungere che perfino la logica, o almeno un certo modo di intendere la logica, è immaginazione e poesia. Ma ciò detto, anzi sussurrato, prendiamo atto che, sia a proposito del rapporto tra intuizione e rigore, cioè dell'argomento che più ci preme, sia a riguardo di matematiche scrittrici e matematici scrittori, la citazione di Sonia Kovalevskaya completa la nostra rassegna come meglio non si potrebbe.

Ringraziamenti. Ringraziamo Claudio Bernardi, Livia Giacardi, Paolo Maroscia ed Elisabetta Strickland per i suggerimenti e l'aiuto. Siamo anche grati a Gabriele Lolli per averci ispirato ad affrontare un argomento, cioè i matematici scrittori, già trattato anche da lui durante il quarto convegno su Matematica e Letteratura all'Università di Salerno nel 2018. Finalmente ringraziamo i due revisori anonimi dell'articolo per i loro preziosi consigli.

BIBLIOGRAFIA

[Br1] L. E. J. Brouwer, *Vita, arte e mistica*, Adelphi, Milano, 2015, con un saggio di P. Zellini, *Il soliloquio di un matematico.*

[Br2] L. E. J. Brouwer, *On the foundations of mathematics*, in A. Heyting (a cura di), *Collected Works* I. *Philosophy and Foundations of Mathematics*, North Holland, Amsterdam, 1975, 11-101.

[Ca] G. Cantor, *La formazione della teoria degli insiemi (Scritti 1872-1899)*, a cura di G. Rigamonti, Mimesis, Milano-Udine, 2012.

[En] F. Enriques, *Insegnamento dinamico*, Periodico di Matematiche 4, 1 (1921), 6-16; riedizione con saggi di F. Ghione e M. Moretti, Centro Studi Enriques, Agorà, La Spezia, 2003

[Fa] K. Falconer, *Fractal Geometry: Mathematical Foundations and Applications*, Wiley, New York, 1990.

[Gi] L. Giacardi, *L'insegnamento della matematica in Italia dall'Unità all'avvento del Fascismo*, in L. Giacardi (a cura di), *Da Casati a Gentile. Momenti di storia dell'insegnamento secondario della matematica in Italia*, Agorà, La Spezia, 2006, 1-63.

[Had] J. Hadamard, *La psicologia dell'invenzione in campo matematico*, Raffaello Cortina, Milano, 1996.

[Har] G. W. Hardy, *Apologia di un matematico*, Garzanti, Milano, 2012.

[He] M. Heidegger, *Che cosa significa pensare?*, in *Saggi e Discorsi*, Mursia, Milano, 1976.

[Hi1] D. Hilbert, *Fondamenti della geometria*, FrancoAngeli, Milano, 2009.

[Hi2] D. Hilbert, *Ricerche sui fondamenti della matematica*, a cura di V. M. Abrusci, Bibliopolis, Napoli, 1978.

[Hu] B. R. Hunt, *The prevalence of continuous nowhere differentiable functions*, Proc. Amer. Math. Soc, 122 (1994), 711-717.

[Kl1] F. Klein, *Sullo spirito aritmetico della matematica*, Rendiconti Circolo Matematico di Palermo 10 (1896), 107-117.

[Kl2] F. Klein, *Elementary Mathematics from an Higher Standpoint* I: *Arithmetic, Algebra, Analysis*, Springer, Berlin Heidelberg, 2016.

[Kli] M. Kline, *Mathematical thought from ancient to modern times*, Oxford University Press, Oxford, 1972.

[Ko1] S. Kowalewskaja, *Ricordi d'infanzia* + A.-C. Leffler, *La vita di Sonia*, Università Bocconi Centro PRISTEM, Milano, 2012.

[Ko2] S. Kovalevskaja, *Una ragazza nichilista*, Asterios, Trieste, 2005.

[Lo] G. Lolli, *Tavoli, sedie, boccali di birra. David Hilbert e la matematica del Novecento*, Raffaello Cortina Editore, Milano, 2016.

[Os] L. Osen, *Women in mathematics*, MIT Press, Cambridge MA, 1974.

[Po1] J. H. Poincaré, *La scienza e l'ipotesi*, a cura di C. Sinigaglia, Bompiani, Milano, 2012.

[Po2] J. H. Poincaré, *Scienza e metodo*, a cura di C. Bartocci, Einaudi, Torino, 1997.

[Po3] J. H. Poincaré, *Ultimi pensieri*, a cura di V. Barone, Dedalo, Bari, 2016.

[Po4] J. H. Poincaré, *Opere epistemologiche*, a cura di G. Boniolo, Mimesis, Milano-Udine, 2017.

[Re] C. Reid, *Hilbert*, Springer, New York, 1970.

[Ru] B. Russell, *Misticismo e logica e altri saggi*, TEA, Milano, 2010.

[Se1] F. Severi, *La matematica*, Energie Nove II, 9, Torino, 1919.

[Se2] F. Severi, *Didattica della matematica*, Enciclopedia delle enciclopedie: Pedagogia, Formiggini, Roma, 1931, pp. 362-370.

[Ul] S. Ulam, *Avventure di un matematico*, Sellerio, Palermo, 2007.

[Ve] E. Vesentini, *Un contributo di Francesco Severi alle riviste di Pietro Gobetti*, Archimede 48 (1996), pp. 115-121.

[Vo] Voltaire, *Dizionario filosofico*, Bompiani, Milano, 2013.

[We1] A. Weil, *Dalla metafisica alla matematica*, in *La fredda bellezza*, Castelvecchi, Roma, 2014.

[We2] A. Weil, *Ricordi di apprendistato. Vita di un matematico*, Castelvecchi, Roma, 2013.

[We3] S. WEIL, A. WEIL, *L'arte della matematica*, Adelphi, Milano, 2018.
[Wy1] H. WEYL, *Il mondo aperto*, Bollati Boringhieri, Torino, 1981.
[Wy2] H. WEYL, *Discorso al funerale di Emmy Noether*, 18 aprile 1935,
http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Extras/Weyl_Noether.html
e http://www.rzuser.uni-heidelberg.de/~ci3/weyl+noether.pdf
[Wy3] H. WEYL, *Axiomatic versus constructive procedures in mathematics*, The Mathematical Intelligencer **7** (1985), 10-17.
[Wy4] H. WEYL, *Topology and abstract algebra as two roads of mathematical comprehension. II*, American Mathematical Monthly 102 (1995), 646-651; traduzione da *Topologie und abstrakte Algebra als zwei Wege mathematischen Verständnisses*, Unterrichtsblätter für Mathematik und Naturwissenschaften 38 (1932), 177-188.

Agnese Ilaria Telloni

Agnese Ilaria Telloni è dottore di ricerca in matematica e lavora attualmente presso l'Università Politecnica delle Marche, dove tiene corsi di Geometria e Probabilità ed è impegnata nell'ambito del progetto strategico ''Didattica Multimediale della Matematica''. Autrice di numerosi articoli di ricerca e divulgazione scientifica, ha vinto nel 2011 il premio L'Oréal per le Donne e la Scienza. I suoi maggiori interessi di ricerca riguardano la didattica della matematica, l'epistemologia e le contaminazioni fra matematica e discipline artistico-letterarie.

Carlo Toffalori

Carlo Toffalori è professore ordinario di Logica Matematica presso l'Università di Camerino. Dal 2005 al 2017 è stato presidente dell'Associazione Italiana di Logica e sue Applicazioni. Dal 2012 fa parte della Commissione Scientifica dell'Unione Matematica Italiana. I suoi interessi di ricerca riguardano teoria dei modelli e algebra. Si occupa anche di divulgazione della matematica. Ha pubblicato vari libri, tra cui Matematica, miracoli e paradossi *(con Stefano Leonesi, per Bruno Mondadori, 2007),* Il matematico in giallo *(Guanda, 2008),* L'aritmetica di Cupido. Matematica e letteratura *(Guanda, 2011), il più recente* Algoritmi *(il Mulino, 2015), titoli cui sta per aggiungersi, sempre per il Mulino,* L'equazione degli alef.