Matematica, Cultura e Società

Rivista dell'Unione Matematica Italiana

Antonio Giorgilli

La geometria del caos:catastrofi, biforcazioni, attrattori

Matematica, Cultura e Società. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **4** (2019), n.1, p. 5–33.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=RUMI_2019_1_4_1_5_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI
http://www.bdim.eu/

Matematica, Cultura e Società. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2019.

Matematica, Cultura e Società – Rivista dell'Unione Matematica Italiana
Serie I, Vol. 4, N. 1, Aprile 2019, 5-33

La geometria del caos: catastrofi, biforcazioni, attrattori

Antonio Giorgilli
Università degli studi di Milano
E-mail: antonio.giorgilli@unimi.it

Sommario: *Prendendo spunto dalla dinamica del Sistema Solare, si illustra il fenomeno della coesistenza di ordine e caos nel nostro mondo alla luce delle ricerche matematiche degli ultimi decenni. Al fine di evitare un eccesso di tecnicismi si prendono in esame alcuni semplici modelli geometrici di sistemi ordinati e caotici, passando poi a descrivere un modello che presenta in modo evidente la coesistenza di ordine e caos. Si passa poi a discutere brevemente la presenza di una forma ben nascosta di caos nei moti planetari, illustrando anche alcune proposte recenti che vedono nel passato e, forse, nel futuro del sistema planetario degli eventi catastrofici.*

Abstract: *The dynamics of the Solar System is used as a model problem with the aim of illustrating the coexistence of order and chaos in our world, on the basis of recent mathematical research. In order to avoid an excess of technicalities attention is first paid to a few simple but significant geometric models of ordered and chaotic systems. Then a model exhibitig a clear coexistence of order and chaos is presented. Finally, a short discussion is devoted to the existence of some concealed chaos in the planetary system. The discussion includes a couple of research works that suggest the possibility of catastrophic events in the past and in the future of our planetary system.*

1. – Preludio

È fin troppo ovvio affermare che il tema delle origini e della fine del mondo in cui si dispiega la nostra esistenza ha affascinato tutte le culture del passato, e continua a suscitare interesse e curiosità anche in un tempo apparentemente caratterizzato da una mentalità scientifica o tecnica come il nostro. Meno ovvio, mi sembra, è discutere quanto e sotto quali aspetti la scienza moderna, così come si è sviluppata a partire dal secolo XVI, abbia influito sulla nostra concezione della nascita del mondo e sulle nostre aspettative per quanto riguarda la sua fine.

Che la mentalità tecnico scientifica indotta dallo sviluppo delle nostre conoscenze abbia in qualche modo soppiantato i miti classici sulla nascita dell'universo sostituendoli con modelli poggiati sulle solide fondamenta delle teorie fisiche correnti – in primo luogo la Gravitazione, nelle sue varianti Newtoniana e Relativistica, e la Meccanica Quantistica – è sotto gli occhi di tutti. Ma le teorie fisiche evolvono nel tempo, e ciò induce una continua evoluzione dei modelli che descrivono il passato dell'universo, o cercano di immaginarne il futuro: la scienza, a conti fatti, non ci offre certezze, ma solo congetture (o ipotesi, o teorie &c) che sulla base delle conoscenze attuali possiamo considerare più o meno soddisfacenti.

Proprio la mutevolezza dei nostri modelli mi dissuade dall'addentrarmi, in questa sede, in teorie più o meno catastrofiste sul passato e sul futuro dell'umanità, o del nostro pianeta, o dell'intero universo. Preferisco invece limitare la discussione ad alcuni temi che hanno caratterizzato lo sviluppo delle nostre conoscenze negli ultimi decenni, pur affondando le loro radici in un passato più lontano. Si tratta delle teorie che si sviluppano intorno all'argomento "ordine e caos".

La presenza nel nostro mondo di ordine e caos, spesso tra loro in conflitto, è tema ricorrente in tutte

Accettato: il 4 gennaio 2019.

le culture: si pensi ad esempio al caos primordiale delle mitologie assira e babilonese, sviluppatesi poi nella teogonia greca e, in altra direzione, nella visione biblica dello stato del cielo e della terra, *inanis et vacua et tenebrae super faciem abyssi*, prima che l'intervento di Dio creatore imponesse qualche forma di ordine e suscitasse la vita. Ma questi argomenti esulano dalle mie competenze, e non intendo parlarne oltre. Mi riferisco invece alla coesistenza di ordine e caos che si osserva in modelli matematici che descrivono in modo più o meno appropriato una parte del mondo reale. Il mio intento è illustrare i meccanismi che riconosciamo come basilari per la comprensione dei fenomeni, ordinati o caotici, che si presentano anche in modelli molto semplici, cercando di minimizzare il contenuto strettamente tecnico. A tal fine concentrerò l'attenzione sulla *dinamica* che regge l'evoluzione di un sistema più o meno complesso – ma pur sempre una parte limitata dell'universo.

Nel discutere di questo argomento è inevitabile partire dalla Fisica, e più propriamente dalla Meccanica. È in questo campo, in effetti, che si è sviluppata storicamente la descrizione dei fenomeni della natura in termini geometrici, fino all'elaborazione a opera di Newton di un modello deterministico che ha avuto e ha ancor oggi un ruolo di primissimo piano nell'evoluzione della scienza.

Fino a cinquant'anni fa non era infrequente trovare in testi di divulgazione scientifica, o anche più specialistici, l'affermazione che nel nostro mondo si possono distiguere due tipi di sistemi meccanici: quelli a pochi corpi, che si muovono in maniera ordinata e perfettamente calcolabile con i metodi della Meccanica Razionale, e quelli a molti corpi, ai quali si applicano i concetti della Meccanica Statistica fondati sull'ipotesi di un comportamento microscopico di tipo imprevedibile e caotico. Il Sistema Solare, con i moti perfettamente ordinati dei pianeti, era spesso portato come esempio del primo tipo; i gas, con il moto disordinato delle loro innumerevoli molecole, come esempio del secondo tipo.

Lo schema che ho appena tratteggiato introduce una semplificazione sommaria e ingenua dell'evoluzione delle nostre conoscenze. Vorrei citare tre brani, scritti a circa un secolo di distanza l'uno dall'altro, che a mio parere rivelano con una certa chiarezza quali fossero le concezioni che si sono via via sviluppate nel tempo.

Il primo brano riassume la concezione del sistema del mondo elaborata da Isaac Newton (1642–1727) sulla base della Gravitazione, ed esposta nel trattato *Opticks*. ([1])

> *"Now by the help of these Principles, all material Things seem to have been composed of the hard and solid Particles above–mention'd, variously associated in the first Creation by the Counsel of an intelligent Agent. For it became him who created them to set them in order. And if he did so, it's unphilosophical to seek for any other Origin of the World, or to pretend that it might arise out of a Chaos by the mere Laws of Nature; though being once form'd, it may continue by those Laws for many Ages. For while Comets move in very excentrick Orbs in all manner of Positions, blind Fate could never make all the Planets move one and the same way in Orbs concentrick, some inconsiderable Irregularities excepted, which may have risen from the mutual Actions of Comets and Planets upon one another, and which will be apt to increase, till this System wants a Reformation."*

Abbiamo qui una visione meccanicistica secondo la quale il sistema planetario, creato in uno stato ordinato, evolve per tempi molto lunghi mantenendo traccia dell'ordine iniziale, seguendo regole ben descritte dalle leggi di Keplero; su di esse Newton ha fondato la sua concezione della gravitazione. Allo stesso tempo Newton si rende conto che la comples-

([1]) "Ora alla luce di questi principi tutte le cose materiali appaiono come composte delle particelle dure e solide che ho appena menzionato, variamente associate tra loro all'atto della Creazione secondo la volontà di un Essere intelligente. Perché Egli, che le ha create, le ha poi sistemate in modo ordinato. E se così Egli ha fatto, è contrario alla filosofia indagare su una diversa Origine del Mondo, o pretendere che esso possa essere uscito dal Caos grazie alle sole Leggi della Natura; e questo benché, una volta formato, esso possa continuare per molte epoche seguendo quelle leggi. Infatti, mentre le Comete si muovono su orbite eccentriche posizionate in tutti i modi possibili, un Fato cieco non avrebbe mai potuto far sì che tutti i pianeti si muovessero in un solo modo, per tutti eguale, su orbite concentriche, fatta eccezione per poche trascurabili irregolarità che possono trovare spiegazione nella mutua azione di comete e pianeti uno sull'altro e che in futuro potranno aumentare fino a rendere necessaria una riorganizzazione del Sistema."

sità delle interazioni tra i corpi celesti potrebbe alla lunga distruggere l'ordine imposto da Dio al momento della Creazione. Per questo egli non esclude l'intervento divino al fine, per così dire, di rimettere ordine nel caos nascente.

Lo sviluppo successivo delle teorie newtoniane porta a una visione deterministica più radicale, ben testimoniata da un passo dell'introduzione alla *Théorie analytique des probabilités* di Pierre Simon de Laplace ([2]) (1749-1827).

> *"Nous devons envisager l'état present de l'univers comme l'effet de son état antérieur et comme la cause de celui qui va suivre. Une intelligence qui, pour un instant donné, connaîtrait toutes les forces dont la nature est animée et la situation respective des êtres qui la composent, si d'ailleurs elle était assez vaste pour soumettre ces données à l'Analyse, embrasserait dans la même formule les mouvements des plus grand corps de l'univers et ceux du plus léger atome; rien ne serait incertain pour elle, et l'avenir comme le passé serait present à ses yeux."*

Non c'è più spazio, nella visione di Laplace, per una evoluzione lenta ma imprevedibile. Si può ben affermare che gran parte dell'Astronomia (oggi diremmo la Meccanica Celeste) del secolo XIX è dominata da questa visione: il problema fondamentale è arrivare alla soluzione delle equazioni che reggono il moto planetario. In quest'ottica diventa naturale asserire – con Laplace – che per sistemi con un numero molto grande di corpi, quali i gas, la necessità di una teoria statistica o probabilistica che sostituisca il calcolo esatto della dinamica è giustificata solo dalla limitatezza della nostra mente, che non può abbracciare in un sol momento tutti i fenomeni dell'universo.

La svolta successiva arriva alla fine del secolo XIX con l'opera di Henri Poincaré (1854-1912). Il passo che segue, tratto dall'ultimo capitolo dei *Méthodes nouvelles de la Mécanique Céleste*, contiene la sua riflessione su un fatto geometrico che mette in evidenza l'esistenza di un comportamento caotico nella dinamica di un sistema formato, ad esempio, dal Sole e da due pianeti. ([3])

> *"Que l'on cherche à se représenter la figure formée par ces deux courbes et leurs intersections en nombre infini dont chacune correspond à une solution doublement asymptotique, ces intersections forment une sorte de treillis, de tissu, de reseau à mailles infiniment serrées; chacune de ces deux courbes ne doit jamais se recouper elle–même, mais elle doit se replier sur elle même d'une manière très complexe pour venir recouper une infinité de fois toutes les mailles du reseau. On sera frappé de la complexité de cette figure, que je ne cherche même pas à tracer."*

Comprendere il significato di questo passo non è certo agevole per il lettore che non abbia conoscenze sufficientemente approfondite della dinamica. Ma non c'è da meravigliarsi troppo: con questa scoperta Poincaré chiude il terzo e ultimo volume dei *Méthodes Nouvelles*, e in qualche modo chiude un secolo di ricerche matematiche nel campo dell'Astronomia. Ci vorranno più di settant'anni prima che la sua scoperta venga riconosciuta e approfondita da matematici, astronomi e fisici, fatta eccezione per pochissimi matematici di gran valore.

Nella seconda metà del secolo appena trascorso, grazie anche all'ingresso sulla scena dei primi calcolatori elettronici, l'esistenza di una dinamica caotica nei sistemi deterministici è diventata conoscenza comune, e ha reso obsoleta la contrapposizione tra

([2]) "Noi dobbiamo considerare lo stato presente dell'universo come l'evoluzione del suo stato passato, e come la causa di quello che accadrà. Un'intelligenza che, a un certo istante, potesse conoscere tutte le forze che animano la natura, e la posizione relativa di tutto ciò che la compone, e che fosse anche così vasta da riuscire a sottoporre questi dati all'Analisi, potrebbe condensare in una sola formula i movimenti dei corpi più grandi dell'universo e quelli dell'atomo più leggiero; nulla per lei sarebbe incerto, e ai suoi occhi sarebbero presenti sia l'avvenire che il passato."

([3]) "Si cerchi di immaginare la figura formata da quelle due curve e dalle loro infinite intersezioni, ciascuna delle quali corrisponde a una soluzione doppiamente asintotica. Quelle intersezioni formano una sorta di intreccio, di tessuto, di rete a maglie infinitamente serrate; ciascuna di quelle due curve non deve mai reintersecare se stessa, ma si deve ripiegare su se stessa in modo estremamente complicato per tornare a intersecare un'infinità di volte tutte le maglie della rete. Si resterà sbalorditi dalla complessità di quella figura, che io non provo neppure a tracciare."

sistemi a pochi e a molti corpi che ho tratteggiato poco sopra. Grazie alla simulazione numerica della dinamica si è scoperto (o per meglio dire riscoperto) che il caos si cela anche in sistemi all'apparenza molto semplici. I numerosi studi dedicati a questo tema hanno mostrato che il caos è estremamente pervasivo, anche se non immediatamente visibile ai nostri occhi perché si manifesta su scale di tempi che talvolta possono raggiungere e superare i milioni o anche miliardi di anni. Parte di questa breve discussione sarà dedicata proprio al tentativo di descrivere in termini non eccessivamente tecnici la scoperta di Poincaré, e di discuterne il possibile impatto sulla nostra visione del mondo. Il lettore che volesse approfondire l'argomento potrà consultare, per fare solo qualche esempio, [2], [3], [8], [9], [11], [12], [14].

2. – Dall'ordine al caos: biforcazioni e catastrofi

Parlerò anzitutto dei fenomeni di biforcazione, noti da qualche secolo e formalizzati in una teoria unitaria dopo i lavori di René Frédéric Thom (1923–2002) ed Erik Christopher Zeeman (1925–2016) sotto il nome di *teoria delle catastrofi*. In termini non troppo formali si può dire che per *biforcazione* o *catastrofe* si intende un cambiamento repentino di una condizione di equilibrio o di un'evoluzione più o meno regolare indotto dal variare di un parametro di controllo. Gli esempi in natura non mancano: gli scivolamenti improvvisi della crosta terrestre che provocano i terremoti; l'eccesso di pressione interna che dà inizio a un'eruzione vulcanica; il raggiungimento della temperatura critica che innesca l'accensione di una fiamma, e così via. Per illustrare l'aspetto matematico farò ricorso al fenomeno della *cascata di biforcazioni* scoperto nel 1978 da Mitchell Jay Feigenbaum [4].

Proviamo a pensare a un modello elementare che descriva l'andamento di una popolazione in un determinato ambiente. Si può pensare a un allevamento di animali in un ambiente limitato, o ai pesci in un lago, o a una coltura batterica. In termini ideali ed estremamente semplificati si puo ragionare così:

(i) La popolazione evolve per generazioni; gli individui di una nuova generazione nascono tutti contemporaneamente (o quasi), sicché si può pensare a un'evoluzione a intervalli di tempo regolari.

(ii) La quantità che ci interessa è il numero di individui che compongono ciascuna generazione.

(iii) Il numero di individui nati dipende solo da quelli della generazione precedente, ed è descritto da una funzione che tiene conto delle condizioni ambientali (disponibilità di cibo, condizioni di affollamento, &c).

Tutto questo si può riassumere in un grafico, rappresentato in figura 1. Sull'asse orizzontale (le ascisse) rappresentiamo il numero di individui di una data generazione; sull'asse verticale (le ordinate) quello della generazione successiva; la curva dà il numero di individui della nuova generazione in funzione di quella precedente. Se vi sono pochi individui, allora il numero dei nuovi nati è grosso modo proporzionale a quello degli individui esistenti, e il fattore di proporzionalità è espresso da un parametro λ che dipende dalle caratteristiche ambientali; quando una generazione diventa troppo numerosa allora le condizioni ambientali possono diventare sfavorevoli (insufficienza di cibo, sovraf-

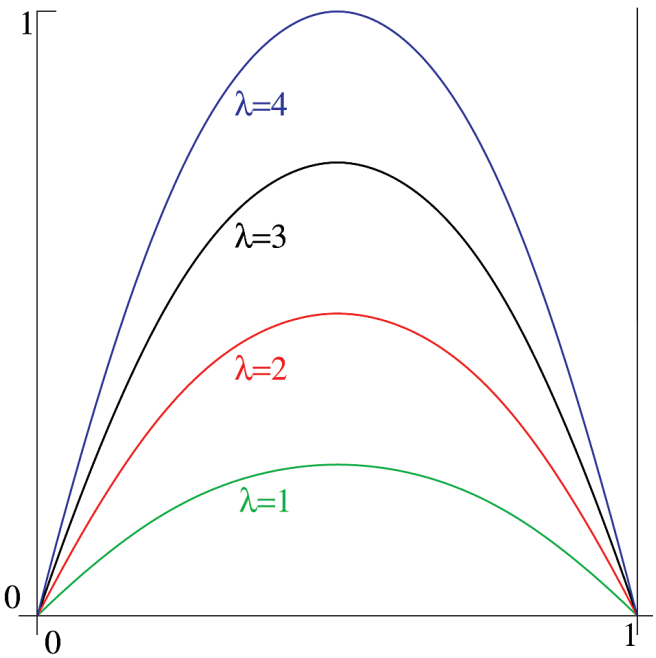

Fig. 1. – La mappa logistica. Il parametro λ controlla la pendenza in prossimità dello zero, e indirettamente anche l'altezza del massimo della curva.

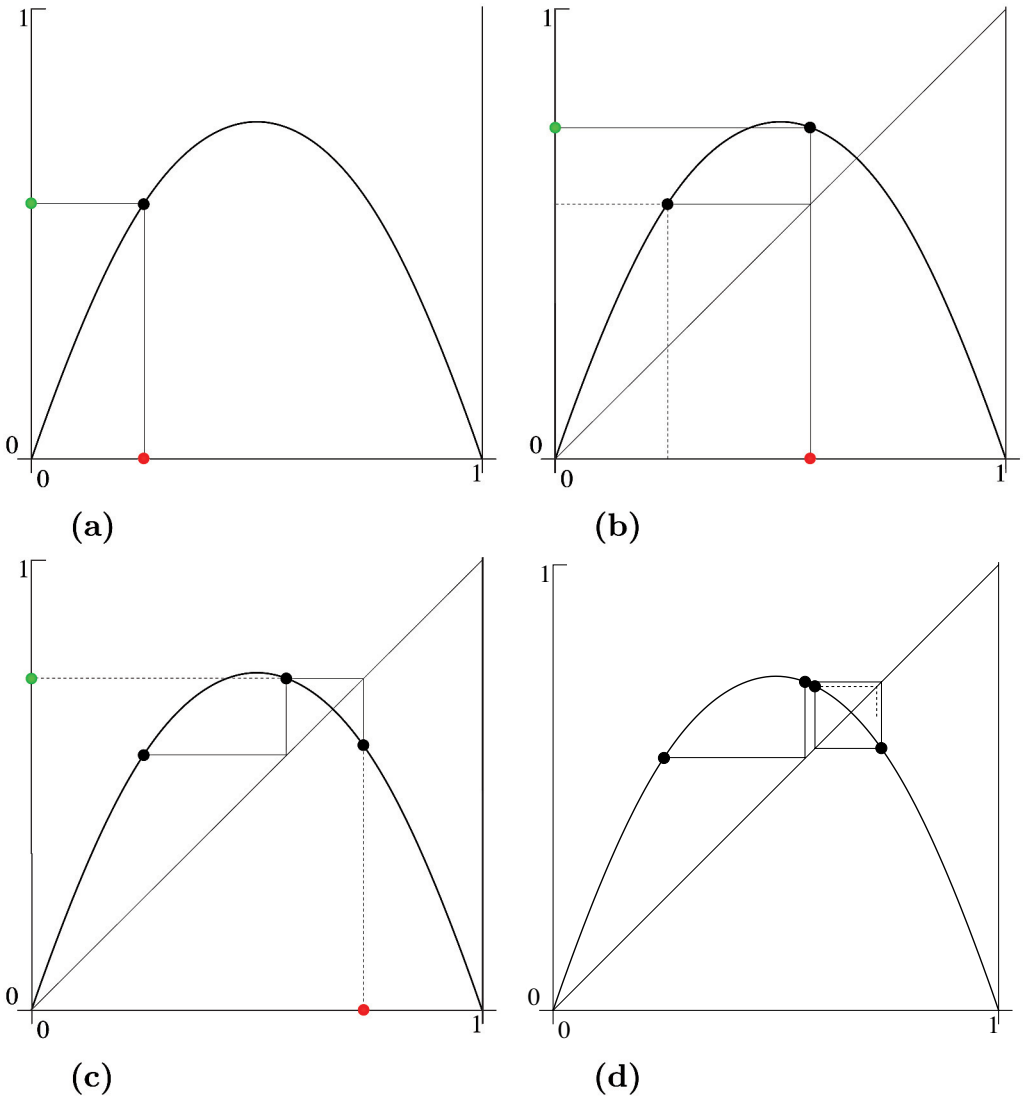

Fig. 2. – Le prime quattro iterazioni della mappa logistica.

follamento, &c), e quindi il numero di nuovi nati tende a diminuire fino ad azzerarsi in condizioni estreme, quando il numero di individui raggiunge un valore N critico che provoca l'estinzione. Queste considerazioni suggeriscono la forma "a gobba" della curva. Per comodità nel calcolo tutti i valori vengono divisi per N, sicché in grafico si riporta la frazione di individui rispetto a N, espressa da una quantità x che assume valori tra 0 e 1. Il parametro λ controlla la pendenza in prossimità dell'origine e indirettamente l'altezza del punto massimo. Una curva di questo tipo è rappresentata ad esempio dalla funzione $\lambda x(1-x)$, che è detta *mappa logistica*. Le conclusioni rilevanti restano però vere per una qualunque funzione che abbia la forma rappresentata in figura, ad esempio $\lambda \sin \pi x$. In questo modo abbiamo costruito un modello deterministico: una volta assegnato il parametro λ la nuova generazione dipende solo dalla precedente. La domanda che ci si pone è: *che evoluzione ci aspettiamo in queste condizioni?*

Il modello sembra davvero semplice. La scoperta di Feigenbaum è che facendo variare il parametro di controllo si osserva una varietà impressionante di comportamenti, che vanno dalle biforcazioni, o catastrofi, al caos.

Per costruire la dinamica occorre iterare la mappa. Questo è illustrato in forma geometrica nella figura 2, ma naturalmente è più comodo calcolare direttamente i valori della funzione me-

diante un calcolatore; le figure che descriverò tra poco sono ottenute usando la mappa logistica. Si fissa in modo arbitrario la prima generazione, che fa da dato di partenza, e lo si rappresenta sull'asse delle ascisse come nel quadro (a) della figura; il dato successivo, ovvero la seconda generazione, lo si trova salendo in verticale fino alla curva, e determinando l'ordinata corrispondente. Poi si porta il nuovo dato sull'asse delle ascisse, come nel quadro (b), e si trova la terza generazione procedendo come per la figura (a); si vede che i tratti dei segmenti che vanno dalla diagonale agli assi sono praticamente inutili, quindi si può omettere di tracciarli, come ho fatto nei quadri successivi. Ripetendo questo procedimento si trova una successione di generazioni lunga quanto si vuole, che viene detta *orbita* (con un termine mutuato dalla Meccanica). I primi passi sono rappresentati nei quadri (c) e (d) della figura. Ci si chiede cosa accada dopo molte iterazioni, ovvero come evolva l'orbita nel tempo discreto.

L'evoluzione per alcuni valori di λ è riportata in figura 3. In ciascun riquadro viene rappresentata l'orbita per un insieme di qualche centinaio di punti iniziali uniformemente distribuiti sull'asse delle ordinate. Procedendo verso destra vengono rappresentati gli evoluti di ciascun punto in funzione del tempo discreto, riportato in ascisse. Nei casi (a–e) si osserva che tutte le orbite collassano verso uno stato finale, detto *attrattore,* che può essere un solo punto nei casi (a) e (b), oppure un'orbita rispettivamente di periodo 2,4,8 nei casi (c), (d), (e). Nel caso (f) invece risulta arduo identificare un attrattore: fatta salva l'osservazione che alcuni intervalli restano vuoti è difficile indovinare un qualche ordine nella distribuzione finale dei punti. Se facciamo riferimento al caso di un allevamento questo significa che per un valore di λ basso (inferiore a 1) si hanno condizioni ambientali sfavorevoli che conducono più o meno rapidamente all'estinzione. Superando $\lambda = 1$ l'attrattore diventa positivo, il che significa vita. Se però si fa crescere ulteriormente λ, ad esempio aumentando la quantità di cibo o migliorando le condizioni ambientali, si cade su un'orbita di periodo 2: una generazione numerosa si alterna con una esigua. Per valori ancora superiori il periodo diventa 4, poi 8. Ci si chiede: e poi?

I cambiamenti di attrattore che si verificano per certi valori particolari di λ vengono detti *biforcazioni*, o talvolta *catastrofi*, anche se non nel senso che si dà solitamente a questo termine. La motivazione del termine biforcazione deriva dal fatto che l'attrattore precedente non scompare, ma semplicemente diventa instabile, sicché il calcolo diretto della dinamica non permette di ritrovarlo: occorre far uso di altri metodi.

La figura 4, ormai ben nota a chi si occupa di questioni dinamiche, riassume il comportamento al variare di λ in un intervallo tra 2.8 e 4. La figura è tracciata con un metodo che definirei "di forza bruta": si lascia evolvere l'orbita per qualche migliaio di iterazioni, in modo che finisca praticamente sull'attrattore; poi si riporta in grafico un certo numero di punti. Ci sono anche metodi più efficaci, ma per un primo tracciamento della figura è sufficiente quello che ho descritto.

Si vedono bene gli attrattori di periodo 1, 2 e 4, e con fatica anche il periodo 8. Poi la figura diventa alquanto complessa, e per avere una rappresentazione leggibile si dovrebbe far ricorso a degli ingrandimenti opportuni. Una discussione completa qui richiederebbe troppo spazio, ma posso descrivere brevemente il fenomeno scoperto da Feigenbaum.

Facendo crescere λ si osserva una *cascata di biforcazioni con raddoppio di periodo*: 2, 4, 8, 16, 32, &c. Però l'intervallo di λ tra una biforcazione e la successiva decresce molto rapidamente, dividendosi ogni volta per un fattore tra 4 e 5. Anzi, e questo è ancor più interessante, al procedere della successione di biforcazioni il rapporto tra un intervallo e il successivo tende a un valore $4.6692016091029\ldots$ che *non dipende dalla mappa che si usa*, purchè questa abbia la forma "a gobba" che abbiamo considerato fin qui. L'insorgere del caos in modelli di questo tipo sembra dunque essere caratterizzato da un numero che ha un significato universale. Si può anche identificare, per la mappa logistica, un valore critico $\lambda = 3.5699456\ldots$ che corrisponde al limite di infinite biforcazioni, e segna il passaggio da una dinamica periodica, sia pure di periodo lunghissimo, a un attrattore che non è più periodico.

Non mi dilungherò su cosa accada se si fa ancora crescere λ: il lettore potrà esercitare la propria im-

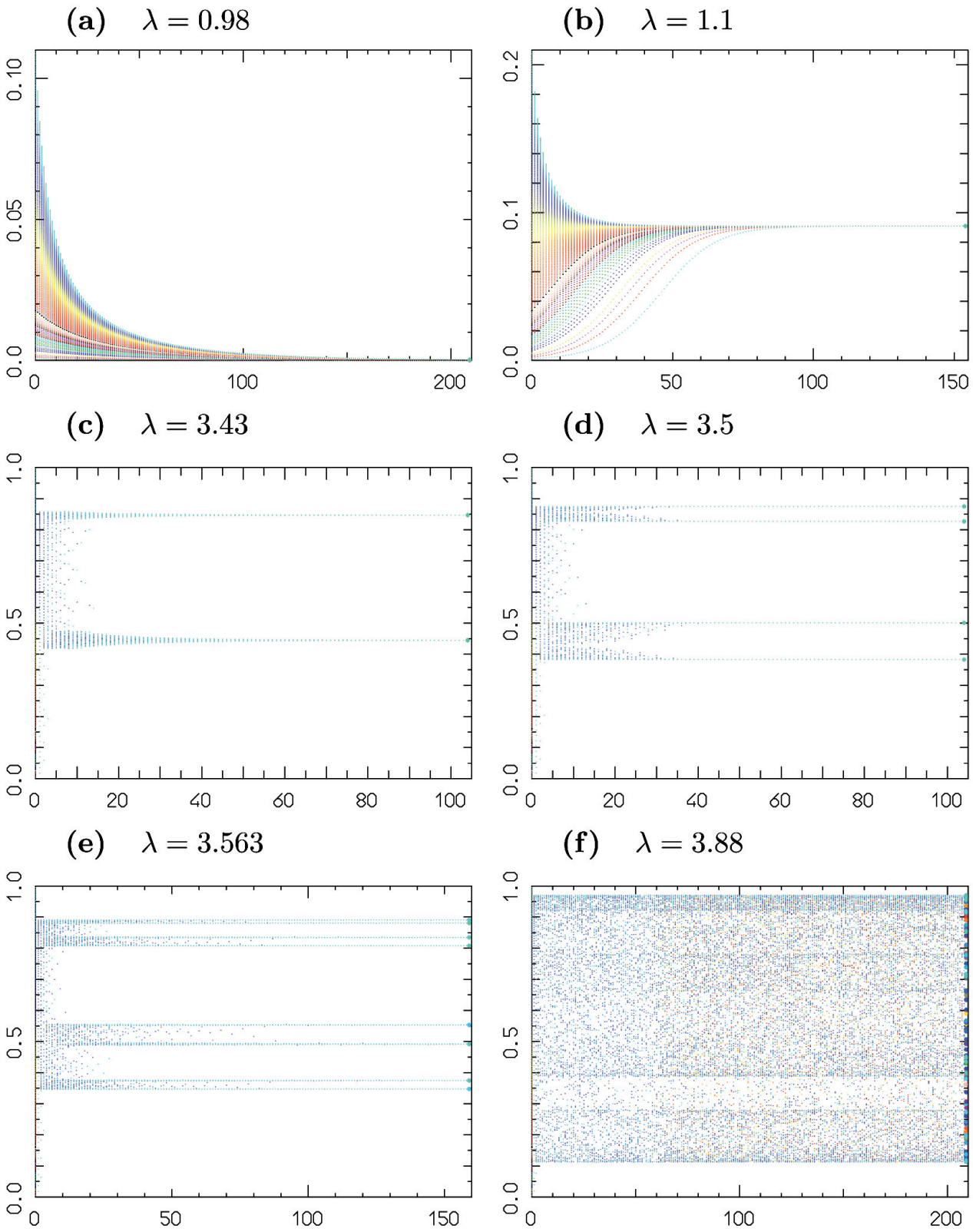

Fig. 3. – Alcune evoluzioni della mappa logistica, al variare del parametro di controllo λ. In ascisse il numero di iterazioni (o, se si preferisce, il tempo discreto); in ordinate il valore di x. I valori di λ sono scelti in modo da mettere in evidenza il meccanismo delle biforcazioni. (a) $\lambda = 0.98$, per qualunque dato iniziale si ha estinzione; (b) $\lambda = 1.1$, si cade su un attrattore che è un punto (o valore) positivo fisso; (c) $\lambda = 3.43$, l'attrattore è un'orbita di periodo 2; (d) $\lambda = 3.5$, l'attrattore è un'orbita di periodo 4; (e) $\lambda = 3.5682$, l'attrattore è un'orbita di periodo 8; (f) $\lambda = 3.88$, ciascun dato iniziale evolve in modo indipendente dagli altri e imprevedibile, e sembra non esserci nessun attrattore.

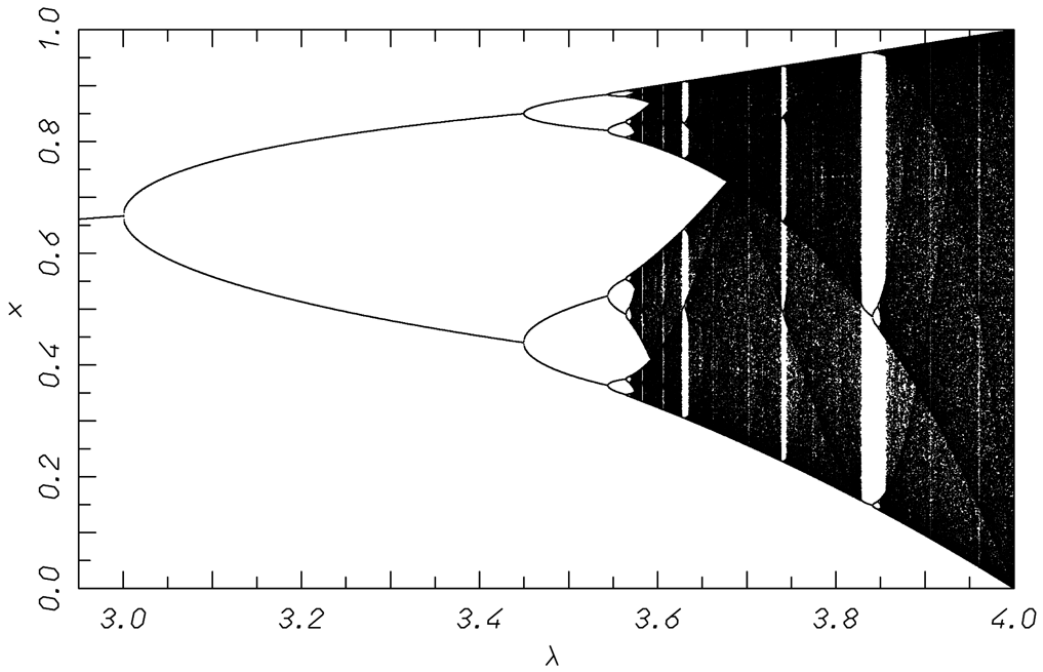

Fig. 4. – La cascata di biforcazioni della mappa logistica. Sull'asse delle ascisse il parametro di controllo λ; in ordinata le coordinate x dei punti dell'attrattore, come descritto nel testo.

maginazione osservando la figura 4, o cercare informazioni più complete in altri testi, ad esempio in [14] o [3], o ancora, se ha qualche dimestichezza con la programmazione, riprodurre egli stesso la figura e modificarne la scala a suo piacimento.

3. – La geometria di ordine e caos

Il modello di Feigenbaum che ho appena descritto fa nascere spontaneamente una domanda: *cosa distingue il comportamento ordinato da quello caotico?* Qui si entra un po' più a fondo nella descrizione matematica dei due fenomeni.

Occorre anche una precisazione. L'esistenza di attrattori, come l'abbiamo vista nel modello della mappa logistica, è tipica dei sistemi detti *dissipativi.* In meccanica questi sono i sistemi soggetti ad attrito, ad esempio pendoli, leve, piani inclinati, ingranaggi, torchi idraulici, o qualunque apparecchiatura meccanica che noi possiamo costruire. Una seconda classe di grande interesse è quella dei sistemi detti *conservativi*, ossia quelli che, abbiamo imparato sui banchi di scuola, conservano l'energia (ma questo è solo uno degli aspetti). In questa seconda categoria possiamo annoverare i corpi celesti e gli atomi o molecole che compongono la materia. Si tratta di una classe molto particolare, ma anche molto interessante proprio perché il nostro modello del mondo appartiene a questa categoria. Da qui in poi concentrerò l'attenzione sui sistemi conservativi.

3.1 – *I sistemi ordinati, o integrabili*

Parliamo anzitutto dell'ordine. All'inizio del *Dialogo sopra i due massimi sistemi del mondo* Galileo prende le mosse dalla fisica di Aristotele.

> *"Uscendo, per così dire, del mondo sensibile e ritirandosi al mondo ideale, comincia architettonicamente a considerare, che essendo la natura principio di moto, conviene che i corpi naturali siano mobili di moto locale. Dichiara poi i movimenti locali esser di tre generi, cioè circolare, retto, e misto del retto e circolare; e li duoi primi chiama semplici perché di tutte le linee la circolare e la retta sola son semplici."*

Oggi preferiamo parlare di *sistemi integrabili*, o ordinati. L'aggettivo "integrabile" sta a significare che siamo in grado di risolvere in modo completo le equazioni che descrivono l'evoluzione di questi sistemi, e quindi ne possiamo prevedere sia il passato che il futuro, proprio come affermava Laplace. La

classificazione che troviamo nel passo di Galileo, e proveniente dalla fisica aristotelica, sembra molto ingenua, ma non è poi terribilmente lontana dalla nostra: noi distinguiamo tra moti periodici e non periodici. Un esempio significativo è proprio il Sistema Solare. Nella descrizione della Meccanica Newtoniana, o per essere precisi nell'approssimazione più semplice che tutti abbiamo appreso dai testi scolastici, il baricentro del sistema (praticamente il Sole) si muove di moto rettilineo uniforme nello spazio (per Newton sta fermo al centro dell'Universo), e questo è il moto non periodico; i pianeti si muovono sulle loro orbite ellittiche, ciascuno con un suo periodo, proprio come descritto da Keplero, e questo ci propone una versione più raffinata rispetto al moto circolare. Il movimento complessivo non è necessariamente elementare: eclissi, fasi della Luna o di Venere, congiunzioni e opposizioni dei pianeti sono fenomeni che presentano una grande variabilità, ma trovano una descrizione ragionevolmente buona nello schema di Keplero, almeno fin che ci si limita a intervalli di tempo di qualche centinaio di anni. ([4])

Quella che ho descritto è solo una prima approssimazione: non si tiene conto dell'attrazione mutua dei pianeti, e si dimentica che il nostro sistema solare è solo una piccolissima parte della nostra Galassia, che a sua volta è solo una dei miliardi di Galassie che osserviamo nell'Universo, e con le nostre conoscenze attuali ci fermiamo qui. La domanda successiva è: *cosa accade se rendiamo il nostro modello più complesso, ma più aderente alla realtà?* Il fatto è che a questa domanda non sappiamo dare una risposta completa e soddisfacente.

A ben pensarci c'è anche un secondo problema: se vogliamo conoscere tutto il passato e il futuro del nostro sistema dobbiamo conoscerne in modo completo lo stato a un determinato istante. Ad esempio, nel caso dei pianeti dovremmo determinare *esattamente* il periodo di rivoluzione, oltre ad altre quantità. Ma il periodo lo misuriamo mediante le osservazioni, e quindi lo conosciamo solo con un piccolo margine di errore. Qui però abbiamo un'ancora di salvezza. Supponiamo, ad esempio, di aver commesso un errore di un secondo nel misurare il periodo di rivoluzione della Terra (ossia la lunghezza dell'anno). Per osservare una deviazione di un intero giorno rispetto alle nostre previsioni dovremmo aspettare 86 400 anni, tanti quanti sono i secondi in un giorno. L'esempio non è poi così strano: il calendario di Giulio Cesare era calcolato con un errore di circa $11' 14''$, ridotti a circa $26''$ nel calendario gregoriano che noi usiamo attualmente, e talvolta, alla fine dell'anno, viene introdotta una correzione di un secondo per riallineare i nostri orologi col moto della Terra. Tutto questo per sottolineare che un piccolo errore nella conoscenza dello stato iniziale di un sistema molto ordinato non ha conseguenze catastrofiche, e può comunque essere corretto successivamente.

3.2 – *Un esempio di sistema caotico*

Illustrerò il comportamento caotico ricorrendo a un modello geometrico noto come *il gatto di Arnold*, per un motivo che si vedrà tra poco [1]. Si tratta di una mappa che trasforma un quadrato in se stesso, illustrata in figura 5 (si veda la spiegazione nella didascalia). La caratteristica fondamentale di questa mappa è la *conservazione dell'area*: il parallelogramma (b) ha la stessa area del quadrato (a), e così avviene anche se si considera un'areola qualsiasi dentro il quadrato. Questa proprietà corrisponde (in un senso che qui sarebbe lungo spiegare) alla conservazione dell'energia nei sistemi meccanici. In formule, la mappa si definisce come

$$x' = 2x + y \pmod 1 , \qquad y' = x + y \pmod 1.$$

L'operazione indicata con (mod 1) consiste proprio nel far rientrare nel quadrato le parti che ne sono uscite per via della distorsione. In geometria la si interpreta così: si considerano come identici tutti i punti del piano le cui coordinate orizzontali o verti-

([4]) Se ci si vuol rendere conto ancor meglio della complessità nascosta nell'affermazione "il movimento globale è composizione di singoli moti periodici" si pensi alla misura del tempo. Il problema che si presenta, e che ha dato origine alla varietà di calendari ancor oggi esistenti, è quello di trovare un ragionevole accordo fra tre periodi che non stanno in rapporti semplici tra loro: la rotazione della Terra (il giorno); le fasi della Luna (il mese); l'alternarsi delle stagioni (l'anno).

cali differiscano per un numero intero. Chi trovasse misteriosa questa spiegazione può ragionare come segue. Si immagini di arrotolare il quadrato e di incollare il bordo superiore con quello inferiore facendo coincidere esattamente gli estremi, così da ottenere un cilindro. Allora, tenendo costante la coordinata orizzontale, si può girare sul cilindro e tornare al punto di partenza senza cambiare mai direzione e senza fare salti. Questo è perfettamente equivalente a dire che se due punti hanno la stessa coordinata x e coordinate y che differiscono di un intero in realtà sono lo stesso punto, perché muovendosi verticalmente dall'uno all'altro si fanno dei giri completi sul cilindro. La stessa operazione si può compiere incollando il bordo sinistro col destro. Quello che risulta un po' più difficile è compiere le due operazioni contemporaneamente nelle due direzioni orizzontale e verticale. Ma ci si può arrivare con l'immaginazione, ad esempio pensando di ritagliare un quadrato da una membrana elastica, arrotolarlo a cilindro, e poi curvare il cilindro fino a ottenere una

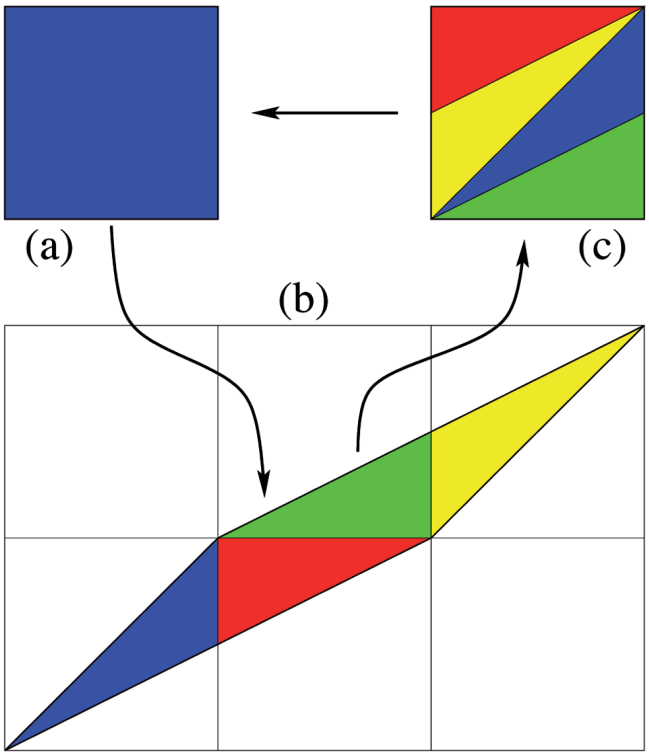

Fig. 5. – La mappa del *gatto di Arnold*. Il quadrato (a) viene trasformato nel parallelogramma in (b). Poi viene ricomposto in (c) il quadrato di partenza riportandovi tutte le parti che sono uscite, come illustrato dai diversi colori. L'operazione viene poi ripetuta quante volte si vuole.

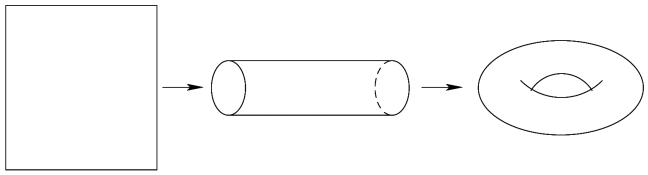

Fig. 6. – La trasformazione del quadrato in una superficie a forma di ciambella, detta *toro*.

ciambella, come illustrato in figura 6. In geometria una superficie di questo tipo viene detta *toro*. Il difetto di questa rappresentazione è che cambiano tutte le distanze tra i punti e anche le aree – per questo ho parlato di membrana elastica. Si tratta comunque di un buon modo di immaginare il comportamento della mappa. Un modo equivalente – e tutto sommato più semplice – consiste nell'immaginare l'intero piano piastrellato con quadrati tutti identici: i bordi si allineano perfettamente.

La differenza rispetto alla mappa logistica del paragrafo precedente è subito detta: in quel caso si considera una sola grandezza il cui valore viene riportato sull'intervallo $[0, 1]$; qui se ne considerano due, rappresentandole su un quadrato. La domanda rimane la stessa: *se assegno un punto iniziale, come si comporta la successione di punti (l'orbita) che ottengo iterando la mappa?*

Il comportamento globale della mappa è illustrato in figura 7, che per inciso spiega il nome bizzarro *gatto di Arnold*: fu infatti Vladimir Igorevich Arnold (1937–2010) a metterne in evidenza l'interesse come modello semplice ma paradigmatico di un sistema totalmente caotico, ed egli la illustrò disegnando nel quadrato la figura stilizzata di un gatto; qui ho sostituito l'immagine originale con una più elaborata. Dopo il primo passo si osserva l'effetto di stiramento indotto dalla mappa, e questo effetto aumenta ai passi successivi finché, alla quarta iterazione, si vedono solo tante strisce oblique. Ma basta arrivare fino all'ottava iterazione per rendersi conto che della figura originale del gatto non c'è più la minima traccia: solo tanti punti confusi; così accade per le iterazioni successive.

Il meccanismo che sta alla base di un tal comportamento è comprensibile se si riflette un momento sulla figura 5. Il quadrato viene stirato in una direzione e schiacciato nell'altra; poi viene ricompo-

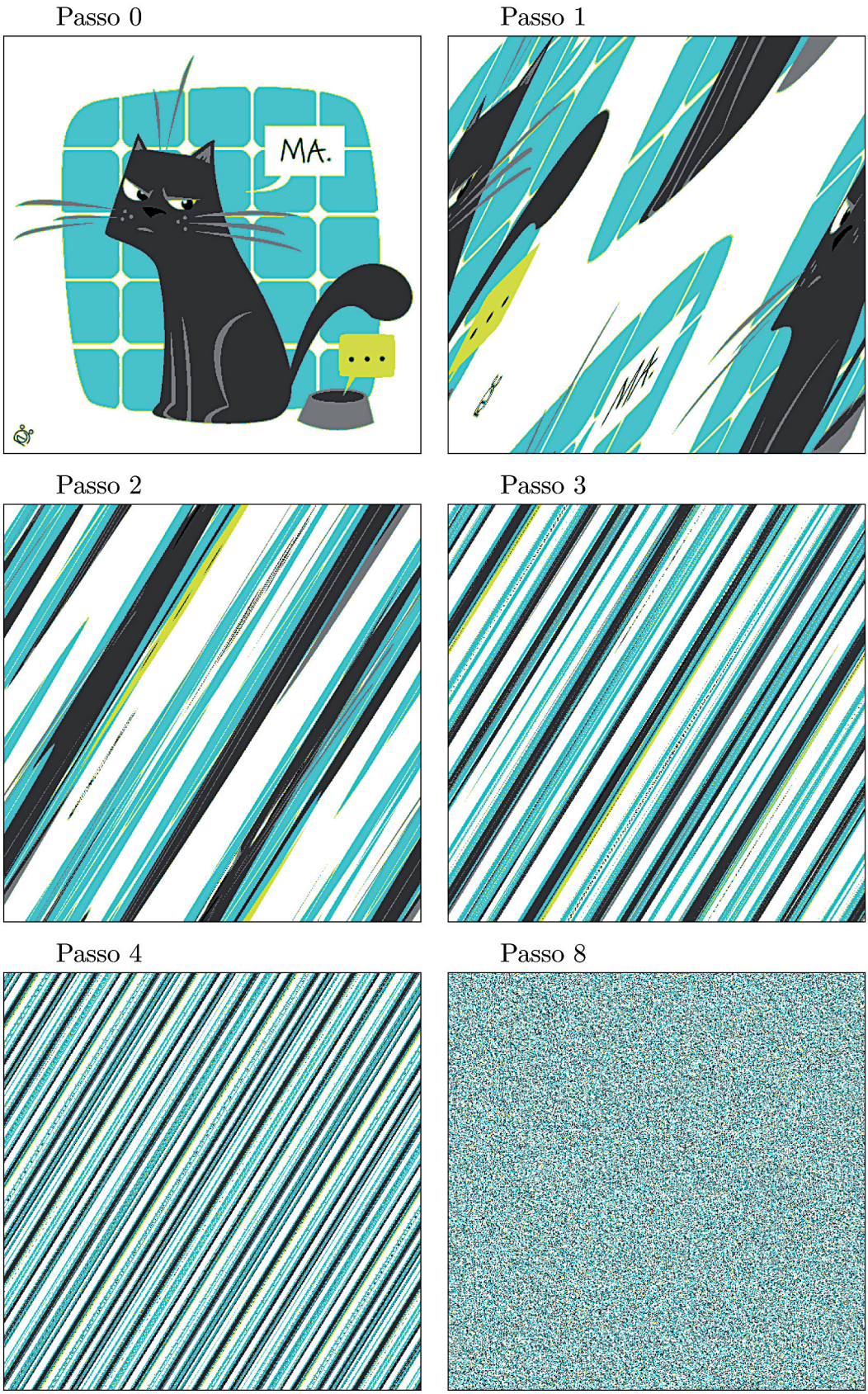

Fig. 7. – Le prime iterazioni della mappa del gatto di Arnold. (La figura del gatto è stata disegnata da Cristina Giorgilli.)

sto. ([5]) Il continuo stiramento nella stessa direzione trasforma una piccola area interna al quadrato in una sorta di filo lunghissimo che si distribuisce in modo uniforme nel quadrato, sicché punti che erano inizialmente vicinissimi risultano allontanati in modo sensibile. Questo fenomeno è illustrato in figura 8. Si parte con un numero elevato di punti concentrati in un quadratino molto piccolo e si tracciano le iterazioni successive. Alla terza iterazione si vede già che i punti si stanno distribuendo lungo un segmento la cui lunghezza aumenta con le iterazioni successive, finché all'iterazione 10 si inizia a vedere una dispersione, anche se l'allineamento è ancora visibile. Bastano però un altro paio di iterazioni per vedere i punti disperdersi su tutto il quadrato, e da questo momento in avanti si osserva solo caos. Ci si può domandare cosa accadrebbe se il lato del quadrato iniziale fosse dieci, o cento, o mille volte più piccolo. La risposta è molto semplice: ci vorrebbe solo qualche iterazione in più (non molte) per osservare lo stesso fenomeno. Il fatto è che la distanza tra due punti cresce esponenzialmente. Supponiamo ad esempio che essa raddoppi a ogni iterazione. Dopo 2 passi la distanza iniziale sarà moltiplicata per 4, dopo 3 passi per 8,... dopo 10 passi per 1024,... dopo 64 passi per 2^{64}, che è un numero con 20 cifre, e così via. ([6]) È il gioco dei chicchi di riso sulla scacchiera: 1 sul primo quadratino, 2 sul secondo, 4 sul terzo ... e non basta tutto il riso coltivato dall'umanità da quando esiste l'agricoltura per riempire tutti i 64 quadratini. La differenza rispetto all'esempio del periodo di rivoluzione della Terra che ho descritto sopra è stridente, perché qui l'accumulo dell'errore è così rapido da non lasciare nessuna speranza di recupero: l'evoluzione, pur essendo strettamente deterministica, diventa del tutto imprevedibile a meno di non conoscere esattamente il punto iniziale (per intenderci, con tutte le sue infinite cifre decimali).

In conclusione, possiamo riassumere le differenze come segue:

(i) I sistemi ordinati sono tipicamente caratterizzati da una combinazione di moti periodici, e la perdita di informazione dovuta all'imprecisione sullo stato di partenza è proporzionale al tempo, e quindi lenta e controllabile.

(ii) I sistemi caotici sono caratterizzati da un meccanismo di contrazione-espansione, e la perdita di informazione cresce esponenzialmente nel tempo, diventando incontrollabile.

4. – La coesistenza di ordine e caos

Torniamo per un momento al Sistema Planetario, e più precisamente al brano di Newton che ho riportato nel paragrafo 1. Il moto Kepleriano dei pianeti, che possiamo ben descrivere come combinazione di moti periodici, è in realtà una semplificazione molto elegante, ma non corrispondente alla realtà. Del resto, già Keplero aveva notato delle deviazioni dal moto ellittico. L'osservazione di Newton è che le azioni gravitazionali che si esercitano tra i pianeti potrebbero, alla lunga, distruggere l'ordine iniziale.

Gli sviluppi delle teorie newtoniane, iniziati da Jean-Le Rond D'Alembert (1717-1783) e Leonhard Euler (1707-1783), e riformulati sostanzialmente nella forma attuale da Giuseppe Luigi Lagrange (1736-1813), seguito da Laplace e da tutti i grandi matematici e astronomi del secolo XIX, hanno dato origine alla *teoria delle perturbazioni*. L'idea sottostante può descriversi così: si considera l'azione mutua dei pianeti come un piccolo disturbo rispetto a quella del Sole sul singolo pianeta, e si cerca di correggere il calcolo delle orbite al fine di mostrare che il movimento reale, tenuto conto di tutte le perturbazioni note, può ancora descriversi come composizione di moti periodici.

Verso il 1890 Poincaré scopre che tra gli infiniti moti possibili ve ne sono di non riconducibili alla composizione di moti periodici, e che possono anche esistere orbite di tipo caotico. È questo il fenomeno della coesistenza di ordine e caos, rimasto sostan-

([5]) Il meccanismo è simile a quello che ci consente di preparare la pasta per il pane, o per gli spaghetti. Mescolando la farina con acqua si ottiene un blocchetto informe e ancora disomogeneo; lo si stira in una direzione, e poi lo si ripiega su se stesso in modo da ricomporre un blocchetto. Queste operazioni modificano la forma, ma non cambiano il volume, nemmeno se si prende in considerazione solo un pezzetto, perché l'impasto è praticamente incomprimibile (supponendo ovviamente di non aver ancora aggiunto il lievito); questo è l'analogo della conservazione dell'area. L'impasto uniforme si ottiene ripetendo più volte l'operazione di stiramento-ripiegamento.

([6]) Nel nostro caso la distanza resta comunque limitata, ma solo perché quando un punto esce dal quadrato viene riportato all'interno col meccanismo descritto dalla figura 5.

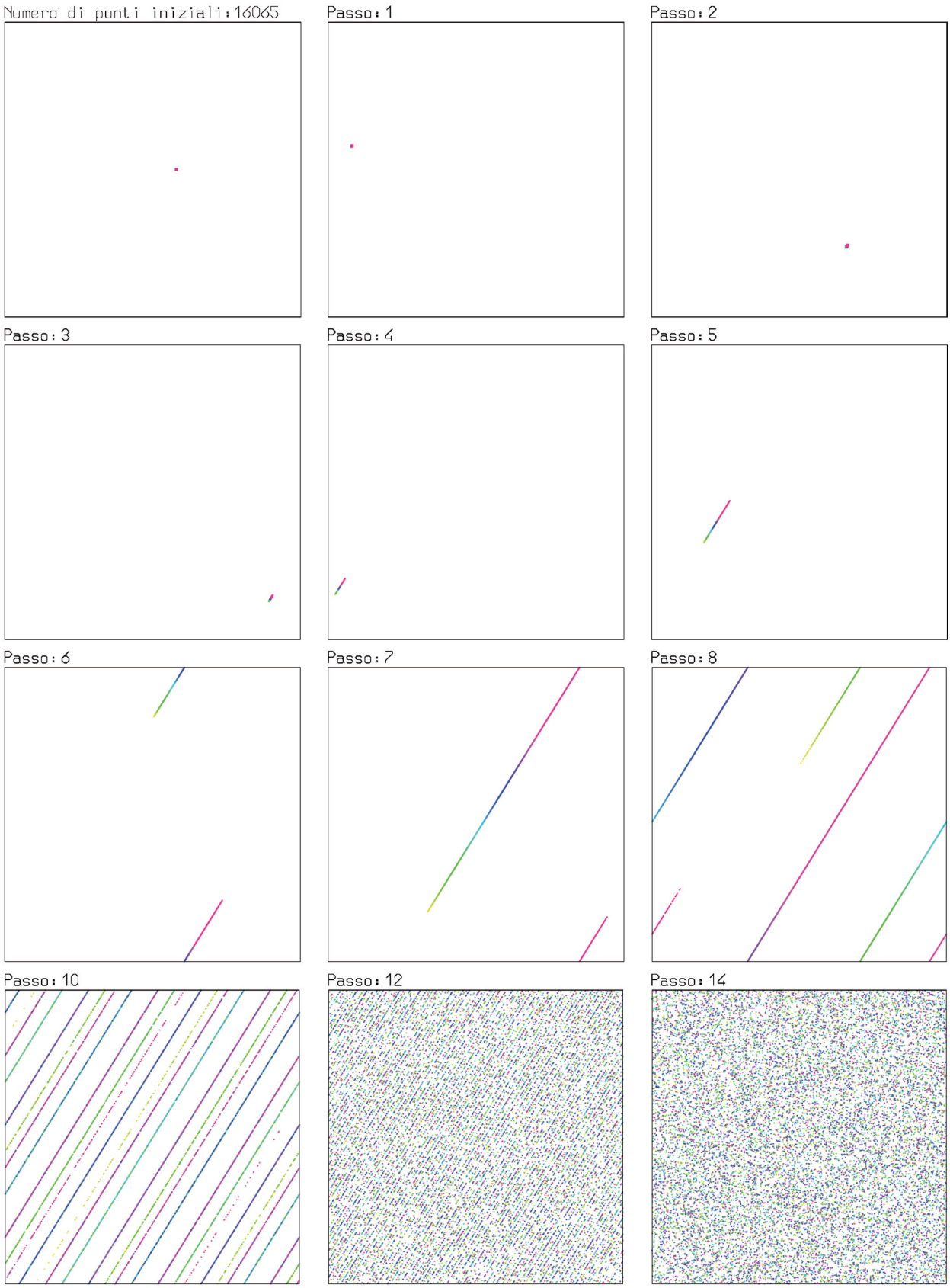

Fig. 8. – Lo stiramento di una piccola area e la dispersione di punti vicini nella mappa del gatto di Arnold. Qui si rappresenta l'evoluzione di 16 065 punti inizialmente disposti a caso in un quadratino di lato $\frac{1}{1000}$.

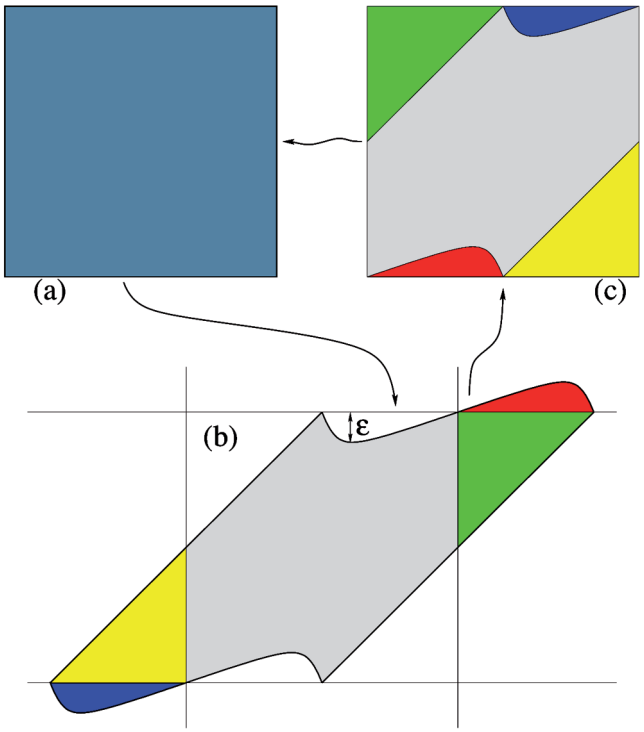

Fig. 9. – La standard map. Il quadrato (a) viene trasformato nel parallelogramma distorto (b) e ricomposto in (c). L'altezza ε misura la distorsione.

zialmente sconosciuto (con poche eccezioni rappresentate da matematici di gran valore) fino agli anni '60 del secolo XX. È a partire da quegli anni, grazie anche alla disponibilità dei moderni calcolatori elettronici, che la coesistenza di ordine e caos viene, per così dire, riscoperta da astronomi e fisici e diviene oggetto di studio ampio e sistematico.

4.1 – *La standard map*

Qui descriverò il fenomeno servendomi di un modello ideato da Boris Valerianovich Chirikov (1928-2008) nel 1969 e noto come *standard map* [11]. La mappa è illustrata in figura 9. Il quadrato in (a) viene trasformato in un parallelogramma e distorto verticalmente come in (b), in modo che l'area venga conservata. ([7]) Poi tutti i pezzi che sono usciti dal quadrato iniziale vengono fatti rientrare, come in (c). L'entità della distorsione verticale viene misurata da un parametro ε. In formule la mappa si scrive

$$x' = x + y \pmod{2\pi} ,$$
$$y' = y + \varepsilon \sin(x + y) \pmod{2\pi} ,$$

dove l'operazione mod 2π è da intendersi nel senso che si riconduce tutto all'interno di un quadrato di lato 2π. Il meccanismo è lo stesso che ho illustrato per il gatto di Arnold: si trasforma il quadrato in una ciambella pensando di deformarlo in modo da far coincidere il lato sinistro col destro e quello inferiore col superiore.

Il parametro ε fa da tramite tra il moto completamente ordinato, combinazione di moti periodici, e quello sempre più caotico che si osserva al crescere di ε.

Qui occorre una breve riflessione. Consideriamo anzitutto una singola applicazione della mappa, illustrata in figura 10. Se si pone $\varepsilon = 0$ si elimina la distorsione verticale della figura 9; la distorsione compare per $\varepsilon \neq 0$, e cresce con $|\varepsilon|$. Concentriamoci per un momento sul caso $\varepsilon = 0$. Si osserva che ogni punto si muove di una quantità pari alla sua altezza rispetto all'asse orizzontale centrale del quadrato, mantenendo l'altezza invariata (il moto è verso destra nella parte sopra l'asse centrale; verso sinistra nella parte sotto). Questo però non significa che la dinamica di una singola orbita sia necessariamente semplice. Ci dobbiamo chiedere cosa accade nel corso delle iterazioni successive. A tal fine è conveniente concentrarsi sulle singole orbite: si prende un punto di partenza, e si cerca di immaginare quale sarà la sua evoluzione iterando la mappa. Ci si può aiutare con la figura 11. L'asse orizzontale al centro del quadrato evidentemente non si muove: tutti i suoi punti restano sempre allo stesso posto. Si dice che sono *punti fissi*. Il lato superiore del quadrato si sposta verso destra di una quantità pari alla metà del lato stesso: alla seconda iterazione è tornato al suo posto, sicché ciascun punto ritorna alla sua posizione iniziale ogni due iterazioni: è un'orbita di periodo 2. Lo stesso accade per il lato inferiore. Ciascun punto dell'asse ad altezza 1/3 del lato rispetto a quello centrale torna alla posizione iniziale ogni 3 iterazioni: è un'orbita di periodo 3. Con un po' di immaginazione si comprende che ogni punto che giace su un

([7]) Si può pensare di smazzare una risma di fogli prima di sistemarli nel cassetto della stampante o della fotocopiatrice: si combina uno scorrimento dei fogli e una distorsione che non modificano il volume.

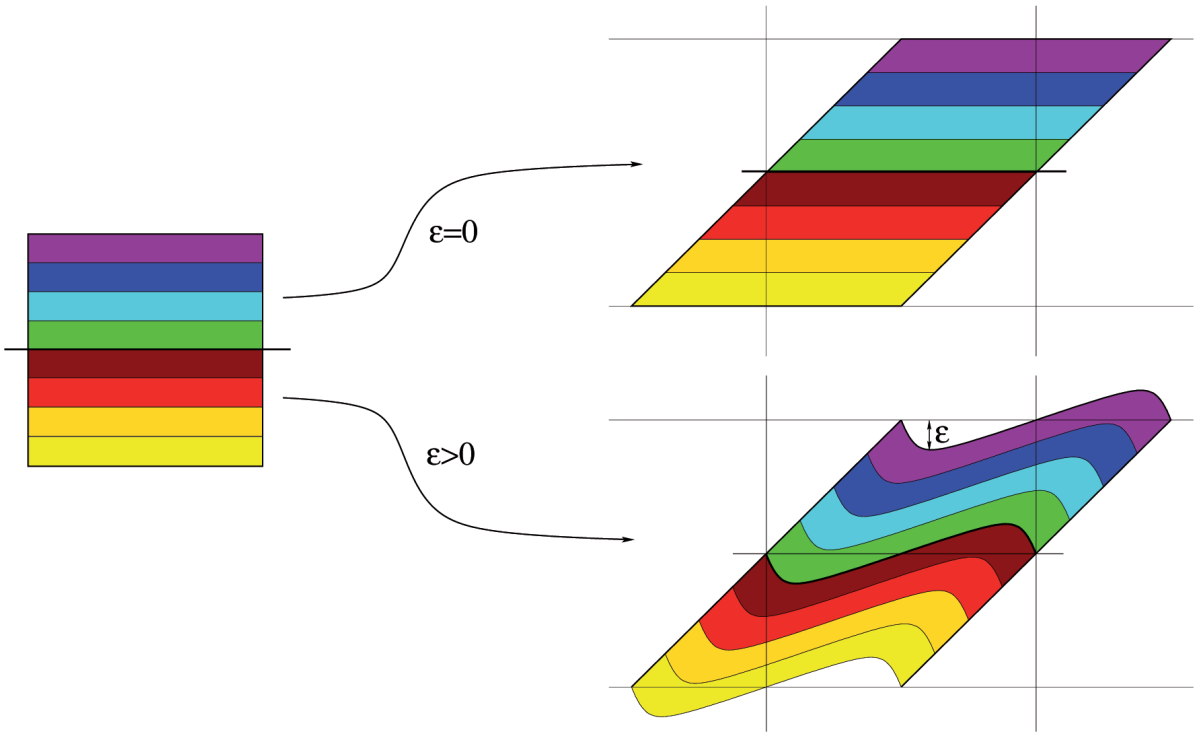

Fig. 10. – L'effetto del parametro di distorsione ε sulla standard map. Pensando al quadrato come formato da strati, qui rappresentati con strisce, nel caso $\varepsilon = 0$ si ha solo uno scivolamento, per $\varepsilon > 0$ gli strati vengono deformati.

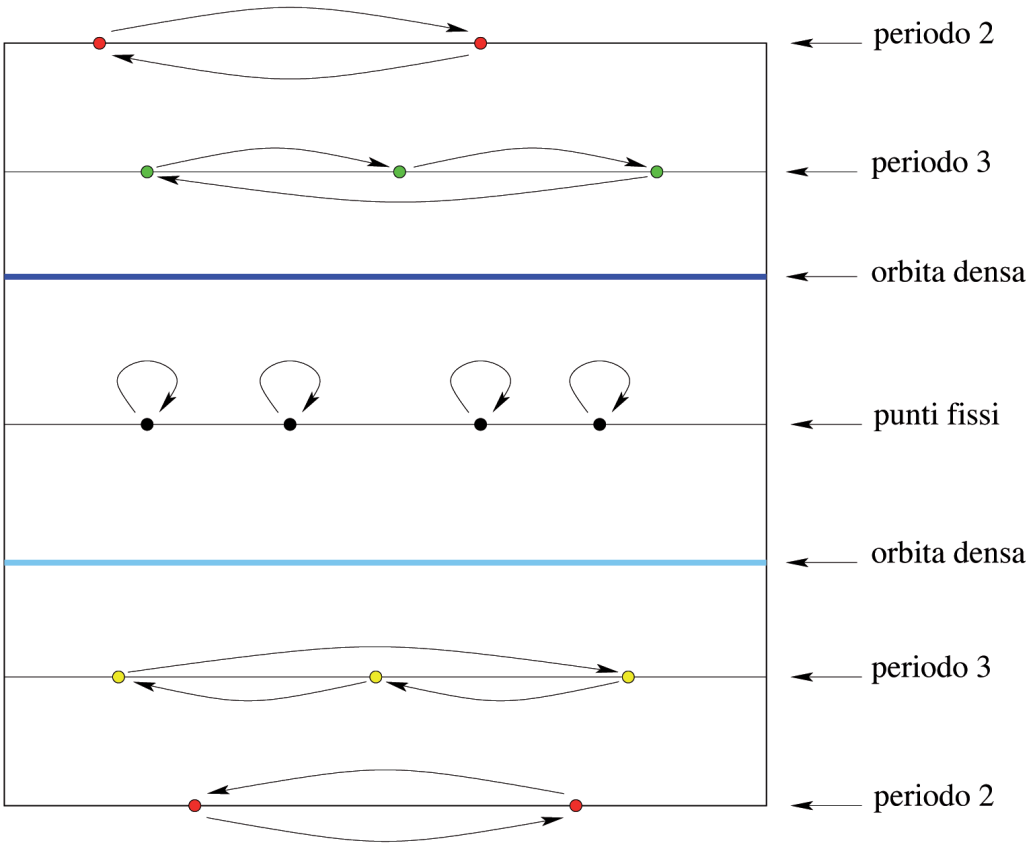

Fig. 11. – Orbite periodiche e non periodiche della standard map per $\varepsilon = 0$.

asse ad altezza che abbia rapporto razionale col lato darà origine a un'orbita periodica. Ad esempio, se l'altezza è $13/17$ del lato l'orbita corrispondente avrà periodo 17. Più difficile è capire cosa accade se l'altezza è un numero irrazionale, ad esempio $\frac{\sqrt{2}}{2}$ oppure $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ (la sezione aurea). In questo caso si può mostrare che i punti dell'orbita si disperdono uniformemente sul segmento, in modo che in ciascun intervallino, per quanto piccolo, ne cadano infiniti: si dice che l'orbita è *densa* sull'asse orizzontale che la contiene.

La dinamica ricorda quella del sistema planetario: ciascun segmento orizzontale del quadrato si muove con una sua velocità, dipendente dalla sua coordinata verticale, esattamente come ciascuna orbita planetaria (reale o possibile) è caratterizzata da un periodo che dipende dal suo semiasse maggiore secondo la terza legge di Keplero. I rapporti razionali o no tra i periodi dei pianeti sono responsabili dell'apparente complessità dei fenomeni che osserviamo. Possiamo ben dire che il caso $\varepsilon = 0$ descrive un sistema completamente ordinato. Assegnare a ε un valore positivo (o comunque diverso da zero) corrisponde in qualche modo a prendere in considerazione la perturbazione dovuta all'azione mutua dei pianeti. La domanda è: *cosa accade se si fa crescere il valore di ε?*

Veniamo ora al caso $\varepsilon > 0$ (per valori negativi valgono le stesse considerazioni). Per farci un'idea globale dell'evoluzione del quadrato per un valore di ε fissato facciamo ricorso ancora all'immagine del gatto già utilizzata per illustrare il caos completo, così potremo confrontare i risultati con quelli del gatto di Arnold, in figura 7. Vediamo anzitutto cosa accade per $\varepsilon = 0.001$, una perturbazione che possiamo immaginare abbastanza piccola. In figura 12 sono rappresentate alcune iterazioni della mappa. La differenza evidente rispetto alla figura 7 è che nonostante il numero di iterazioni ben più elevato (qui si arriva fino a 512) non c'è il caos totale che si osservava in quel caso. A dire il vero, osservando le prime iterazioni $(1, 4, 16)$ sembra di vedere la stessa struttura a strisce delle prime iterazioni del gatto di Arnold. Ma ai passi successivi si verifica qualcosa di nuovo, e un po' sorprendente. Al passo 256 sembra che la figura del gatto si sia sdoppiata; al passo 512 la figura viene in buona parte ricostruita, sia pure deformata, salvo nella fascia orizzontale centrale dove si direbbe che qualche traccia di caos si stia manifestando. La differenza sostanziale rispetto alla mappa del gatto di Arnold è che qui, almeno nella maggior parte dei casi, il fenomeno della formazione di strisce è dovuto allo scivolamento delle fasce orizzontali, descritto per $\varepsilon = 0$ dalla figura 10, ma non si riconosce immediatamente il meccanismo di contrazione–espansione responsabile del comportamento imprevedibile e caotico. La piccolezza del valore di ε implica che la perturbazione abbia un effetto rilevante solo nella fascia centrale, dove lo scivolamento è molto lento e paragonabile al valore di ε, mentre diventa meno significativa nelle fasce alta e bassa, dove, almeno apparentemente, induce solo una deformazione più o meno consistente. ([8])

La figura 13 mostra cosa accade, per diversi valori di ε, dopo 512 iterazioni. Qui si ha la sensazione che al crescere della perturbazione, ossia di ε, la fascia centrale si allarghi fino a occupare gran parte della figura, ma resta difficile affermare tout court che si vede un comportamento caotico. In effetti rispetto al caso del gatto di Arnold non c'è una

([8]) Qui occorre qualche precisazione su come è tracciata la figura. Il quadrato di riferimento è $(-\pi, \pi) \times (-\pi, \pi)$. L'immagine del gatto è rappresentata mediante una matrice di 512×512 pixel. A ciascun pixel (che di fatto è un quadratino) viene associato il suo punto in basso a sinistra, le cui coordinate sono $(j\delta - \pi, k\delta - \pi)$ con $\delta = \pi/256$ e $0 \le j < 512\,,\ 0 \le k < 512$. Con una breve riflessione si comprende che per $\varepsilon = 0$ tutti i punti così scelti danno origine a un'orbita periodica, e tutti hanno in comune il periodo 512. Si potrebbe osservare (più che giustamente) che il calcolatore rappresenta queste coordinate con una certa approssimazione, dovuta all'arrotondamento. Tuttavia la lentezza della propagazione dell'errore fa sì che su 512 iterazioni questa risulti essere praticamente insensibile, e in effetti se si tracciasse la figura 12 ponendo $\varepsilon = 0$ al passo 512 si ritroverebbe la figura iniziale. La scelta del reticolo è dettata dal desiderio di mettere in evidenza i fenomeni dovuti alla periodicità, nascondendo deliberatamente il fatto che si possano osservare anche comportamenti ben più complessi. In effetti, partendo con reticoli diversi i risultati cambierebbero. Come regola generale, un reticolo $N \times N$ darebbe un periodo apparente N. Risultati ancora diversi si otterebbero associando a ogni pixel non il punto in basso a sinistra ma il punto al centro, o, ancor più subdolo, un punto a caso interno al quadratino.

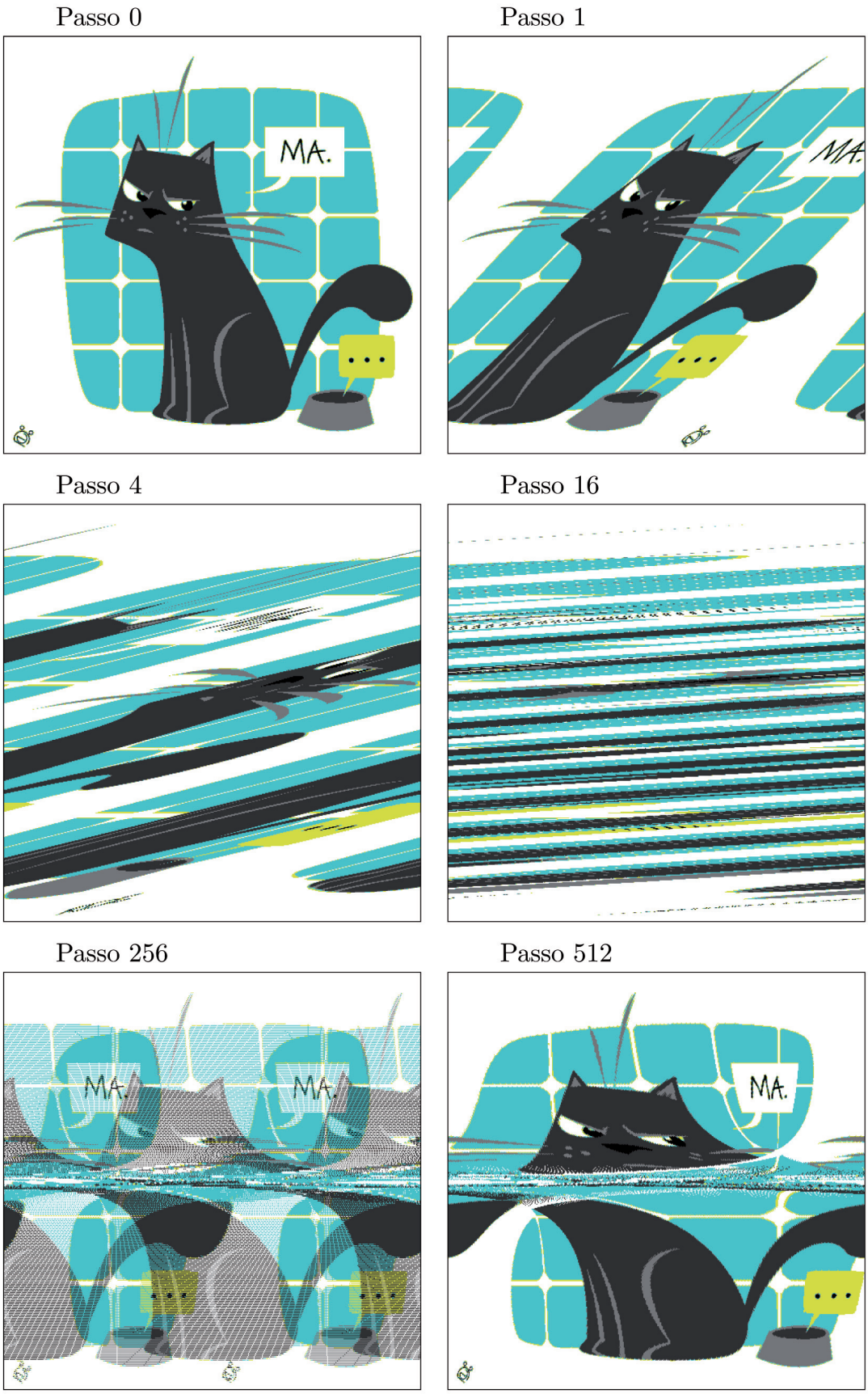

Fig. 12. – L'evoluzione globale della standard map per $\varepsilon = 0.001$, ottenuta applicando la mappa all'immagine del gatto già utilizzata in precedenza.

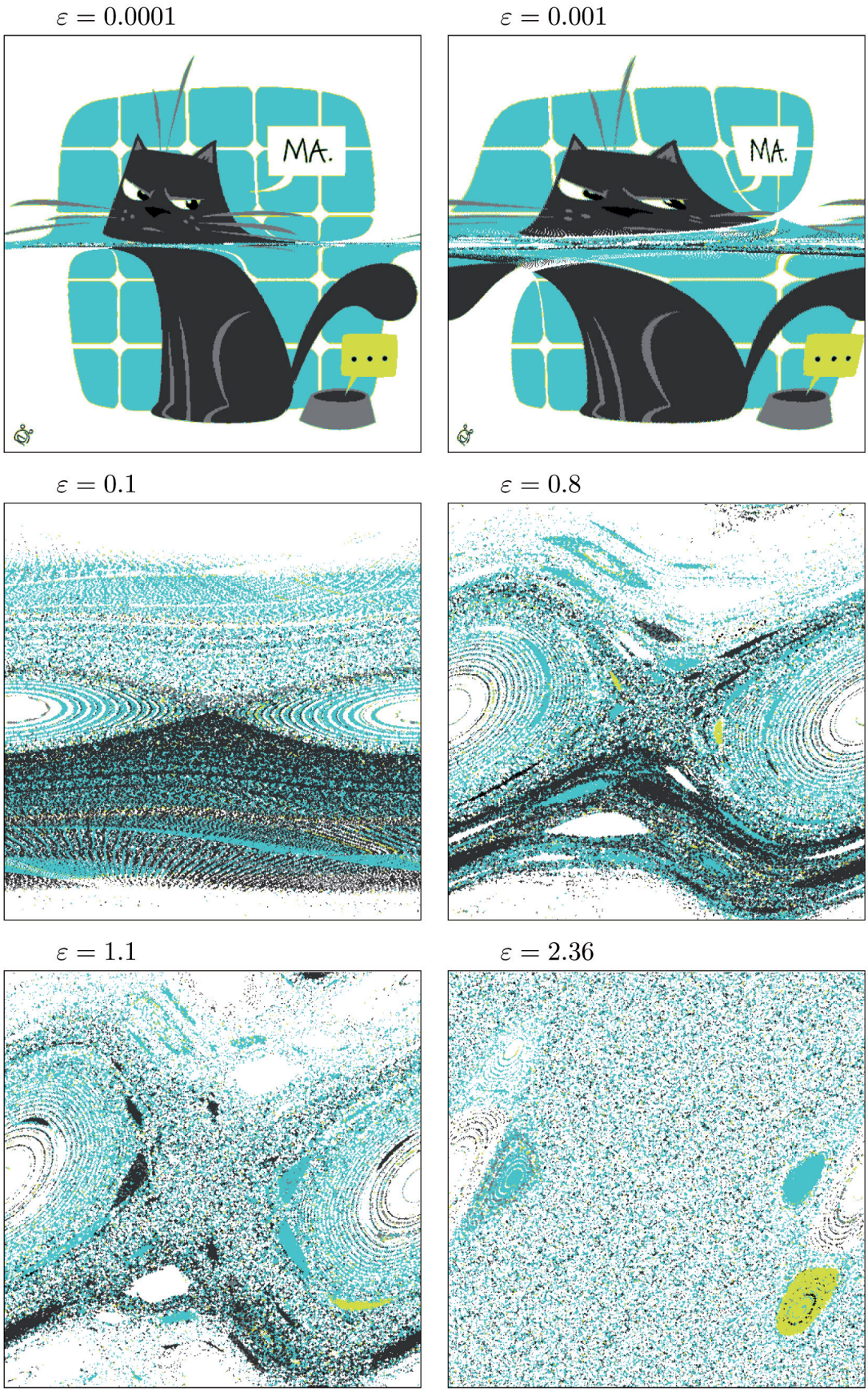

Fig. 13. – L'iterazione 512 della standard map per alcuni valori di ε.

distribuzione uniforme su tutto il quadrato, neppure per $\varepsilon = 2.36$ che è il valore più alto qui rappresentato. Al più si può pensare che per valori ancora più alti di ε si arrivi al caos totale, ma è meglio essere diffidenti.

4.2 – *Il fenomeno della risonanza*

Per comprendere meglio il comportamento della mappa diventa indispensabile seguire l'evoluzione delle singole orbite. A tal fine si ricorre al cosiddetto *diagramma di fase*: si sceglie un punto iniziale e si rappresenta la sua orbita, in pratica un numero più o meno grande di iterazioni. Si possono distinguere grosso modo due comportamenti diversi: i punti dell'orbita sembrano talvolta descrivere una curva regolare, altre volte riempiono una regione più o meno ampia in modo apparentemente disordinato e privo di regole. Nel primo caso parliamo di un comportamento ordinato; nel secondo di evoluzione caotica. Rappresentando le orbite generate da diversi punti si può avere un'idea complessiva di ciò che accade. La scelta dei punti iniziali è del tutto arbitraria, e spesso è dettata dal desiderio di mettere in evidenza certi fenomeni particolari oppure, più banalmente, da considerazioni estetiche – e dunque del tutto soggettive. La figura 14 rappresenta il diagramma di fase che si ottiene per alcuni valori di ε (gli stessi della figura 13). Per inciso, confrontare le figure 13 e 14 e cercare di interpretare i vari riquadri della prima alla luce della distribuzione di orbite nei riquadri corrispondenti della seconda è un esercizio non banale, ma utile e interessante; lo lascio al lettore.

In ciascun quadro, corrispondente a un valore assegnato di ε, sono riportate diverse orbite, che in molti casi appaiono come delle curve. Ad esempio, nel caso $\varepsilon = 0.001$ (il quadro in alto a sinistra) si vede che quasi tutto il quadrato è riempito da linee praticamente orizzontali, che alla luce della figura 10 è quanto ci aspetteremmo per $\varepsilon = 0$ (escludendo le orbite periodiche di periodo basso che sarebbero rappresentate da pochi punti allineati). La novità invece è rappresentata proprio dalla fascia centrale, dove si vedono due curve che si incrociano al centro, e degli archi a sinistra e a destra che se incollassimo due copie della figura in modo da sovrapporre il lato sinistro al destro si richiuderebbero formando delle curve grosso modo ellittiche. È il fenomeno della *risonanza.* Vorrei illustrarlo in maggior dettaglio, perché si tratta di una delle chiavi di lettura della dinamica.

Sull'asse centrale, che per $\varepsilon = 0$ conteneva solo punti fissi, sono rimasti fissi solo due punti: quello al centro, e i due estremi che in realtà dobbiamo pensare come lo stesso punto sulla ciambella; ci si rende conto della correttezza di questa affermazione esaminando la figura 11. Ma c'è una differenza che salta agli occhi: il punto al centro è l'incrocio di due curve; quello agli estremi è il centro di curve simili a ellissi (che si vedono bene dopo aver incollato i bordi sinistro e destro). In effetti, il punto al centro è instabile, nel senso che se si prende un punto vicino e lo si fa evolvere questo si allontana; il punto agli estremi invece è stabile, nel senso che se si fa evolvere un punto vicino questo gira attorno al punto fisso. Si può comprendere meglio questa affermazione pensando a una pallina sistemata sulla sommità di una superficie a forma di gobba, oppure nel fondo di una scodella. Nel primo caso è praticamente impossibile metterla in equilibrio, anche se in teoria tale possibilità esiste. Nel secondo caso è molto facile, perché comunque la pallina si mette a oscillare sul fondo, e dopo un po' si ferma per via dell'attrito (ma continuerebbe a oscillare indefinitamente se l'attrito non ci fosse).

Il fatto a cui dobbiamo prestare attenzione è proprio la rottura degli equilibri: per $\varepsilon = 0$ ce n'erano infiniti, ma non appena ε assume un valore diverso da zero vengono tutti distrutti a eccezione di una coppia, uno stabile e uno instabile. Possiamo ben dire che si tratta di una biforcazione o, nel suo piccolo, di una catastrofe: infiniti equilibri svaniscono nel nulla. La chiave di lettura di questo fenomeno prende il nome di *risonanza*, un termine che può apparire un po' misterioso in questo contesto, ma nasconde un fenomeno ben noto.

Cominciamo col punto stabile. Il caso più semplice di risonanza, che tutti ben conosciamo, è quello dell'altalena. Quando il nonno spinge il nipotino lo fa accortamente, nel senso che adatta la frequenza delle sue spinte a quella di oscillazione dell'altalena. Quando poi vuole fermarlo in modo non troppo brusco agisce allo stesso modo, ma spingendo l'altalena in senso contrario al suo movimento. I fisici dicono: per far crescere l'ampiezza delle oscillazioni

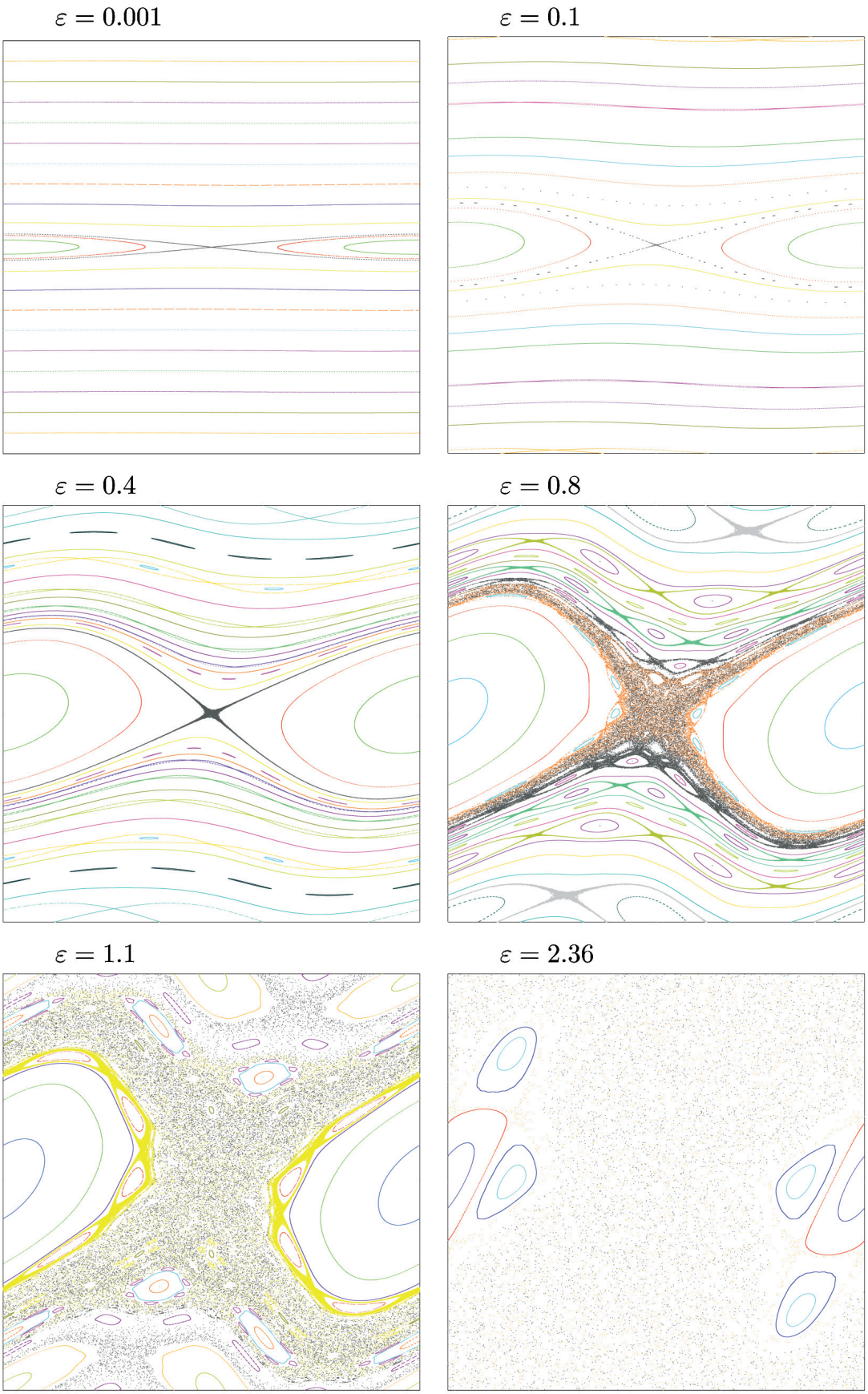

Fig. 14. – Il diagramma delle orbite della standard map per diversi valori di ε.

occorre spingere in *concordanza di fase*; per frenarla occorre spingere in *opposizione di fase*. La risonanza è dovuta all'eguaglianza delle frequenze dell'altalena e delle spinte; il fenomeno fisico rilevante è che si ha uno scambio di energia tra la forzante (nel nostro caso il nonno) e il sistema oscillante (il nipotino sull'altalena).

Il meccanismo generale è questo. Supponiamo di esercitare una spinta periodica su un sistema che ha una sua frequenza propria di oscillazione. Se le frequenze sono esattamente eguali allora si ha un trasferimento sistematico di energia; ad esempio, l'oscillazione aumenta gradualmente e indefinitamente la sua ampiezza. Se invece si ha una piccola differenza di frequenza, che può crearsi proprio a causa della variazione dell'ampiezza, allora la forzante e l'oscillatore si trovano alternativamente in fase e controfase, e l'ampiezza dell'oscillazione cresce e decresce a fasi alterne. Un fenomeno analogo sta all'origine dei battimenti in musica: se due corde di uno strumento musicale come il pianoforte o la chitarra sono accordate quasi all'unisono, ma non esattamente, la piccola differenza tra le frequenze si traduce in un suono di intensità pulsante, perché tra le onde sonore eccitate dalle due corde si alternano gli effetti di rafforzamento e indebolimento dovuti proprio alla concordanza o discordanza delle fasi.

Nel nostro modello accade sostanzialmente la stessa cosa. Le quantità da confrontare sono lo spostamento dovuto allo scivolamento orizzontale e quello dovuto alla deformazione; il primo non dipende da ε, il secondo sì. Se lo spostamento è molto piccolo allora si ha la risonanza, perché la deformazione agisce molte volte nella stessa direzione, esattamente come il nonno spinge più volte l'altalena. Per comprenderlo meglio conviene pensare alla coordinata orizzontale come alla posizione di una pallina appoggiata su una guida perfettamente orizzontale e a quella verticale come alla sua velocità. La deformazione controllata da ε fa da forzante, nel senso che a ogni iterazione modifica di poco la velocità. Vediamolo in dettaglio aiutandoci con la figura 15. Se un punto viene spostato di pochissimo verso l'alto significa che la sua velocità è aumentata; se viene spostato verso il basso la sua velocità viene diminuita. Qui conviene proprio immaginare di incollare i bordi destro e sinistro del quadrato, in modo che il punto fisso resti nel mezzo; la figura 15 è

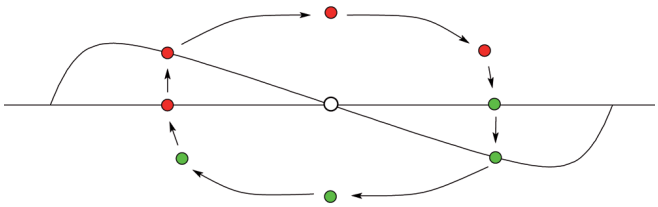

Fig. 15. – La dinamica in prossimità di un punto fisso stabile: i punti vicini gli girano attorno.

tracciata così. Se si prende un punto sull'asse, a sinistra del punto fisso questo viene spostato di poco verso l'alto, e comincia a muoversi verso destra perché ha acquistato una sia pur piccola velocità positiva; quando passa a destra rispetto al punto fisso la deformazione lo spinge verso il basso, e quindi rallenta fino a cambiare direzione quando passa sotto l'asse. Da qui si muove verso sinistra fin che la deformazione lo spinge di nuovo verso l'alto e lo riporta al di sopra dell'asse, e così via. Questo è il movimento oscillatorio, che combinando posizione e velocità si traduce in una curva chiusa su cui i punti successivi girano.

Il punto instabile è, almeno all'apparenza, più semplice: è come se si cercasse di mettere l'altalena (con due sbarrette rigide al posto delle corde) in equilibrio nel punto superiore e si pretendesse di farla oscillare intorno all'equilibrio con una piccola spinta: ciascuno comprende immediatamente che ciò è impossibile – nessun nonno si sognerebbe di provarci col nipotino. Nel grafico della figura 14 che stiamo esaminando questo è rappresentato dalle due curve che si incrociano: se un punto è vicino al punto instabile se ne va seguendo una di queste curve. Vorrei richiamare l'attenzione sul fatto che le curve che si incrociano sembrano delimitare la regione controllata dalla risonanza; per questo motivo vengono chiamate di solito *separatrici*, ma dirò tra breve che in questo caso si tratta di un termine impreciso.

Al di fuori della piccola striscia controllata dalla risonanza ci sono solo segmenti praticamente orizzontali: come dire che il movimento del punto è troppo veloce perché la piccola deformazione possa avere un effetto rilevante. A dire il vero i segmenti risultano un pochino deformati, ma troppo poco perché lo si possa vedere sulla scala della figura. La deformazione risulta evidente nel quadro in alto a

destra della figura 14, con $\varepsilon = 0.1$, dove la striscia controllata dalla risonanza è diventata più ampia e ben visibile.

Se torniamo a osservare la figura 14 e ci soffermiamo sul riquadro che corrisponde a $\varepsilon = 0.4$ vediamo che anche l'asse superiore e quello inferiore, se si immagina di incollare i bordi, presentano un fenomeno simile a quello che ho appena descritto. Solo che stavolta i punti stabili sono due, così come quelli instabili. Qualcosa di simile accade a circa 2/3 della distanza tra l'asse centrale e i bordi superiore e inferiore, ma stavolta le coppie di punti sono 3. Il fenomeno diventa ancor più evidente nelle figure successive, anzi, sembra che ci sia una proliferazione di risonanze. Inoltre si vede che le separatrici della risonanza centrale sono diventate delle macchie sempre più estese al crescere del parametro ε. Tuttavia continuano a sopravvivere delle curve chiuse che possiamo associare a movimenti di tipo oscillatorio. Questo è stato descritto da Michel Hénon con un'immagine suggestiva, dicendo che vi sono isole di moto ordinato (i moti rappresentati dalle curve chiuse) all'interno di un mare caotico [7].

Se prestiamo un momento di attenzione al riquadro in basso a destra, corrispondente a $\varepsilon = 2.36$, vediamo che si sono formate delle isole anche intorno

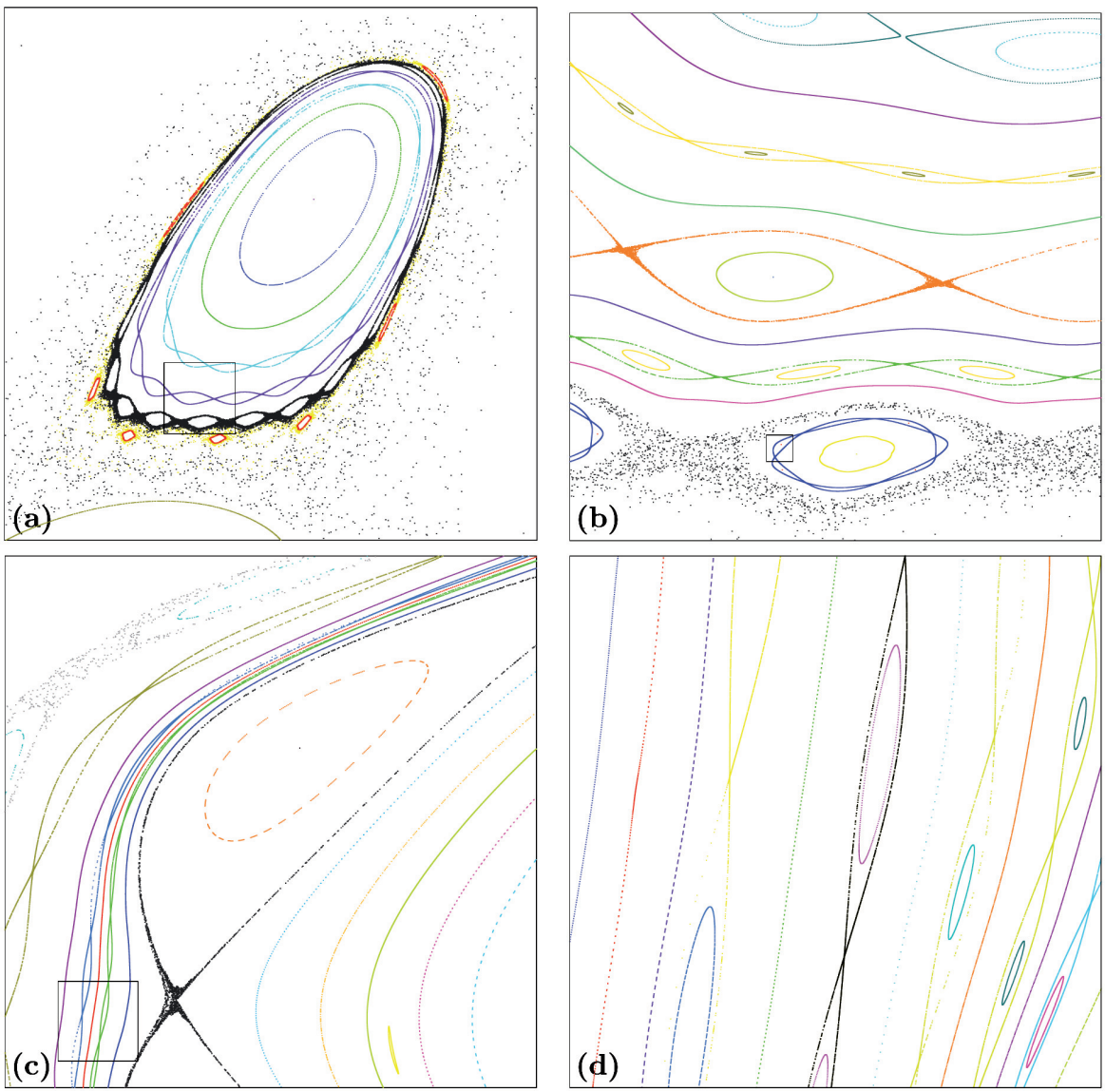

Fig. 16. – Ingrandimenti successivi delle orbite della standard map per $\varepsilon = 2.36$. Si vede come la formazione di isole intorno a orbite periodiche stabili e di separatrici che emanano da orbite periodiche instabili si ripeta su scala sempre più piccola.

alle orbite risonanti che circondano i punti fissi sull'asse centrale, le uniche che sembrano essere sopravvissute. È, ancora una volta, un fenomeno di risonanza, che però questa volta si genera a partire da una delle curve chiuse. Con un po' di attenzione si vede che questo fenomeno era già presente per $\varepsilon = 0.8$ ed $\varepsilon = 1.1$. Anzi, quello che si vede dalla figura 14 è ben poco. In figura 16 ci sono degli ingrandimenti successivi di una piccola regione del riquadro in basso a destra della figura 14, quello corrispondente a $\varepsilon = 2.36$. Si vede bene che la proliferazione delle orbite periodiche stabili e instabili con corredo di separatrici avviene anche su scale sempre più piccole. La matematica ci dice che avviene su qualunque scala, e per qualunque valore non nullo di ε. Se nelle figure precedenti non le vediamo è solo perché la regione occupata dalle risonanze è estremamente piccola, del tutto invisibile anche ingrandendo a dismisura la figura.

Vorrei provare a spiegare cosa succede, cominciando a illustrare il fenomeno della proliferazione delle risonanze. Il fatto è che si ha risonanza non solo quando due frequenze sono esattamente eguali, ma *tutte le volte che il loro rapporto è un numero razionale,* ad esempio $1/2$, $2/3$, $3/5$ o qualunque altra frazione. In altre parole, gli assi orizzontali che per $\varepsilon = 0$ sono formati da orbite periodiche, con un numero finito di punti, subiscono la stessa sorte dell'asse centrale: tutte le orbite periodiche vengono distrutte a eccezione di due, una stabile e una instabile. Intorno a quella stabile si formano delle curve chiuse; da quella instabile si dipartono delle separatrici.

Comprendere l'esistenza di questi fenomeni nel caso della risonanza $1/2$ è qualcosa che possiamo fare se pensiamo ancora all'altalena. Basta che il nipotino cresca un po', e un bel giorno si accorge che può andare in altalena anche senza farsi spingere dal nonno: si spinge da solo alzando e abbassando periodicamente le gambe (e magari agitandosi un po' in modo sincrono col movimento delle gambe). Ma se torniamo col ricordo a quando avevamo l'età del nipotino, e sull'altalena c'eravamo noi, ci rendiamo conto che la frequenza del movimento delle gambe era doppia rispetto a quella dell'altalena: è la risonanza $1/2$.

Che il fenomeno della risonanza sia un fatto generale, si può intuire nel modo seguente. Consideriamo per esempio il caso $1/2$. Se invece di guardare tutte le iterazioni della mappa guardiamo solo quelle pari, allora l'asse dei punti di periodo 2 diventa un asse di punti fissi. Ci si riconduce così al caso che abbiamo visto in dettaglio: la perturbazione lascia sopravvivere solo alcune coppie di punti fissi. Possiamo fare lo stesso per tutti gli assi che portano orbite periodiche. Questo argomento può risultare un po' ostico per i non addetti ai lavori, ma non dimentichiamo che la scoperta del ruolo delle risonanze ha richiesto tempo e fatica, impegnando i migliori matematici. Ad esempio, che risonanze di questo genere abbiano un ruolo centrale nella dinamica planetaria è un fatto scoperto nel corso del XVIII secolo da Lagrange e Laplace. Che poi esista il fenomeno delle separatrici, con tutte le conseguenze che descriverò tra poco, è scoperta che dobbiamo a Poincaré, alla fine del XIX secolo, ed è diventato conoscenza comune solo negli ultimi decenni del secolo XX. Il lettore che trovasse un po' difficile comprendere queste pagine avrebbe di che consolarsi.

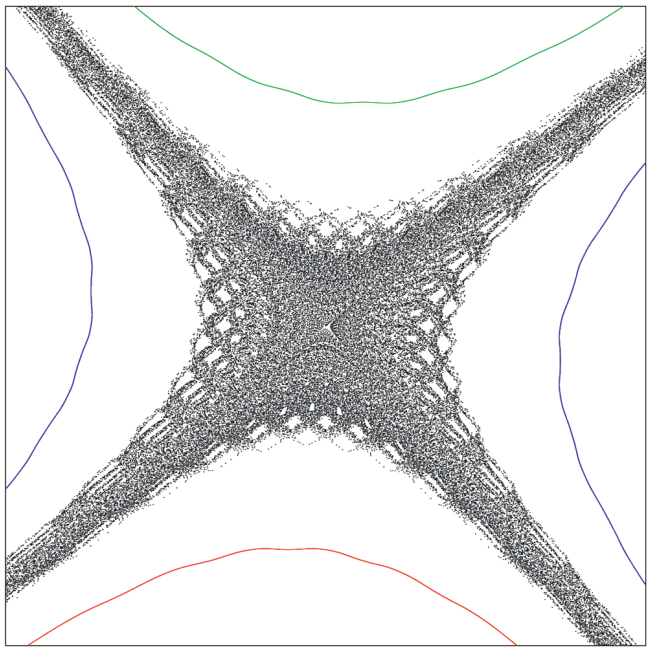

Fig. 17. – Ingrandimento di un rettangolino di lati 3×10^{-4} e 10^{-4} intorno al centro del quadrato, per $\varepsilon = 0.1$. Il rapporto $3/1$ tra i lati orizzontale e verticale compensa lo schiacciamento della fascia risonante nel riquadro corrispondente della figura 14. Quella che sembrava una curva (la separatrice) ha formato anche qui una macchia, mentre le curve lontane dalla separatrice sono ancora ben visibili.

Quello che posso aggiungere è che talvolta le risonanze possono avere anche effetti realmente catastrofici. Il trasferimento di energia dovuto all'accumulo di spinte anche molto piccole può indurre oscillazioni di ampiezza crescente fino a provocare la rottura di strutture oscillanti. Uno degli episodi più drammatici che si ricordino è il crollo del ponte sospeso di Tacoma, nello stato di Washington. Il ponte, con una campata di 1.9 km, fu aperto al traffico il 1 luglio 1940, e divenne rapidamente noto per il suo movimento ondulatorio dovuto alle raffiche di vento. Il 7 novembre dello stesso anno, una giornata di vento particolarmente forte (circa 70 Km/ora), il movimento ondulatorio divenne particolarmente marcato e indusse un'oscillazione di tipo torsionale. La risonanza con le frequenze naturali del ponte incrementò l'ampiezza delle oscillazioni, fino a superare il limite di rottura della campata.

4.3 – *Le separatrici e il caos*

Vorrei ora tentare l'ultimo passo, il più difficile: cercare di illustrare il fenomeno del caos scoperto da Poincaré, proprio quello descritto nel brano quasi incomprensibile che ho citato all'inizio. È impresa ardua, ma ci proverò.

Si tratta di spiegare quella macchia che nella figura 14 si intravede per $\varepsilon = 0.4$, e poi diventa sempre più evidente e invasiva nei quadri successivi. A dire il vero, la macchia c'è in *tutte* le figure: quella che noi vediamo come una curva che fa da separatrice è in realtà una regione molto stretta, sicché la scala di osservazione non ci consente di vedere la macchia. Ciò si vede con chiarezza nella figura 17: è l'ingrandimento di un rettangolino molto piccolo posto al centro del quadrato, con $\varepsilon = 0.1$. Lo stesso fenomeno si potrebbe osservare anche per valori di ε più piccoli, ma riducendo considerevolmente le dimensioni del quadratino. Ma concentriamoci sugli ultimi due quadri, per $\varepsilon = 1.1$ e $\varepsilon = 2.36$. Qui la coesistenza di ordine e caos è ben evidente: le isole formate da curve chiuse sono movimenti ordinati; tutto il resto sembra davvero caotico.

Ciò che accade è illustrato in figura 18, che deve leggersi in corrispondenza alla figura 8 che descrive la dinamica del gatto di Arnold. Rappresenta l'evoluzione di qualche decina di migliaia di punti iniziali concentrati in un quadratino molto piccolo che ha per centro il punto fisso instabile. Quello che si osserva è che dopo 4 iterazioni i punti si sono distribuiti su un segmento, in modo simile a quanto avveniva per il gatto di Arnold. Con le iterazioni successive il segmento diventa una curva sempre più allungata che si piega in modo da avvicinarsi sempre di più al segmento iniziale, ma schiacciandosi. Il fatto è che la curva non può andare a intersecare se stessa, perché la mappa è biunivoca, ma deve allungarsi sempre di più. Si vede dunque che si presenta lo stesso meccanismo che abbiamo visto all'opera nella figura 8: i punti del quadratino si distribuiscono su una curva sempre più allungata, che in quel caso invade tutto il quadrato, mentre in questo caso si ripiega e tende a invadere tutta la regione lasciata libera dalle isole di moto ordinato.

Lo stesso fenomeno accade se si fa evolvere la mappa all'indietro, come se si cambiasse il verso del tempo: i punti del quadratino si distribuiscono su una curva diversa, ma che ha ancora le caratteristiche di espansione–ripiegamento di quella che abbiamo visto nella figura 18; il risultato per le iterazioni 10 e 12 è rappresentato in figura 19. I matematici chiamano la curva della figura 18 *varietà instabile*, perchè i punti di questa curva tendono inizialmente ad allontanarsi dal punto fisso, e quella della figura 19 *varietà stabile*, perché i punti tendono ad avvicinarsi al punto fisso. Per inciso, l'esistenza delle varietà stabile e instabile non è un fatto banale: è proprio una delle scoperte cruciali che dobbiamo a Poincaré; lui le chiamava *orbite asintotiche*.

Osservando la figura è immediato rendersi conto che la varietà stabile e quella instabile devono necessariamente intersecarsi. Poincaré ha capito che *basta che una varietà stabile ne intersechi trasversalmente una instabile perché si possa concludere che di intersezioni ne esistono infinite.* La figura formata da queste due curve sovrapposte e dalle loro infinite intersezioni è proprio quella a cui egli si riferisce nel brano che ho citato all'inizio. Poincaré non provava nemmeno a tracciarla. Rispetto a Poincaré ho aggiunto l'uso del calcolatore e una buona dose di presunzione, quanto basta per rappresentare almeno un

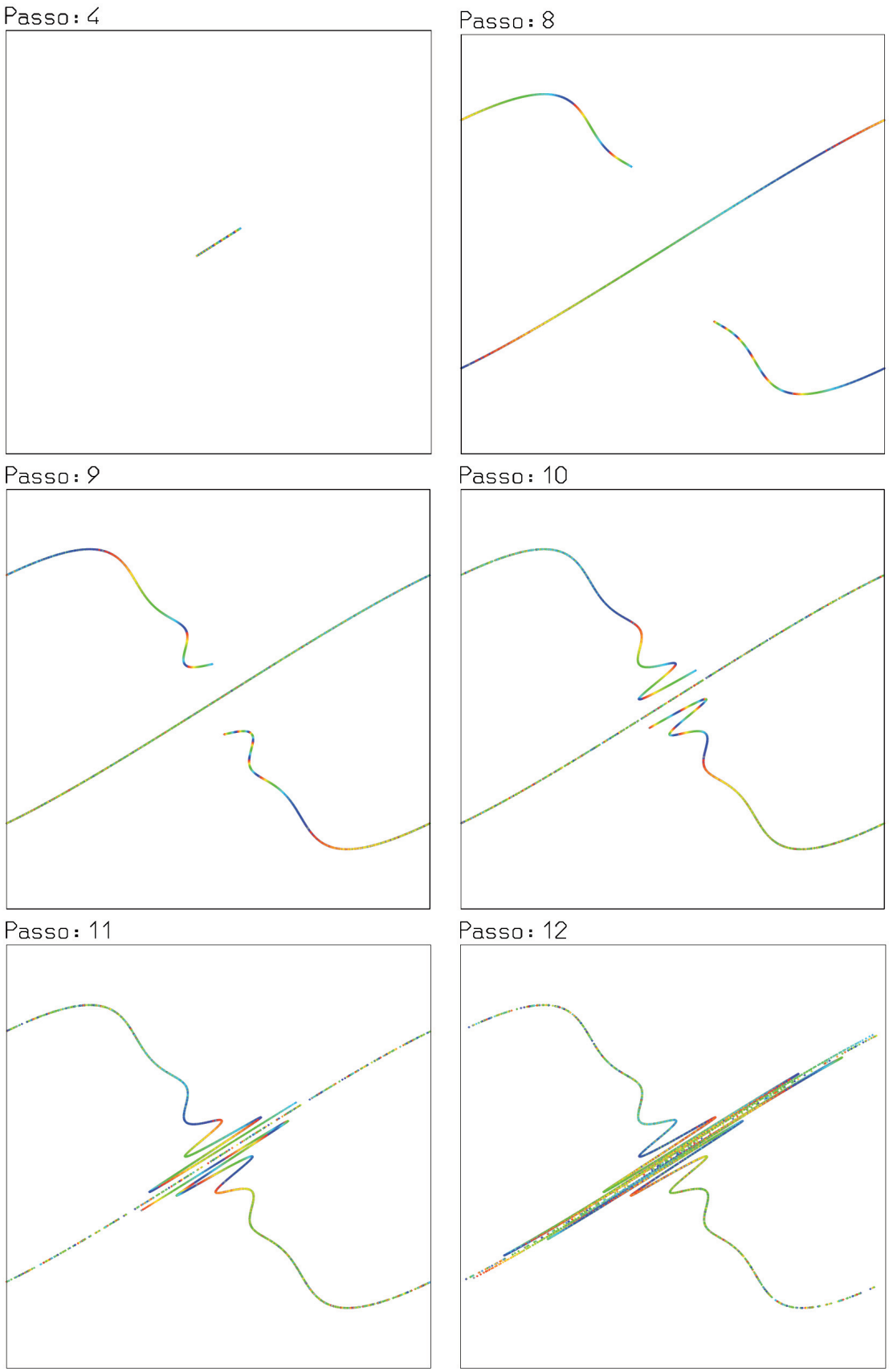

Fig. 18. – L'evoluzione di 32 385 punti inizialmente contenuti in un piccolo quadratino attorno al punto fisso instabile al centro. Il parametro di perturbazione è $\varepsilon = 1.1$.

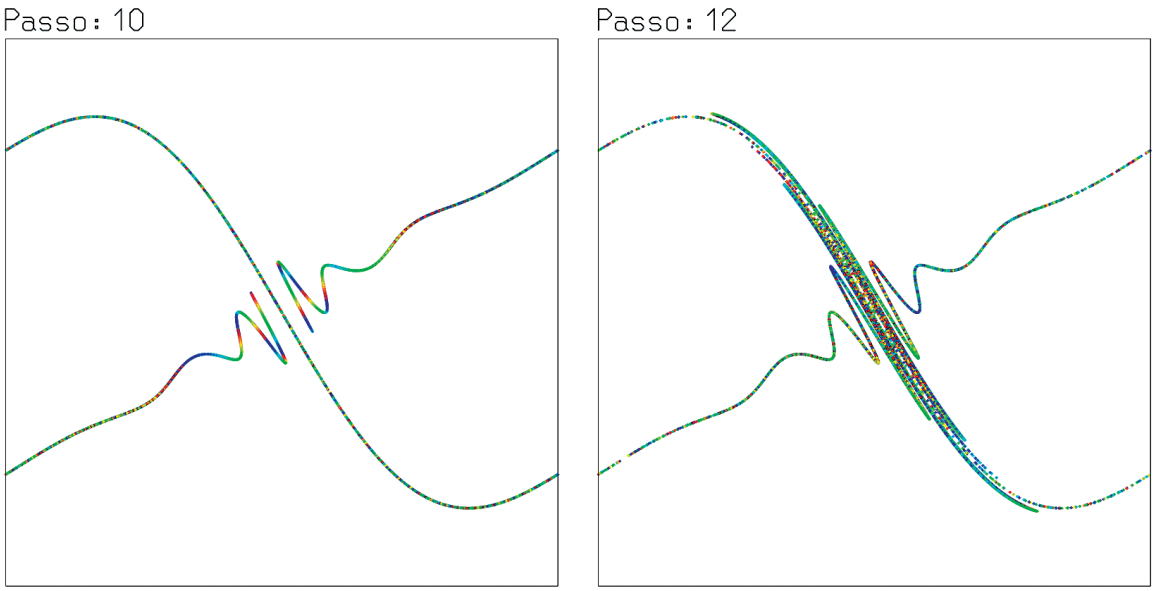

Fig. 19. – L'evoluzione all'indietro del quadratino della figura 18.

pezzo di quelle curve: ho riportato il risultato in figura 20.

5. – Cosa puo accadere al nostro mondo?

Torniamo al sistema planetario, e ricordiamo che Giove è il pianeta che ha la massa maggiore. Supponiamo che esso continui a muoversi sulla sua orbita, ellittica o circolare che sia, con un periodo ben preciso. Nel frattempo anche la Terra si muove sulla sua orbita, sotto l'azione del Sole, con un suo periodo diverso da quello di Giove. Consideriamo ora quello che vediamo dalla Terra: noi osserviamo Giove talvolta in opposizione rispetto al Sole (ben alto nel cielo verso mezzanotte) talvolta in congiunzione (nel senso che non lo vediamo affatto, perché sta passando dietro al Sole). Dunque la distanza della Terra da Giove cambia periodicamente, e così la forza che Giove esercita sulla Terra: è una forzante periodica. Lo stesso accade per gli altri pianeti e per gli asteroidi. Si ha *risonanza in moto medio* quando il rapporto tra il periodo di un pianeta o di un asteroide e quello di Giove è un numero razionale. Possiamo ben immaginare che ci sia una forte somiglianza con l'altalena spinta dal nonno, e in questo senso ci possiamo aspettare che la perturbazione produca tutti i fenomeni che abbiamo osservato per la standard map. Naturalmente, quello che ho detto per Giove vale per tutti gli altri pianeti, satelliti, asteroidi e quant'altro: se Giove conta più di tutti è solo perché è il pianeta di massa maggiore, ma se accettiamo la gravitazione dobbiamo ammettere che anche il moto di Giove intorno al Sole è perturbato dall'azione periodica degli altri corpi.

Ora, se ci aspettiamo che il moto di ciascun pianeta, a causa delle perturbazioni, faccia qualcosa di simile a quello che vediamo nella standard map, dobbiamo concludere che anche le orbite dei pianeti possono essere in qualche senso caotiche, il che sembra in stridente contrasto con la regolarità dei moti planetari e con le leggi di Keplero che abbiamo studiato. Come se ne esce? Il fatto è che dobbiamo domandarci anche *su che scala* sia spaziale che temporale si manifesti il caos.

La scala spaziale è quella che vediamo nei vari riquadri della figura 14: al variare di ε, e al variare delle condizioni di risonanza, possiamo passare da una situazione in cui il caos è praticamente invisibile a una in cui è predominante. Il fatto che i moti planetari presentino una regolarità stupefacente può ben essere interpretato come conseguenza della piccolezza della perturbazione: il rapporto tra la massa di Giove e quella del Sole è circa 1/1000, e quindi l'azione del Sole è nettamente preponderante.

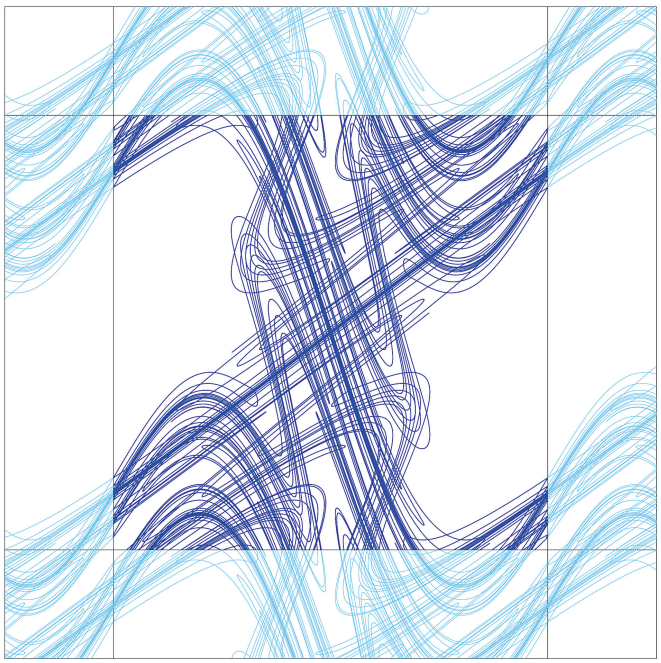

Fig. 20. – Le intersezioni tra la varietà stabile e la varietà instabile del punto fisso della standard map. Il valore del parametro qui è $\varepsilon = 2.36$, più alto rispetto alle figure precedenti. In tal modo i vari archi di curva si separano abbastanza da essere distinguibili sulla scala della figura. Inoltre, al fine di facilitare la comprensione, ho ampliato la regione rappresentata, non limitandomi al quadrato di lato 2π che rappresenta il toro. Quest'ultimo è il quadrato delimitato dalle rette orizzontali e verticali tracciate in figura.

La scala temporale è qualcosa di ben più delicato. Come ho avuto modo di dire, il movimento in prossimità delle separatrici è sempre di tipo caotico, e se noi non ce ne accorgiamo è solo perché avviene su una scala molto piccola, invisibile nelle figure. L'effetto è che l'orbita resta ben localizzata, ma se la osserviamo per un tempo sufficientemente lungo ci accorgiamo che il periodo non resta esattamente costante: subisce delle piccole variazioni praticamente imprevedibili. Inoltre (ma questo è più difficile vederlo nella figura) non possiamo escludere che l'orbita possa saltare da una risonanza a un'altra molto vicina, e poi a un'altra ancora, sicché dopo un tempo molto lungo si finisce lontano dall'orbita di partenza. Ma vedere queste variazioni nel Sistema Solare non è semplice: occorrono molti milioni di anni, mentre le osservazioni dei pianeti che abbiamo a disposizione coprono un intervallo di poche migliaia di anni. Come possiamo "vederle"?

Lo strumento che ci permette di studiare i moti planetari su un arco di tempo di milioni o miliardi di anni è, ancora una volta, il calcolatore. Se assumiamo che la dinamica sia ben descritta dal modello di Newton, con le piccole correzioni della Relatività, possiamo calcolare il movimento dei pianeti per tempi molto lunghi, centinaia di milioni o miliardi di anni. Questo è stato fatto, a partire dalla fine degli anni '80 del secolo XX, da alcuni ricercatori tra cui Andrea Milani, Mario Carpino, Anna Nobili, Jacques Laskar e Jack Wisdom. Le loro conclusioni si possono riassumere così: i quattro pianeti maggiori (Giove, Saturno, Urano e Nettuno) sembrano muoversi in modo del tutto regolare anche su un arco di tempo di qualche miliardo di anni, che è l'età stimata del Sistema Solare. I pianeti interni (Mercurio, Venere, Terra e Marte) presentano invece delle piccole variazioni casuali delle orbite, in particolare dell'eccentricità, che non sono interpretabili come movimenti periodici: dobbiamo ammettere che c'è una componente caotica. Non che le orbite cambino di molto, almeno su tempi non troppo lunghi. Ma ci possono essere, ad esempio, piccole variazioni dell'eccentricità dell'orbita della Terra che hanno effetti molto rilevanti sul clima: le glaciazioni sembrano essere correlate proprio a queste variazioni.

Ancor più complessa è la situazione per gli asteroidi (che conosciamo da circa due secoli), e per gli oggetti transnettuniani (che sono scoperta abbastanza recente). Qui l'azione delle risonanze e del caos che queste possono generare ha avuto tutto il tempo di dispiegarsi, e ne vediamo gli effetti nella disuniformità della distribuzione attuale di questi corpi. Ma questo è un argomento troppo vasto perché possa rientrare in una breve esposizione.

Vorrei anche citare due studi recenti, che mostrano come nel passato e nel futuro del nostro Sistema Solare si possano anche verificare eventi catastrofici.

Il primo studio è dovuto ad Alessandro Morbidelli e alcuni suoi collaboratori [13]. L'ipotesi è che nelle prime fasi dell'evoluzione del Sistema Solare si siano formate quattro grosse masse, per qualche ragione che non sappiamo identificare se non pensando a un evento casuale; sono i quattro pianeti maggiori attuali. La dinamica allora porta alla formazione di un disco di piccoli corpi che orbitano all'esterno rispetto alle

quattro masse. Una simulazione dell'evoluzione di un tal sistema mostra che le orbite dei quattro pianeti sembrano essere soggette a piccole variazioni per diverse centinaia di milioni di anni, sicché sembrerebbe di poter concludere che si è raggiunta una configurazione stabile. Ma improvvisamente si verifica un piccolo cambiamento delle orbite dei pianeti interni che destabilizza il disco, e per qualche milione di anni l'evoluzione diventa sensibilmente caotica, con espulsione di materia dal disco, cattura di piccoli corpi all'interno delle orbite dei pianeti maggiori (gli asteroidi), aggregazione di masse che formano corpi di dimensioni paragonabili a quelle dei pianeti interni attuali, migrazione dei pianeti maggiori e bombardamento intenso degli oggetti che si trovano all'interno. Tracce di eventi di questo genere si riscontrano su molti satelliti.

Il secondo studio è dovuto a Laskar [10]. Simulando l'evoluzione del Sistema Solare che si ottiene cambiando di poco le orbite (spostando ad esempio Mercurio di poche decine di metri) si vede che tra le molte evoluzioni possibili c'è anche quella che porta i pianeti interni su orbite che si intersecano, e non si può escludere una collisione, ad esempio, tra Venere e Mercurio, Venere e la Terra o Marte e la Terra. Eventi di questo tipo richiedono comunque più di tre miliardi di anni, e quindi non riguardano la nostra breve esistenza. Ma non possiamo né escluderli né darli per certi.

I calcoli che ho descritto brevemente sostituiscono, per così dire, i telescopi: ci permettono di simulare il comportamento passato o futuro dei pianeti del nostro Sistema Solare, aggiungendo eventualmente i satelliti e almeno i più grandi tra gli asteroidi che conosciamo. Più difficile è rispondere a un'ultima domanda: *se prendessimo un sistema generico, ad esempio uno dei sistemi extrasolari che andiamo scoprendo a ritmo serrato da circa vent'anni, cosa potremmo dire?* La stessa domanda si pone in altri campi, ad esempio la dinamica dei protoni all'interno di un acceleratore o dei nuclei all'interno di un plasma, o comunque tutte le volte che consideriamo il modello matematico di un fenomeno fisico che si presenta come piccola perturbazione di un sistema ordinato. Qui ci viene in aiuto la teoria, almeno come spunto iniziale. In termini rozzi, i risultati sviluppati negli ultimi 50 anni ci dicono che il tempo necessario perché il comportamento del sistema reale si discosti in modo significativo da quello della sua approssimazione integrabile cresce molto rapidamente, ad esempio esponenzialmente, con l'inverso $1/\varepsilon$ della perturbazione. Nel caso del Sistema Solare si potrebbe dire così: il tempo necessario perché si verifichi una modifica consistente delle orbite rispetto a quelle attuali potrebbe essere così lungo da superare l'età dell'universo – l'età che noi stimiamo, a dire il vero. Viene subito in mente il brano di Newton che ho riportato all'inizio; ciò che aggiungiamo rispetto a lui è che le "molte epoche" di cui parla potrebbero essere estremamente lunghe. Il condizionale è d'obbligo: applicare queste teorie al mondo reale – pianeti, acceleratori di particelle o quant'altro – in modo da ottenere risultati realistici è faccenda tutt'altro che semplice. Allo stato attuale sappiamo trattare solo modelli semplificati – il sistema del Sole coi due pianeti maggiori, o qualche asteroide [5]. Il resto è ancora un sogno, ... ma ci stiamo lavorando.

Addentrarci in questi argomenti ci porterebbe lontano, e mi fermo qui; il lettore interessato a un'esposizione più completa, ma anche più tecnica, la potrà trovare in [6]. Ma vorrei trarre almeno una conclusione. Alla luce di quello che ho descritto, e che è il frutto delle ricerche di matematici, astronomi e fisici in prima linea, ma senza dimenticare la chimica, la biologia, l'economia &c, si vede come i concetti di "ordine completo" e di "caos totale" siano solo idealizzazioni dovute ai limiti della nostra immaginazione. Il nostro mondo in realtà è una sapiente combinazione di ordine e caos, con prevalenza macroscopica dell'uno o dell'altro nei diversi casi. Il fatto stupefacente è che ordine e caos si trovino al posto e nella misura giusta per lasciare spazio all'evoluzione biologica che ha portato fino a noi.

Bibliografia

[1] V. I. Arnold, A. Avez.: *Ergodic problems of classical mechanics*, W.A. Benjamin, Inc, New York (1968).

[2] G. Contopoulos: *Order and Chaos in Dynamical Astronomy*, Springer (2002).

[3] R. L. Devaney: *An introduction to chaotic dynamical systems*, Addison-Wesley (1989).

[4] M.J. Feigenbaum: *Quantitative universality for a class of nonlinear transformations*, J, Stat. Phys. **46**, 919-924 (1978).
[5] A. Giorgilli, U. Locatelli, M. Sansottera: *Su un'estensione della teoria di Lagrange per i moti secolari*, Rendiconti dell'Istituto Lombardo Accademia di Scienze e Lettere, Classe di Scienze Matematiche e Naturali, **143**, 223-239 (2010).
[6] A. Giorgilli: *Il flebile sussurro del caos nell'armonia dei pianeti*, pubblicato in: Atti del Symposium *Meccanica teorica e applicata*, a cura di: C. Cinquini, A. Robbiati Bianchi e G. Sacchi Landriani. Istituto Lombardo Accademia di Scienze e Lettere, (2018)
http://www.ilasl.org/index.php/Incontri/issue/view/48
[7] M. Hénon, C. Heiles: *The applicability of the third integral of motion: some numerical experiments*, Astron. J. **69**, 73-79 (1964).
[8] M.W. Hirsch, S. Smale and R. Devaney: *Differential equations, dynamical systems and an introduction to chaos*, Elsevier Academic Press (2004).
[9] R.A. Holmgren: *A first course in discrete dynamical systems*, Springer (1996).
[10] J. Laskar: *Is the Solar System Stable?* in: B. Duplantier, S. Nonnenmacher, V. Rivasseau (eds): Chaos, Progress in Mathematical Physics, vol **66** Birkhuser, Basel (2013).
[11] A.J. Lichtenberg, M.A. Lieberman: *Regular and Chaotic Dynamics*. Springer, Berlin (1992).
[12] A. Morbidelli: *Modern Celestial Mechanics*, Taylor & Francis, London (2002).
[13] A. Morbidelli: *Dynamical Evolution of Planetary Systems*, in: T.D. Oswalt, M. Linda, P. Kalas, *Planets, Stars and Stellar Systems*, Springer Science+Business Media Dordrecht, p. 63 (2013).
[14] H. Peitgen, H. Jürgens e D. Saupe: *Chaos and fractals. New frontiers in science*, Springer (1992).

Antonio Giorgilli

Antonio Giorgilli è nato a Villasanta (MB) nel 1949 e si è laureato in Fisica presso l'Università degli Studi di Milano nel 1974. È Professore Ordinario di Fisica Matematica presso lo stesso Ateneo. Ha svolto la sua attività di ricerca nel campo dei Sistemi Dinamici e della Meccanica Analitica, con particolare attenzione alla teoria KAM e alla teoria di Nekhoroshev per la stabilità su tempi lunghi applicate alla dinamica di sistemi non lineari e alla Meccanica Celeste. Nel 1998 è stato relatore su invito al congresso ICM a Berlino per il settore della Fisica Matematica. Nel 2007 gli è stato conferito il premio Gili-Agostinelli dell'Accademia delle Scienze di Torino. All'asteroide 27855 è stato assegnato il nome Giorgilli nel 2009.