Matematica, Cultura e Società

Rivista dell'Unione Matematica Italiana

Gabriele Lolli

Cantor e le antinomie

Matematica, Cultura e Società. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **3** (2018), n.3, p. 193–209.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=RUMI_2018_1_3_3_193_0>

Matematica, Cultura e Società. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2018.

Matematica, Cultura e Società – Rivista dell'Unione Matematica Italiana
Serie I, Vol. 3, N. 3, Dicembre 2018, 193-209

Cantor e le antinomie

GABRIELE LOLLI
Accademia delle Scienze di Torino
E-mail: gabrielelolli42@gmail.com

Sommario: *Cantor ebbe subito chiaro, all'inizio della sua costruzione dei numeri transfiniti, nei primi anni ottanta del diciannovesimo secolo, che non tutte le collezioni concepibili possono essere ammesse come insiemi; la totalità degli ordinali era per lui un simbolo dell'Assoluto; in matematica conduceva ad antinomie; cercò di escluderle plasmando un'adeguata ma ambigua definizione di "insieme"; negli ultimi anni del secolo, nella corrispondenza con Hilbert e Dedekind, egli fu tentato tuttavia dall'usare tali collezioni per chiudere le grandi questioni aperte della teoria, come la confrontabilità dei cardinali e il teorema del buon ordine, che saranno chiarite in seguito da Zermelo.*

Abstract: *Cantor was aware, from the beginning of his work on infinite numbers in the early eighties of the 19th century, that not all conceivable collections could be assumed as existent sets; the totality of ordinal numbers was for him a symbol of the Absolute; in mathematics it led to antinomies; he tried to exclude such collections by carefully but ambiguously shaping the definition of "set". In the end, he was tempted however to use them, in correspondence with Hilbert and Dedekind, to prove the great open questions of the theory, such as the trichotomy for cardinals and the well-ordering theorem, which were due to be solved later by Zermelo.*

Gli storici della matematica hanno ormai definitivamente documentato come Georg Cantor (1845-1918), nel corso della costruzione della sua *Mannigfaltigkeitslehre* (teoria delle varietà [insiemi]), sia venuto a riconoscere la possibilità di antinomie anche prima del clamore suscitato da Bertrand Russell (1872-1970) nel 1903 con la pubblicazione della contraddizione che aveva comunicato a Gottlob Frege (1848-1925) nel 1901. ([1]) Meno noto al pubblico è in che occasione le abbia incontrate, sotto quale forma, e soprattutto come abbia reagito.

In questo articolo mostreremo come Cantor, individuate possibili contraddizioni, non le considerò antinomie causate dall'applicazione della logica all'infinito, quanto piuttosto caratteristiche del concetto di insieme che stava costruendo attraverso i risultati che accumulava, e che ne suggerivano una più precisa determinazione; in particolare riconobbe la necessità di una distinzione tra molteplicità che potevano e altre che non potevano essere oggetto di studio matematico; in seguito tale distinzione è stata espressa con i termini rispettivamente di "insieme" e di "classe", o classe propria.

Cantor discusse le difficoltà che intravedeva nella corrispondenza con David Hilbert (1862-1943) e con Richard Dedekind (1831-1916) negli ultimi anni del diciannovesimo secolo, e saranno quindi questi personaggi i principali protagonisti della nostra storia.

Alcuni dei problemi ancora aperti erano stati recalcitranti a ogni tentativo di dimostrazione anche perché, si capirà in seguito, coinvolgevano principi non ancora identificati, come il principio moltiplicativo di Ernst Zermelo (1871-1953). Proprio per risolvere questi problemi Cantor cercò di utilizzare forme di ragionamento che coinvolgevano in modo coerente classi proprie quali la totalità degli ordinali e la totalità dei cardinali, forme di ragionamento che, usate ingenuamente, avrebbero prodotto le antinomie del massimo ordinale e del massimo cardinale.

Ma nella letteratura secondaria e nell'opinione comune continua a prevalere il resoconto catastrofista di [Russell 1903] sull'impatto delle antinomie, per cui sembra doveroso approfittare di questa occasione anche per raddrizzare alcune storture storiche, per esempio quella relativa all'antinomia di Burali-Forti.

Accettato: il 11 luglio 2018.

([1]) [Russell 1903, cap. 10, La contraddizione]. Russell le chiamava inizialmente contraddizioni. Studi generali sulla vita e l'opera Cantor sono [Dauben 1979], [Hallett 1984], [Purkert e Ilgauds 1987], [Ferreirós 2007], [Lolli 2011].

1. – Burali-Forti, 1897

In [Burali-Forti 1897a] Cesare Burali-Forti (1861-1931) pubblicò il risultato che porta il suo nome, ma con una formulazione diversa da quella comunemente conosciuta. Fu Russell a battezzare col nome di antinomia di Burali-Forti, in [Russell 1902] e in [Russell 1903], la seguente affermazione: "si sistemino tutti i numeri ordinali in ordine di grandezza; allora l'ultimo di essi, che chiameremo $\mathcal{L}$, sarà il massimo numero ordinale. Senonché il numero di tutti gli ordinali da 0 fino a $\mathcal{N}$ è $\mathcal{N}+1$, che è maggiore di $\mathcal{N}$". (2)

Il primo studio degli insiemi bene ordinati da parte di Burali-Forti risaliva al 1894; [Burali-Forti 1894] era una premessa al successivo lavoro del 1897, un esercizio di formalizzazione delle definizioni di classi bene ordinate e numeri ordinali esposte in [Cantor 1886]. (3)

La definizione di classe bene ordinata era del tutto travisata già in questo primo lavoro, come lo sarà nel 1897: Burali-Forti definiva una classe *u bene ordinata in un senso* da α, dove α è una funzione che a ogni elemento x di u associa l'insieme dei seguenti di x, se

1. ogni individuo di u ha l'immediato seguente, e
2. esiste almeno un individuo di u che non ha precedenti. (4)

Definiva u bene ordinata in due sensi da α se

1. ogni individuo di u ha l'immediato seguente, e
2. non esistono individui di u che non hanno precedenti.

Nel lavoro erano quindi definite la concatenazione di due classi ordinate e anche di una classe ordinata di classi ordinate, quindi la somma e il prodotto. Si definiva la relazione di similitudine "secondo Cantor", quindi in corrispondenza a tale relazione di equivalenza si introducevano i tipi d'ordine, (5) che quando le classi sono bene ordinate "sono i numeri *ordinali* o *transfiniti* del Cantor".

Si osservava infine che per una classe bene ordinata sono soddisfatti gli assiomi dell'aritmetica, escluso il principio di induzione completa, e che la classe dei numeri naturali si può definire per astrazione da una classe bene ordinata che soddisfi il principio di induzione completa.

Nel 1897 Burali-Forti esordiva con la seguente dichiarazione: "Scopo di questa Nota è di dimostrare, che effettivamente esistono dei *numeri transfiniti* (*) (o *tipi d'ordine*) a, b tali che, a non è uguale, non è minore e non è maggiore di b". (6)

Definiva quindi "perfettamente ordinate" le classi ordinate tali che

(a) hanno un minimo,
(b) ogni elemento che ha un successore ha un immediato successore e
(c) ogni elemento x o non ha un immediato predecessore, o ha un predecessore y che non ha immediato predecessore ed è tale che tra y e x ci sono un numero finito di elementi.

Definiva gli ordinali come i tipi d'ordine delle classi perfettamente ordinate, e ordinava la classe di tutti gli ordinali con la relazione per cui se a è il tipo d'ordine di α e b il tipo d'ordine di β, allora $a < b$ se e solo se α è simile a un segmento iniziale di β e non a β; la classe risulta perfettamente ordinata, se l'ordine è totale, e indicando con Ω il suo tipo d'ordine Burali-Forti arrivava alla contraddizione

$$\Omega+1>\Omega \text{ e } \Omega+1\leq\Omega.$$

Non la considerava un paradosso, ma la conclusione di una dimostrazione per assurdo che gli ordinali non

(2) [Russell 1903, trad. it. p. 24]. Continuiamo a usare la dizione ormai invalsa di "antinomia di Burali-Forti" per questa formulazione, o quella analoga nella forma che la classe di tutti gli ordinali è un ordinale, e quindi dovrebbe appartenere a se stessa, ed essere minore di qualche ordinale. Anche il matematico E. H. Moore (1862-1932) aveva scoperto questa circostanza per conto proprio un po' dopo Burali-Forti e nel 1898 l'aveva comunicata per lettera a Cantor, di cui non si conoscono i commenti; all'epoca Cantor aveva giù utilizzato lui stesso l'antinomia; Russell non era al corrente della scoperta di Moore, né di quella di Cantor. Si veda [Grattan-Guiness 2000, p. 313]

(3) Cantor definiva un insieme "ben ordinato" se esso era ordinato da un "buon ordine", cioè da una relazione che oltre ad essere un ordine totale godeva della proprietà che ogni sottoinsieme non vuoto aveva un minimo.

(4) Nella terminologia di Peano e dei suoi seguaci, ma anche di Russell, "classe" significava "insieme".

(5) Secondo la concezione di Peano, i tipi d'ordine non erano le classi di equivalenza, ma enti astratti associati alle classi di equivalenza.

(6) La nota (*) contiene il riferimento a [Cantor 1895-97] e alla sua traduzione nella *Rivista di Matematica* di Peano.

sono tutti confrontabili tra loro rispetto alla grandezza, avendo preso tale proposizione come assunzione.

Quando aveva introdotto tale assunzione, aveva affermato che "non ci è possibile dimostrar[la]"; la non dimostrabilità è certo alla fine conseguenza dell'intero argomento per assurdo, se tutti i suoi passi sono corretti e ammissibili, inclusa la definizione di Ω. Ma l'impressione è che Burali-Forti non la sapesse dimostrare, altrimenti non si vede perché focalizzarsi su quella e non per esempio sulla irriflessività. La proprietà di confrontabiltà era stata dimostrata invece da Cantor per i suoi ordinali nella seconda parte di [Cantor 1895-97]; la prova era per induzione sui buoni ordini, un tipo di argomento che Burali-Forti dimostrava di ignorare, allora e in seguito.

Si suppone usualmente che Burali-Forti non abbia prestato la debita attenzione alla definizione degli insiemi bene ordinati di Cantor; (7) si interpreta la nota [Burali-Forti 1897b] come una ammissione del suo equivoco; in questa nota, inserita nello stesso volume dei *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, Burali-Forti riconosceva che la definizione di Cantor era diversa, e le classi bene ordinate di Cantor sono perfettamente ordinate, ma non viceversa; infatti proponeva un controesempio: una classe ordinata composta da un primo segmento di tipo ω seguito da una successione decrescente di classi tutte di tipo ω.

Sembra certo che nel 1894 Burali-Forti abbia equivocato sulla definizione; tuttavia il fatto che nel 1897 cambi la terminologia e aggiunga la condizione (c) fa sospettare che egli pensasse di aver trovato una caratterizzazione diversa dei buoni ordini, o almeno lo credesse senza esserne del tutto sicuro, da cui le varianti terminologiche, e una incertezza presto chiarita con il controesempio nella nota aggiuntiva.

Burali-Forti notava peraltro ivi che i suoi risultati non avevano fatto uso della condizione del buon ordine, e restavano validi. Sarà Russell a sottolineare che i suoi argomenti valgono anche per le classi bene ordinate, come è ovvio essendo queste perfettamente ordinate. In una lettera a Grace Chisholm Young (1868-1944) del 9 marzo 1907, riportata in [Ewald 1996, p. 925], Cantor protesterà con chi considerava Ω un insieme, come Schönflies, e dirà che quello che ha prodotto Burali-Forti è "del tutto insensato [...] non ha neanche capito correttamente la definizione di insieme bene ordinato".

2. – Problemi aperti

Dopo la pubblicazione della sintesi dei "Beiträge" del 1895-97 ("Contributi alla fondazione della teoria degli insiemi transfiniti") restavano aperti diversi problemi che Cantor non riusciva a risolvere.

Uno era l'antisimmetria della relazione $\leq$ tra cardinali, vale a dire, in base alla definizione, che se un insieme A è equipotente a un sottoinsieme di B e B è equipotente a un sottoinsieme di A, allora A e B sono equipotenti. Due insiemi si dicono equipotenti (o equivalenti) se esiste tra di essi una corrispondenza biunivoca. La proprietà era importante per la teoria di Cantor, tanto che una volta dimostrata venne ad assumere il carattere di teorema, noto come teorema di Cantor-Bernstein, o anche teorema di equivalenza. (8) In una lettera del novembre 1882 Cantor aveva confessato a Dedekind le sue difficoltà a dimostrare il lemma che è la chiave per la dimostrazione del teorema: Se $M'' \subset M' \subset M$ ed esiste una corrispondenza biunivoca tra M ed M'', allora M' ha la stessa potenza di M. (9)

Cantor aveva fatto riferimento due volte a questo lemma, una prima volta (1883), prevedendo di dimostrarlo nella costruzione della sua teoria degli ordi-

(7) La definizione di "buon ordine" non era evidentemente agevole da assimilare; anche Jacques Hadamard (1865-1963), nel 1897, al primo Congresso internazionale dei matematici di Zurigo, ne diede una presentazione errata (in [Hadamard 1898]), a quanto affermato in Grattan-Guiness 2000, p. 136].

(8) In [Zermelo 1908b] il teorema è enunciato nel seguente modo: "27. Teorema di equivalenza. Se ciascuno dei due insiemi M e N è equivalente a un sottoinsieme dell'altro, allora M e N sono tra loro equivalenti".

(9) In *Unverhöffentlicher Briefwechsel*, in [Dugac 1976a, pp. 223-62].

nali transfiniti, una seconda volta come problema aperto, appunto nei "Beiträge". Il lemma fu dimostrato da Dedekind nel 1887, senza comunicarlo a Cantor fino al 1899, episodio che fu motivo di risentimento, come vedremo. Una dimostrazione fu data da Felix Bernstein (1878-1956) nel 1897 e annunciata in [Borel 1898]. (10)

Un altro problema aperto era quello cosiddetto della tricotomia, o della confrontabilità dei cardinali, la proprietà cioè che per due cardinali qualunque $\mathfrak{a}$ e $\mathfrak{b}$ vale

$$\mathfrak{a} < \mathfrak{b} \vee \mathfrak{a} = \mathfrak{b} \vee \mathfrak{a} > \mathfrak{b}$$

(in termini insiemistici, per due insiemi a e b qualunque, o esiste una iniezione di a in b ma non una di b in a, o al contrario esiste una iniezione di b in a ma non una di a in b, oppure esiste una biiezione tra a e b). Esso era collegato a un altro problema, se ogni cardinale fosse un alef. (11) Se sì, essendo gli alef bene ordinati, la confrontabilità era garantita. (12) L'affermazione che ogni cardinale è un alef era chiamata teorema dell'alef, o teorema degli alef.

Questi e altri problemi erano esplicitamente elencati nella prima parte di [Cantor 1895-97, § 2: "Maggiore" e "minore" tra le potenze], in corpo minore: a) la tricotomia, proposizione di cui "più avanti [...] risulterà la verità", e da cui seguono le successive, di cui si dice tuttavia che non si farà uso nell'attuale lavoro; b) l'enunciato di Cantor-Bernstein; c) l'enunciato del lemma chiave menzionato sopra; d) una variante della tricotomia nel linguaggio delle applicazioni ("se N non è equivalente né a M né a un sottoinsieme di M, allora M è equivalente a un sottoinsieme di N"); e) se due insiemi M ed N non sono equivalenti, ma un sottoinsieme N_1 di N è equivalente a M, allora nessun sottoinsieme di M è equivalente a N.

Nel 1891 Cantor affermava che nel 1883 aveva dimostrato che la successione dei cardinali è bene ordinata; in seguito era diventato più incerto. Cantor aveva usato implicitamente il teorema dell'alef anche nelle sue ricerche sugli insiemi di punti: quando erano in gioco cardinalità di insiemi infiniti Cantor prendeva il minimo cardinale, sfruttando il fatto che gli alef erano bene ordinati, avendo come indici gli ordinali. (13)

Al Congresso di Parigi del 1900, nella lista di problemi matematici presentata da Hilbert ne erano presenti due che, pur riguardando un insieme specifico relativamente piccolo, mettevano in evidenza ancora altre lacune nella costruzione di Cantor. Il primo della lista era "Il problema di Cantor della potenza del continuo", (14) dove si chiedeva di dimostrare "un teorema molto verisimile la cui dimostrazione peraltro non è ancora stata ottenuta da nessuno nonostante gli sforzi più assidui", il teorema secondo cui "ogni sistema di infiniti numeri reali, cioè ogni insieme infinito di numeri o di punti, è equivalente o all'insieme dei numeri interi naturali $1, 2, 3, \ldots$ oppure all'insieme di tutti i numeri reali e quindi del continuo". Hilbert proseguiva ricordando "anche un'altra affermazione, assai notevole, fatta da Cantor, che sta in strettissima connessione con il teorema precedente". Presentata la definizione di insieme bene ordinato, Hilbert chiedeva: "non si può concepire anche il continuo come un insieme bene ordinato? Cantor crede che si debba rispondere affermativamente. Mi sembra altrettanto desiderabile *ottenere una dimostrazione diretta di questa notevole asserzione di Cantor*". L'auspicio di Hilbert è significativo, perché vedremo che Cantor in una lettera del 26 settembre 1897 gli aveva esposto le

(10) Nello stesso 1898 Ernst Schröder (1841-1902) propose una dimostrazione nella quale tuttavia (il solo) Alwin Korselt (1864-1947) trovò un errore non rimediabile; ma il suo nome è rimasto in alcuni resoconti, mentre sarebbe giusto che comparisse quello di Dedekind.

(11) Gli alef, $\aleph_0$, $\aleph_1$, $\aleph_2$, ..., $\aleph_\omega$, ... sono i cardinali degli insiemi bene ordinati, più precisamente sono ordinali iniziali, cioè non equipotenti ad alcun ordinale minore. I cardinali non erano definiti da Cantor come classi di equivalenza di insiemi equipotenti (come cercherà di fare Russell); per Cantor un cardinale era un concetto ottenuto facendo astrazione dalla natura e dall'ordine degli elementi di un insieme.

(12) Dati due ordinali, o essi sono isomorfi come ordini, o uno è isomorfo a un segmento iniziale dell'altro o viceversa.

(13) Per esempio nel 1885 aveva definito i punti limite p di α-esimo ordine di un insieme P come quelli tali che esiste un r per cui tutti gli intorni $B(p, r)$ di p di raggio minore o uguale a r erano tali che $P \cap B(p, r)$ avesse potenza $\aleph_{\alpha-1}$.

(14) [Hilbert 1900b]; il primo problema è alle pp. 154-6 della traduzione italiana. Il secondo problema è la dimostrazione della non contraddittorietà dell'aritmetica.

linee di una sua dimostrazione, che evidentemente Hilbert non riteneva tale, o quanto meno non la riteneva "diretta".

La possibilità di mettere ogni insieme ben determinato, non solo il continuo, nella forma di insieme bene ordinato (teorema del buon ordine) era stata dichiarata da Cantor "una legge del pensiero", fondamentale e ricca di conseguenze, fin dal 1883, riservandosi allora di tornare sull'argomento per dimostrarla. ([15]) Il teorema del buon ordine era implicato dal teorema dell'alef, perché se vale questo ogni insieme è in corrispondenza biunivoca con un ordinale, quindi è bene ordinabile. Era, come si sarebbe capito negli anni successivi, la condizione per risolvere anche gli altri problemi aperti summenzionati, condizione necessaria e sufficiente data l'equivalenza insospettata da alcuni di questi. Ma lo si vedrà solo dopo che Zermelo formulerà, nel 1904, l'assioma di scelta e dimostrerà il teorema del buon ordine; la tricotomia e il teorema degli alef sono equivalenti all'assioma di Zermelo.

3. – Corrispondenza con Hilbert, 1897

La scelta del primo problema dimostrava che Hilbert seguiva con interesse le ricerche di Cantor. Questi era da alcuni anni in contatto con lui e negli ultimi anni del secolo ebbe un prezioso scambio epistolare. ([16])

In una lettera a Hilbert del 26 settembre 1897, dopo alcuni preliminari su un loro incontro a Brunswick (presente anche Dedekind) e su questioni di pubblicazioni, Cantor riprendeva un dialogo iniziato ma non concluso a Brunswick, e scriveva:

> [...] lei ha espresso un dubbio relativo alla possibilità che tutti i numeri cardinali infiniti o potenze siano contenute tra gli alef; in altre parole, se ogni determinato $\mathfrak{a}$ o $\mathfrak{b}$ sia sempre un alef. Può essere *rigorosamente dimostrato* che la risposta a questa domanda è *sì*.
>
> Perché la totalità di tutti gli alef è tale da non poter essere concepita come un insieme determinato, ben definito, *compiuto* [*fertig*]. ([17]) Se così fosse, allora questa totalità sarebbe *seguita* in grandezza da un *determinato alef*, che perciò dovrebbe sia *appartenere* a questa totalità, come un elemento, sia *non appartenere*, il che sarebbe una contraddizione.
>
> Premesso questo, io posso dimostrare rigorosamente: "Se un insieme determinato, ben definito *compiuto* avesse un numero cardinale diverso da ciascun alef, allora dovrebbe contenere sottoinsiemi la cui cardinalità è *qualsiasi* alef – in altre parole, l'insieme dovrebbe contenere la totalità di tutti gli alef".

Continuava la lettera:

> Da questo è facile concludere che, ammessa la precedente assunzione (di un *insieme determinato* il cui numero cardinale non è un alef), anche la totalità di tutti gli alef potrebbe allora essere colta come un insieme determinato, ben definito e compiuto. Ma io ho testé provato che non è tale. Perciò, ogni $\mathfrak{a}$ è sempre un determinato alef.

In particolare

> la potenza del continuo lineare $\mathfrak{o}$ è sempre uguale a un determinato alef (io spero di dimostrare che $\mathfrak{o} = \aleph_1$).
>
> Ne segue da questo che noi possiamo già vedere che il continuo lineare, considerato fuori dal suo contesto, è *numerabile in un senso superiore*, vale a dire può essere rappresentato come *un insieme bene ordinato*.

Per lo scrupolo forse che Hilbert non fosse familiare con i concetti usati, Cantor in chiusura ricordava che "[l]e *totalità* che non possono essere colte da noi come 'insiemi' (un esempio delle quali è la totalità degli alef, come ho appena mostrato) io le ho chiamate 'assolutamente infinite' molti anni fa, distinguendole nettamente dagli *insiemi transfiniti*." Ve-

([15]) [Cantor 1883, § 3].

([16]) Alcune lettere di Cantor a Hilbert e le ultime con Dedekind sono tradotte in inglese in [Ewald 1996, pp. 923-40]. Qualcuna è in tedesco nella più completa raccolta [Meschkowski e Nilson 1991]. Quelle con e di Dedekind sono pubblicate in [Cantor e Dedekind 1937] e altre ivi mancanti in [Dugac 1976a].

([17]) [In inglese traducono *fertig* con *finished*.]

dremo che "molti anni fa" si riferisce al 1883 e alle *Grundlagen*.

Prima di risalire indietro negli anni, completiamo lo scambio in esame con la lettera del 2 ottobre 1897 di Cantor a Hilbert, che aveva risposto alla precedente il giorno successivo al ricevimento. Cantor accettò subito quello che Hilbert gli aveva evidentemente contestato, che "[l]a totalità degli alef può essere concepita come un insieme determinato e ben definito dal momento che, data una qualsiasi cosa, deve sempre essere possibile decidere se questa cosa è un alef o no; e nient'altro è richiesto per appartenere a un insieme ben definito".

Si noti che questa era stata la convinzione pure di Richard Dedekind, quando aveva iniziato a lavorare sul concetto generale di sistema, imponendo tale unica condizione nel §1 del suo lavoro del 1888:

> Capita molto spesso che cose diverse $a, b, c \ldots$, siano considerate per un motivo qualsiasi da un medesimo punto di vista, e siano messe assieme nella mente; si dice allora che esse formano un *sistema* S. [...] Un tale sistema (o aggregato, o varietà, o totalità) è, come un oggetto del nostro pensiero, anch'esso una cosa [*Ding*]; esso è completamente determinato quando sia determinato, per ogni cosa, se essa è o no un elemento di S. ([18])

Era stata anche, come vedremo, la prima definizione di Cantor nel 1882. Per quanto riguarda Hilbert, egli abbandonò, dopo la scoperta delle antinomie, l'idea "condivisa finora da tutti i logici e i matematici – che un concetto è già dato quando si è in grado di stabilire, per ogni oggetto, se esso cada sotto di esso oppure no". ([19])

All'obiezione di Hilbert, il 2 ottobre Cantor rispondeva:

> All right. ([20]) Ma ha trascurato il fatto che nella mia lettera da Harzburg ho anche usato la caratteristica "compiuto", e ho detto:
>
> *Teorema*: 'La totalità di tutti gli alef non può essere concepita come un insieme determinato, ben definito e *anche compiuto*'. Questo è il *punctum saliens*, e mi azzardo ad affermare che questo *teorema del tutto certo, dimostrabile rigorosamente dalla definizione della totalità di tutti gli alef*, è il teorema più importante e nobile di tutta la teoria degli insiemi. Si deve solo comprendere correttamente l'espressione 'compiuto'. Io dico di un insieme che esso può essere pensato come *compiuto* (e chiamato, se contiene infiniti elementi, 'transfinito' o 'super-finito') se è possibile pensare senza contraddizione (come è possibile per gli insiemi finiti) che *tutti i suoi elementi esistono insieme*, e quindi pensare all'insieme stesso come a *una cosa composta in sé* [*zusammengesetztes Ding für sich*]; o (in altre parole) se è *possibile* immaginare l'insieme come *attualmente esistente* con la totalità dei suoi elementi.

A Cantor sembrava perciò chiaro, diceva a Hilbert, che con questa definizione "transfinito" coincideva con l'"infinito attuale" dell'antichità e doveva essere considerato come un ἀφωρισμένον [qualcosa di determinato]. Per chiarire la terminologia a Hilbert precisava che nella prima parte dei "Beiträge", "proprio all'inizio io ho definito un 'insieme' (intendendo solo il finito o il transfinito) come un 'mettere assieme' [*Zusammenfassung*]. Ma è possibile 'mettere assieme' solo se un '*«essere insieme»*' [*Zusammensein*] è *possibile*. ([21]) Al contrario, insiemi infiniti tali che la totalità [*Totalität*] dei loro elementi non può essere pensata come un 'esistere insieme' o come una 'cosa in sé' o un ἀφωρισμένον, e che perciò neppure sono, *in questa totalità*, oggetto di ulteriore considerazione *matematica* io li chiamo 'insiemi *assolutamente infiniti*', e tra questi si trova l''insieme di tutti gli alef' ".

Bisogna dire che nel 1900 Hilbert, pur senza commentare, sembrò aver accettato la distinzione di Cantor, almeno nel senso di adottare la sua terminologia. La grande importanza che Hilbert

([18]) [Dedekind 1888, p. 87 ed. Gana].

([19]) [Frege 1983, Lettera a Frege del 7 novembre 1903, p. 65]. Sulla posizione di Hilbert torneremo alla fine.

([20]) [In inglese nell'originale.]

([21]) [Torneremo su questa definizione. Nella traduzione inglese *Zusammenfassung* è stato reso con "una collezione in un tutto", dove tuttavia "collezione" sembra l'n-esimo sinonimo di insieme, mentre *Zusammenfassung* è l'operazione di formare una collezione, operazione qui solo adombrata dall' "in" di "in un tutto". Nella traduzione francese *Zusammensein* è reso da "esistenza simultanea".]

attribuiva alle dimostrazioni di non contraddittorietà dipendeva oltre che dalla ricerca del rigore anche dalla sua concezione dell'esistenza in matematica:

> In questa dimostrazione [della non contraddittorietà della sua assiomatizzazione della teoria dei numeri reali] io vedo anche la dimostrazione dell'esistenza della totalità dei numeri reali ovvero – nel modo di esprimersi di G. Cantor – la dimostrazione che il sistema dei numeri reali è un insieme consistente (compiuto) [*konsistente (fertige) Menge*].
>
> Se noi volessimo provare in modo analogo l'esistenza della totalità di tutte le potenze (o di tutti gli alef di Cantor) il tentativo fallirebbe, per il motivo che la totalità di tutte le potenze non esiste, o – nella terminologia di Cantor – il sistema di tutte le potenze è un insieme inconsistente (non compiuto). ([22])

L'esistenza di questa lettera di Cantor a Hilbert e parte del suo contenuto fu resa nota nel 1904 agli studiosi da Philip Jourdain (1879-1919), che riferiva a sua volta una lettera ricevuta da Cantor il 4 novembre 1903; in essa Cantor, dopo aver precisato che il teorema dell'alef gli era noto intuitivamente da più di venti anni, di fatto dal momento stesso della sua scoperta degli alef, affermava di aver costruito in seguito una dimostrazione che "già circa 7 anni fa ho partecipato a Hilbert, e da 4 anni a Dedekind, con una comunicazione epistolare, nel suo contenuto sostanzialmente coincidente con quello che incontro nel suo scritto". ([23])

([22]) [Hilbert 1900a, trad. it. p. 143]. Gli aggettivi "*konsistente*" e "*inkonsistente*", non usati da Cantor nella corrispondenza con Hilbert, erano stati adoperati come vedremo in quella con Dedekind e probabilmente discussi da questi con Hilbert.

([23]) [Purkert e Ilgauds 1987, pp. 150-1]. Torneremo in seguito su questa lettera del 1903. Lo scritto a cui si riferisce Cantor conteneva una dimostrazione di Jourdain del teorema del buon ordine, che sarà pubblicata in [Jourdain 1904]. Siccome il riferimento di Cantor è alla propria lettera a Hilbert del 1897, egli nel ricordo commette per quanto riguarda quest'ultimo l'errore di un anno; diffuso da [Bernstein 1905], nella comunità dei matematici si radicò l'idea che Cantor avesse scoperto le antinomie nel 1895, e le avesse comunicate a Hilbert nel 1896.

Le contraddizioni erano note a Hilbert, lo racconta a Frege nella citata lettera del 7 novembre 1903, non solo quella che era stata segnalata a Frege da Russell, e trovata indipendentemente da Zermelo "tre o quattro anni fa", ma anche altre più persuasive che lui stesso aveva trovato "quattro o cinque anni fa".

Zermelo aveva descritto a Hilbert nel 1902 un argomento del tipo di quello di Russell, che inserirà in [Zermelo 1908b]: non può esistere un insieme M tale che $\mathscr{P}(M) \subseteq M$, perché considerando $M_0 = \{x \in M \mid x \notin x\}$ si ottiene una contraddizione. Hilbert per parte sua aveva capito che non può esistere alcun S tale che se $x \in S$ allora $\mathscr{P}(x) \in S$ e se $T \subseteq S$ allora $\bigcup T \in S$. Infatti allora $\mathscr{P}(\bigcup S) \in S$ e $\mathscr{P}(\bigcup S) \subseteq \bigcup S$, assurdo. ([24])

Ma prima di andare oltre ritorniamo a "molti anni fa", quando Cantor aveva chiamato "assolutamente infinite" le totalità che non possono essere colte come "insiemi", distinguendole dagli insiemi.

4. – La definizione di insieme

Fino al momento in cui la teoria fu assiomatizzata da Zermelo nel 1908, la definizione di insieme doveva essere affidata a immagini, sinonimi, circonlocuzioni, metafore. Cantor ne propose una quando iniziò ad avere l'intuizione che si potevano considerare totalità che non fossero solo totalità di punti. Nel 1882 introdusse il concetto di "insieme ben definito" come oggetto matematico:

> Chiamo *ben definita* una varietà [*Manningfaltigkeit*] (collezione [*Inbegriff*], insieme [*Menge*]) di elementi che appartengono a un qualsiasi dominio di concetti se, sulla base della sua definizione e in conseguenza del principio logico del terzo escluso si deve riconoscere come *internamente determinato* [*intern bestimmt*] se un oggetto che appartiene allo stesso dominio di concetti appartiene alla suddetta varietà come elemento o no, come anche se due oggetti che vi appartengano, nonostante differenze formali, siano uguali o no. ([25])

([24]) Si veda [Kanamori 2004].

([25]) [Cantor 1879-84, terzo articolo, del 1882].

Un commento su "internamente determinato" era dato subito di seguito: in generale, le decisioni sull'appartenenza non devono essere condizionate dai metodi al momento disponibili e alla loro eseguibilità effettiva, non si tratta di questo, quanto piuttosto

> *solo* della *determinazione interna*, che in casi concreti, quando lo scopo è raggiungibile grazie al perfezionamento degli strumenti si trasforma in una *determinazione attuale (esterna)*.

Nelle Osservazioni finali delle *Grundlagen* dell'anno successivo Cantor precisava che con *Mannigfaltigkeitslehre* intendeva una teoria molto comprensiva della quale finora aveva soltanto indagato le forme di una teoria degli insiemi aritmetica e geometrica. In vista di una maggior astrazione aveva bisogno di una definizione:

> Con "varietà" [*Mannigfaltigkeit*] o "insieme" [*Menge*] io intendo in generale ogni Molti che possono essere pensati come Uno, cioè ogni molteplicità [*Inbegriff*] di elementi determinati che possono essere uniti in un tutto da una legge, e con questo io credo di definire qualcosa che è affine all'εἶδος o all'ἰδέα di Platone, come anche a ciò che Platone chiama μικτόν nel dialogo "Filebo o del massimo bene". (26)

In relazione alla concezione cantoriana dell'infinito, ma anche alla discussione in oggetto con Hilbert, è da segnalare pure l'osservazione seguente che la successione delle classi numeriche non incontra mai un confine, e mai giunge ad abbracciare nemmeno approssimativamente l'Assoluto. In [Cantor 1887-88] e altrove, ripetutamente, Cantor distingueva tre manifestazioni dell'infinito attuale: la prima è "realizzata *in Deo*" e la chiamava infinito assoluto "o brevemente Assoluto"; la seconda è nel mondo materiale; la terza in matematica, colta dal pensiero come numero, grandezza, tipo d'ordine.

Il vero infinito per Cantor era l'Assoluto, con richiami leibniziani (di cui cita nelle *Grundlagen* "l'infini véritable n'est pas une modification, c'est l'absolu"): il transfinito è aumentabile, per ogni numero infinito ne esiste uno maggiore, mentre l'Assoluto non è aumentabile, esso abbraccia tutti i numeri.

In termini non religiosi potremmo dire che l'Assoluto è la categoria di tutto ciò che è matematizzabile. "L'Assoluto può essere solo riconosciuto, mai conosciuto neanche approssimativamente", ma

> La successione assolutamente infinita dei numeri mi appare in un certo senso come un simbolo appropriato dell'Assoluto.
> [. . .] Notevole mi appare anche il fatto che a ogni classe numerica, quindi anche a ogni cardinalità può essere associato un preciso numero della successione assolutamente infinita, di modo che [. . .] anche le diverse cardinalità formano pertanto una successione assolutamente infinita. (27)

In verità, il fatto che l'Assoluto possa solo essere riconosciuto, e le molteplicità assolutamente infinite non possano essere oggetto di considerazione matematica, come Cantor si è espresso con Hilbert il 2 ottobre, sembra parzialmente contraddetto dalla possibilità che, come vedremo, esse siano usate proprio nelle dimostrazioni, e siano parte integrante della prova di un teorema. Esse vi interverranno tuttavia come limiti, quasi una restrizione metamatematica che vieta certe costruzioni perché porterebbero a una molteplicità assolutamente infinita.

Le due Osservazioni nelle *Grundlagen*, in particolare la seconda, saranno sempre rivendicate da Cantor come il momento in cui egli aveva riconosciuto la possibilità di collezioni "assolutamente infinite", non considerabili come "insiemi", non assoggettabili a studio matematico. Oltre che la corrispondenza con Hilbert e con Dedekind, possiamo segnalare per esempio la già citata lettera a Grace Chisholm Young del 9 marzo 1907, dove ricordava di aver

(26) [Cantor 1883, Osservazione 1, al § 1]. εἶδος e ἰδέα sono due sinonimi usati da Platone per le forme ideali; con μικτόν Cantor allude forse al terzo genere della realtà discusso nel "Filebo" come un misto tra finito e infinito, al quale appartengono le cose proporzionate, generate ponendo un limite all'infinito.

(27) [Cantor 1883, Osservazione 2, al § 4]. Con "classe numerica" intende l'insieme degli ordinali che hanno tutti una stessa cardinalità: classe I gli ordinali finiti, classe II gli ordinali numerabili, ecc.

chiamato Ω, nel 1883, "la successione assolutamente infinita dei numeri".

Alla fine, nei "Beiträge" del 1895-97, opera riassuntiva e di sintesi, a differenza di quelle più esplorative di quando la teoria era *in fieri*, si trova una presentazione secca e schematica:

> Con "insieme" [*Menge*] intendiamo la collezione che risulta dal mettere insieme in un tutto oggetti determinati e distinti della nostra intuizione o del nostro pensiero.

Si direbbe l'*incipit* tipico che conferma che in matematica non si definisce ciò di cui si parla, anche se non è così per Cantor. Non si vede tuttavia traccia delle distinzioni che nel 1897 Cantor presenterà a Hilbert, e che saranno dichiarate implicite nella definizione in considerazione del fatto che per "mettere insieme" occorre che gli elementi "stiano insieme". La definizione in realtà, se aveva questo obiettivo, e quindi era gravida di implicazioni fondazionali, era "oscura e non adatta allo scopo" secondo [Ferreirós 2007, p. 294], o per lo meno criptica, ancor più di quella del 1883, che Cantor stesso ammetterà nel 1899 come vedremo essere "un po' nascosta". Pare quasi che Cantor volesse evitare di entrare nell'argomento, che non volesse nemmeno suggerire al lettore l'esistenza di problemi non ancora completamente chiariti relativi ai fondamenti.

5. – Corrispondenza con Dedekind, 1899

Cantor riprese i rapporti con Dedekind nel 1897, dopo anni di gelo, e lo fece perché di nuovo come nel 1878 aveva bisogno di essere rassicurato sulla dimostrazione di un teorema, questa volta il teorema dell'alef, che aveva comunicato a Hilbert. Mandò anche in avanscoperta l'allievo Felix Bernstein, che aveva appena dimostrato finalmente il teorema di Cantor-Bernstein; questi tuttavia andò incontro, come Cantor, a una brutta delusione; Dedekind gli fece vedere come si possa facilmente dimostrare il lemma cruciale a partire da una proposizione che aveva inserito in [Dedekind 1888], la § 4.63, lasciando la "non difficile" dimostrazione al lettore e dichiarando che non sarebbe stata usata nel resto del libro.

Tuttavia Dedekind non aveva informato Cantor della sua dimostrazione, né la aveva annunciata pubblicamente. A Cantor la esporrà infine sommariamente solo in una lettera del 29 agosto 1899, dopo avergli raccontato con malcelata soddisfazione la reazione incredula di Bernstein, quando gli aveva rivelato di essere in grado di dimostrare con facilità il risultato con i propri strumenti. ([28])

Cantor, probabilmente informato da Bernstein dell'esito dell'incontro con Dedekind, si prese tuttavia la soddisfazione di una rivincita perché in una lunga lettera del 3 agosto 1899 gli disse chiaramente che la sua dimostrazione dell'esistenza di un sistema infinito, in [Dedekind 1888, § 5, p. 98 ed. Gana], ([29]) non era sostenibile. ([30])

> Se partiamo dal concetto di una molteplicità [*Vielheit*] determinata di oggetti (un sistema, una totalità [*Gesamtheit*]) di cose, è necessario, come ho scoperto, distinguere due specie di molteplicità (con il che intendo molteplicità *definite*).

([28]) Lettera del 29 agosto 1899, in [Ewald 1996, pp. 937-8] e in [Dugac 1976a, p. 261]. In [Cantor e Dedekind 1937, pp. 246-7] è riportato solo l'allegato con la traccia della dimostrazione.

([29]) "66. *Teorema*. Esistono sistemi infiniti". Il sistema che è dimostrato infinito è quello della totalità di tutti i pensieri. "Sistema" era il termine usato da Dedekind per "insieme"; nella corrispondenza Cantor usa anch'egli questo termine, forse per mostrare deferenza.

([30]) In [Cantor e Dedekind 1937, pp. 238-44] la lettera porta la data del 28 luglio; in [Ewald 1996, pp. 931-5] la data è del 3 agosto, mentre è presente un'altra lettera datata 28 luglio in cui Cantor esprime solo il desiderio di informare Dedekind sui progressi della propria riflessione sulla teoria degli insiemi e di voler chiedere un suo giudizio; quindi illustra il problema degli alef e afferma di avere da due anni, cioè dal 1897, una dimostrazione che non esistono cardinali che non siano alef ([Ewald 1996, pp. 930-1]). Se queste date sono corrette, probabilmente Dedekind diede nell'intervallo il suo assenso alla richiesta di Cantor del 28 luglio, e questi il 3 agosto gli espose le sue "riflessioni" con dovizia di dettagli (si scusava ricordando come fosse "importante" per lui il parere di Dedekind su certi punti fondamentali della teoria degli insiemi). L'equivoco sulle date risale a una confusione di Zermelo curatore della edizione delle opere di [Cantor 1932], dove è inserito quest'ultimo scambio epistolare tra Cantor e Dedekind.

> Infatti una molteplicità può essere tale che l'assunzione della "esistenza simultanea" [*Zusammensein*] di *tutti* i suoi elementi porti a una contraddizione, di modo che è impossibile concepire la molteplicità come una unità, come un oggetto "compiuto". Tali molteplicità io le chiamo *assolutamente infinite* o *molteplicità inconsistenti* [*inkonsistente Vielheit*]. Come si vede facilmente, la "totalità di ogni cosa concepibile", per esempio, è una tale molteplicità; altri esempi emergeranno in seguito.

Se al contrario gli elementi di una molteplicità possono essere pensati nella loro totalità come "esistenti simultaneamente", di modo che sia possibile concepirla come "*un solo oggetto*", Cantor la chiama *molteplicità consistente* [*konsistente Vielheit*] o "insieme" [*Menge*]; in francese e in italiano, osserva Cantor, questo concetto si esprime rispettivamente con le parole "ensemble" e "insieme".

Nelle lettere a Dedekind non compare se non in due occasioni l'aggettivo *fertig*, ma solo consistente *vs* inconsistente (o sistema *vs* molteplicità assolutamente infinita). Resterà sempre non risolta, come vedremo, l'ambiguità se l'inconsistenza sia riconosciuta solo dal suo portare a una contraddizione, oppure se sia possibile dare una definizione positiva sia delle molteplicità consistenti che delle molteplicità inconsistenti. Nelle *Grundlagen* Cantor aveva detto che gli elementi di un insieme sono uniti in un "uno" da una legge, ma questa scappatoia intensionale non era stata sviluppata, e non era nemmeno compatibile con la sua visione. Nei "Beiträge" e in seguito, Cantor ha sempre insistito che le totalità devono poter essere o essere pensate come un tutto, compiute, ma non ha mai precisato cosa renda una molteplicità un tutto, se non parlando di "esistenza simultanea", o di "stare insieme" (*Zusammensein*), e ammettendo solo che la derivazione di una contraddizione mostra che la molteplicità non è consistente. Anzi Cantor sembrerà sostenere, vedremo, che la consistenza di una molteplicità non si può dimostrare, ma solo riconoscerne l'inconsistenza, evidentemente dal ritrovamento di una contraddizione. Frege aveva forse qualche giustificazione quando lamentava nel 1892 che Cantor non fosse chiaro su cosa è un insieme. ([31])

([31]) [Frege 1892], citato in [Hallett 1984, p. 35].

Il 3 agosto 1899, posta la distinzione, Cantor riassumeva a Dedekind la definizione dei buoni ordini e degli ordinali, e sulla base dei risultati stabiliti nei "Beiträge" sulla confrontabilità e sulla transitività della relazione d'ordine, poteva affermare che "il sistema Ω degli ordinali nel suo ordine naturale costituisce una "successione" [una moltitudine bene ordinata]". ([32]) Se Ω fosse un insieme, avrebbe un ordinale δ maggiore di tutti i numeri in Ω, ma apparterrebbe anche a Ω e sarebbe $\delta < \delta$, contraddizione. Dunque Ω è inconsistente, e lo stesso la totalità degli alef, che è in corrispondenza biunivoca con quella degli ordinali (Cantor dice soltanto che "la formazione degli alef [...] corrisponde a Ω"). In conclusione Cantor esponeva la sua dimostrazione del teorema dell'alef, che discuteremo in seguito.

Ma Dedekind non rispose all'appello e Cantor, nella sua impazienza, gli scrisse ancora il 16 e il 28 agosto, cercando di stimolare il suo interesse con ulteriori piccole integrazioni della sua definizione o nuovi problemi collegati. Nella prima lettera chiedeva esplicitamente: "Ha trovato il tempo di meditare sulla mia recente lettera sul sistema di tutte le potenze transfinite? Sono ansioso di vedere che idea vi fate di questo argomento". Quindi aggiungeva la precisazione, poi lasciata cadere, che "quando parlavo di molteplicità tacitamente avevo in mente molteplicità di cose *non connesse* [*Vielheiten* unverbundener Dinge], cioè molteplicità tali che la rimozione di uno qualunque o di diversi elementi non abbia influenza sulla permanenza in essere [*Bestehenbleiben*] dei rimanenti".

> Ma soprattutto, che cosa pensa della distinzione tra molteplicità "consistenti" e "inconsistenti" di cose *non connesse*?

Nella lettera del 28 agosto esprimeva la speranza che Dedekind avesse trovato il tempo di immergersi nel contenuto della sua comunicazione sul sistema di tutte le cardinalità:

> Ha trovato il tempo di meditare sulla mia recente lettera sul sistema di tutte le potenze transfinite?

([32]) Cantor usa "successione" nel senso di successione transfinita. Si vede dall'esposizione che con Dedekind entra minuziosamente nei dettagli più che con Hilbert, che forse temeva di tediare, o forse vuole ricordare a Dedekind tutti gli elementi necessari a valutare la sua dimostrazione.

> Sono ansioso di vedere che idea vi fate di questo argomento,

e che la lettera del 16 gli fosse arrivata, e inoltre sollevava un problema intenzionalmente omesso nella precedente esposizione ma secondo lui certamente non sfuggito a Dedekind. La questione è come si possa affermare che gli elementi della successione assolutamente infinita degli alef sono ciascuno una molteplicità consistente.

La risposta che si dava Cantor è interessante, ed era che la domanda dovrebbe essere estesa anche alle molteplicità finite, e dopo attenta considerazione la conclusione sarebbe questa, che "anche per le molteplicità finite la 'dimostrazione' della loro 'consistenza' non si può dare". In altre parole

> il fatto della "consistenza' delle molteplicità finite è una verità semplice indimostrabile; è "*L'Assioma* dell'aritmetica (nel senso antico della parola)". Allo stesso modo la "consistenza" delle molteplicità a cui assegno gli alef come cardinalità è "l'assioma dell'aritmetica transfinita estesa".

Cantor terminava proponendo apertamente di andarlo a trovare per alcuni giorni per discutere tali questioni, se non lo avrebbe disturbato nel suo lavoro.

Dedekind gli rispose il giorno dopo, il 29, dichiarando una sua eventuale visita benvenuta, ma certamente infruttuosa: nonostante avesse letto e riletto la lettera del 3 agosto non aveva capito la distinzione tra i due tipi di molteplicità, non aveva capito la coesistenza degli elementi di una moltitudine, né il significato della sua negazione. Non dubitava che con una maggior applicazione gli si sarebbe accesa la luce della comprensione, perché aveva fiducia nella perspicacia e profondità di Cantor, ma per ora non aveva il tempo né l'energia mentale per immergersi nei nuovi argomenti. E passava a parlare di Bernstein.

Il 30 agosto Cantor gli scrisse ringraziandolo e apprezzando la sua dimostrazione, e dicendo che si chiedeva, e gli chiedeva, se con gli stessi metodi non avrebbe potuto dimostrare direttamente la tricotomia, la a) di [Cantor 1895-97, §2], dalla quale sarebbero seguite tutte le altre ivi in sospeso. Confessava che né Schröder né lui stesso erano riusciti ad adattare il metodo di Dedekind al caso più generale.

La dimostrazione di Dedekind non fu resa pubblica fino al 1932, quando Zermelo inserì questo scambio epistolare tra Cantor e Dedekind nella raccolta degli scritti di Cantor. Nel frattempo il teorema e la sua dimostrazione in tutt'altra temperie avevano dato luogo a una polemica di Henri Poincaré (1854-1912), che riteneva inaccettabile la dimostrazione di Bernstein in quanto presupponeva e utilizzava i numeri naturali; lo stesso Zermelo e Giuseppe Peano (1858-1932) nel 1906 avevano allora dato indipendentemente dimostrazioni simili a quella di Dedekind, senza appoggiarsi ai numeri naturali, provocando questa volta da parte di Poincaré l'accusa di impredicatività. Se la dimostrazione di Dedekind con il metodo delle catene fosse stata nota, sarebbe stata secondo Zermelo un argomento autorevole nella discussione. ([33]) Nella nota (B), p. 451 apposta alla corrispondenza, Zermelo lamentava con evidente dispetto che "Il motivo per cui né Dedekind né Cantor si siano decisi all'epoca a pubblicare questa dimostrazione non comunque priva di importanza, è qualcosa che ancora oggi risulta incomprensibile".

6. – Il teorema dell'alef

Nella lettera a Hilbert del 26 settembre 1897 Cantor aveva affermato, come abbiamo visto, di poter rigorosamente dimostrare: "Se un insieme determinato, ben definito *compiuto* avesse un numero cardinale diverso da ciascun alef, allora dovrebbe contenere un sottoinsieme il cui cardinale è *qualsiasi* alef – in altre parole, l'insieme dovrebbe contenere la totalità di tutti gli alef". Ma non gli aveva descritto la dimostrazione, in base alla quale affermava ancora che "è facile concludere che, ammessa la precedente assunzione (di un *insieme determinato* il cui numero cardinale non è un alef), anche la totalità di tutti gli

([33]) Una catena per Dedekind era il più piccolo sistema contenente un elemento e chiuso rispetto a una iniezione; così aveva definito il sistema dei numeri naturali. Zermelo e Peano indipendentemente riscoprirono la possibilità di dare definizioni induttive che evitavano l'uso esplicito dei naturali.

alef potrebbe allora essere colta come un insieme determinato, ben definito e compiuto. Ma io ho testé provato che non è tale. Perciò, ogni α è sempre un determinato alef".

La dimostrazione venne invece esposta a Dedekind, e da questi passò probabilmente a Hilbert che abbiamo ricordato mostra in [Hilbert 1900a] di conoscere il risultato.

Nella lettera del 3 agosto 1899 esaminata sopra, dopo aver dimostrato che la successione ת [tav, ultima lettera dell'alfabeto ebraico] degli alef è inconsistente, o assolutamente infinita, Cantor affrontava il problema

> se *tutti i numeri cardinali* siano contenuti nel sistema ת. In altre parole se esista un *insieme* la cui potenza non è un alef.

La risposta è negativa in conseguenza della inconsistenza dei sistemi Ω e ת :

> *Dimostrazione.* Se prendiamo una molteplicità definita V e assumiamo che *nessun alef* corrisponda ad essa *come suo numero cardinale*, concludiamo che V deve essere *inconsistente*.
> Infatti vediamo subito che, in base all'assunzione fatta, l'intero sistema Ω è proiettabile nella molteplicità V, quindi deve esistere una sottomolteplicità V' di V che è equivalente al sistema Ω.
> V' è *inconsistente* perché Ω lo è, e quindi lo stesso si deve affermare per V.

Si può concludere allora che "ogni *molteplicità consistente* transfinita ha come cardinale un *definito alef*" e quindi il sistema degli alef coincide con quello dei cardinali transfiniti.

Cantor aggiungeva subito come corollario la tricotomia, come affermata in [Cantor 1895-97, § 2], dal momento che essa vale per gli alef.

Prima di commentare la dimostrazione, osserviamo che nella lettera, in vista evidentemente della completezza della trattazione che voleva sottoporre a Dedekind, e in particolare della dimostrazione, Cantor subito dopo la definizione delle molteplicità consistenti e inconsistenti aveva elencato tre proprietà, o principi di esistenza condizionali, che si potrebbero considerare proposte di assiomi:

Due molteplicità equivalenti sono o entrambe "insiemi" o entrambe inconsistenti. ([34])

Ogni sottomolteplicità [*Teilvielheit*] di un insieme [molteplicità consistente] è un insieme.

Se abbiamo un insieme di insiemi gli elementi di questi insiemi formano pure un insieme.

Un altro principio si presenterà come pertinente a Cantor nello stesso periodo, in occasione di un'altra ricerca che merita di essere ricordata. Sebbene Cantor non avesse lo spirito assiomatizzatore, negli ultimi anni del secolo sembra fosse più attento alla funzione e all'utilità degli assiomi. In una lettera a Hilbert del 20 febbraio 1900 parlava della sua riflessione sulla teoria dei numeri finiti; chiedeva a Hilbert se conoscesse autori precedenti che avessero individuati gli assiomi opportuni; il figlio di Grassmann gli ha mostrato le parti dell'*Audehnungslehre* del padre dove l'aritmetica appare una scienza formale più che reale, nel senso, credeva Cantor, in cui Dedekind diceva che l'aritmetica era parte della logica (non menzionava Peano). Ora a lui sembravano sufficienti due assiomi: il primo afferma che il dominio non è vuoto, il secondo che se V è consistente e δ è una cosa non in V, allora (nella nostra notazione) $V \cup \{\delta\}$ è consistente.

Il 31 agosto 1899 Cantor scrisse ancora a Dedekind per convincerlo della necessità di distinguere i sistemi in consistenti e inconsistenti. Faceva vedere in un altro modo, con ragionamenti direttamente

([34]) Qualcuno considera tale principio un'anticipazione dell'assioma di rimpiazzamento. Questo assioma fu aggiunto a quelli di Zermelo indipendentemente da A. A. Fraenkel e da Th. Skolem nel 1922, e afferma che ogni relazione funzionale definibile, ristretta come dominio a un insieme, ha un insieme per immagine. Forse un'anticipazione ancora più precisa è un analogo principio formulato nel 1905 da A. E. Harward: "Ogni classe i cui individui possono essere correlati uno-uno con gli elementi di un aggregato è essa stessa un aggregato" (cit. in [Kanamori 2012, p. 56]). Harward è un personaggio poco conosciuto, matematico dilettante, che non aveva letto Cantor ma Russell e Jourdain, e aveva indipendentemente proposto la distinzione tra aggregati e classi illimitate; queste le concepiva come molteplicità che non possono essere pensate collettivamente come un tutto, mentre rifiutava la definizione di Jourdain, secondo il quale erano inconsistenti le molteplicità che contengono una parte equivalente alla collezione di tutti gli ordinali: riteneva che quest'ultima non potesse essere definita se non si fissano prima i concetti fondamentali. Si veda [Moore 1976].

sulle cardinalità, che esiste un sistema pienamente determinato ben definito [*völlig bestimmte wohldefinierte*] che "*non è un 'insieme'*" (35) (l'argomento si può considerare come l'antinomia del massimo cardinale senza passare attraverso gli ordinali).

Tale è dichiarato il sistema S di tutte le classi concepibili α, dove α è sia un cardinale sia la cardinalità di tutti gli insiemi equivalenti che formano la classe α.

> *Dimostrazione*. Sia M_α un qualunque insieme determinato di classe α. Se S fosse un insieme, lo sarebbe anche $T = \bigcup M_\alpha$, dove l'unione è su $\alpha \in \sqcap$, e T sarebbe di una determinata classe, diciamo α_0.
> [Ma Cantor nel 1891 ha dimostrato che per ogni α: $2^\alpha > \alpha$.] Se α_0' è un cardinale maggiore di α_0 allora T, che ha cardinalità α_0 deve contenere come parte $M_{\alpha_0'}$ che ha potenza α_0', contraddizione.

"Esistono dunque molteplicità determinate che *non sono al tempo stesso delle unità*, cioè tali che l'esistenza simultanea di tutti i loro elementi è *impossibile*".

Se torniamo infine alla dimostrazione del teorema dell'alef, il passo cruciale nella lettera del 3 agosto è quello della proiettabilità di Ω nella molteplicità V che per ipotesi ha una cardinalità che non è un alef; si impone la necessità di capire cosa si intenda con "proiettabile", che non è spiegato da Cantor.

Nell'edizione di [Cantor 1932] il curatore Zermelo aggiunse un commento (nota (A), pp. 450-1) nella quale sosteneva che questo era il punto debole della dimostrazione; anzi non si poteva proprio dire che Cantor avesse dimostrato che l'intera successione Ω è proiettabile in una V la cui cardinalità non è un aleph.

> Cantor a quanto pare pensa che successivi arbitrari elementi di V siano associati ai numeri di Ω in modo che ogni elemento di V sia considerato *una sola volta*. *O* questa procedura verrebbe a fermarsi una volta che tutti gli elementi di V fossero esauriti, e allora V sarebbe applicato a un *segmento* della successione dei numero, e la sua potenza sarebbe un alef, contro l'ipotesi, *oppure* V resterebbe inesauribile, quindi conterrebbe una parte equivalente a tutto Ω e sarebbe perciò inconsistente. Quindi l'intuizione del tempo si applica qui a un processo che va oltre ogni intuizione, e si immagina un'entità fittizia a proposito della quale si assume che sia in grado di eseguire le scelte arbitrarie *successive*, e quindi definire un sottoinsieme V' di V che, per le condizioni imposte, è precisamente *non* definibile.

(35) Qui il termine è usato nel senso di molteplicità consistente; nella dimostrazione vedremo sotto che si faceva appello esplicito al terzo principio condizionale di esistenza (nella nostra notazione).

Benché il procedimento attribuito da Zermelo all'intenzione di Cantor non sia mai stato reso pubblico da questi, altri autori arrivarono indipendentemente alla stessa idea. Per esempio nel 1898 Schröder aveva pensato di dimostrare la tricotomia con un ragionamento di questo tipo: "Il punto essenziale è trovare un processo di esaustione che, continuando ad assegnare gli elementi di uno dei due insiemi in modo uno-uno a elementi qualsiasi scelti nell'altro insieme, esaurisca completamente l'uno o l'altro". (36)

Jourdain era in corrispondenza con Cantor e nel 1903 gli aveva scritto presentandogli una sua dimostrazione del teorema dell'alef, impostata anch'essa su un processo di esaustione. Cantor gli aveva risposto che era la stessa con cui egli aveva dimostrato il teorema e lo invitava a pubblicarla. (37) Ma quando Jourdain gli chiese il permesso di inserire nell'articolo parti dello scambio epistolare, Cantor non glielo concesse, probabilmente non era sicuro, e non rassicurato da Dedekind.

Nel 1903 Godfrey H. Hardy (1877-1947) aveva dimostrato che $\aleph_1 \leq 2^{\aleph_0}$ e più in generale $\aleph_{\alpha+1} \leq 2^{\aleph_\alpha}$, derivando la disuguaglianza dalla proprietà che "ogni cardinale infinito o è un alef o è più grande di tutti gli alef" dimostrata con un metodo

(36) [Schröder 1898]. Schröder nelle sue lezioni aveva usato una definizione di molteplicità consistente simile a quella di Cantor, ma indipendentemente, e senza che Cantor la conoscesse, come argomentato in [Grattan-Guiness 1977, p. 167].

(37) La dimostrazione fu pubblicata in [Jourdain 1904]. La lettera è quella del 4 novembre 1903 citata in precedenza.

analogo, o forse invece con una generalizzazione della dimostrazione di Cantor che ogni insieme infinito contiene un insieme numerabile. ([38])

Forse Zermelo era influenzato da questi tentativi, che gli facevano gioco, dal momento che Cantor non aveva dato proprio alcun elemento, a parte indirettamente lo scambio privato con Jourdain, per capire che la sua idea per la realizzazione della proiettabilità fosse quella di successive scelte fino ad esaurimento. La nota di Zermelo infatti continuava:

> Solo con l'appello all'"assioma di scelta", che postula la possibilità di una scelta *simultanea* e che Cantor usa inconsciamente e istintivamente *ovunque* ma che non formula esplicitamente da nessuna parte, si potrebbe definire V' come un sottoinsieme di V.

Anche così resterebbero margini di dubbio sulla dimostrazione, perché essa se sviluppata nei dettagli potrebbe nascondere molteplicità inconsistenti o altre logicamente inammissibili. Questo era il timore per cui Zermelo, come ricordava, aveva evitato di considerare molteplicità inconsistenti nella sua dimostrazione del teorema del buon ordine per mezzo dell'assioma di scelta, in [Zermelo 1904].

7. – Al passaggio del secolo

Cantor non solo non pubblicò nulla sul teorema dell'alef, ma nulla anche in cui fosse usato esplicitamente il suo concetto di molteplicità inconsistente, nonostante inizialmente avesse programmato, e già preparato, una terza parte dei "Beiträge". Deluso del mancato commento di Dedekind, ma orgoglioso di quello che a lui sembrava un riconoscimento da parte di Hilbert, si sfogò con questi in una amara lettera del 15 novembre 1899, in cui spiegava il motivo della rinuncia, e nello stesso tempo ribadiva la storia della sua fondazione della teoria degli insiemi e, dal suo punto di vista, dei rapporti scientifici e personali con Dedekind. Avrebbe pubblicato la terza parte, ormai pronta, dei "Beiträge" se avesse ricevuto risposta da Dedekind alle 3 o 4 lettere che gli aveva inviato nei mesi di agosto e settembre.

> Lei sa il valore che attribuisco ai suoi [di Dedekind] giudizi!
> Giacché vedo dal suo notevole scritto, ([39]) per mia gratificazione, che lei riconosce il significato che, *proprio per lui*, l'autore di *Was sind und was sollen die Zahlen*, deve avere l'esposizione pubblica dei fondamenti delle mie ricerche sulla teoria degli insiemi (fondamenti che si possono trovare nelle *Grundlagen* pubblicate nell'anno 1883, specialmente nelle *note finali*, espressi chiaramente ma intenzionalmente *in forma un po' nascosta*).

La rinnovata indicazione dell'anno 1883 come data a cui risalire per la chiara espressione dei fondamenti delle proprie ricerche, data precedente la pubblicazione di *Was sind und was sollen die Zahlen*, termina con un enigmatico e preoccupante *innuendo*: non si capisce perché a suo tempo abbia voluto tenere "intenzionalmente *in forma un po' nascosta*" la chiara espressione di quei fondamenti.

Continuava:

> Questa mia fondazione è di fatto *diametralmente opposta* alla prospettiva delle sue ricerche, che si deve riconoscere nella assunzione naïve che *tutte le collezioni* [*Inbegriff*] *o sistemi ben definiti* sono ugualmente "*sistemi consistenti*".
> *Lei si è dunque convinto che tale assunzione di Dedekind è sbagliata*, cosa di cui io mi resi conto *immediatamente dopo la comparsa* della prima edizione del lavoro summenzionato, anno 1887. ([40])
> Ma, naturalmente, io non volevo attaccare una persona di tali grandi meriti nel campo della teoria dei numeri e dell'algebra, ma ho preferito aspettare l'occasione in cui potessi discutere il problema personalmente con lui, *in modo che egli stesso potesse fare e pubblicare le correzioni necessarie alle sue ricerche*!

([38]) [Hardy 1903]. Questa dimostrazione di Cantor, assumendo "non finito" come definizione di infinito, comporta una successione numerabile di scelte di elementi.

([39]) [Doveva aver visto in anteprima il testo di [Hilbert 1900a] sopra citato.]

([40]) [L'anno è in realtà il 1888.]

> L'opportunità mi è stata da lui concessa *per la prima volta questo autunno*, dal momento che per ragioni *a me sconosciute* egli è stato arrabbiato con me molti anni, e *aveva troncato* la vecchia corrispondenza svoltasi tra il 1871 e il 1874 *circa.* ([41])

Cantor in questa lettera si mostrava addolorato e impermalito, ma anche vendicativo, e contraddittorio. Ammetteva che, senza l'avallo di Dedekind, non se la sentiva di rendere pubbliche dimostrazioni importanti; ma lo aveva fatto per tanti anni, dal 1878 in poi. ([42]) Ad ogni modo è chiaro che si sentiva in competizione con lui sui fondamenti e non riusciva a trattenere la soddisfazione per averlo colto in difetto; avrebbe voluto che Dedekind andasse a Canossa, riconoscendo la sua autorità sui fondamenti della teoria degli insiemi, e trattava *Was sind und was sollen die Zahlen* in modo sbrigativo e spregiativo (sbagliando la data in questa occasione, e nei suoi scritti mai citandolo, pur avendolo evidentemente studiato).

Dedekind per parte sua rimarrà effettivamente perplesso di fronte alle totalità inconsistenti, al punto che nel 1903 non concederà l'autorizzazione alla ristampa del suo libro del 1888; la darà nel 1911, esprimendo nella prefazione solo la speranza che il proprio lavoro venisse garantito e riabilitato dalla "capacità del nostro spirito di creare, a partire da determinati elementi, una nuova entità determinata, il loro sistema, necessariamente diversa da ciascuno di questi elementi".

Hilbert non si pronunciò sulla diatriba in cui Cantor voleva trascinarlo, ma degli argomenti di questi fece suo come abbiamo già accennato il riconoscimento che non era possibile in matematica accettare una fondazione basata sulla logica del principio di comprensione:

> [le contraddizioni] mi hanno portato al convincimento che la logica tradizionale è insoddisfacente, che la teoria della formazione dei concetti ha bisogno piuttosto di una rigorizzazione e di un perfezionamento, e da questo punto di vista considero come lacuna essenziale nel tradizionale edificio della logica l'assunzione – condivisa finora da tutti i logici e i matematici – che un concetto è già dato quando si è in grado di stabilire, per ogni oggetto, se questo cada sotto di esso oppure no. Ciò non è a mio parere sufficiente. La cosa determinante è piuttosto il riconoscimento della non contraddittorietà degli assiomi che definiscono il concetto. ([43])

Senza queste ripicche, e se le posizioni di Cantor e Dedekind fossero state conosciute, la storia della teoria degli insiemi e dei suoi fondamenti dei primi dieci anni del Novecento sarebbe stata forse meno caotica e più produttiva. Si è dovuto aspettare il 1925 perché John von Neumann (1903-1957) proponesse un'assiomatizzazione della teoria degli insiemi che contemplava insiemi e classi, queste ultime distinte dagli insiemi in quanto non potevano appartenere ad alcuna classe. Benché la prima formalizzazione di von Neumann non fosse in termini di classi, bensì di funzioni, in [von Neumann 1925] e in [von Neumann 1928], la teoria venne riformulata con insiemi e classi da Paul Bernays (1888-1977) in una serie di articoli iniziata nel 1937, e perfezionata da Kurt Gödel (1906-1972) nel 1940 nella teoria ora nota come *GB* (da Gödel, Bernays). Questa teoria sembra rispondere perfettamente alla richiesta di Cantor della esistenza di due tipi di molteplicità; inoltre la teoria è un'estensione conservativa della teoria degli insiemi *ZF* di Zermelo e Fraenkel, soddisfacendo quindi l'esigenza di Cantor che le classi (molteplicità assolutamente infinite) svolgano solo un ruolo metamatematico e non siano oggetto di conoscenza matematica.

([41]) [Purkert e Ilgauds 1987, p. 154]; traduzione inglese in [Ferreirós 2007, pp. 452-3].

([42]) Sembra strano che Cantor non capisse le ragioni dell'insorgere della ritrosia di Dedekind. Questi si era risentito quando Cantor nel 1874 aveva pubblicato la sua dimostrazione della numerabilità dei numeri algebrici e della non numerabilità del continuo senza menzionare il contributo di Dedekind stesso (alla parte sui numeri algebrici); aveva deciso di non informare più Cantor sulle proprie ricerche, ma di rispondere da allora in poi solo a domande scientifiche che Cantor avesse eventualmente sollevato, come fece nel 1877-78 per la dimostrazione della equipotenza di lato e quadrato, e poi correggendo l'idea che Cantor gli aveva espresso sulle conseguenze distruttive del suo risultato per il problema della dimensione.

([43]) [Frege 1983, Lettera di Hilbert a Frege del 7 novembre 1903, p. 65].

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

[Bernays 1937] P. BERNAYS, *"A system of axiomatic set theory"*, Journal of Symbolic Logic **2** (1937), pp. 76-77.

[Bernstein 1905] F. BERNSTEIN, *"Über die Reihe der transfiniten Ordnungszahlen"*, Mathematische Annalen **60**, pp. 187-93.

[Borel 1898] E. BOREL, *Leçons sur la Théorie des Fonctions*, Gauthier-Villars, Paris, 1898.

[Burali-Forti 1894] C. BURALI-FORTI, *"Sulle classi ordinate e i numeri transfiniti"*, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, 8 (1894), pp. 169-79.

[Burali-Forti 1897a] C. BURALI-FORTI, *"Una questione sui numeri transfiniti"*, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, **11** (1897), pp. 154-64; trad inglese in [van Heijenoort 1967, pp. 104-11].

[Burali-Forti 1897b] C. BURALI-FORTI, *"Sulle classi bene ordinate"*, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, **11** (1897), p. 260; trad. inglese in [van Heijenoort 1967, pp. 111-2].

[Cantor 1879-84] G. CANTOR, *"Über unendliche, lineare Punktmannigfaltigkeiten"*, Mathematische Annalen, **15** (1879), pp. 1-7; **17** (1880), pp. 355-58; **20** (1882), pp. 113-21; **21** (1883), pp. 51-8 e 545-91; **23** (1884), 453-88.

[Cantor 1883] G. CANTOR, *Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre*, Teubner, Leipzig, 1883, pubblicazione separata della parte 5 di [Cantor 1879-84].

[Cantor 1886] G. CANTOR, *"Über die verschiedenen Standpunkte in bezug auf das aktuelle Unendliche"*, Zeitschrift für Philosophie und philosophische Kritik, **88** (1886), pp. 224-33.

[Cantor 1887-88] G. CANTOR, *"Mitteilungen zur Lehre vom Transfiniten"*, Zeitschrift für Philosophie und philosophische Kritik **91** (1887), pp. 81-125; **92** (1888) pp. 240-65.

[Cantor 1895-97] G. CANTOR, *"Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre"*, Mathematische Annalen, **46** (1895), pp. 481-512 e **49** (1897), pp. 207-46.

[Cantor 1932] G. CANTOR, *Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts* (a cura di E. Zermelo), Springer, Berlin, 1932.

[Cantor e Dedekind 1937] G. CANTOR e R. DEDEKIND, *Cantor-Dedekind Briefwechsel* (a cura di E. Noether e J. Cavaillès), Hermann, Paris, 1937; trad. franc. in [Cavaillès 1962, pp. 187-249]; trad. it. a cura di P. Nastasi, in "Pristem/Storia - Note di Matematica, Storia, Cultura", vol. 6, Springer Italia, Milano, 2002, pp. 134.

[Cavaillès 1962] J. CAVAILLÈS, *Philosophie mathématique*, Hermann, Paris, 1962.

[Dauben 1979] J. W. DAUBEN, *Georg Cantor. His Mathematics and Philosophy of the Infinite*, Harvard Univ. Press, Cambridge MA, 1979.

[Dedekind 1888] R. DEDEKIND, *Was sind und was sollen die Zahlen*, Braunschweig, Leipzig, 1888; trad. it. di O. Zariski, col titolo *Essenza e significato dei numeri*, in [Dedekind 1983, pp. 7-118], e di F. Gana col titolo *Che cosa sono e a che servono i numeri?* in [Dedekind 1983, pp. 79-128].

[Dedekind 1926] R. DEDEKIND, *Essenza e significato dei numeri. Continuità e numeri irrazionali* (a cura di O. Zariski), Casa Editrice Alberto Stock, Roma, 1926.

[Dedekind 1983] R. DEDEKIND, *Scritti sui fondamenti della matematica* (a cura di F. Gana), Bibliopolis, Napoli, 1983.

[Dugac 1976a] P. DUGAC, *Richard Dedekind et les fondements des mathématiques*, Vrin, Paris, 1976.

[Ewald 1996] W. B. EWALD, *From Kant to Hilbert*, 2 voll., Oxford Univ. Press, Oxford, 1996.

[Ferreirós 2007] J. FERREIRÓS, *Labyrinth of Thought*, Birkhäuser, Basel, 2007.

[Frege 1892] G. FREGE, *recensione di scritti di Cantor degli anni ottanta sulla* Zeitschrift für Philosophie und philosophische Kritik, ivi, **100** (1892), pp. 269-72.

[Frege 1983] G. FREGE, *Alle origini della nuova logica*, epistolario, Bollati Boringhieri, Torino, 1983.

[Gödel 1940] K. GÖDEL, *The consistency of the axiom of choice and of the generalized continuum hypothesis with the axioms of set theory*, Annals of mathematics studies, vol. 3, Princeton Univ. Press, Princeton, 1940; trad. it. con note aggiunte nel 1951 e nel 1966 in [Gödel 2002, pp. 36-106]

[Gödel 2002] K. GÖDEL, *Opere*, vol. 2, Bollati Boringhieri, Torino, 2002.

[Grattan-Guiness 1977] I. GRATTAN-GUINESS, *Dear Russell-Dear Jourdain*, Duckworth, London, 1977.

[Grattan-Guiness 2000] I. GRATTAN-GUINESS, *The Search for Mathematical Roots 1870-1940*, Princeton Univ. Press, Princeton, 2000.

[Hadamard 1898] J. HADAMARD, *"Sur certain applications possibles de la théorie des ensembles", in F. Rudio (hrsg.),* Verhandlungen des I Internationalen Mathematiker-Kongresses, Teubner, Leipzig, 1898, pp. 311-2.

[Hallett 1984] M. HALLETT, *Cantorian Set Theory ad Limitation of Size*, Clarendon Press, Oxford, 1984.

[Hardy 1903] G. H. HARDY, *"A Theorem Concerning the Infinite Cardinal Numbers"*, Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics, **35** (1903), pp. 87-94.

[Hilbert 1900a] D. HILBERT, *"Über den Zahlbegriff"*, Jahresberichte der DMV, 8 (1900), pp. 180-4; trad. it. in [Hilbert 1978, pp. 139-43].

[Hilbert 1900b] D. HILBERT, *"Mathematische Probleme"*, Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, 1900, pp. 253-97; trad. it. parziale in [Hilbert 1978, pp. 145-62].

[Hilbert 1978] D. HILBERT, *Ricerche sui fondamenti della matematica* (a cura di M. V. Abrusci), Bibliopolis, Napoli, 1978.

[Jourdain 1904] P. B. E. JOURDAIN, *"On the Transfinite Cardinal Numbers of Well-Ordered Aggregates"*, Philosophical Magazine, (**6**) 7 (1904), pp. 61-75.

[Kanamori 2004] A. KANAMORI, *"Zermelo and set theory"*, Bulletin of Symbolic Logic, 10 (2004), n. **4**, pp. 489-553.

[Kanamori 2012] A. KANAMORI, *"In Praise of Replacement"*, Bulletin of Symbolic Logic, 18 (2012), n. **1**, pp. 46-90.

[Lolli 2011] G. LOLLI, *Nascita di un'idea matematica*, Edizioni della Normale, Pisa, 2011.

[Meschkowski e Nilson 1991] H. MESCHKOWSKI e W. NILSON, *Georg Cantor: Briefe*, Springer, Berlin, 1991.

[Moore 1976] G. H. MOORE, *"Ernst Zermelo, A. E. Harward, and the axiomatization of set theory"*, Historia Mathematica 3 (**2**) (1976), pp. 206-209.

[Moore 1982] G. H. MOORE, *Zermelo's Axiom of Choice. Its Origin, Development, and Influence*, Springer, New York, 1982.

[Purkert e Ilgauds 1987] W. PURKERT e H. J. ILGAUDS, *Georg Cantor 1845-1918*, Birkhäuser, Basel, 1987.

[Russell 1902] B. RUSSELL, *"Théorie générale des séries bien-ordonnées"*, Rivista di Matematica, 8 (1902), pp. 12-6 e 17-43.

[Russell 1903] B. RUSSELL, *The principles of mathematics*, George Allen & Unwin, 1903; trad. it. *I principi della matematica*, Longanesi, Milano, 1963.

[Schröder 1898] E. SCHRÖDER, *"Uber zwei Definitionen der Endlichkeit und G. Cantor'sche Sätze"*, Deutsche Academie der Naturforscher, Nova Acta Leopoldina, **71** (1898), pp. 303-62.

[van Heijenoort 1967] J. VAN HEIJENOORT (ed.), *From Frege to Gödel*, Harvard Univ. Press, Cambridge MA, 1967.

[von Neumann 1925] J. von Neumann, *"Eine Axiomatisierung der Mengelehre"*, Journal für die reine und ungewandte Mathematik (Crelle's), **154** (1925), pp. 219-40; trad. inglese in [van Heijenoort 1967, pp. 393-413].
[von Neumann 1928] J. von Neumann, *"Die Axiomatisierung der Mengelehre"*, Mathematische Zeitschrift **27** (1928), pp. 669-752.
[Zermelo 1904] E. Zermelo, *"Beweis, dass jede Menge wohlgeordnet werden kann (Aus einem an Herrn Hilbert gerichteten Briefe)"*, Mathematische Annalen, **59** (1904), pp. 514-6; trad. ingl. in [van Heijenoort 1967, pp. 139-41].
[Zermelo 1908a] E. Zermelo, *"Neuer Beweis für die Möglichkeit einer Wohlordnung"*, Mathematische Annalen, **65** (1908), pp. 107-28; trad. ingl. in [van Heijenoort 1967, pp. 183-98].
[Zermelo 1908b] E. Zermelo, *"Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre I"*, Mathematische Annalen, **65** (1908), pp. 261-81; trad. ingl. in [van Heijenoort 1967, pp. 199-215].


Gabriele Lolli

Ha insegnato Logica matematica per diversi anni, prevalentemente nell'Università di Torino; in seguito è stato Professore di Filosofia della matematica presso la Scuola Normale di Pisa, cofondatore del network Filmat di filosofia della matematica; ora a riposo per limiti di età.