Matematica, Cultura e Società

Rivista dell'Unione Matematica Italiana

Umberto Massari

Ricordo di Mario Miranda

Matematica, Cultura e Società. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **4** (2019), n.1, p. 35–52.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=RUMI_2019_1_4_1_35_0>

Matematica, Cultura e Società. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2019.

Matematica, Cultura e Società – Rivista dell'Unione Matematica Italiana
Serie I, Vol. 4, N. 1, Aprile 2019, 35-52

Ricordo di Mario Miranda

Umberto Massari
Università di Ferrara - E-mail: mssmrt@unife.it

Il 6 gennaio 2017, dopo una lunga e debilitante malattia, è venuto a mancare il Professor Mario Miranda.

Il Professor Mario Miranda è nato a Filettino, in provincia di Frosinone, il primo gennaio del 1937. In realtà, la data precisa della sua nascita è il 30 dicembre 1936, ma fu denunciata solo all'inizio del 1937 per motivi legati al servizio militare.

Nel novembre del 1955 entrò alla Scuola Normale Superiore, intenzionato a studiare fisica all'Università degli Studi di Pisa, ma al terzo anno modificò il suo piano di studi affascinato dall'Analisi Matematica insegnata dal Professor Alessandro Faedo e passò a Matematica.

Fondamentale per la sua formazione scientifica fu l'incontro col Professor Ennio De Giorgi, avvenuto per la prima volta a Pisa, nell'agosto del 1958, in occasione di un convegno sul Calcolo delle Variazioni, organizzato da Alessandro Faedo per ricordare Leonida Tonelli. Nel 1959 poi, il Professor Ennio De Giorgi si trasferì alla Scuola Normale Superiore, grazie all'interessamento di A. Faedo, per ricoprire la cattedra che era stata di Leonida Tonelli.

Per i successivi nove anni, come racconta lui stesso, il Professor Mario Miranda visse molto vicino ad Ennio De Giorgi, celibi entrambi in una piccola città con non molte distrazioni e fu, di E. De Giorgi, allievo, collega e grande amico.

È stato questo un periodo molto produttivo per il Professor Mario Miranda, che ottenne risultati importanti nella teoria delle frontiere minime, nello studio del problema di Dirichlet per l'equazione delle superfici minime e che si concluse, con l'apporto anche di Enrico Bombieri, con la dimostrazione della stima a priori del gradiente per le soluzioni di tale tipo di equazione.

Questo periodo di grande attività valse al Professor Mario Miranda, nell'autunno del 1968, la vincita del concorso a cattedra e, dopo un anno trascorso come professore visitatore presso l'Università del Minnesota a Minneapolis, il suo arrivo all'Università di Ferrara dove rimase dal 1969 al 1972.

Dopo un breve periodo trascorso presso l'Università di Genova (anno 1973-74), il Professor Mario Miranda si trasferì dal 1974 presso l'Università di Trento.

Il contributo che Mario Miranda ha dato allo sviluppo didattico e scientifico del Dipartimento di Matematica trentino, all'epoca del suo trasferimento fondato da pochi anni, è stato di fondamentale importanza. Mostrando una notevole capacità organizzativa e con la forza della sua personalità, Mario Miranda è riuscito a richiamare a Trento un buon gruppo di docenti qualificati che hanno reso in breve tempo il Dipartimento di Matematica di Trento uno dei migliori centri di ricerca del paese.

Un ruolo molto importante in tutto questo lo ha avuto il CIRM (Centro Internazionale per la Ricerca Matematica) di cui il Professor Mario Miranda è stato direttore per ben 27 anni (dal 1978 al 2005). Fino ad ora il CIRM ha organizzato quasi 300 convegni e, come ricorda il Signor Augusto Micheletti, segretario del CIRM: “Come direttore il Professor Mario Miranda aveva particolarmente a cuore l'alta reputazione dei convegni, faceva attenzione che la maggior parte dei settori della Matematica venissero rappresentati e non faceva mai mancare i suoi consigli e incoraggiamenti ai responsabili scientifici”. In particolare vorremmo ricordare il convegno di Teoria Geometrica della Misura e Calcolo delle Variazioni, che si tiene a cadenza annuale e che,

Accettato: il 1 ottobre 2018.

quest'anno, ha raggiunto la sua ventinovesima edizione.

Vogliamo ricordare infine che il Professor Mario Miranda è stato Preside della Facoltà di Scienze di Trento negli anni 1978-79 e 1984-88.

Matematico di grande talento e rara finezza, Mario Miranda ha svolto la sua attività di ricerca nell'ambito della teoria delle superfici di area minima di codimensione 1, dimostrando alcuni risultati fondamentali relativi all'esistenza, regolarità e unicità di soluzioni del problema di Dirichlet per l'equazione delle superfici di area minima.

In particolare vorrei ricordare:

la maggiorazione a priori del gradiente per soluzioni dell'equazione delle superfici minime, ottenuto in collaborazione con E. Bombieri ed E. De Giorgi (vedi [12]) che è stato un risultato chiave per lo sviluppo della teoria delle equazioni quasilineari ellittiche;

il risultato di esistenza, regolarità ed unicità della soluzione del problema di Dirichlet per l'equazione delle superfici di area minima, ottenuta in ipotesi molto generali utilizzando i metodi diretti del Calcolo delle Variazioni;

l'introduzione del concetto di grafici minimi generalizzati che ha permesso di semplificare notevolmente alcune dimostrazioni relative ai coni minimi e compiere significativi progressi nello studio delle superfici con curvatura media assegnata.

Per questi suoi importanti contributi, il Professor Mario Miranda ha ricevuto numerosi riconoscimenti nazionali e internazionali. Per esempio ha ricevuto i premi Caccioppoli, Pomini e Bonavera e la medaglia d'oro dell'Accademia dei XL, è stato socio corrispondente dal 1991 e socio nazionale dal dicembre del 2008 dell'Accademia Nazionale dei Lincei e socio corrispondente dall'aprile del 1986 e socio effettivo dal settembre 2001 dell'Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti. A livello internazionale, il Professor Mario Miranda è stato uno dei conferenzieri invitati a parlare in una seduta plenaria al Congresso dell'IMU (International Mathematical Union) tenutosi a Nizza nel 1970 ed è stato professore visitatore presso numerose università straniere, fra le quali vorrei ricordare:

- Università del Minnesota a Minneapolis, USA, anno 1968-69;
- Università di Buenos Aires, Argentina, luglio-agosto 1971;
- Università della California a Berkeley, USA, anno 1972-73;
- Università di Campinas, Brasile, giugno-ottobre 1974;
- IMPA, Rio de Janeiro, Brasile, luglio-agosto 1978;
- Università di São Paulo, Brasile, giugno-agosto 1978 e luglio–agosto 1979;
- Università Nazionale Somala a Mogadiscio, gennaio-giugno 1988.

Il Professor Mario Miranda ha inoltre partecipato a congressi e tenuto conferenze in una grande quantità di università italiane, europee e dell'America settentrionale e meridionale che sarebbe difficile da elencare in maniera completa. Tra le tante, vorrei ricordare le Università di Mosca, Princeton, Montreal, Stanford, New York, Magonza, Barcellona, Orsay, Parigi VI, Rennes, Uppsala, Stoccolma, Bonn, Durham, Warwick, Tolosa.

Il Professor Mario Miranda ha inoltre organizzato a Trento numerosi convegni ed incontri internazionali di grande rilevanza. Tra questi, ma solo a titolo di esempio, vorrei ricordare il convegno del giugno del 1986 dal titolo: "Calculus of Variations e Partial Differential Equations", in onore del Professor Hans Lewy, che vide la partecipazione di matematici di grande levatura internazionale e l'incontro, organizzato il 6 marzo 1996 (una sorta di conferenza stampa di cui Mario Miranda era il moderatore) tra Ennio De Giorgi e John Forbes Nash Jr., che in maniera indipendente e all'insaputa uno dell'altro avevano risolto il XIX problema di Hilbert. (Una bella descrizione di come andarono le cose e di come Ennio De Giorgi arrivò per primo al risultato, si può trovare in [54]).

Prima di passare ad una descrizione più dettagliata della produzione scientifica del Professor Mario Miranda, vorrei concludere questa breve introduzione parlando di Mario come persona e di alcune sue caratteristiche che ho potuto conoscere stando spesso insieme a lui, prima come studente a Ferrara e poi come docente a Trento nel periodo 1975-82. Specialmente nei primi anni trentini, molti docenti venivano da fuori e, nei fine settimana, Mario ed io e le nostre famiglie ci trovavamo spesso e Mario ci portava a vedere i bei luoghi attorno a Trento con la sua Volvo 144 bianca anno 1973.

Mario era una persona con una forte personalità, preparato e brillante anche su argomenti fuori della Matematica, era sicuro nelle sue argomentazioni, ma mai precipitoso nelle risposte e, di fronte a una domanda, anche nel campo in cui era esperto, si prendeva sempre il tempo di riflettere prima di rispondere. Era una persona generosa, estremamente gentile e disponibile.

Aveva una grande capacità oratoria e gli piaceva usarla sia in aula con un modo di insegnare che catturava l'attenzione dello studente sia fuori dove riusciva quasi sempre a porsi al centro dell'attenzione in un modo che rendeva comunque piacevole stare in sua compagnia.

Mario usava spesso questa sua capacità di parlare negli incontri informali che avvenivano tra i matematici che partecipavano ai tanti convegni organizzati dal CIRM. In effetti, tra i miei ricordi c'è un solo caso in cui Mario non riuscì a “dirigere” la conversazione: fu durante la visita del Professor Mario Fiorentini. Nel corso di una cena, il Professor M. Fiorentini iniziò a parlare del suo avventuroso passato giovanile come combattente nella resistenza partigiana. Tutti, Mario Miranda compreso, ascoltammo silenziosi.

Un altro aspetto del carattere di Mario, che ricordo molto bene, è la determinazione e la ricchezza di argomentazioni con cui cercava di convincerti che una sua idea o un suo modo di fare erano corretti. Conoscendo la tenacia con cui portava avanti un progetto in cui credeva, non mi ha sorpreso una frase che ha detto il Professor Giovanni Zacher, professore prima all'Università di Padova e poi a Trento e grande amico di Mario, durante un intervento fatto alla cerimonia funebre di Mario. Il Professor G. Zacher ha detto che per tanti anni e con ogni tipo di ragionamento e promessa aveva cercato di convincere Mario a trasferirsi a Padova, ma alla fine è stato Mario a convincere lui a trasferirsi a Trento.

Ricordo pure molto bene anche che a volte, forse per dar voce a quel senso comune che chi fa matematica deve essere un po' strano, dopo aver cercato di convincerti con la sua usuale determinazione di una certa cosa, passato qualche tempo, cercava di convincerti con la stessa determinazione della cosa contraria.

Ho visto Mario una delle ultime volte a Ferrara, durante la preparazione del lavoro [55] nel 2008 e già la malattia che lo aveva colpito cominciava a manifestare i suoi primi segni proprio nella caratteristica che lo aveva sempre distinto: la sua capacità di parlare. Infatti cominciava già a non pronunciare più bene certe parole e a non ricordare più i nomi delle persone, anche di matematici famosi. Un vero colpo al cuore per chi lo aveva conosciuto nei tempi migliori.

Seguirà ora una breve descrizione dell'attività scientifica del Professor Mario Miranda, prendendo in esame i singoli lavori.

In [1], oltre ad alcune proprietà degli insiemi di perimetro finito (teorema di compattezza, diseguaglianza isoperimetrica, regolarità debole della frontiera ridotta), il Professor Mario Miranda dimostra che una distribuzione T su di un aperto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ha derivate misure se e solo se T è la distribuzione generata da una funzione f a variazione limitata in Ω.

In [2], Mario Miranda studia le superfici grafico di una funzione e dimostra che una funzione f è a variazione limitata su di un aperto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ se e solo se il suo sottografico $E_f = \{(x, z) \in \Omega \times \mathbb{R},\ z < f(x)\}$ ha perimetro finito nel cilindro $\Omega \times \mathbb{R}$.

Il lavoro [3] contiene un primo contributo di Mario Miranda allo studio del problema di trovare una superficie cartesiana di area minima tra tutte quelle che hanno un dato al bordo fissato. In particolare, nella prima parte del lavoro, Miranda dimostra che, se $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ è un aperto limitato, allora esiste un unico minimo del funzionale dell'area nella classe delle funzioni Lipschitziane in Ω che sul bordo $\partial\Omega$ di Ω assumono il dato g, se g verifica la B.S.C. (Bounded Slope

Condition), cioè se esiste una costante positiva k e, $\forall x \in \partial\Omega$, due funzioni lineari L_x^-, L_x^+ con $|DL_x^-| \le k$, $|DL_x^+| \le k$ e tali che

$$L_x^-(y-x)+g(x) \le g(y) \le L_x^+(y-x)+g(x), \ \forall y \in \partial\Omega.$$

Nella seconda parte del lavoro poi, con tecniche standard nello studio delle superfici di area minima, Miranda riesce a dimostrare che il funzionale dell'area ha un unico minimo nella classe delle funzioni continue in Ω per ogni dato continuo $g : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ nell'ipotesi che Ω sia un aperto limitato di classe C^2 uniformemente convesso, ossia nell'ipotesi che esista una costante positiva k tale che se $x \in \partial\Omega$ e π_x è il piano tangente a $\partial\Omega$ in x, allora:

$$\sup_{y\in\Omega} \frac{|y-x|^2}{dist(y,\ \pi_x)} \le k.$$

Va notato che questa condizione equivale a richiedere che tutte le curvature principali di $\partial\Omega$ siano strettamente positive in ogni $x \in \partial\Omega$.

Il lavoro [4] è dedicato, con alcune semplificazioni nelle dimostrazioni, alla riscrittura dell'importante teorema di regolarità ottenuto da Ennio De Giorgi per le frontiere di insiemi di area minima. Riscrittura motivata anche dal fatto che l'articolo originale di E. De Giorgi: Frontiere orientate di area minima. Sem. Mat. Sc. Norm. Sup. Pisa, A.A. 1960-61, è sempre stato difficile da reperire.
Alcuni anni dopo (1971-72), quando Mario Miranda era professore straordinario a Ferrara ed io studente dell'ultimo anno del corso di laurea in Matematica allora quadriennale, in un ciclo di seminari sulla regolarità delle frontiere minime, basato proprio sull'articolo [4], Miranda espresse la convinzione che la tecnica di dimostrazione ideata da E. De Giorgi, potesse estendersi anche allo studio di frontiere di insiemi con curvatura media variazionale H diversa da zero ($H \equiv 0$ corrisponde al caso di frontiere minime). In effetti, nella tesi di laurea che scrissi sotto la guida del Professor Miranda ed in alcuni lavori successivi, venne dimostrato che il teorema di regolarità di E. De Giorgi continua a valere anche per frontiere di insiemi con curvatura media variazionale $H \in L^p$ con $p > n$, dove n è la dimensione dello spazio ambiente.

In [5], usando il teorema di regolarità di E. De Giorgi sulle frontiere minime ed un primo risultato sulla stima delle eventuali singolarità ottenuto da Dionisio Triscari in: Sulle singolarità delle frontiere orientate di misura minima nello spazio euclideo a 4 dimensioni. Le Matematiche, 18, Catania, 1963, 139-163, Mario Miranda dimostra che, se $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, allora il minimo continuo del funzionale dell'area, ottenuto in [3], in realtà è una funzione analitica in Ω e quindi soluzione dell'equazione delle superfici minime.

In [6], usando una diseguaglianza isoperimetrica provata da H. Federer e W.H. Fleming in: Normal and integral currents. Ann. of Math., 72, 1960, 558-520, Mario Miranda dimostra una diseguaglianza tipo Sobolev per funzioni definite su di una superficie minima. In particolare, viene dimostrato che, $\forall n \in \mathbb{N}$ e $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $1 \le \alpha \le \dfrac{n}{n-2}$ (per $n = 2$ deve intendersi $\forall \alpha \ge 1$), esiste una costante positiva $\beta = \beta(n, \alpha)$ tale che se $f \in C^2(\Omega)$ ($\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto convesso) è una soluzione dell'equazione delle superfici minime e $g \in C_0^1(\Omega \times \mathbb{R})$, allora

$$(1) \quad \left(\int_S |g|^{2\alpha}\, dH_n\right)^{\frac{1}{\alpha}} \le \beta H_n(S\cap K)^{\frac{1}{\alpha}-\frac{n-2}{n}} \int_S |\delta g|^2\, dH_n,$$

dove $S = \{(x, f(x)), x \in \Omega\}$, $K = \{(x, y) \in \Omega \times \mathbb{R}, g(x, y) \ne 0\}$ e δ è il gradiente tangenziale alla superficie S, ossia

$$\delta_i = D_i - \nu_i(\nu \cdot D), \quad i = 1, 2, \cdots, n+1$$

con ν normale alla superficie S. L'interesse del risultato sta nel fatto che la costante β che compare in (1) dipende solo dalla dimensione n della superficie minima S (e ovviamente dall'esponente di Sobolev α), ma non dalla superficie stessa.

Nel lavoro [7], perfezionando ulteriormente le tecniche introdotte in [6], Miranda riesce ad ottenere una stima integrale della somma dei quadrati delle curvature principali di una superficie minima. In particolare, con le stesse notazioni introdotte in [6], se supponiamo che $B_d = \{x \in \mathbb{R}^n, \ |x| < d\} \subset \Omega$ e $S_\rho = \{(x, f(x)), |x|^2 + (f(x) - f(0))^2 \le \rho^2\}$, $\rho < d$, allora

$$(2) \qquad \int_{S_\rho} c^2\, dH_n \le k\left(\frac{d}{d-\rho}\right)^2 \rho^{n-2}, \quad \forall \rho \in (0, d)$$

dove c^2 è la somma dei quadrati delle curvature principali di S e $k = k(n)$ è una costante positiva che dipende solo dalla dimensione n della superficie S. Da notare che la diseguaglianza (2) è conseguenza dell'equazione

$$\Delta w - |\delta w|^2 - c^2 = 0 \tag{3}$$

verificata dalla funzione

$$w = -\log v_{n+1} = -\log\left(\frac{1}{\sqrt{1+|Df|^2}}\right)$$

dove Δ è l'operatore di Laplace–Beltrami associato alla superficie S, ossia

$$\Delta = \sum_{j=1}^{n+1} \delta_j\, \delta_j.$$

Da notare infine che l'equazione (3) sarà poi ampiamente usata in molti studi successivi sulle superfici minime.

Il lavoro [8] contiene il contributo di Mario Miranda allo studio delle eventuali singolarità delle frontiere minime. Usando i risultati allora conosciuti sulle frontiere minime, ossia che non hanno singolarità se la dimensione $n = 3$ (Dionisio Triscari: Sulle singolarità delle frontiere orientate di misura minima nello spazio euclideo a 4 dimensioni. Le Matematiche, Catania, 1963, 139-163) o $n = 4$ (F. J. Almgren: Some interior regularity theorems for minimal surfaces and an extension of Bernstein's theorem. Ann. of Math., 84, 1966, 277–292) viene dimostrato che se $E \subset \mathbb{R}^{n+1}$ è limite in $L^1_{loc}(\Omega \times \mathbb{R})$ di una successione $E_h = \{(x, y) \in \Omega \times \mathbb{R},\ y < f_h(x)\}$ con $f_h \in C^2(\Omega)$ soluzione dell'equazione delle superfici minime, allora, indicato con $N \subset \partial E \cap (\Omega \times \mathbb{R})$ l'insieme degli eventuali punti singolari di ∂E, risulta

$$H_{n-2}(N \cap K) < +\infty \quad \forall K \subset \Omega \times \mathbb{R},\ \text{compatto}$$

e quindi $H_s(N) = 0 \quad \forall s > n-2$.

Il lavoro [9] è suddiviso in due parti. Nella prima parte, Miranda dimostra che le funzioni a variazione limitata in un aperto con frontiera localmente Lipschitziana ammettono una traccia sulla frontiera e, nella seconda parte, studia successioni E_h di insiemi con frontiera di misura minima in un aperto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ che convergono in $L^1_{loc}(\Omega)$ verso un insieme E. In particolare vengono dimostrati i seguenti risultati:

i) se f è una funzione a variazione limitata su di un un aperto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ con frontiera localmente Lipschitziana, allora esiste una funzione $\varphi \in L^1(\partial\Omega)$ (la traccia di f su $\partial\Omega$) tale che

   a) per H_{n-1}–quasi ogni $x \in \partial\Omega$

   $$\lim_{\rho\to 0} \rho^{-n} \int_{B_\rho(x)\cap\Omega} |f(y) - \varphi(x)|\, dy = 0;$$

   b) per ogni $g \in C^1(\mathbb{R}^n,\ \mathbb{R}^n)$

   $$\int_\Omega f\ div\, g\, dx = -\sum_{i=1}^{n} \int_\Omega g_i\, D_i f + \int_{\partial\Omega} \varphi\, v \cdot g\, dH_{n-1}$$

   dove $D_i f$ sono le derivate misure di f e v è il versore della normale esterna a $\partial\Omega$.

ii) se E_h è una successione di insiemi con frontiera minima in un aperto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ che converge in $L^1_{loc}(\Omega)$ ad un insieme E, allora:

   a) E ha frontiera di misura minima in Ω;
   b) se $x_h \in \partial E_h \cap \Omega$ e $x_h \to x \in \Omega$, allora $x \in \partial E$;
   c) nelle ipotesi di b), se supponiamo che $x \in \partial E$ sia un punto regolare della frontiera di E (in simboli $x \in \partial^* E$), allora esiste $h_0 \in \mathbb{N}$, tale $x_h \in \partial^* E_h \cap \Omega,\ \forall h > h_0$ (ossia x_h è un punto regolare della frontiera di E_h) e

   $$\lim_{h\to\infty} v_{E_h}(x_h) = v_E(x)$$

   dove con $v_E(x)$ abbiamo indicato il versore della normale a $\partial^* E$ in x.
   In particolare se ∂E in un intorno del punto $x \in \partial^* E$ risultasse grafico nella direzione x_j, allora ∂E_h $(h > h_0)$ sarà grafico nella stessa direzione;
   d) l'integrale del quadrato delle curvature principali è semicontinuo inferiormente rispetto alla convergenza $L^1_{loc}(\Omega)$, ossia per ogni aperto $A \subset \Omega$

   $$\int_{A\cap\partial^* E} c^2\, dH_{n-1} \le \liminf_{h\to\infty} \int_{A\cap\partial^* E_h} c_h^2\, dH_{n-1}.$$

Il lavoro [10], svolto in collaborazione col Professor Enrico Giusti, è dedicato allo studio dei sistemi ellittici quasilineari del secondo ordine. Viene dimostrato che questi sistemi possono avere soluzioni discontinue anche quando i coefficienti sono funzioni analitiche dei loro argomenti. In particolare, se $n \geq 3$, allora la funzione vettoriale $u(x) = \dfrac{x}{|x|}$ è un'estremale su ogni aperto limitato $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ dell'integrale regolare del Calcolo delle Variazioni:

$$F(v,\Omega) = \int_\Omega \left[\sum_{i,j=1}^{n} (D_i\, v_j)^2 + \right.$$

$$\left. + \left\{ \sum_{i,j=1}^{n} \left(\delta_{ij} + \frac{4}{n-2}\, \frac{v_i\, v_j}{1+|v|^2} \right) D_i\, v_j \right\}^2 \right] dx.$$

Viene poi anche dimostrato che, se n è sufficientemente grande, la funzione u è l'unico minimo (anzi l'unico estremale) del funzionale $F(v,B_\rho),\ \forall B_\rho \subset \Omega$, tra le funzioni che hanno il suo stesso dato al bordo.

Anche il lavoro [11], sempre in collaborazione con Enrico Giusti, è dedicato allo studio dei sistemi ellittici quasilineari del secondo ordine. Viene dimostrato un teorema di regolarità per soluzioni deboli. I sistemi che vengono considerati sono del tipo

$$\sum_{ij=1}^{n} \sum_{h\,k=1}^{N} \int_\Omega A_{ij}^{h\,k}(x,u) D^i\, u_h\, D^j\, \psi_k\, dx = 0,$$

$$\forall \psi \in \left[C_0^1(\Omega)\right]^N$$

dove $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ è un aperto, $u \in \left[H^1_{loc}(\Omega)\right]^N$ ed i coefficienti $A_{ij}^{h\,k}$ sono funzioni limitate in $\Omega \times \mathbb{R}^N$ che verificano la condizione di uniforme ellitticità:

$$\sum_{ij=1}^{n} \sum_{h\,k=1}^{N} A_{ij}^{h\,k}(x,u)\, \xi_h^i\, \xi_k^j \geq |\xi|^2 =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{h=1}^{N} |\xi_h^i|^2, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^{nN}.$$

Si dimostra che ogni soluzione debole u del sistema è Hölderiana con esponente $1/2$ in un aperto $\Omega_0 \subset \Omega$ con $H_n(\Omega \setminus \Omega_0) = 0$. Inoltre se i coefficienti $A_{ij}^{h\,k}$ sono uniformemente continui in $\Omega \times \mathbb{R}^N$ e u è una soluzione debole del sistema con $u \in \left[H^{1,p}_{loc}(\Omega)\right]^N$ $(p \geq 2)$, allora $H_{n-p}(\Omega \setminus \Omega_0) = 0$.

Il risultato contenuto in [12] ed ottenuto in collaborazione coi Professori Enrico Bombieri ed Ennio De Giorgi sulla stima a priori del gradiente di una soluzione dell'equazione delle superfici minime è un risultato di fondamentale importanza nella teoria delle superfici minime ed è stato punto di partenza chiave nello studio dell'esistenza, regolarità ed unicità per il problema di Dirichlet (o ai valori al bordo) per un'ampia classe di equazioni differenziali quasilineari ellittiche del secondo ordine. Da notare che, negli anni che precedettero l'uscita dell'articolo [12] (1963-1968) il problema di trovare una stima a priori per l'equazione delle superfici minime era ampiamente studiato a livello internazionale ed alcuni autori come R. Finn, H. Jenkins & J. Serrin, J. Serrin e J.C.C. Nitsche, avevano dato contributi via via migliori, ma sempre in dimensione $n = 2$ (Per un'ampia panoramica dei risultati fino ad allora noti si può vedere J.C.C. Nitsche: On new results in the theory of minimal surface. Bull. Amer. Math. Soc. 71, 1965.)
Il risultato provato da E. Bombieri, E. De Giorgi e M. Miranda è il seguente.
Sia $u \in C^2(\Omega)$ $(\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un insieme aperto) una soluzione dell'equazione delle superfici minime, $x_0 \in \Omega,\ \rho \in (0, dist(x_0, \partial\Omega))$. Supponiamo inoltre che $u(x) > 0\ \forall x \in B_\rho(x_0)$, allora:

$$|D\,u(x_0)| \leq c_1\, exp\left(c_2\, \frac{u(x_0)}{\rho} \right)$$

dove c_1 e c_2 sono due costanti positive che dipendono solo dalla dimensione n dello spazio.
Da notare che da questa stima del gradiente e da risultati ottenuti da J. Moser: On Harnack's theorem for elliptic differential equations. Comm. Pure Appl. Math. 14, 1961, 577-591, si ottiene una estensione del teorema di Bernstein, cioè che se $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$ è una soluzione dell'equazione delle superfici minime in tutto lo spazio e $u(x) > -k(|x|+1)$ $(k \geq 0)$, allora u è un polinomio di grado minore od uguale a 1 (in particolare se $k = 0$, allora u è costante).

L'articolo [13] contiene un estratto della conferenza che il Professor Mario Miranda ha tenuto al Congresso dell'IMU (International Mathematical Union) svoltosi a Nizza nel settembre del 1970. Mario Miranda fa un'ampia rassegna sia dei risultati noti della teoria delle superfici minime, come la regolarità all'interno di una soluzione, la risoluzione del problema di Bernstein e del problema di Dirichlet, sia dei problemi che rimangono ancora da risolvere come la regolarità fino al bordo, la regolarità delle superfici con curvatura media assegnata ($\neq 0$) e la regolarità di superfici minime in presenza di ostacoli.

Nel lavoro [14], come viene detto nell'introduzione, Mario Miranda espone i risultati di una ricerca iniziata mentre era professore visitatore presso l'Università di Minneapolis in Minnesota, propiziata da discussioni avute coi Professori D. Kinderlehrer e J. C. C. Nitsche e continuata poi in Italia a Pisa in seguito a colloqui avuti coi Professori E. De Giorgi e F. J. Almgren. La prima parte del lavoro è dedicata allo studio del problema di Bernstein nel caso parametrico. In particolare viene dimostrato che

i) se E ha frontiera di misura minima su tutto $\mathbb{R}^n$ ed $n \leq 7$, allora E è un semispazio;
ii) se E ha frontiera di misura minima su tutto $\mathbb{R}^n$, se $\partial E \neq \emptyset$ ed E contiene un semispazio, allora E è un semispazio.

La seconda parte del lavoro è relativa allo studio della regolarità di una frontiera di misura minima, in un aperto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, rispetto ad un ostacolo L, ossia della frontiera di un insieme E tale che:

i) $L \cap \Omega \subset E$;
ii) $\forall K \subset \Omega$ compatto e $\forall M$ con $L \cap \Omega \subset M$, $M = E$ in $\Omega \setminus K$ si ha che il perimetro di E in K è minore o uguale del perimetro di M in K.

Il risultato principale ottenuto è che se E ha frontiera di misura minima rispetto ad un ostacolo L con $\partial L \cap \Omega \in C^1$ e $x_h \in \partial E \cap (\Omega \setminus L)$ è una successione che converge ad $x \in \partial L \cap \Omega$, allora esiste $h_0 \in \mathbb{N}$, tale che:

i) $\forall h > h_0$ x_h è un punto regolare della frontiera di E;
ii) il versore normale esterno a ∂E in x_h converge al versore della normale esterna a ∂L in x.

Come conseguenza si ottiene allora che esiste un aperto $\Omega_0 \subset \Omega$ e contenente $\partial L \cap \Omega$ tale che $\partial E \cap \Omega_0 \in C^1$, cioè se l'ostacolo è regolare allora anche la frontiera di un insieme minimo rispetto a quell'ostacolo è regolare nell'intorno dell'ostacolo.

I risultati del lavoro [15], relativi alla risoluzione del problema al contorno per l'equazione delle superfici minime, sono una generalizzazione di precedenti risultati ottenuti dallo stesso Professor Mario Miranda in [3] e dai Professori H. Jenkins e J. Serrin in: The Dirichlet problem for the minimal surface equation in higher dimensions. J. Reine Ang. Math. 229, 1968,170-187. L'interesse del risultato ottenuto da Mario Miranda non sta solo nell'indebolimento della regolarità della frontiera di Ω (localmente Lipschitziano nel lavoro di M. Miranda, di classe C^2 nel lavoro di Jenkins-Serrin citato), ma sopratutto nella tecnica di dimostrazione che usa i metodi diretti del Calcolo delle Variazioni ed è completamente nuova rispetto ai lavori precedenti. Il teorema che viene dimostrato è il seguente: se $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ è un aperto limitato con frontiera localmente Lipschitziana pseudoconvesso (ossia se variazioni locali che aumentano l'insieme Ω aumentano anche il perimetro di Ω) e se $g : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ è una funzione continua, allora esiste una unica funzione $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ che ha area minima tra tutte le funzioni v con $v = g$ su $\partial\Omega$. Da notare che il concetto di aperto pseudoconvesso è l'estensione al caso di frontiere Lipschitziane del concetto di curvatura media non negativa per frontiere regolari. L'idea nuova introdotta da Mario Miranda è quello di inserire il vincolo $v = g$ su $\partial\Omega$ non nella classe delle funzioni ammissibili, ma nel funzionale da studiare che diventa:

$$F(v) = \int_\Omega \sqrt{1 + |Dv|^2} + \int_{\partial\Omega} |v - g| dH_{n-1}$$

con v funzione a variazione limitata qualsiasi (senza vincoli su $\partial\Omega$). L'esistenza di un minimo u del funzionale F è allora conseguenza dei metodi diretti del Calcolo delle Variazioni e della semicontinuità inferiore rispetto alla convergenza

$L^1(\Omega)$ di F, che $u \in C^2(\Omega)$ è conseguenza del teorema di regolarità (vedi anche lavoro [5]), che $u \in C(\overline{\Omega})$ e che $\forall x_0 \in \partial\Omega$

$$\lim_{x \to x_0,\, x \in \Omega} u(x) = g(x_0)$$

è conseguenza di un principio di massimo forte per le frontiere minimali dimostrato da Mario Miranda in questo lavoro e che estende il principio di massimo forte classico che vale per soluzioni classiche dell'equazione delle superfici minime. L'enunciato del principio di massimo forte, ora provato, è il seguente: se $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ è un aperto pseudoconvesso, $x_0 \in \partial\Omega$, E ha frontiera di misura minima in un aperto A contenente x_0, $E \cap A \subset \Omega \cap A$ e $x_0 \in \partial\Omega \cap \partial E$, allora esiste un aperto $A' \subset A$ contenente x_0 e tale che $\partial E \cap A' = \partial\Omega \cap A'$ ($\partial E \cap A'$ risulta poi essere grafico di una funzione analitica di $n-1$ variabili e soluzione dell'equazione delle superfici minime). Usando questo principio di massimo forte, si riesce a dimostrare che, se u è un minimo del funzionale F e se

$$\lim_{x \to x_0,\, x \in \Omega} u(x) = L \neq g(x_0), \quad L \in \mathbb{R}$$

allora esiste una sfera $B \subset \mathbb{R}^{n+1}$ di centro il punto (x_0, L) tale che $(\Omega \times \mathbb{R}) \cap B = E \cap B$ (dove E è il sottografico del minimo u) e questo contraddice il fatto che, se $x_h \in \Omega$ è una successione che converge a $x_0 \in \partial\Omega$, allora la successione $(x_h, u(x_h)) \in \partial E \cap (\Omega \times \mathbb{R})$ converge a (x_0, L).

Il lavoro [16] riguarda l'esistenza e la regolarità di frontiere di insiemi con curvatura media e dato al bordo assegnati. In particolare viene studiato il problema di minimizzare il funzionale:

$$\mathcal{F}(E) = P(E,\Omega) + \int_{\Omega \cap E} A(x)dx + \int_{\partial\Omega} |\varphi_E - \varphi_\Gamma| dH_{n-1}$$

dove $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ è un aperto limitato con frontiera localmente Lipschitziana, $P(E,\Omega)$ è il perimetro di E in Ω e φ_E è la funzione caratteristica di E. $A \in L^1(\Omega)$ e $\Gamma \subset \partial\Omega$ sono dati assegnati. Vengono considerati separatamente i tre problemi:

i) esistenza di un minimo;
ii) regolarità all'interno di Ω;
iii) comportamento al bordo.

Mario Miranda dimostra che:

i) $\forall A \in L^1(\Omega)$, $\forall \Gamma \subset \partial\Omega$, esiste un minimo E del funzionale $\mathcal{F}$;
ii) se $A \in L^\infty(\Omega)$ allora esiste $\Omega_0 \subset \Omega$ aperto tale che $\partial E \cap \Omega_0$ è una varietà $(n-1)$–dimensionale di classe $C^{1,\alpha}$ (per qualche $\alpha \in (0,1)$) e $H_s(\Omega \setminus \Omega_0) = 0$ $\forall s > n-8$ (se $n \leq 7$, $\Omega_0 = \Omega$);
iii) nel caso $A = 0$ (ossia per frontiere di misura minima), se Ω è un aperto pseudoconvesso, allora vale il seguente comportamento al bordo:

se x è interno a Γ, allora esiste $\rho > 0$ tale che $B_\rho(x) \cap E = B_\rho(x) \cap \Omega$,

se $x \in \partial\Omega \setminus \overline{\Gamma}$, allora esiste $\rho > 0$ tale che $B_\rho(x) \cap E = \emptyset$.

Il lavoro [17] contiene il corso tenuto da Mario Miranda al convegno CIME: "Geometric measure theory and minimal surfaces", svoltosi a Varenna dal 24 agosto al 2 settembre del 1972. Questo corso contiene la dimostrazione dell'estensione del teorema di regolarità per frontiere minimali di E. De Giorgi-H. Federer al caso di frontiere che minimizzano un funzionale tipo curvatura media quando la curvatura sta in L^p con $p > n$ (n dimensione dello spazio). Lo studio di tale estensione era stato l'argomento della mia tesi di laurea svolta sotto la guida del Professor Mario Miranda a Ferrara l'anno precedente (vedi Umberto Massari: Esistenza e regolarità delle ipersuperfici di curvatura media assegnata in $\mathbb{R}^n$. Arch. Rat. Mech. Analysis, 55, 1974, 357-382).

Nel lavoro [18] Mario Miranda studia l'esistenza, la regolarità ed il comportamento al bordo di un minimo del funzionale:

$$\mathcal{F}(v) = \int_\Omega \sqrt{1 + |Dv|^2} + \\ + \int_\Omega \left(\int_0^{v(x)} A(x,t)dt \right) dx + \int_{\partial\Omega} |v - g| dH_{n-1}$$

dove $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ è un aperto limitato con frontiera localmente Lipschitziana, $A(x,t) : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è una funzione non decrescente in t per ogni $x \in \Omega$ e misurabile in x per ogni $t \in \mathbb{R}$ e $g \in L^1(\partial\Omega)$. Viene dimostrato che il funzionale $\mathcal{F}$ ha un minimo nella classe delle funzioni a variazione limitata se esistono due funzioni misurabili non negative $\alpha, \beta\ : \Omega \to \mathbb{R}$ e una costante $\Gamma \geq 0$, tali che:

i) $A(x, \alpha(x)) \geq -\Gamma,\ \ A(x, -\beta(x)) \leq \Gamma\ \ \forall x \in \Omega$;

ii) $\int_\Omega [\alpha(x) A^-(x,0) - \beta(x) A^+(x,0)]\, dx > -\infty$

dove

$$A^-(x,0) = \min\{A(x,0),\ 0\}$$

e

$$A^+(x,0) = \max\{A(x,0),\ 0\};$$

iii) $$n\,\Gamma\left(\frac{H_n(\Omega)}{\omega_n}\right)^{1/n} < 1.$$

Se inoltre la funzione $A(x,t)$ è localmente limitata in $\Omega \times \mathbb{R}$, allora ogni minimo u del funzionale $\mathcal{F}$ è continuo quasi ovunque in Ω. Infine l'assunzione del dato al bordo g su $\partial\Omega$ è legato, come nel caso classico, all'esistenza di una buona relazione tra la funzione curvatura $A(x,t)$ e la curvatura media di $\partial\Omega$. In particolare Mario Miranda riesce a dimostrare che, supposto che esista un intorno $\mathcal{U}$ del punto $x_0 \in \partial\Omega$ tale che:

$$\Omega \cap \mathcal{U} = \{x = (y,z) \in \mathbb{R}^n,\ y \in A,\ z > \phi(y)\}$$

dove $A \subset \mathbb{R}^{n-1}$ è un aperto e $\phi : A \to \mathbb{R}$ è una funzione Lipschitziana di $(n-1)$-variabili che verifica in senso debole la diseguaglianza:

$$\sum_{j=1}^{n-1} D_{y_j}\left(\frac{D_{y_j}\phi}{\sqrt{1+|D_y\phi|^2}}\right) \geq \lambda$$

dove λ è una costante tale che

$$A(x, g(x_0)) \geq -\lambda,\ \forall x \in \mathcal{U} \cap \Omega,$$

allora, supposto che il dato al bordo g sia continuo in x_0, risulta:

$$\lim_{x \to x_0,\ x\in\Omega} u(x) = g(x_0).$$

Il lavoro [19] contiene un sunto di un corso che Mario Miranda ha tenuto presso l'IMPA di Rio de Janeiro nel periodo luglio-agosto 1976. Nella prima parte vengono esposte le principali proprietà degli insiemi di perimetro finito. Nella seconda, dedicata alle frontiere di area minima, contiene una dimostrazione dell'osservazione di W. H. Fleming che "se esiste una soluzione non lineare dell'equazione delle superfici minime definita in tutto $\mathbb{R}^n$, allora esiste un cono di vertice l'origine $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ di frontiera minima e singolare". Inoltre si può costruire D in modo che sia un cilindro del tipo $D = C \times \mathbb{R}$ con C cono minimo singolare in $\mathbb{R}^n$. (vedi W. H. Fleming: On the Plateau problem. Rend. Circ. Mat. Palermo, 11, 1962, 69-90).

In [20], Mario Miranda estende un risultato ottenuto da E. de Giorgi e G. Stampacchia nel 1965 che afferma: se $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ è un aperto e $K \subset \Omega$ è un compatto con $H_{n-1}(K) = 0$, allora se u è una soluzione dell'equazione delle superfici minime in $\Omega \setminus K$, allora u è soluzione di tale equazione anche su tutto Ω. (vedi E. De Giorgi-G. Stampacchia: Sulle singolarità eliminabili delle ipersuperfici minimali. Rend. Acc. Lincei, 38, 1965, 352-357.) Usando i metodi della teoria delle frontiere minime, Miranda riesce ad indebolire l'ipotesi K compatto con K chiuso. Da notare che l'ipotesi di compattezza nella dimostrazione di De Giorgi–Stampacchia, basata sull'uso del principio del massimo, era essenziale. In questo lavoro, si riesce a dimostrare che il sottografico di u è un insieme con frontiera di misura minima in tutto $\Omega \times \mathbb{R}$ e quindi l'assenza di singolarità è conseguenza dei risultati contenuti in [21].

Nell'articolo [21] il Professor Mario Miranda ha introdotto una definizione (quella di soluzione generalizzata dell'equazione delle superfici minime) che, pur essendo molto semplice da enunciare, ha permesso da un lato di unificare la trattazione delle superfici minime di codimensione uno negli spazi Euclidei, dall'altro di semplificare la dimostrazione di molti teoremi della teoria delle superfici minime. La definizione introdotta è la seguente: una funzione misurabile u definita in un aperto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ e a valori sulla retta reale completata $\mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}$ si dice soluzione generalizzata dell'equazione delle superfici minime se il suo sottografico $E = \{(x,t) \in \Omega \times \mathbb{R},\ t < u(x)\}$ ha frontiera di misura minima su $\Omega \times \mathbb{R}$. (essenziale in questa definizione è permettere alla funzione u di assumere anche i valori $-\infty$ e $+\infty$). La famiglia delle soluzioni generalizzate dell'equazione delle superfici minime ha alcune proprietà molto importanti che derivano dalla teoria generale delle frontiere minime e che sono:

- è chiusa rispetto alla convergenza puntuale quasi ovunque in Ω;
- è compatta rispetto alla stessa convergenza, ossia ogni successione di soluzioni generalizzate dell'equazione delle superfici minime contiene una sottosuccessione che converge puntualmente quasi ovunque in Ω ad una soluzione generalizzata;
- vale il seguente teorema di struttura: se u è una soluzione generalizzata dell'equazione delle superfici minime, allora
  i) esiste un aperto $G \subset \Omega$ (eventualmente vuoto) tale che $u_{|_G}$ è una funzione reale analitica soluzione classica dell'equazione delle superfici minime,
  ii) posto
  $$P = \{x \in \Omega,\ u(x) = +\infty\}$$
  e
  $$N = \{x \in \Omega,\ u(x) = -\infty\},$$
  si ha:
  $$\partial E \cap (\Omega \times \mathbb{R}) = [(\partial P \cap \partial N \cap \Omega) \times \mathbb{R}] \cup \mathit{graf}\ u_{|_G}$$
  $$\Omega = G \cup P \cup N \cup (\partial P \cap \partial N \cap \Omega)$$
  $$\partial G \cap \Omega \subset P \cup N.$$
  Da notare che $P \times \mathbb{R}$ può essere visto come limite (nella convergenza puntuale quasi ovunque) dei traslati $E - he_{n+1}$ per $h \to +\infty$ e quindi ha frontiera minima in $\Omega \times \mathbb{R}$. Ne consegue che P ha frontiera di misura minima in Ω. Analogamente si può dire per N.

Mario Miranda conclude l'articolo con un'applicazione dei risultati ottenuti allo studio del problema di Dirichlet per l'equazione delle superfici minime nel caso che Ω sia un aperto non limitato, riuscendo a dimostrare che se $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ è un aperto con frontiera localmente Lipschitziana, localmente pseudoconvesso e se Ω non contiene insiemi con frontiera di misura minima su tutto $\mathbb{R}^n$, allora $\forall g \in C(\partial\Omega)$ esiste una funzione u analitica in Ω soluzione dell'equazione delle superfici minime e tale che

$$\lim_{x \to x_0,\ x \in \Omega} u(x) = g(x_0)\ \forall x_0 \in \partial\Omega.$$

Nel lavoro [22] Mario Miranda affronta il problema di suddividere l'intero spazio $\mathbb{R}^n$ in due parti attraverso una superficie $\mathcal{S}$ che sia grafico di una funzione soluzione dell'equazione delle superfici minime. Un grafico minimo completo è appunto una superficie non parametrica $\mathcal{S} = \{(x, u(x)),\ x \in \Omega\}$ con $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto, $u \in C^2(\Omega)$ soluzione dell'equazione delle superfici minime e tale che $\mathcal{S}$ sia la frontiera di una divisione minima di $\mathbb{R}^{n+1}$ in due parti. (Ovviamente si suppone che u non sia lineare e che $n \geq 8$). Usando i risultati ottenuti in [21], viene dimostrato che esiste un aperto $\Omega \subset \mathbb{R}^8$ che contiene la frontiera del cono di Simons $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4, |x| < |y|\}$ ed una funzione $u \in C^2(\Omega)$ soluzione dell'equazione delle superfici minime che sia un grafico minimo completo e tale che $\{(x,y) \in \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4, u(x,y) > 0\} = \Omega \cap C$. Da notare che il cono di Simons C è un cono singolare in $\mathbb{R}^8$ con frontiera di misura minima in tutto lo spazio (vedi E. Bombieri-E. De Giorgi-E. Giusti: Minimal cones and the Bernstein problem. Inv. Math. 7, 1969, 243-268).

In [23], scritto in portoghese, Mario Miranda dimostra l'esistenza di una soluzione del problema di Dirichlet per l'equazione delle superfici minime in un angolo convesso Ω non limitato del piano $\mathbb{R}^2$. La soluzione viene ottenuta come limite di soluzioni definite in una successione di triangoli limitati che invadono Ω.

Il lavoro [24] contiene il sunto di una conferenza tenuta da Mario Miranda a Milano nel giugno del 1980 dove vengono esposti, in sequenza storica, i risultati ottenuti nello studio del problema di Dirichlet per l'equazione delle superfici minime sia per domini limitati e non limitati. Vengono alla fine indicati alcuni problemi aperti.

Il lavoro [25] contiene quanto esposto da Miranda in una conferenza generale tenuta in occasione dell'XI Congresso UMI svoltosi a Palermo nel settembre del 1979.

Il lavoro [26] contiene il contributo di Mario Miranda al convegno tenutosi a Parigi nel 1983 in occasione della cerimonia solenne svoltasi alla Sorbona per il conferimento della Laurea honoris causa in Matematica al Professor Ennio De Giorgi. In questo lavoro, che si basa sui risultati contenuti in [21], Miranda mette in risalto la seguente proprietà generale di compattezza delle soluzioni generalizzate dell'equazione delle superfici minime: se $\Omega_j \subset \mathbb{R}^n$ è una successione crescente di aperti e $u_j : \Omega_j \to \overline{\mathbb{R}}$ è una successione di soluzioni generalizzate dell'equazione delle superfici minime, allora esiste una sottosuccessione u'_j di u_j ed una funzione $u : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ (dove Ω è la riunione degli Ω_j) soluzione generalizzata dell'equazione delle superfici minime, tale che

$$\lim_{j\to\infty} u'_j(x) = u(x) \text{ quasi ovunque in } \Omega.$$

Il lavoro [27], che contiene anche il mio nome, è il risultato di un periodo in cui i miei contatti col Professor Mario Miranda erano particolarmente frequenti in vista della preparazione del libro [28]. Nel lavoro viene data una dimostrazione della minimalità del cono di Simons molto più semplice di quella originale contenuta in E. Bombieri-E. De Giorgi-E. Giusti: Minimal cones and the Bernstein problem. Invent. Math., 7, 1969, 243-268. Facendo altri conti, osservammo che la funzione $f(x,y)=|x|^4+|y|^4$, $x, y \in \mathbb{R}^4$ è sottosoluzione dell'equazione delle superfici minime nel cono di Simons $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4,\ |x| < |y|\}$ e soprasoluzione della stessa equazione nel complementare. Allora è immediato costruire una successione $u_j \in C^2(B_j)$, $B_j = \{(x,y) \in \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4,\ |x|^2+|y|^2 < j^2\}$ di soluzioni dell'equazione delle superfici minime tale che

$$\lim_{j\to\infty} u_j(x,y) = +\infty \quad \forall (x,y) \in C$$

e

$$\lim_{j\to\infty} u_j(x,y) = -\infty \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^8 \setminus \overline{C}.$$

In vista dei risultati di [21], allora $C \times \mathbb{R}$ e quindi C sono insiemi con frontiera di area minima.

Il libro [28] nasce da una richiesta fatta a Mario Miranda dal Professor Leopoldo Nachbin, editore della collana Notas de Matematica, di scrivere un volume in cui venissero esposti i principali risultati della teoria degli insiemi di frontiera minima. Miranda ha chiesto poi a me di aiutarlo nella raccolta e nella stesura del materiale. Nel libro viene esposta la teoria degli insiemi di perimetro finito e viene dimostrato il teorema di regolarità di Ennio De Giorgi nel caso di frontiere $(K,\ \lambda)$–minime in un aperto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ $(\lambda > 0)$, ossia frontiere di insiemi E tali che $\forall x \in \Omega,\ \rho < dist(x, \partial\Omega)$ risulti

$$\psi(E,x,\rho) := P(E, B_\rho(x)) - \inf\{P(F, B_\rho(x)),$$
$$F \Delta E \subset\subset B_\rho(x)\} \le K\,\rho^{n-1+\lambda}.$$

Nei capitoli finali del libro, si utilizzano i risultati precedentemente esposti, per studiare il problema di Dirichlet per l'equazione delle superfici minime sia nel caso classico in cui il dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ sia limitato ed il dato $g : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ sia pure limitato sia nel caso di domini Ω non limitati e dati g non limitati. Un caso interessante, studiato anche in precedenza per $n = 2$ da H. Jenkins-J. Serrin: Variational problems of minimal surface type III–The Dirichlet problem with infinite data. Arch. Rat. Mech. Analysis 29, 1968, 304-322, è quando il dato g assume valore $+\infty$ o $-\infty$ in sottoinsiemi relativamente aperti della frontiera di Ω.

Nel lavoro [29], scritto in collaborazione col Professor Paul Concus, Mario Miranda studia la minimalità dei coni non simmetrici:

$$C_{hk} = \{(x,y),\ x \in \mathbb{R}^{k+1},\ y \in \mathbb{R}^{h+1},\ h\,|x|^2 < k\,|y|^2\}$$

cercando di usare i metodi introdotti in [27]. H. B. Lawson Jr in: The equivariant Plateau problem and interior regularity. Trans. Amer. Math. Soc. 173, 1972, 231-249, aveva già dimostrato che le frontiere dei coni C_{hk} sono superfici di area minima se $h + k \ge 7$ o $h = k = 3$. L'idea, usata in questo lavoro, è quella di dimostrare che una funzione del tipo $u(x,y) = (h|x|^2 - k|y|^2)(a|x|^2 + b|y|^2)$ con $a, b \in \mathbb{R}$ numeri positivi, è una sottosoluzione dell'equazione delle superfici minime in C_{hk} e una soprasoluzione nel complementare. Siccome il calcolo dell'operatore delle superfici minime per una funzione del tipo u è particolarmente complicato, Mario Miranda si è avvalso del supporto tecnico del Professor Paul Concus e dell'uso del programma VAXIMA, la versione VAX/UNIX del sistema di calcolo MACSYMA del Lawrence Berkeley Laboratory dell'Università della California. La dimostrazione che le frontiere dei coni C_{hk} sono superfici di area minima è stata riottenuta, ma con l'ipotesi aggiuntiva che $h < 5k$ e $k < 5h$.

Nel lavoro [30], Mario Miranda riprende lo studio della minimalità dei coni non simmetrici iniziata in [29]. Lo strumento che viene usato è il seguente criterio di M–concavità. Se Ω è un cono aperto di $\mathbb{R}^n$ ed $f \geq 0$ è una soprasoluzione dell'equazione delle superfici minime in Ω che si annulla nei punti della frontiera di Ω e che sia omogenea di grado diverso da 1, allora Ω è M–concavo. Ricordiamo che Ω è detto M-concavo se ogni variazione compatta di Ω che diminuisce l'insieme, aumenta il suo perimetro. Viene dimostrato che le frontiere dei coni C_{hk} sono superfici di area minima se $h + k \geq 6$ tranne i casi $(h, k) = (1, 5)$ e $(h, k) = (5, 1)$.

Il lavoro [31] contiene un breve sunto dei più recenti risultati, ottenuti usando la teoria dei perimetri, nello studio di alcuni problemi di minimo che derivano da fenomeni di capillarità. In particolare vengono ricordati risultati di esistenza e regolarità riguardanti il problema dello studio di una goccia di liquido appoggiata ad un piano o pendente da un soffitto e di una massa di fluido ruotante in assenza di gravità.

Il lavoro [32], in collaborazione col Professor Stephen Roberts, è stato scritto mentre Mario Miranda era professore visitatore presso il Lawrence Berkeley Laboratory dell'Università della California. Nella prima parte viene fatto un breve riassunto dei teoremi di regolarità presenti in letteratura per insiemi che minimizzano localmente, in presenza o meno di un vincolo di volume, un funzionale tipo curvatura, ossia un funzionale del tipo:

$$\mathcal{F}(E) = P(E) + \int_E H(x)dx$$

dove $P(E)$ è il perimetro di E ed $H \in L^1$ è una funzione assegnata. Da notare che in alcuni casi (vedi Giuseppe Congedo-Eduardo H. Gonzalez: Sul problema di Plateau con volume fissato. Quad. Univ. Lecce, 15, 1981) la presenza di un vincolo di volume può essere eliminata minimizzando liberamente il funzionale che si ottiene aggiungendo ad $\mathcal{F}$ un termine del tipo $K|H_n(E) - V_0|$, K costante positiva sufficientemente grande, V_0 il volume fissato. Nella seconda parte del lavoro si dimostra che questa particolare legge tipo "moltiplicatori di Lagrange" vale anche per i funzionali:

$$\mathcal{F}_1(u) = \int_0^1 \sqrt{1 + u'^2}dx + u(0) + u(1),$$
$$u \in BV(0,1),\ u \geq 0,$$

$$\mathcal{F}_2(E) = \alpha P(E) - \beta \iint_E (x^2 + y^2)dxdy,$$
$$\alpha, \beta \in \mathbb{R},\ \alpha, \beta > 0,\ E \subset \mathbb{R}^2.$$

Calcoli numerici su questi due funzionali, svolti sotto la guida del Professor Stephen Roberts, confermano che l'aggiunta del termine $K|H_n(E) - V_0|$ riesce a trasformare il problema di minimo con vincolo di volume in un problema di minimo libero.

In [33], Mario Miranda estende i risultati ottenuti in [9] al caso di insiemi che minimizzano un funzionale tipo curvatura:

$$\mathcal{F}(E) = P(E) + \int_E A(x)\,dx.$$

In particolare viene dimostrato che se E minimizza in un aperto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ il funzionale $\mathcal{F}$ rispetto ad un ostacolo M, se ∂M è di classe C^1 in un intorno di $x \in \partial M \cap \Omega$ e $A \in L^\infty(\Omega)$, allora esiste $\rho > 0$ tale che $\partial E \cap B_\rho(x) \in C^1$ e, se $x_h \in \partial E \cap \Omega$ converge ad x, allora $\nu_E(x_h)$ converge a $\nu_M(x)$ (dove ν_E, ν_M sono i versori normali rispettivamente a ∂E e ∂M).

L'articolo [34] è stato scritto da Mario Miranda in occasione del Simposio Internazionale organizzato a Napoli nel 1989 in onore di Renato Caccioppoli, trenta anni dopo la sua morte. Contiene una breve storia, vissuta in prima persona da Miranda, della nascita e dello sviluppo della teoria geometrica della misura a partire dalla prima definizione di “insieme di Caccioppoli” data appunto da Renato Caccioppoli nel 1951 fino ai più recenti risultati sui coni minimi e sul teorema di Bernstein ottenuti da E. Bombieri, E. De Giorgi e E. Giusti nel 1969 e passando attraverso i contributi fondamentali di E. De Giorgi, W. H. Fleming, H. Federer e F. J. Almgren. Alla fine, vengono ricordate le brillanti applicazioni della teoria degli insiemi di Caccioppoli allo studio del problema al contorno per l’equazione delle superfici minime e di problemi di capillarità, come la configurazione di un fluido in un tubo capillare, di gocce appoggiate o pendenti e di masse di fluido rotanti.

Nel lavoro [35] Mario Miranda estende un importante risultato di Γ^-–convergenza, ottenuto da Luciano Modica e Stefano Mortola in: Un esempio di Γ^-–convergenza. Boll. U.M.I. (5), 14-B, 1977, 285–289. In particolare Mario Miranda dimostra che se $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è una funzione continua e limitata per cui esiste il limite:

$$\lim_{t\to+\infty} t^{-1} \int_0^t |g(s)|\, ds = \lambda \in \mathbb{R},$$

allora:

i) per ogni successione $u_h \in L^1(\mathbb{R}^n)$ con $D\,u_h \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e convergente ad u in $L^1(\mathbb{R}^n)$ si ha:

$$\liminf_{h\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \left[h^{-1}|D\,u_h(x)|^2 + h\,g^2(h\,u_h(x))\right] dx \geq$$
$$\geq 2\,\lambda \int_{\mathbb{R}^n} |D\,u|;$$

ii) se g è periodica di periodo 1 e l’insieme degli zeri di g coincide con $\mathbb{Z}$, allora esiste una successione di funzione Lipschitziane w_h che converge ad u in $L^1(\mathbb{R}^n)$ tale che:

$$\lim_{h\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} [\,h^{-1}|D\,w_h(x)|^2 +$$
$$+\,h\,g^2(h\,w_h(x))]\,dx = 2\,\lambda \int_{\mathbb{R}^n} |D\,u|.$$

Da notare che il lavoro citato di L. Modica e S. Mortola dimostrava il risultato con $g(x) = \sin(\pi\,x)$.

Il lavoro [36] contiene il sunto di una conferenza tenuta da Mario Miranda a Milano il 29 settembre 1992 e dedicata al Professor Luigi Amerio. La conferenza illustra il risultato ottenuto da K. Ecker, G. Huisken: Mean curvature evolution of entire graphs. Ann. of Mathematics 130 (1989), 453-471, sull’esistenza e regolarità di una superficie S_t grafico di una funzione $u(\cdot, t)$ che si muove secondo la sua curvatura media, ossia che verifica la seguente equazione differenziale:

$$D_t\,u(x,t) = \sqrt{1+|D_x\,u(x,t)|^2}\,div_x\left(\frac{D_x\,u(x,t)}{\sqrt{1+|D_x\,u(x,t)|^2}}\right).$$

In [37], sunto di una conferenza tenuta a Taormina, Mario Miranda espone i risultati noti nello studio dell’esistenza e regolarità di frontiere che minimizzano un funzionale tipo curvatura media, ossia del tipo

$$F(E) = P(E) + \int_E H(x)dx.$$

In particolare viene ricordato che se $H \in L^p$ con $p > n$ dove n è la dimensione dello spazio ambiente, allora ogni minimo del funzionale F ha una frontiera ridotta di classe $C^{1,\alpha}$ e la dimensione delle eventuali singolarità ha una misura di Hausdorff H_s zero per ogni $s > n - 8$.

In [38], scritto in collaborazione col Professor Danilo Benarros, Mario Miranda riprende lo studio della minimalità dei coni non simmetrici di Lawson: $C_{h\,k} = \{(x, y),\ x \in \mathbb{R}^{k+1},\ y \in \mathbb{R}^{h+1},\ h\,|x|^2 < k\,|y|^2\}$ usando sempre i metodi introdotti in [27]. Prendendo spunto da un’idea interessante dovuta a Giorgio Sassudelli–Italo Tamanini: On the singular solution to the Plateau problem in $\mathbb{R}^8$. BUMI (6), 5-A, 1986, 111-113, gli autori riescono a trovare sottosoluzioni e soprasoluzioni dell’equazione delle superfici minime abbastanza semplici: ad esempio del tipo

$$u(x,y) = (h|x|^2 - k|y|^2)(h|x|^2)^\alpha,\ \alpha > 0,$$
$$v(x,y) = (k|y|^2 - h|x|^2)(k|y|^2)^\alpha,\ \alpha > 0.$$

Dimostrano quindi che tutti i coni $C_{h\,k}$ con $h + k \geq 6$ sono superfici di area minima eccetto C_{15} e il suo simmetrico C_{51}. Nella parte finale dell'articolo, le tecniche di calcolo sviluppate vengono usate per riottenere una dimostrazione più semplice del risultato di E. Bombieri-E. De Giorgi-E. Giusti sull'esistenza di soluzioni globali non banali dell'equazione delle superfici minime in $\mathbb{R}^n$, $n \geq 8$. I calcoli vengono sviluppati usando il programma Mathematica. Va notato che nel caso che $x, y \in \mathbb{R}^n$, $n \geq 5$ il risultato viene ottenuto con notevole semplificazione rispetto al metodo usato da Bombieri–De Giorgi–Giusti.

In [39], scritto in occasione del settantesimo compleanno del Professor Enrico Magenes, Mario Miranda mette in risalto come i calcoli sviluppati da E. Bombieri, E. De Giorgi ed E. Giusti per trovare una soluzione non banale dell'equazione delle superfici minime, possono essere notevolmente semplificati nel caso $n = 8$ usando programmi di calcolo tipo Mathematica (vedi anche [38]).

In [40], Mario Miranda fa una breve panoramica di come il problema di Bernstein è stato affrontato e risolto.

In [41], Mario Miranda estende la dimostrazione dell'esistenza di linee geodetiche, data da D. Hilbert nel 1899, al caso di curve contenute in uno spazio metrico con la proprietà che ogni sottoinsieme limitato e chiuso sia compatto.

In [42], usando la diseguaglianza isoperimetrica e seguendo una tecnica introdotta da E. De Giorgi in Sulla differenziabilità e analiticità delle estremali degli integrali multipli regolari. Mem. Accad. Sci. Torino, 3, 1957, 25-43, Mario Miranda dimostra una diseguaglianza di Sobolev del tipo:

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |g|^{p\,\alpha} dx\right)^{\frac{1}{\alpha}} \leq c(n,p,\alpha)|K|^{\frac{1}{\alpha}+\frac{p}{n}-1} \int_{\mathbb{R}^n} |D\,g|^p\, dx$$

valida

$$\forall g \in C_0^1(\mathbb{R}^n),\ \forall p \in [1, n],\ \forall \alpha \in \left[1, \frac{n}{n-p}\right)$$

dove $K =$ supporto di g, $|K|$ è la misura di Lebesgue di K e $c(n,p,\alpha)$ è una costante positiva che dipende solo da n, p, α. Va notato che la tecnica di dimostrazione usata permette di ottenere il risultato anche in situazioni diverse dallo spazio Euclideo $\mathbb{R}^n$, in particolare per funzioni $g : M \to \mathbb{R}$ dove o $M = \{(x, u(x)),\ x \in \Omega\}$ con $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto convesso e $u \in C^2(\Omega)$ soluzione dell'equazione delle superfici minime o $M = S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1},\ |x| = 1\}$.

Nell'articolo [43], scritto in memoria di Ennio De Giorgi, Mario Miranda mette in risalto come il concetto di soluzione generalizzata dell'equazione delle superfici minime, da lui introdotto in [21], può essere applicato allo studio delle frontiere minime sia regolari che singolari, con particolare riferimento al problema di Dirichlet, al problema di Bernstein e al problema delle singolarità eliminabili.

Nel lavoro [44], scritto in collaborazione col Professor Eduardo Gonzalez e con me, vengono messe in risalto alcune proprietà degli insiemi di frontiera minima E in un aperto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ usando la funzione densità:

$$\phi(x,\rho) = \phi_E(x,\rho) = \rho^{1-n}\, P(E,\ B_\rho(x)),$$
$$x \in \partial E \cap \Omega, \quad \rho \in (0,\ dist(x, \partial\Omega)).$$

Una prima proprietà, conseguenza del fatto che la funzione ϕ è monotona non decrescente in ρ, è che, se per qualche $r \in (0,\ dist(x,\ \partial\Omega))$, $\phi(x,\ r) = \omega_{n-1}$ (dove ω_{n-1} è la misura della sfera unitaria $(n-1)$–dimensionale), allora esiste un semispazio $S \subset \mathbb{R}^n$ tale che

$$E \cap B_\rho(x) = S \cap B_\rho(x),\ \forall \rho \in (0,\ dist(x,\ \partial\Omega)).$$

Un'applicazione della diseguaglianza di Harnack stabilita da E. Bombieri-E. Giusti in Harnack's inequality for elliptic differential equations on minimal surfaces. Inventiones Math, 15, 1972, 24-46, permette di dimostrare che se C è un cono minimo in $\mathbb{R}^n$ e il cono traslato $C + v$ ($v \in \mathbb{R}^n$, $v \neq 0$) è strettamente contenuto in C, allora C deve essere un semispazio. Come conseguenza si ottiene che, se C_1, C_2 sono due coni minimi singolari di $\mathbb{R}^n$ e $C_1 \subset C_2$, allora $C_1 = C_2$. Il lavoro si conclude provando che se C è un cono minimo in $\mathbb{R}^n$, allora esiste un insieme di frontiera minima su tutto $\mathbb{R}^n$ diverso dal vuoto e strettamente contenuto in C ed infine, se indichiamo con

$$\alpha(n) = \inf\{\phi_C(0,1),$$
$$C \text{ cono minimo singolare di vertice l'origine}\}$$

risulta che $\alpha(n) > \omega_{n-1}$ è un minimo e quindi è la densità minima che può avere un cono minimo singolare. È interessante osservare che se C è un cono minimo singolare di vertice l'origine con densità minima $\alpha(n)$ ed E è un insieme con frontiera minima non vuoto e strettamente contenuto in C, allora ∂E è una varietà regolare.

In [45], dedicato al Professor Calogero Vinti, in occasione del suo settantesimo compleanno, Mario Miranda mette in risalto le proprietà conosciute delle frontiere minime all'interno di una sfera $B \subset \mathbb{R}^n$, concludendo coll'osservazione inedita che l'estremo superiore dei perimetri in B delle frontiere che hanno area minima in B è $\frac{1}{2} H_{n-1}(\partial B)$.

L'articolo [46], scritto da Mario Miranda in collaborazione coi Professori Luigi Ambrosio, Gianni Dal Maso, Marco Forti e Sergio Spagnolo, è dedicato al ricordo del Professor Ennio De Giorgi, scomparso, dopo una grave malattia il 25 ottobre 1996. Viene fatta una descrizione breve ma completa della grande attività del Professor Ennio De Giorgi non solo scientifica, ma anche civile, politica e religiosa. L'attività scientifica di Ennio De Giorgi viene descritta attraverso le sue tappe salienti: i primi lavori, lo sviluppo della teoria dei perimetri, la risoluzione del XIX problema di Hilbert, lo studio del problema di Plateau, le equazioni alle derivate parziali e i fondamenti della Γ-convergenza, i problemi asintotici del Calcolo delle Variazioni, fino ai più recenti sviluppi nello studio di problemi con discontinuità libere, l'evoluzione secondo curvatura media, i movimenti minimizzanti e lo studio di superfici minime in spazi metrici. L'articolo contiene una bibliografia accurata dell'attività scientifica del Professor Ennio De Giorgi, suddivisa per anno.

In [47], Mario Miranda ottiene due nuove stime a priori per il gradiente di soluzioni dell'equazione delle superfici minime, la cui dimostrazione è indipendente da quella ottenuta in [12]. Vengono qui usati i risultati ottenuti in [21] e una diseguaglianza tipo Harnack ottenuta da Enrico Bombieri e Enrico Giusti in Harnack's inequality for elliptic differential equations on minimal surfaces. Invent. Math. 15, 1972, 24-46. Con precisione, le stime ottenute da Mario Miranda sono: $\forall n \geq 2$, esistono due funzioni $g_1,\ g_2\ : [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ tali che, se u è una soluzione dell'equazione delle superfici minime in una sfera $B_\rho(x_0) \subset \mathbb{R}^n$, allora:

$$|D\,u(x_0)| \leq g_1\left(\rho^{-n-1}\int_{B_\rho(x_0)} [(u(x)-u(x_0)) \vee 0]\,dx\right)$$

$$|D\,u(x_0)| \leq g_2\left(\rho^{-n}\int_{B_\rho(x_0)} \sqrt{1+|D\,[(u(x)-u(x_0)) \vee 0]|^2}\,dx\right).$$

In [48], Miranda narra alcuni avvenimenti, vissuti in prima persona, che portarono alla risoluzione di due dei 23 problemi che David Hilbert espose al Congresso Internazionale dei Matematici di Parigi del 1900. In particolare si parla della comunicazione del Professor Ennio De Giorgi al V Congresso dell'UMI nell'ottobre del 1955 dal titolo: Alcune applicazioni al Calcolo delle Variazioni di una Teoria della Misura k–dimensionale, nella quale era contenuta la risoluzione del XIX problema di Hilbert e della collaborazione, nata negli anni 1968-69, a Pisa tra M. Miranda, E. De Giorgi ed E. Bombieri, arrivato a Pisa come professore ordinario nel 1966. Questa collaborazione portò alla risoluzione del XX problema di Hilbert per quanto riguarda l'equazione delle superfici minime colla dimostrazione di una maggiorazione a priori per il gradiente di una soluzione di tale equazione.

Il lavoro [49] ricalca, con qualche informazione in più ed in lingua inglese quanto esposto in [34].

Il lavoro [50] contiene un breve riassunto degli ultimi risultati significativi ottenuti nell'ambito del Calcolo delle Variazioni ed è stato scritto da Miranda per l'Enciclopedia: Storia delle Scienze, Volume 8: La seconda rivoluzione scientifica, pubblicata dall'Istituto dell'Enciclopedia Italiana. Vogliamo qui ricordare per completezza che M. Miranda aveva già collaborato in precedenza coll'Istituto dell'Enciclopedia Italiana, scrivendo (in collaborazione con altri) per l'Enciclopedia Treccani il materiale relativo alla voce: Equazioni.

In [51], Mario Miranda riconsidera i risultati ottenuti in [20] ossia che se $\Omega \subset \mathbb{R}^n,\ n \geq 2, K \subset \Omega$ è un insieme chiuso con $H_{n-1}(K) = 0$, allora se $u \in C^2(\Omega \setminus K)$ è una soluzione dell'equazione delle superfici minime, allora u si può estendere ad una funzione regolare su tutto Ω ed ivi soluzione dell'equazione delle superfici minime. La dimostrazione fornita in questo lavoro è più semplice di quella contenuta in [20] ed è basata sulle tecniche introdotte in [21].

In [52] il Professor Mario Miranda prende brevemente in esame la riforma universitaria del $3 + 2$ e come tale riforma abbia causato la scomparsa del Biennio propedeutico offerto dalle Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali. I corsi del Biennio propedeutico erano seguiti da studenti che intendevano conseguire la Lauree in Matematica, Fisica ed Ingegneria, tutti insieme nella stessa aula. Per Mario Miranda il Biennio propedeutico era stato uno strumento molto efficace per tanti decenni e, la nuova riforma con la separazione dei tre corsi di Laurea fin dell'inizio, avrebbe avuto conseguenze negative se non prontamente corretta. A sostegno delle sue affermazioni Miranda riporta i pareri dei Professori Ennio De Giorgi, Alessandro Faedo e Salvatore Settis.

Il lavoro [53] contiene le note delle lezioni tenute da Mario Miranda per il Corso di Dottorato presso l'Università di Lecce ed è suddiviso in quattro argomenti principali:

1. Il metodo diretto del Calcolo delle Variazioni e il XIX Problema di Hilbert.
2. L'equazione delle superfici minime, il Teorema di Bernstein e le singolarità eliminabili.
3. Il calcolo differenziale sulle varietà di codimensione uno e le sue applicazioni.
4. Esistenza di un cono minimo singolare e di una soluzione intera non banale.

Il lavoro [54] contiene una testimonianza del periodo trascorso da Mario Miranda presso la Scuola Normale Superiore di Pisa e prende in esame l'attività di Ennio De Giorgi e dello stretto gruppo dei suoi collaboratori nel periodo 1955-74. Molto interessanti sono i resoconti che Miranda fa di alcuni avvenimenti significativi nella vita della comunità matematica di quel periodo, come

- il teorema di De Giorgi-Nash,
- la ripresa dei congressi mondiali dell'IMU (International Mathematical Union),
- l'incontro di E. De Giorgi con E. Bombieri,
- i risultati ottenuti ed i riconoscimenti conseguiti (E. Bombieri vince la Medaglia Fields nel 1974 e E. De Giorgi il Premio Wolf nel 1990).

In [55], dedicato alla memoria di Guido Stampacchia e scritto anche con la collaborazione di Michele Miranda Jr. e mia, si riconsidera il famoso risultato di E. Bombieri-E. De Giorgi-E. Giusti sull'esistenza di soluzioni globali non banali dell'equazione delle superfici minime. L'intenzione è quella di rendere più accessibili i difficili calcoli contenuti nell'articolo originale. Per fare questo viene usato il programma di calcolo Mathematica.

Il lavoro [56], scritto da Mario Miranda in occasione dell'ottantesimo compleanno del Professor Manfredo do Carmo, contiene un breve racconto degli avvenimenti che portarono all'importante risultato di E. Bombieri, E. De Giorgi ed E. Giusti, più volte citato, relativo alla dimostrazione della minimalità del cono di Simons e all'esistenza di soluzioni definite in tutto lo spazio $\mathbb{R}^8$ e non lineari dell'equazione delle superfici minime.

Vorrei ringraziare, per avermi dato la possibilità di scrivere questo ricordo di Mario ed avermi aiutato a raccogliere il materiale relativo agli ultimi anni, i figli di Mario, Marco Miranda e Michele Miranda Jr., mio collega e caro amico a Ferrara e la moglie Bruna, pure laureata in matematica, persona squisita e che stimo moltissimo. A tutti loro va il mio affetto.

Voglio infine precisare che la bibliografia contenuta in questa nota non ha la pretesa di essere completa. Molto materiale dattiloscritto, trovato tra le carte del Professor Mario Miranda e relativo a conferenze e corsi da lui tenuti nella gran quantità di università italiane e straniere che ha visitato, non è stato qui inserito.

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

[1] Mario Miranda. *Distribuzioni aventi derivate misure, insiemi di perimetro localmente finito*. Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa (3)18, 1964, 27-56.

[2] Mario Miranda. *Superfici cartesiane generalizzate ed insiemi di perimetro localmente finito sui prodotti cartesiani*. Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa (3)18, 1964, 515-542.

[3] Mario Miranda. *Un teorema di esistenza e unicità per il problema dell'area minima in* n *variabili*. Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa (3) 19, 1965, 233-249.

[4] Mario Miranda. *Sul minimo dell'integrale del gradiente di una funzione*. Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa (3) 19, 1965, 627-665.

[5] Mario Miranda. *Analiticità delle superfici di area minima in* $\mathbb{R}^4$. Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. (8) 38, 1965, 632-638.

[6] Mario Miranda. *Diseguaglianze di Sobolev sulle ipersuperfici minimali*. Rend. Sem. Mat. Univ. Padova **38**, 1967, 69-79.

[7] Mario Miranda. *Una maggiorazione integrale per le curvature delle ipersuperfici minimali*. Rend. Sem. Mat. Univ. Padova **38**, 1967, 91-107.

[8] Mario Miranda. *Sulle singolarità delle frontiere minimali*. Rend. Sem. Mat. Univ. Padova **38**, 1967, 180-188.

[9] Mario Miranda. *Comportamento delle successioni convergenti di frontiere minimali*. Rend. Sem. Mat. Univ. Padova **38**, 1967, 238-257.

[10] Enrico Giusti, Mario Miranda. *Un esempio di soluzioni discontinue per un problema di minimo relativo ad un integrale regolare del Calcolo delle Variazioni*. Boll. Un. Mat. Ital. (**4**) 1, 1968, 219-226.

[11] Enrico Giusti, Mario Miranda. *Sulla regolarità delle soluzioni deboli di una classe di sistemi ellittici quasilineari*. Arch. Rational Mech. Anal. **31**, 1968, 173-184.

[12] Enrico Bombieri, Ennio de Giorgi, Mario Miranda. *Una maggiorazione a priori relativa alle ipersuperfici minimali non parametriche*. Arch. Rational Mech. Anal. **32**, 1969, 255-267.

[13] Mario Miranda. *Nouveaux résultats pour les hypersurfaces minimales*. Actes du Congrès International des Mathématiciens (Nice, 1970), Tome 2, pp. 853-858. Gauthier-Villars, Paris, 1971.

[14] Mario Miranda. *Frontiere minimali con ostacoli*. Ann. Univ. Ferrara Sez. VII **16**, 1971, 29-37.

[15] Mario Miranda. *Un principio di massimo forte per le frontiere minimali e una sua applicazione alla risoluzione del problema al contorno per l'equazione delle superfici di area minima*. Rend. Sem. Mat. Univ. Padova **45**, 1971, 355-366.

[16] Mario Miranda. *Existence and regularity of hypersurfaces of* $\mathbb{R}^n$ *with prescribed mean curvature. Partial differential equations* (Proc. Sympos. Pure Math., Vol. XXIII, Univ. California, Berkeley, Calif., 1971), 1-9. Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1973.

[17] Mario Miranda. *Boundaries of Caccioppoli sets in the Calculus of Variations. Geometric measure theory and minimal surfaces* (Centro Internaz. Mat. Estivo (C.I.M.E.), III Ciclo, Varenna, 1972), 189-220. Edizioni Cremonese, Roma, 1973.

[18] Mario Miranda. *Dirichlet problem with* L^1 *data for the non-homogeneous minimal surface equation*. Indiana Univ. Math. J. **24**, 1975, 227-241.

[19] Mario Miranda. *Frontiere minime, Monografias de Matemática* n. **27**, IMPA (Instituto de Matemática Pura e Applicada), Rio de Janeiro, 1976.

[20] Mario Miranda. *Sulle singolarità eliminabili delle soluzioni dell'equazione delle superficie minime*. Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (**4**) 4, 1977, 129-132.

[21] Mario Miranda. *Superficie minime illimitate*. Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, (**4**) 4, 1977, 313-322.

[22] Mario Miranda. *Grafici minimi completi*. Ann. Univ. Ferrara Sez. VII, **23**, 1977, 269-272.

[23] Mario Miranda. *Solutions of the equation of minimal surfaces in an infinite open set.* Proceedings of the Twelfth Brazilian Mathematical Colloquium, Vol. I, II (Poços de Caldas, 1979), pp. 249–255, Cons. Nac. Desenvolvimento Ci. Tec., Inst. Mat. Pura Apl., Rio de Janeiro, 1981.

[24] Mario Miranda. *Il problema di Dirichlet per l'equazione delle superfici minime*. Rend. Sem. Mat. Fis. Milano **50**, 1980, 117-121.

[25] Mario Miranda. *Recenti progressi nel Calcolo delle Variazioni*. Boll. Un. Mat. Ital. A (**5**) 17, 1980, 209-225.

[26] Mario Miranda. *Compactness of solutions to the minimal surface equation*. Ennio De Giorgi colloquium (Paris, 1983), 114–118, Res. Notes in Math., 125, Pitman, Boston, MA, 1985.

[27] Umberto Massari, Mario Miranda. *A remark on minimal cones*. Boll. Un. Mat. Ital. A (**6**) 2, 1983, 123-125.

[28] Umberto Massari, Mario Miranda. *Minimal surfaces of codimension one*. Notas de Matematica 95, North Holland, Amsterdam, 1984.

[29] Paul Concus, Mario Miranda. *MACSYMA and minimal surfaces. Geometric measure theory and the Calculus of Variations* (Arcata, Calif., 1984), 163-169, Proc. Sympos. Pure Math., 44, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1986.

[30] Mario Miranda. *Some remarks about a free boundary type problem. Theory and applications of liquid crystals* (Minneapolis, Minn., 1985), 271-280, IMA Vol. Math. Appl., 5, Springer, New York, 1987.

[31] Mario Miranda. *A mathematical description of equilibrium surfaces. Variational methods for free surface interfaces* (Menlo Park, Calif., 1985), 85-89, Springer, New York, 1987.

[32] Mario Miranda. Stephen Roberts. *Lagrange multipliers and geometric measure theory*. Rend. Sem. Mat. Univ. Padova **74**, 1985, 219-224.

[33] Mario Miranda. *Effetto regolarizzante degli ostacoli sulle ipersuperfici di curvatura media limitata*. Ricerche di Matematica, Suppl. **36**, 1987, 111-115.

[34] Mario Miranda. *Renato Caccioppoli e la teoria geometrica della misura*. International Symposium in honor of

Renato Caccioppoli (Napoli, 1989). Ricerche Mat. **40** (1991), suppl., 111-118.
[35] Mario Miranda. *Sulla variazione del gradiente di una funzione*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, **88**, 1992, 229-243.
[36] Mario Miranda. *Movimento di superfici: approccio intrinseco. Proceedings of the Second International Conference on Partial Differential Equations* (Milan, 1992). Rend. Sem. Mat. Fis. Milano **62**, 1992, 127-136.
[37] Mario Miranda. *Surfaces with prescribed mean curvature. Current problems of analysis and mathematical physics* (Taormina, 1992), 183-187, Univ. Roma "La Sapienza", Roma, 1993.
[38] Danilo Benarros, Mario Miranda. *Lawson cones and the Bernstein theorem. Advances in geometric analysis and continuum mechanics* (Stanford, CA, 1993), 44-56, Int. Press, Cambridge, MA, 1995.
[39] Mario Miranda. *A nontrivial solution to the minimal surface equation in* $\mathbb{R}^8$. *Boundary value problems for partial differential equations and applications*, 399-402, RMA Res. Notes Appl. Math., **29**, Masson, Paris, 1993.
[40] Mario Miranda. *Il teorema di Bernstein*. Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena **43**, 1995, 203-207.
[41] Mario Miranda. *Geodesic lines in metric spaces. Variational methods for discontinuous structures* (Como, 1994), 119-122, Progr. Nonlinear Differential Equations Appl., **25**, Birkhäuser, Basel, 1996.
[42] Mario Miranda. *Diseguaglianze isoperimetriche e diseguaglianze di Sobolev*. Rend. Sem. Mat. Univ. Padova **97**, 1997, 187-191.
[43] Mario Miranda. *Maximum principles and minimal surfaces. Dedicated to Ennio De Giorgi*. Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (**4**) 25, 1997, 667-681.
[44] Eduardo Gonzalez, Umberto Massari, Mario Miranda. *On minimal cones*. Appl. Anal. **65**, 1997, 135-143.
[45] Mario Miranda. *Frontiere minime all'interno di una sfera. Dedicato al Professor Calogero Vinti in occasione del suo settantesimo compleanno*. (Perugia, 1996). Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena, Suppl. **46**, 1998, 249-256.
[46] Luigi Ambrosio, Gianni dal Maso, Marco Forti, Mario Miranda , Sergio Spagnolo. *Ennio De Giorgi*. Boll. Unione Mat. Ital. Sez. B Artic. Ric. Mat. (8) 2, 1999, no. 1, 3-31.
[47] Mario Miranda. *Gradient estimates and Harnack inequalities for solutions to the minimal surface equation*. Atti Accad. Naz. Lincei Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. Rend. Lincei, (**9**) 11, 2000, 27-30.
[48] Mario Miranda. *La matematica di De Giorgi e i problemi di Hilbert*, Atti dell'Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti, **160**, 2001-2002, 301-307.
[49] Mario Miranda. *Caccioppoli sets*. Atti Accad. Naz. Lincei Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. Rend. Lincei (**9**) 14, 2003, no. 3, 173-177 .
[50] Mario Miranda. *Calcolo della Variazioni, Storia della Scienza*, Vol. 8, *La seconda rivoluzione scientifica*, *Parte III Nuovi sviluppi dell'Analisi*, Cap. 22, Istituto dell'Enciclopedia Italiana, 2004, 175-177.
[51] Mario Miranda. *Sulle singolarità eliminabili delle soluzioni dell'equazione delle superfici minime*. Rend. Accad. Naz. Sci. XL Mem. Mat. Appl. (**5**) 29, 2005, 281-285.
[52] Mario Miranda. *La riforma universitaria e gli studi scientifici, la Matematica e la Fisica nel Biennio propedeutico*, Atti dell'Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti, 164, 2005-2006, 1-6.
[53] Mario Miranda. *Superficie minime e il Problema di - Plateau*. Quaderni dell'Università di Lecce. Lecce. 2006.
[54] Mario Miranda. *La Scuola Normale di Pisa, 1955-74: una testimonianza, La matematica I – I luoghi e i tempi*, a cura di Claudio Bartucci e Piergiorgio Odifreddi, Einaudi, 2007, 691-709.
[55] Umberto Massari, Mario Miranda , Michele Miranda Jr. *The Bernstein theorem in higher dimensions*. Boll. Unione Mat. Ital. (**9**) 1, 2008, no. 2, 349-359.
[56] Mario Miranda. *Recollections on a conjecture in mathematics*. Mat. Contemp. **35**, 2008, 143-150.


Massari Umberto

Nato a Ferrara il 7/7/1948, laureatosi a Ferrara nel 1971 col Professor Mario Miranda è stato Professore a Trento, Palermo e a Ferrara (dal 1984 ad ora). Usando i metodi diretti del Calcolo delle Variazioni e le tecniche della teoria geometrica della misura, ha svolto ricerche nel campo delle frontiere orientate con curvatura media assegnata in senso debole con particolare riferimento a teoremi di esistenza e regolarità. Su tali argomenti è coautore di un libro e di 34 articoli apparsi su riviste nazionali ed internazionali.