# *Matematica, Cultura e Società*

RIVISTA DELL'UNIONE MATEMATICA ITALIANA



GUIDO DE PHILIPPIS, ALDO PRATELLI


## Le nostre collaborazionicon Alessio Figalli


*Matematica, Cultura e Società. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1*, Vol. **4** (2019), n.2, p. 125–128.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=RUMI_2019_1_4_2_125_0>

Matematica, Cultura e Società. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2019.

# Le nostre collaborazioni con Alessio Figalli

Guido De Philippis
SISSA, Trieste
E-mail: guido.dephilippis@sissa.it

Aldo Pratelli
Università di Pisa
E-mail: aldo.pratelli@unipi.it

Alessio Figalli è sicuramente uno dei matematici più bravi e influenti della sua generazione. Dopo aver completato gli studi alla Scuola Normale Superiore di Pisa nel 2006, con quasi due anni di anticipo rispetto al tempo previsto, ha conseguito il titolo di perfezionamento presso la Classe di Scienze in un solo anno. Nel 2007 ha vinto, ancora prima di discutere la tesi, un posto di *Chargé de Recherche* per il CNRS francese. Già l'anno dopo ricopriva il titolo di *Hadamard Professor* al Politecnico di Parigi e nel 2009, all'età di soli 25 anni, era professore alla University of Texas, Austin. Dopo sette anni negli Stati Uniti, nel 2016, si è spostato all'ETH di Zurigo, dove è tuttora.

Alessio lavora nel campo dell'Analisi Matematica e più precisamente si occupa di Trasporto Ottimo, di Calcolo delle Variazioni e di Equazioni alle Derivate Parziali. In effetti, circoscrivere l'attività di ricerca di Alessio è estremamente difficile. Si potrebbe definire un *problem solver* di eccezionale talento; nell'ambito dell'Analisi Matematica sono molto pochi i problemi dei quali non si è occupato, fornendo contributi innovativi ed estremamente originali.

In periodi diversi, entrambi abbiamo avuto il piacere di collaborare con Alessio. Sull'aspetto matematico c'è poco da aggiungere perché è capace di coniugare un'estrema profondità di analisi e di comprensione del problema con una capacità tecnica senza uguali. Le (poche) volte in cui gli viene raccontato qualcosa che non conosce, già a metà della spiegazione, Alessio va alla lavagna e ti spiega ciò che gli stavi raccontando, mostrando di averlo compreso molto meglio dell'interlocutore...

Fig. 1

Questa sua incredibile abilità matematica va di pari passo con un inguaribile ottimismo e una cieca fiducia che alla fine qualcosa di buono verrà fuori! Anche nei momenti più bui della ricerca (e ce ne sono tanti!), quando tutti i tentativi sono falliti e uno non sa più che strade provare a percorrere, Alessio è capace di infondere ai suoi collaboratori la fiducia che serve per andare avanti!

Ad ogni modo, Alessio non è solo un matematico di grande talento. Infatti, e questa è la cosa che più ci piace sottolineare, è anche un caro amico, capace di consigliarti nei momenti decisivi (non solo matematici) e di supportarti nelle difficoltà e con cui è sempre un piacere passare una serata!

*Accettato*: il 3 giugno 2019.

La foto della Fig. 1 è presa da https://maddmaths.simai.eu.

Come detto, tante volte abbiamo avuto il piacere di interagire con lui, tuttavia ne vorremmo raccontare due in particolare, legate ad alcuni dei suoi risultati più importanti.

## La disuguaglianza isoperimetrica anisotropa quantitativa (di Aldo Pratelli)

Nel 2006, insieme a Francesco Maggi e Nicola Fusco, riuscimmo a dimostrare la disuguaglianza isoperimetrica quantitativa su $\mathbf{R}^n$, un risultato particolarmente semplice da raccontare. Un fatto ben noto è che, tra tutti gli insiemi di volume assegnato, quello di perimetro minimo è la palla, l'unico insieme con questa proprietà, a parte chiaramente le sue traslazioni. Trovare una versione quantitativa di questo fatto significa mostrare che, se un insieme ha un perimetro leggermente superiore a quello minimo, allora deve assomigliare molto a una palla, in un senso ben preciso. Stime di questo tipo erano state cercate e trovate fin dall'inizio del secolo scorso, tutte notevoli per la loro bellezza intrinseca e la loro utilità in molte applicazioni. Proprio nel 2006, dopo anni di lavoro, con Francesco e Nicola riuscimmo a ottenere una versione ottimale di questo fatto.

La nostra dimostrazione ebbe un certo impatto, e nei mesi successivi vari autori, tra cui noi stessi, trovarono versioni quantitative di un gran numero di disuguaglianze. In genere, l'idea della dimostrazione era di ripetere lo stesso schema di ragionamento del nostro primo lavoro, con le dovute correzioni di volta in volta richieste dalla specifica disuguaglianza, che a seconda dei casi potevano essere da piuttosto semplici a molto complicati.

Dopo qualche mese, io e Francesco ci mettemmo, insieme con Alessio, a cercare di mostrare la stessa disuguaglianza nel caso anisotropo, ossia per un perimetro diverso da quello Euclideo, in cui le varie direzioni sono pesate in modo diverso. A parte essere una naturale generalizzazione del caso classico, questo tipo di perimetri ha una certa importanza nello studio dei cristalli. Infatti, come osservato dal cristallografo tedesco Wulff, la forma dei cristalli è dettata proprio dalla soluzione di un problema isoperimetrico con un perimetro anisotropo. In questo caso, l'oggetto ottimale non è più una palla, ma un generico insieme convesso. Conoscevo già di vista Alessio, che allora era giovanissimo ma già dalle doti matematiche strabilianti; in quel momento stava facendo il dottorato, che per lui durò solo un anno. Tuttavia, era la prima volta che mi trovavo a lavorare con lui, ed ero molto curioso di "vederlo all'opera" e capire se quanto si diceva di lui fosse o meno esagerato. Ora posso dire che non lo era affatto!

Avendo visto nei mesi precedenti fiorire versioni quantitative di tante disuguaglianze, avevamo iniziato a lavorare piuttosto ottimisti e convinti che qualcosa di buono sarebbe venuto in fretta. Tuttavia, ci rendemmo rapidamente conto che tutto quello che sapevamo era sostanzialmente inutile; infatti, la costruzione che avevamo ideato nel nostro lavoro con Francesco e Nicola si basava in modo fondamentale sulla simmetria del problema, mentre nel problema anisotropo non c'è nessun tipo di simmetria. In pratica, quindi, si doveva ripartire da zero trovando una strada nuova di zecca.

Nei mesi seguenti, cercammo tutte le occasioni per lavorare insieme: stavamo in tre città diverse, ma ci incontravamo spesso, e a volte avevamo lunghe discussioni al telefono. Col passare delle settimane, prese forma l'idea della dimostrazione che poi abbiamo utilizzato: funziona tutto talmente bene che, a vederla adesso, sembra fosse una scelta quasi obbligata, ma all'inizio non eravamo affatto sicuri che potesse funzionare e ci spaventavano vari passaggi che apparivano molto oscuri. In sostanza, abbiamo reso quantitativo lo schema di dimostrazione "alla Gromov" utilizzando tecniche di trasporto ottimale. È buffo ripensare al fatto che, nonostante Francesco fosse un esperto delle costruzioni "alla Gromov", che aveva già utilizzato lavorando con Cedric Villani (che di lì a un paio d'anni avrebbe vinto la medaglia Fields), e io fossi piuttosto esperto di trasporto, del quale mi occupavo fin dalla mia laurea, Alessio fosse sempre un passo avanti a noi e spesso doveva aspettare che lo raggiungessimo!


Fig. 2 – "Speciale Normale. Gli anni di Pandora" con un fumetto di Leo Ortolani, Edizioni della Normale, Pisa, 2018, p. 12 (del fumetto)

Ricordo bene la sua fiducia incrollabile, a volte anche a dispetto delle evidenze. Una volta, dopo aver penato a lungo per mostrare una certa stima di cui avevamo assolutamente bisogno, ci rendemmo conto che fosse falsa. Ovviamente, eravamo depressi e sfiduciati, ma dopo pochi istanti Alessio cominciò a cercare un modo di aggirare il problema, facendo vedere che le situazioni in cui la stima era effettivamente vera potevano essere sufficienti per la nostra costruzione.

La chiave di volta del nostro lavoro fu un convegno a Edimburgo nel luglio 2007. Finalmente tutti e tre insieme per un'intera settimana, passammo praticamente tutto il tempo a lavorare giorno e notte e concedendoci solo qualche pausa di tanto in tanto per una passeggiata o una birra insieme, durante la quale passavamo senza quasi accorgercene dalla matematica alla chiacchiere fra amici.

Alla fine della settimana, tutti i tasselli erano a posto, e avevamo ormai la certezza che tutto funzionasse, tanto da farci una "foto commemorativa" semiseria tenendo in mano un cartello con la scritta "1/2", che era l'esponente ottimale che avevamo raggiunto. In realtà quel convegno ci ha lasciato non solo un risultato molto bello, ma l'inizio di una solida amicizia, ben più importante di qualsiasi teorema.

### La regolarità delle soluzioni dell'Equazione di Monge-Ampère (di Guido De Philippis)

La prima volta che ho conosciuto Alessio è stato nell'estate del 2010. Avevo appena iniziato il mio dottorato sotto la guida di Luigi Ambrosio (lo stesso *advisor* di Alessio) e Alessio era già circondato da un'aura leggendaria. Pochi mesi dopo il nostro primo incontro, Luigi mi propose di passare alcuni mesi ad Austin, per lavorare con Alessio e con Luis Caffarelli (altro matematico di talento eccezionale). Giusto il tempo di organizzare la visita e nel gennaio del 2011 mi sono trovato ad Austin. Lavorare con Alessio e Luis è stato probabilmente uno dei momenti più formativi della mia carriera. Imparare "l'arte" (e metterla da parte) delle Equazioni alle Derivate Parziali da due maestri del campo, è quanto di meglio un giovane dottorando possa sperare!

Tra i vari problemi che stavamo studiando in quel periodo, vi era la questione della regolarità Sobolev delle soluzioni dell'equazione di Monge-Ampère. L'equazione di Monge-Ampère è una delle equazioni alle derivate parziali "fondamentali" della matematica. Essa appare nello studio di vari problemi, che spaziano dalla geometria, alla probabilità e perfino alla meteorologia. Per esempio, lo studio della sua versione "complessa" è stato alla base della soluzione della congettura di Calabi-Yau, per la quale fu assegnata la medaglia Fields a S.T. Yau nel 1982.

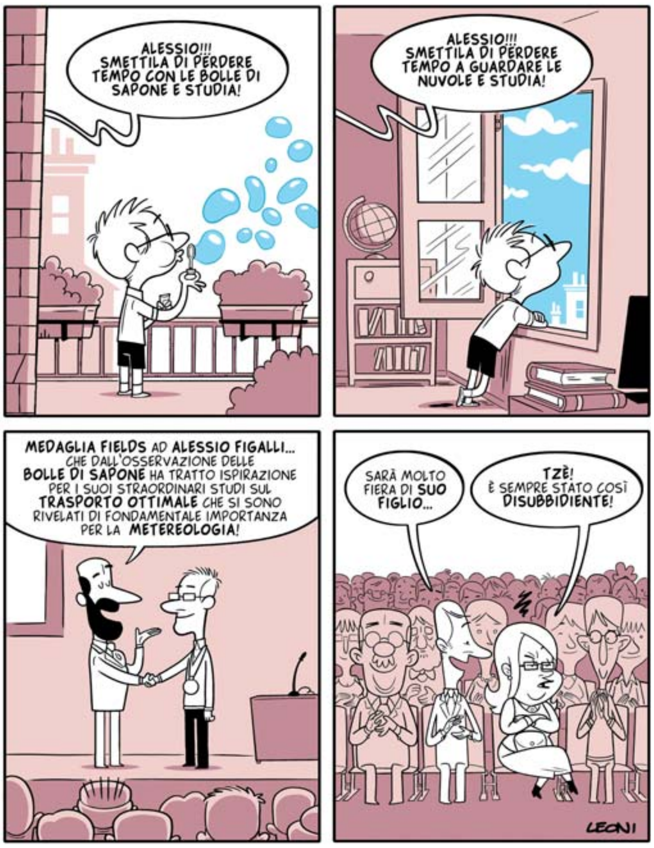


Fig. 3 – Vignetta tratta da Prisma n. 7
© Walter Leoni/Symmaceo Communications.

Proprio per questioni legate ad alcuni modelli di meteorologia, una domanda rilevante consisteva nello stabilire se le derivate seconde della soluzione dell'equazione di Monge- Ampére avessero un comportamento "migliore" di quanto ci si potesse aspettare a priori. Questo tipo di questioni, che va sotto il nome di "teoria della regolarità", è uno dei campi di ricerca più attivi nello studio delle Equazioni alle Derivate Parziali. Per quanto riguarda lo studio della regolarità delle soluzioni dell'equazioni di Monge-Ampère, uno dei contributi fondamentali è dovuto a Caffarelli all'inizio degli anni '90. In una serie di articoli, Luis ha introdotto infatti una serie di idee e tecniche completamente nuove che hanno portato a progressi e risultati inaspettati fino a solo pochi anni prima.

Nonostante questi notevoli progressi, la questione della regolarità Sobolev della soluzione rimaneva tuttavia aperta da almeno venti anni. Su suggerimento di Luigi Ambrosio, durante i miei tre mesi di visita a Austin, ci siamo concentrati proprio su questo problema con Alessio. Tutti i nostri tentativi si sono però rivelati infruttuosi, e quando ho lasciato Austin nel maggio del 2011 tornavo a casa con un bagaglio di nuove conoscenze e abilità, ma con nessun risultato all'attivo.

Era però iniziata la mia collaborazione e amicizia con Alessio, e in quell'estate ci siamo incontrati più volte in varie conferenze in giro per l'Europa dove passavamo – senza soluzione di continuità – da una birra in compagnia a qualche ora davanti a una lavagna discutendo di matematica.

Nell'agosto di quell'anno ci siamo trovati entrambi a frequentare la storica conferenza di Equazioni alle Derivate Parziali al "Mathematisches Forschungsinstitut" di Oberwolfach, in mezzo alla Foresta Nera. È tradizione decennale di queste conferenze che il mercoledì pomeriggio tutti i partecipanti vadano a fare una passeggiata nella Foresta Nera, ricompensati poi da un pezzo di Schwarzwälder Torte e dal famoso barbeque dell'Istituto.

Quel pomeriggio, tuttavia, Alessio ed io decidemmo di saltare la passeggiata e di provare a lavorare un po' sul problema dell'equazione di Monge-Ampére. Avevamo infatti in mente una vaga strategia che ci sembrava potesse valere la pena di tentare. Penso sia stato il pomeriggio matematico più eccitante della mia vita: tutti i pezzi del puzzle si sistemavamo uno dopo l'altro e poco prima dell'ora del barbeque (che in Germania purtroppo sono le sei di pomeriggio...) la nostra vaga strategia iniziale era diventata una dimostrazione con tutti i crismi!

Nei giorni seguenti abbiamo controllato più e più volte tutti i dettagli della dimostrazione e meno di un mese dopo la versione preliminare del lavoro era già pronta per essere inviata a una rivista!

Nei mesi successivi, insieme anche a Luigi Ambrosio e a Maria Colombo (un'altra brillante studentessa di Luigi), abbiamo poi applicato questi risultati alle questioni di meteorologia e a vari altri problemi, dando luogo all'inizio di una fruttuosa collaborazione ma soprattutto di una splendida amicizia!


Guido De Philippis

*Guido De Philippis è professore di analisi matematica presso la SISSA dal 2016. Prima è stato "Chargé de Recherche" alla scuola normale superiore di Lione. Si occupa di Calcolo della Variazione, Teoria Geometrica della Misura e Equazioni alle Derivate Parziali. Ha ricevuto il premio della European Mathematical Society nel 2016 e la Medaglia Stampacchia nel 2019.*

Aldo Pratelli

*Aldo Pratelli ha studiato presso la Scuola Normale Superiore di Pisa, ottenendovi il titolo di Diploma di Laurea e di Perfezionamento in Matematica; successivamente è stato prima ricercatore e poi professore associato presso l'Università di Pavia, quindi professore ordinario presso l'Università di Erlangen. Attualmente è professore ordinario di Analisi Matematica presso l'Università di Pisa. Si occupa prevalentemente di Calcolo delle Variazioni e Teoria Geometrica della Misura. Ha vinto la Medaglia "Le Scienze" e la Medaglia del Presidente della Repubblica per giovani ricercatori nel 2004, il Premio Iapichino nel 2005, il Premio Miranda nel 2011, ed il Premio De Giorgi nel 2015.*