

---

# *Matematica, Cultura e Società*

RIVISTA DELL'UNIONE MATEMATICA ITALIANA

---

ROBERTO MONACO

## **Ecologia del Paesaggio: Modelli Matematici per la Valutazione di un Sistema Ambientale**

*Matematica, Cultura e Società. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. 3*  
(2018), n.2, p. 103–112.

Unione Matematica Italiana

[http://www.bdim.eu/item?id=RUMI\\_2018\\_1\\_3\\_2\\_103\\_0](http://www.bdim.eu/item?id=RUMI_2018_1_3_2_103_0)

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.



# Ecologia del Paesaggio: Modelli Matematici per la Valutazione di un Sistema Ambientale

ROBERTO MONACO

Politecnico di Torino

E-mail: roberto.monaco@polito.it

**Sommario:** *Nell'ambito della cosiddetta Ecologia del Paesaggio e delle ricerche volte allo studio della stabilità ecologica dei sistemi ambientali, viene proposta una rassegna di vari modelli matematici che si sono rivelati utili per rappresentare e valutare le dinamiche relative alle trasformazioni nel tempo di un determinato territorio. A scopo esemplificativo viene presentata una simulazione dedotta da un caso studio realizzato a partire da dati reali raccolti in un comprensorio di alcuni comuni dell'area metropolitana di Torino. Ulteriori possibili sviluppi di modellistica matematica e le loro ricadute nell'ambito delle politiche territoriali vengono infine discussi.*

**Abstract:** *In the framework of the so-called Landscape Ecology and of the studies on the ecological stability of an environmental system a review of various mathematical models is presented. These models have shown to be useful to represent and evaluate the time transformations of a certain territory under investigation. At this end in the last part of the paper an example of the evolution of the ecological state of a system in the metropolitan area of the city of Torino is shown. Perspectives of new models and final remarks conclude the paper.*

**Parole chiave:** Ecologia del paesaggio. Modelli matematici. Stabilità. Trasformazioni territoriali.

## 1. – Introduzione

La necessità di integrare gli obiettivi di tutela ambientale nelle politiche di pianificazione, valutazione e gestione dello stato di salute ecologica di un territorio ha ragioni, oggi consolidate e istituzionalizzate, che rimandano a provvedimenti che si sono sviluppati a partire dai primi anni '70 a livello internazionale. Vale la pena di citare la Dichiarazione di Stoccolma sull'Ambiente Umano del 1972 (UNEP) dove è affermato che la difesa e il miglioramento dell'ambiente costituiscono uno scopo imperativo per tutta l'umanità. Successivamente l'attenzione della comunità internazionale verso il problema della tutela ambientale è stata confermata dal

cosiddetto Rapporto Brundtland del 1987 e dalla Convenzione sulla diversità biologica di Rio de Janeiro del 1992.

Un'efficace difesa ambientale comporta la necessità di promuovere nuovi strumenti di pianificazione per la tutela della stabilità ecologica, ampliando la concezione stessa di ambiente. Questo non deve essere identificato solo con le caratteristiche delle sue componenti fisiche (aria, acqua, suolo, ...) ma deve considerare l'ambiente stesso come sistema complesso ed eterogeneo, dinamico e capace di evolversi [34]. Tale sistema, come si vedrà, può essere definito dalla combinazione di differenti porzioni del territorio [12], caratterizzate da scambi di materia ed energia biologica, immagazzinata nei composti organici.

È questo un approccio alla base dei principi teorici e dei metodi operativi della cosiddetta *Eco-*

---

*Accettato:* il 24 ottobre 2017.

*logia del Paesaggio* (Landscape Ecology) [8, 11, 17, 19, 35]. Questa nuova disciplina, attraverso un ripensamento critico dei principi della salvaguardia ambientale, stabilisce che le scelte di pianificazione di un territorio non possano essere condizionate dalle caratteristiche ambientali delle singole porzioni del territorio stesso, ma debbano considerare un sistema ambientale, inteso anche dal suo paesaggio, nella sua globalità e complessità, individuando le leggi che ne governano le dinamiche evolutive.

Secondo l'Ecologia del Paesaggio il funzionamento di un sistema ambientale deve essere valutato soprattutto in relazione alla connessione tra le varie porzioni territoriali che lo compongono (*connettività energetica*) [28, 29] e, in ultima analisi, alla sua stabilità. Il rapporto stabilità ecologica/connettività energetica, come si vedrà, riveste un ruolo centrale per lo studio dei processi di trasformazione del territorio verso scenari caratterizzati da diversi livelli di qualità ambientale e biodiversità [18]. In quest'ottica, quindi, l'attenzione di chi opera nel campo della pianificazione e gestione del territorio deve essere rivolta a mitigare tutti i processi che in qualche misura causano la perdita di connettività ambientale, processi tra i quali gioca un ruolo fondamentale la *frammentazione del territorio*. La frammentazione, infatti, costituisce un processo degenerativo da cui dipende in larga misura la perdita di qualità dell'ambiente e del paesaggio [24, 23]. Tale fenomeno indica uno stato di alterazione strutturale del mosaico paesaggistico a cui consegue un maggior isolamento delle popolazioni e una progressiva riduzione dei livelli di diversità ecologica [16, 7, 36].

Nell'ambito dell'Ecologia del Paesaggio un strumento quantitativo che valuta in modo molto efficace la salute ecologica di un sistema ambientale, evidenziando il livello più o meno alto di frammentazione del territorio, è il cosiddetto *grafo ecologico*. Tale strumento fu introdotto nel 2007 da Fabbri [6] e consiste, come si vedrà, nella costruzione di un grafo che tiene conto di un elevato numero di dati del territorio sotto osservazione, sintetizzati da una serie di indicatori che permettono di valutare lo stato ecologico complessivo del territorio stesso e, grazie alla determinazione della propria connettività energetica, il suo grado di frammentazione.

Tuttavia il grafo ecologico fornisce una fotografia statica del sistema ambientale preso in considera-

zione, senza mostrare a quali eventuali trasformazioni può essere soggetto. Infatti un sistema ambientale, e il suo paesaggio, è in un equilibrio metastabile che solo sotto limitate perturbazioni rimane nel suo stato [27]; altrimenti evolve verso scenari che mostrano come il sistema abbia subito notevoli trasformazioni ambientali.

Queste osservazioni sono state il punto di partenza per proporre alcuni modelli matematici che, utilizzando come dati iniziali quelli forniti dal grafo, possano mostrare l'evoluzione nel tempo delle trasformazioni a cui è soggetto il sistema. Pertanto, a partire dal 2010, con un primo semplice modello [22], si è perseguito questo obiettivo. In seguito sono stati sviluppati altri modelli che in modo sempre più dettagliato hanno tenuto conto delle caratteristiche del territorio. Lo scopo del presente lavoro, appunto, è quello di presentare tali modelli, discutendone le loro proprietà.

L'articolo è organizzato nel seguente modo: nel prossimo paragrafo verrà presentato il grafo ecologico e formulato il problema della valutazione dinamica di un sistema ambientale. Nel paragrafo 3, verranno presentati i cosiddetti modelli PANDORA (Procedure for mathematical Analysis of Landscape evolution and equilibrium scenarios Assessment) nelle tre differenti versioni [13, 14, 15]. Successivamente si mostrerà un esempio dedotto da un caso studio su un territorio a nord della città di Torino. Possibili sviluppi e nuove prospettive nel contesto dell'uso di modelli matematici in Ecologia del Paesaggio sono infine discussi nell'ultimo paragrafo.

## 2. – Il grafo ecologico e la valutazione del sistema ambientale

Come già accennato nell'Introduzione, nel 2007 Fabbri [6] propose come strumento di valutazione dello stato ecologico di un sistema ambientale il grafo ecologico. L'idea su cui si basa consiste essenzialmente nel determinare l'energia biologica prodotta dal sistema stesso e come questa si diffonda, grazie alla connettività delle varie porzioni di cui è composto il territorio (si vedano a questo proposito l'articolo di Brown *et al.* [3], ma anche i vari contributi raccolti nel volume [5] curato dello stesso Fabbri).

A tal fine il sistema ambientale è definito come un sistema isolato distribuito in  $n$  settori ecologici, spesso in letteratura indicati come Unità di Paesaggio (UP). Tali settori vengono delimitati dai propri confini, costituiti da barriere che possono essere sia di origine antropica (strade, viadotti, ferrovie ...) sia di origine naturale (fiumi, canali, crinali di rilievi ...). Ciascuna di queste barriere è caratterizzata da un indice di permeabilità  $p \in [0, 1]$ , indicando con 1 la completa permeabilità e con 0 la impermeabilità (per la classificazione delle barriere in ragione degli indici di permeabilità si vedano i riferimenti [20, 13]). Ciascuna UP, a sua volta, viene considerata come suddivisa in  $m_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , biotopi, cioè in porzioni di territorio caratterizzate da una omogenea copertura del suolo. Per suddividere il sistema ambientale in questa maniera è necessario avvalersi del GIS (Geographic Information System [37]) che è in grado di fornire, per il territorio in osservazione, tutti i dati relativi all'uso dei suoli, alle barriere e ad altri elementi morfologici del territorio stesso, quali perimetri e aree di barriere o di suoli edificati.

Ciascun biotopo, a seconda della sua natura, è caratterizzato dall'energia biologica prodotta, misurata dall'indice di BTC (Bio-potential Territorial Capacity) [19]. Tale indice per il  $j$ -esimo biotopo appartenente all' $i$ -esima UP,  $j = 1, \dots, m_i$ , verrà indicato con il simbolo  $b_{ji}$  e può assumere valori nell'intervallo  $[0, 6.5]$  in unità  $M cal/(m^2 \cdot anno)$ , dove 0 corrisponde a un suolo privo di vegetazione mentre il valore  $b_{max} = 6.5$  viene assegnato alle aree boschive di quercu-carpineti, considerati, alle nostre latitudini, come il tipo di vegetazione in grado di produrre la massima energia biologica. Per la misura della BTC e i valori di  $b_{ji}$ , per specie di vegetazione, si può vedere di nuovo il lavoro [13].

Generalmente con l'indice di BTC si identificano 5 classi ecologiche secondo la seguente suddivisione

$$A = [0, 0.4), \quad B = [0.4, 1.2], \quad C = (1.2, 2.4], \\ D = (2.4, 4.0], \quad E = (4.0, 6.5].$$

La BTC totale in  $M cal/anno$  di ogni UP è data da

$$(1) \quad \mathcal{B}_i = \sum_{j=1}^{m_i} b_{ji} s_{ji},$$

$s_{ji}$  essendo l'area dei corrispondenti biotopi. Naturalmente è possibile definire anche il valore massimo

$\mathcal{B}_i^{max}$  di BTC per ogni UP con la formula

$$(2) \quad \mathcal{B}_i^{max} = b_{max} S_i$$

che equivale alla BTC di una UP la cui superficie di area  $S_i$  è interamente coperta da aree boschive di quercu-carpineti.

Per costruire il grafo si introduce per ogni UP una nuova grandezza  $\mathcal{M}_i$ , che è interpretabile come una "potenza biologica aumentata", definita nel seguente modo [5]

$$(3) \quad \mathcal{M}_i = (1 + K_i) \mathcal{B}_i,$$

dove i parametri  $K_i \in [0, 1]$  sono dipendenti dalle proprietà fisiche e morfologiche sia delle UP che dei biotopi. Nei modelli matematici che verranno presentati nel prossimo paragrafo i parametri  $K_i$  dipendono, per le UP, dalla morfologia dei loro confini, dalla loro rispettiva permeabilità e dall'indice di diversità paesaggistica (indice di Shannon [32]), mentre per i biotopi, dalla lunghezza delle fasce ecotonali (i confini tra un biotopo e un altro), dalla loro esposizione solare e umidità relativa. Per il loro calcolo effettivo si vedano i lavori [13, 14, 15]. Tali proprietà fisiche e morfologiche delle UP e dei biotopi favoriscono il diffondere di energia nel territorio e, in questo senso, la  $\mathcal{M}_i$  può essere considerata come una grandezza che incrementa il valore di  $\mathcal{B}_i$ : di conseguenza valori prossimi all'unità del parametro  $K_i$  permettono di aumentare il valore di energia biologica prodotta fino a un valore doppio rispetto a quello indicato dalla BTC. Utilizzando la definizione di  $\mathcal{B}_i^{max}$  si determina anche il massimo valore di  $\mathcal{M}_i$  per ogni UP

$$(4) \quad \mathcal{M}_i^{max} = 2\mathcal{B}_i^{max} = 2b_{max} S_i$$

Infine, l'ultima grandezza necessaria alla costruzione del grafo è il cosiddetto flusso di energia biologica tra due UP  $i$  e  $k$ , definito dalla formula [5]

$$(5) \quad \Phi_{ik} = \frac{\mathcal{M}_i + \mathcal{M}_k}{2(P_i + P_k)} \frac{H_{ik}}{L_{ik}}$$

dove la costante  $H_{ik}$  dipende dalla permeabilità dei vari tratti che costituiscono il confine tra le due UP, essendo  $L_{ik}$  la lunghezza del confine tra le due UP, e  $P_i$  e  $P_k$  i loro corrispondenti perimetri.

Una volta determinati, per ogni UP, i valori di  $\mathcal{M}_i$  e dei flussi  $\Phi_{ik}$ , si costruisce il grafo indicando con un cerchio più o meno grande (a seconda del valore di

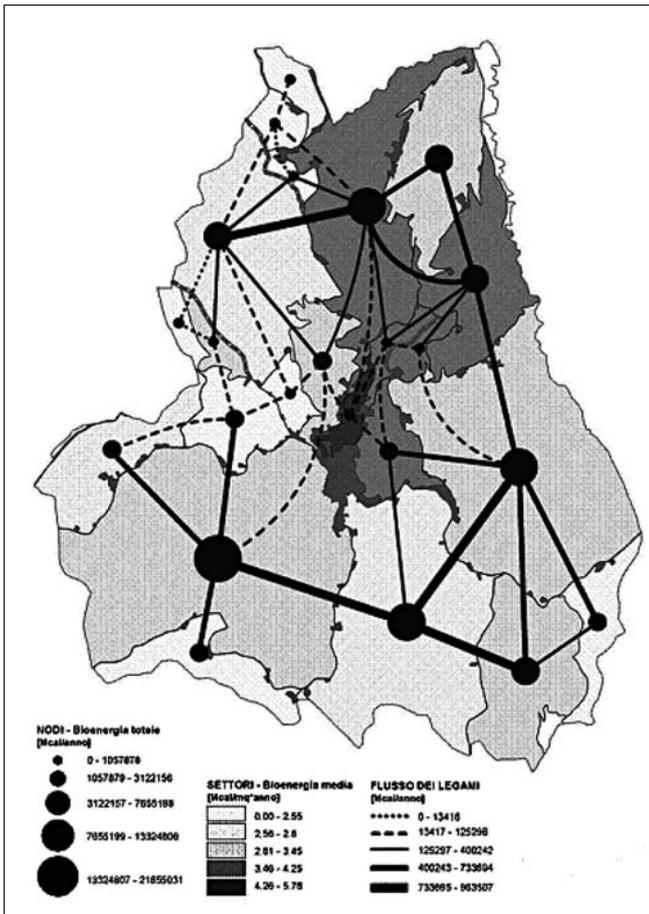


Fig. 1. - grafo ecologico del comune di Monforte d'Alba.

$\mathcal{M}_i$ ) il centro di ogni UP. Similmente i centri vengono collegati tra loro da legami (archi) più o meno spessi in ragione dei rispettivi valori dei flussi  $\Phi_{ik}$ . Un esempio di grafo, costruito per la valutazione ambientale del comune di Monforte d'Alba (CN) [9], è riportato in Fig. 1.

Come già accennato, il GIS, oltre a fornire i dati necessari alla costruzione del grafo, permette la determinazione di molti altri indicatori (si veda il saggio [10]), utili per la valutazione dello stato ecologico del sistema. Tra questi riveste un ruolo importante, come si vedrà per la formulazione dei modelli matematici, l'area totale  $\mathcal{V}_i$  dei biotopi che, in ogni UP, presentano una copertura del suolo con vegetazione di alta qualità ecologica. Tale vegetazione di qualità è assunta come quella che presenta un indice di BTC superiore a  $2.4 \text{ M cal}/(\text{m}^2 \cdot \text{anno})$ , appartenente cioè alle classi ecologiche D ed E.

Come già osservato, il grafo ecologico, tuttavia, fornisce la valutazione dell'ambiente solo al momento della rilevazione dei dati tramite GIS. Pertanto, a

partire dal 2010 si è sviluppata l'idea di considerare i dati del grafo come dati iniziali per un sistema di equazioni differenziali di evoluzione che abbiano la proprietà di possedere soluzioni di equilibrio asintoticamente stabili, in modo cioè da simulare trasformazioni dell'ambiente verso nuovi scenari corrispondenti a stati ecologici stabili, diversi da quelli da cui si è partiti.

La verifica di tali idee è stata fatta tramite un primo modello [22], che pur presentando alcuni difetti, è stato in grado di fornire una soddisfacente valutazione ambientale del comprensorio di Rivolta d'Adda in provincia di Cremona, mettendo inoltre in luce il ruolo cruciale giocato dalla connettività energetica tra UP. Il principale difetto di quest'ultimo modello è legato alla struttura delle sue equazioni che non ammettono come soluzione di equilibrio quella corrispondente allo scenario di un territorio completamente frammentato.

Lo sviluppo e le opportune modifiche di questo modello, per il quale si rimanda alla discussione presente nel lavoro [14], hanno permesso in seguito di mettere a punto gli stessi modelli PANDORA, che, nelle varie applicazioni effettuate, hanno evidenziato come, nella realtà dei territori italiani, scenari di grande frammentazione sono purtroppo molto presenti.

In conclusione di questo paragrafo vale la pena di osservare che l'utilizzo di tali modelli matematici non permette solo di valutare lo stato di salute ecologica di un sistema ambientale proiettando nel tempo le trasformazioni positive o negative a cui presumibilmente andrà soggetto.

Infatti i modelli possono essere utilizzati in modo comparativo, mettendo a confronto cioè due o più diversi disegni per lo stesso territorio, al fine di scegliere poi quel progetto di pianificazione in cui il sistema ambientale mostra un'evoluzione verso uno scenario ritenuto migliore.

### 3. - I modelli PANDORA

I modelli che verranno presentati in questo paragrafo hanno tutti una struttura di tipo Lotka-Volterra di tipo cooperativo [21], con termini positivi che favoriscono la crescita delle variabili di stato e con termini negativi che invece tengono conto degli

impatti ambientali. È importante notare che per questo tipo di sistemi differenziali esiste sempre almeno una soluzione di equilibrio stabile [33]. Per i dettagli riguardanti la struttura matematica di tali modelli, per la loro derivazione e per la completa definizione dei vari parametri, nonché per la stabilità degli equilibri e per la presenza di eventuali biforcazioni, si rimanda ai lavori [13, 14, 15].

Dunque, a partire dalle idee e dall'esperienza sviluppata nel già citato articolo [22], nel 2010 venne proposta una prima versione del modello PANDORA [13]. Questo modello, pur suddividendo il sistema ambientale in UP e biotopi, studia la sua evoluzione attraverso due variabili di stato definite alla scala dell'intero sistema. In particolare la prima variabile  $V$  è definita dall'area totale (normalizzata rispetto alla superficie del sistema) dei biotopi che presentano alta qualità ecologica; in formule

$$(6) \quad V = \frac{1}{S} \sum_{i=1}^n \mathcal{V}_i \in [0, 1],$$

dove  $S$  è, appunto, l'area totale del sistema ambientale. La seconda variabile di stato  $M$ , sempre in forma normalizzata, è riferita alla somma su tutte le UP delle  $\mathcal{M}_i$ , i.e.

$$(7) \quad M = \frac{1}{\mathcal{M}^{max}} \sum_{i=1}^n \mathcal{M}_i \in [0, 1],$$

$$\mathcal{M}^{max} = \sum_{i=1}^n \mathcal{M}_i^{max} = 2 \sum_{i=1}^n \mathcal{B}_i^{max}.$$

Il modello PANDORA 1.0 è quindi definito dalle seguenti due equazioni differenziali

$$(8) \quad V'(t) = bV(t)[1 - V(t)] - hUV(t)$$

$$(9) \quad M'(t) = cM(t)[1 - M(t)] - k[1 - V(t)]M(t),$$

dove i primi termini a destra del segno di uguaglianza sono positivi e, quindi, determinano l'incremento delle variabili  $V$  e  $M$ , mentre i restanti termini negativi sono quelli che tengono conto dell'impatto ambientale. Come già detto è facilmente riconoscibile che detto modello ha la struttura matematica dei modelli cooperativi di Lotka e Volterra [21, 33]. La scelta di questa particolare forma funzionale per rappresentare i termini di guadagno e perdita nelle

suddette due equazioni, è conforme a quella suggerita e largamente adottata dalla letteratura per modellizzare, da un punto di vista matematico, la fenomenologia in oggetto [26, 1]. In particolare, vale la pena di notare che il modello PANDORA 1.0, a differenza delle successive versioni, presenta una struttura molto semplice in quanto la prima equazione è disaccoppiata dall'altra, per cui è possibile trovare la soluzione analitica e determinare le condizioni di stabilità degli equilibri.

Il parametro  $b$ , presente nella prima di queste equazioni, è così definito

$$b = \frac{1}{\mathcal{B}^{max}} \sum_{i=1}^n \mathcal{B}_i, \quad \mathcal{B}^{max} = b_{max} S,$$

e rappresenta il tasso di produzione di energia biologica della  $i$ -esima UP, mentre il parametro  $h$  è dato dal rapporto tra la somma dei perimetri di tutte le aree edificate e il perimetro totale del sistema e misura la dispersione dell'edificato nel sistema stesso. Analogamente  $k$  è definito come il rapporto tra la somma dei perimetri delle barriere impermeabili e il perimetro del sistema. Il parametro  $U$  misura l'intensità dell'edificato nel territorio ed è definito dal rapporto tra la somma di tutte le aree edificate e la superficie del sistema ambientale. Infine,  $c$  è l'indice di connettività energetica tra tutte le UP. È definito nel seguente modo [9, 13]

$$(10) \quad c = \frac{1}{3(n-2)} \sum_{i=1}^n \frac{\Phi_i}{max_i\{\Phi_i\}}, \quad \Phi_i = \sum_{k \in I_i} \Phi_{ik},$$

dove  $I_i$  è l'insieme di tutte le UP che confinano con la  $i$ -esima UP. Si noti che le grandezze  $V, M, b, U$  sono tutte con valori nell'intervallo  $[0, 1]$ , mentre le altre sono definite positive e possono assumere valori anche superiori all'unità. Naturalmente, sia i dati iniziali di  $V$  e  $M$  che i valori dei vari parametri sono dedotti dal GIS e dal grafo ecologico.

Come detto, data la semplice forma delle equazioni, è facile mostrare che esistono quattro soluzioni di equilibrio  $(V_e, M_e)$  che possono rappresentare gli scenari a cui tenderà, per tempi presumibilmente lunghi, il sistema ambientale in osservazione.

Queste sono nell'ordine

$$(V_e = 0, M_e = 0), (V_e = (b - hU)/b, M_e = 0),$$

$$(V_e = 0, M_e = (bc - hkU)/bc) \text{ e}$$

$$(V_e = (b - hU)/b, M_e = (bc - hkU)/bc).$$

La prima è relativa a un sistema che tende a perdere qualità ecologica a causa della completa frammentazione del proprio territorio. La seconda è interpretabile come un sistema ambientale fortemente frammentato ( $M_e = 0$ ) con presenza di isole di qualità ecologica ( $V_e \neq 0$ ). Al contrario di quest'ultima, la terza soluzione può essere riferita a un sistema che tende a conservare energia biologica ( $M_e \neq 0$ ) ma non presenta aree di vegetazione di qualità ( $V_e = 0$ ), come, ad esempio, sistemi a forte caratterizzazione agricola (bassi valori dell'indice di BTC) in cui l'energia biologica non trova barriere che ne ostacolano la diffusione. Infine, la quarta mostra un sistema ambientale di buona tenuta ecologica sia in termini di produzione di energia che di vegetazione di qualità.

È anche facile mostrare che la stabilità asintotica di ciascuna soluzione implica la instabilità o la non esistenza delle altre tre. Inoltre, il controllo della tendenza del sistema ambientale sotto osservazione non richiede nemmeno l'utilizzo del modello ma soltanto la verifica delle condizioni di stabilità, determinate da semplici disuguaglianze sui parametri delle equazioni, e, quindi, direttamente controllabili dai dati del GIS e del grafo ecologico.

Queste sono: per il primo scenario  $c < k$  e  $b < hU$ , per il secondo  $bc < hkU$  e  $b > hU$ , per il terzo  $c > k$  e  $b < hU$  e infine per il quarto  $bc > hkU$  e  $b > hU$ .

Pur nella sua semplicità, il modello PANDORA 1.0 ha fornito buoni risultati per la valutazione ambientale sia del bacino dei fiumi Marta e Traponzo in Provincia di Viterbo [13] che del comune di Monforte d'Alba (Provincia di Cuneo) [9].

La successiva versione 2.0 del modello si diversifica dalla precedente per due importanti differenze. La prima riguarda le variabili di stato che sono ora definite per ogni UP. Pertanto, il modello è rappresentato da  $2n$  equazioni nelle variabili  $V_i(t) = \mathcal{V}_i(t)/S_i$  e  $M_i(t) = \mathcal{M}_i(t)/\mathcal{M}_i^{max}$ ,  $i = 1, \dots, n$ . La seconda differenza è invece nei coefficienti  $b_i$  e  $c_i$  che, essendo funzioni delle variabili di stato, risultano dipendenti dal tempo [14] e determinano, a differenza del modello PANDORA 1.0, il completo accoppiamento delle equazioni. Queste sono

$$(11) \quad V_i'(t) = b_i(t)V_i(t)[1 - V_i(t)] - h_i U_i V_i(t)$$

$$(12) \quad M_i'(t) = c_i(t)M_i(t)[1 - M_i(t)] - k_i[1 - V_i(t)]M_i(t),$$

dove i coefficienti  $h_i$ ,  $U_i$  e  $k_i$  sono definiti come nella versione 1.0 del modello, ma sono ora calcolati per

ciascuna UP, mentre i coefficienti variabili nel tempo sono dati da

$$(13) \quad b_i(t) = \frac{\mathcal{M}_i(t)}{\mathcal{M}_i^{max}}, \quad c_i(t) = \sum_{k \in I_i} \frac{\mathcal{M}_i(t) + \mathcal{M}_k(t)}{\mathcal{M}_i^{max} + \mathcal{M}_k^{max}} H_{ik}.$$

Naturalmente i dati iniziali e i coefficienti costanti vengono determinati, come al solito, dal GIS e dal grafo ecologico. Si noti come tutte le grandezze, salvo gli  $h_i$  e i  $k_i$  siano definite in  $[0, 1]$  in modo che possano essere espresse in termini di percentuali. Questo modello è stato utilizzato per una valutazione di impatto ambientale relativa al costruendo raccordo autostradale tra Orte e Civitavecchia. Successivamente, come si vedrà nel prossimo paragrafo, sempre con questa versione del modello si è proposta la valutazione ecologica di un comprensorio di comuni incentrati sulla cittadina di Cirié in Provincia di Torino.

Infine, nel lavoro [15] si è proposta un'ulteriore nuova versione (PANDORA 3.0) del modello in cui questa volta le variabili di stato sono definite alla scala dei biotopi. Questa versione, quindi, considera come variabili di stato i valori di BTC di ogni singolo biotopo, non avendo senso a questa scala di considerare le variabili  $M$  e  $V$ . Pertanto si definiscono le nuove variabili  $B_{ji}(t) = b_{ji}(t)/b_{max}$ ,  $j = 1, \dots, m_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , e le equazioni del modello sono date da

$$(14) \quad B_{ji}'(t) = c_i(t)B_{ji}(t)[1 - B_{ji}(t)] - h_i U_i B_{ji}(t),$$

dove  $c_i(t)$  e le costanti  $h_i$  e  $U_i$  sono definite come nella versione PANDORA 2.0.

Il numero di queste equazioni risulta ovviamente essere molto elevato, potendo il territorio, preso in considerazione, possedere anche alcune migliaia di biotopi. Per questo motivo nel lavoro sopra citato è stato proposto un metodo di calcolo approssimato che esclude l'integrazione del sistema differenziale. Inoltre questo modello viene utilizzato anche per la determinazione dei cosiddetti parametri relativi ai servizi ecosistemici [30] (si veda più avanti nell'ultimo paragrafo), e, di conseguenza, è stato realizzato un software applicativo che partendo dalla determinazione del grafo ecologico, attraverso la risoluzione del sistema (14), determina i suddetti parametri. Tale software applicativo è di pubblico dominio e scaricabile dal sito [38] ed è descritto nel lavoro [31], dove è anche presentata un'applicazione svolta su un territorio dell'area metropolitana di Bari.

#### 4. – Un esempio dedotto da un caso studio

In questo paragrafo viene mostrato un esempio dedotto da uno studio effettuato, tramite la versione 2.0 del modello, nell'ambito del progetto Europeo RURBANCE [4], sul comprensorio del Ciriacese nell'area metropolitana di Torino.

L'esempio, discusso in [25], ha lo scopo di mostrare l'influenza della connettività nelle trasformazioni temporali di un sistema ambientale che, nel caso considerato, è costituito da 24 UP.

In particolare, l'obiettivo consiste nel mostrare come una UP se trattata separatamente dalle altre, cioè con indice di connettività costante, abbia un'evoluzione anche molto diversa rispetto al caso in cui sia invece connessa dinamicamente con le altre UP, tramite la formula (13).

Si considerino, quindi, le UP N.13 e N.20 dell'insieme delle 24 del sistema ambientale complessivo. Facendo riferimento alle equazioni (11)-(12), le due UP presentano i seguenti valori per i dati iniziali e i rispettivi parametri, così come sono stati dedotti dal GIS e dal grafo:

UP N.13:  $V(t=0) = 0.26$ ,  $M(t=0) = 0.10$ ,  
 $b = 0.14$ ,  $h = 1.81$ ,  $U = 0.23$ ,  $c = 0.07$ ,  $k = 0.08$

UP N.20:  $V(t=0) = 0.30$ ,  $M(t=0) = 0.45$ ,  
 $b = 0.45$ ,  $h = 2.20$ ,  $U = 0.09$ ,  $c = 0.19$ ,  $k = 0.03$ .

Se si integrano le equazioni (11)-(12), tenendo i coefficienti  $b$  e  $c$  costanti e pari ai suddetti valori, si ottengono i grafici in funzione del tempo di Fig. 2.

Questi grafici mostrano che la UP N.13 (grafico di sinistra) tende a evolvere verso un stato che presenta una forte perdita di vegetazione di alta qualità ecologica e una conseguente decrescita di energia biologica. Un comportamento di questo tipo è in accordo con i valori che questa UP presenta sia nei dati iniziali che nei parametri: il valore iniziale di  $M$  è piuttosto basso (il 10% del massimo valore di potenza biologica producibile), alto invece l'indice  $U$  dell'intensità di edificato (il 23% del territorio) e molto basso l'indice di connettività (il 7%). Assolutamente diversi i valori espressi per la UP N.20: alto valore di  $M$ , basso di  $U$ , discretamente più alto quello di  $c$  (il 19%). Il risultato è l'andamento di crescita nel tempo sia di  $V$  che di  $M$  come si può notare nel grafico di destra della Fig. 2.

Se ora si integrano le equazioni (11)-(12), con i coefficienti  $b$  e  $c$  dipendenti dal tempo secondo le formule (13), allora gli andamenti nel tempo delle grandezze  $V$  e  $M$  per le due UP cambiano notevolmente (si veda la Fig. 3), con tendenze a scenari opposti rispetto a quelli precedentemente ottenuti nella Fig.2, a prova anche del ruolo cruciale giocato dall'indice di connettività  $c$ . Infatti, la UP N.13, pur presentando per un lungo transitorio valori molto bassi di  $V$ , dovuti, come si è visto, ai dati iniziali e ai valori dei parametri espressi dal GIS, ha poi un comportamento asintotico con crescita per entrambe le variabili di stato.

Viceversa, la UP N.20 mostra una rapida decrescita della variabile  $V$ , dovuta evidentemente alla forte diminuzione iniziale della potenza biologica

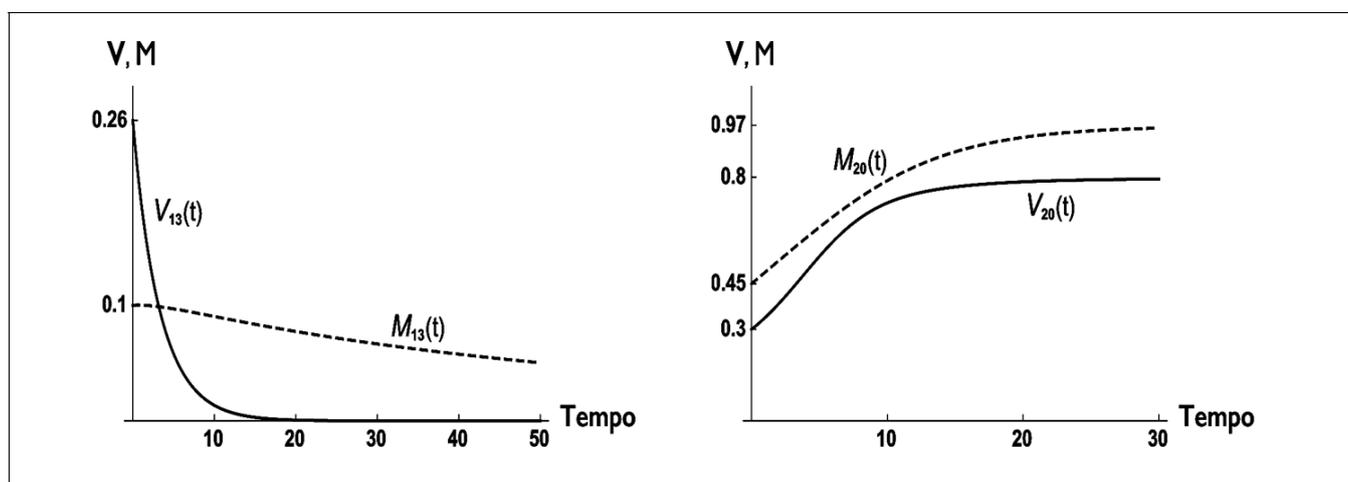


Fig. 2. –  $V(t)$  e  $M(t)$  per le UP N.13 e N.20 nel caso dei coefficienti  $b$  e  $c$  costanti.

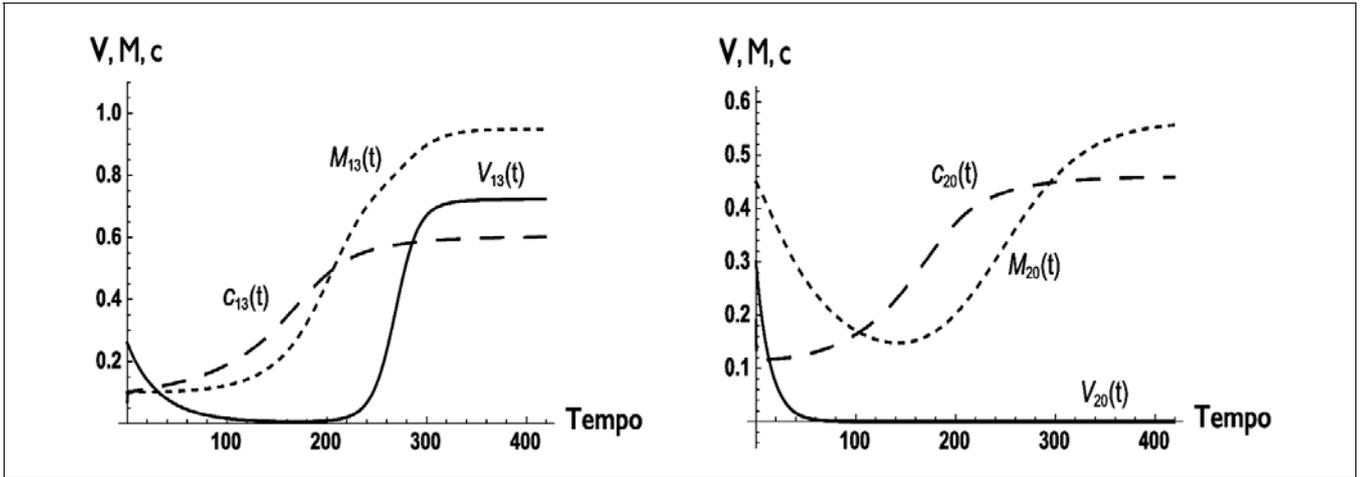


Fig. 3. –  $V(t)$  e  $M(t)$  per le UP N.13 e N.20 nel caso dei coefficienti  $b$  e  $c$  funzioni del tempo.

$M$ . Per illustrare questi comportamenti, nei due grafici di Fig. 3, sono stati riportati anche gli andamenti nel tempo dell'indice di connettività (curve con tratteggio più lungo): nel caso della UP N.13 questo indice tende asintoticamente a un valore decisamente alto (0.6), mentre per la UP N.20 lo stesso indice mostra valori più contenuti e sempre inferiori a 0.45, che giustificano la iniziale decrescita di  $M$  e di conseguenza il rapido decadimento della presenza di aree di vegetazione di alta qualità ecologica.

## 5. – Prospettive e conclusioni

In questo lavoro sono stati presentati alcuni modelli matematici, rappresentati da sistemi di equazioni differenziali ordinarie, che permettono di effettuare una valutazione dello stato ecologico di un dato sistema ambientale, costituito da un insieme di porzioni territoriali, dette Unità di Paesaggio, in grado di interagire tra loro attraverso scambi di energia biologica e materia, immagazzinata nelle biomasse. È stata in particolare focalizzata l'importanza di tale interazione come elemento di contrasto alla frammentazione territoriale che è causa della degenerazione della qualità ecologica, del mosaico paesaggistico e della biodiversità dell'ambiente. Da un punto di vista quantitativo l'interazione e, dunque, la connessione tra le diverse porzioni del sistema, è misurata dall'indice di connettività energetica che, come mostrato nell'esempio del precedente

paragrafo, gioca un ruolo cruciale nella determinazione della soluzione di equilibrio del sistema differenziale e quindi dello scenario a cui, attraverso le proprie trasformazioni, l'ambiente stesso tende a portarsi.

In questo senso, una possibile prospettiva nella costruzione e sperimentazione di nuovi modelli matematici consiste nel prendere in considerazione sistemi differenziali strutturati per la connettività in modo analogo a quelli utilizzati per le reti neurali. Un primo esempio di un tale modello può trovarsi nel lavoro [2], dove le variabili di stato sono le  $V_i(t)$  e le  $B_i(t) = \mathcal{B}_i(t)/\mathcal{B}_i^{max}$  per ogni UP, e dove il termine che contiene l'indice di connettività presenta una struttura simile a quello rappresentativo dell'accoppiamento elettrico nei modelli di reti neurali. In breve, le equazioni del modello sono date da

$$(15) \quad V_i'(t) = d_i V_i(t)[1 - V_i(t)]B_i(t) - h_i U_i V_i(t)$$

$$(16) \quad B_i'(t) = a_i B_i(t)[1 - B_i(t)] - k_i [1 - V_i(t)]B_i(t) + \sum_{k \in I_i} c_{ik} [B_k(t) - B_i(t)],$$

dove i nuovi coefficienti  $a_i$  e  $d_i$  dipendono dall'esposizione solare e dall'umidità relativa dei biotopi delle UP, mentre l'ultimo termine della seconda equazione è quello, appunto, che porta in conto la connessione tra le varie UP del sistema ambientale in modo analogo alle reti neurali, essendo inoltre  $c_{ik} = H_{ik}/L_{ik}$ .

L'analisi qualitativa di quest'ultimo modello ha mostrato interessanti risultati sia sul piano della varietà degli equilibri che della presenza di biforcazioni in rapporto alla connettività. Simulazioni sono state effettuate per l'area territoriale già citata a proposito del progetto RURBANCE.

In conclusione, vale la pena di segnalare un'ulteriore prospettiva per lo sviluppo di nuovi modelli. Questa risiede nelle connessioni mostrate nei lavori [30, 31] per la determinazione dei cosiddetti servizi ecosistemici. Questi servizi, quali, ad esempio, l'approvvigionamento idrico, la purificazione dell'aria, la formazione dei suoli, l'impollinazione e altri meccanismi regolatori naturali, possono essere quantificati da opportuni indicatori dipendenti dal tempo, i quali a loro volta dipendono da quantità fisiche proprie di un sistema ambientale. È quindi sicuramente di interesse sviluppare nuovi modelli matematici di evoluzione per tali grandezze fisiche, in modo da controllare i possibili servizi offerti dal territorio sotto osservazione, come già mostrato appunto nei suddetti lavori.

**Ringraziamenti:** le ricerche presentate in questo lavoro sono state sviluppate nell'ambito delle attività dell'INdAM (Gruppo Nazionale della Fisica Matematica). L'autore desidera ringraziare le Prof.sse Maria Groppi (Università di Parma) e Ana Jacinta Soares (Università del Minho, Braga, Portogallo) per l'aiuto e i suggerimenti prestati nella preparazione del lavoro.

## References

- [1] BERTUGLIA, C.S., VAIO, F. (2003), *Non linearità, caos, complessità. Le dinamiche dei sistemi naturali e sociali*, Bollati Boringhieri editore, Torino.
- [2] BONACINI, E., GROPPI, M., MONACO, R., SOARES, A.J., SORESINA, C. (2017), *A network landscape model: stability analysis and numerical tests*. In print on Commun. Nonlinear Numer. Simulat.
- [3] BROWN, J.H., GILLOOLY, J.F., ALLEN, A.P., SAVAGE, V.M., & WEST, G.B. (2004), *Toward a metabolic theory of ecology*. Ecology, 85(7), 1771-1789.
- [4] DE PALMA, I., MONACO, R. (2015), *Metodologie dell'ecologia del paesaggio: un modello matematico per la valutazione di un sistema ambientale nell'area metropolitana torinese*. Urbanistica Informazioni (Regioni Piemonte, 16 Dicembre).
- [5] FABBRI P. (2003) (a cura di), *Paesaggio, pianificazione, sostenibilità*, Alinea, Firenze.
- [6] FABBRI P. (2007), *Principi ecologici per la progettazione del paesaggio*, Franco Angeli, Milano.
- [7] FAHRIG L. (2003), *Effects of habitat fragmentation on biodiversity*, Annual Review Ecology and Systematic, 34, 487-515.
- [8] FARINA A. (2001), *Ecologia del paesaggio. Principi, metodi e applicazioni*, UTET, Torino.
- [9] FINOTTO F., MONACO R., SERVENTE, G. (2010), *Un modello per la valutazione della produzione e della diffusività di energia biologica in un sistema ambientale*. Scienze Regionali (Ital. J. of Regional Sci.) 9(3), 61-84.
- [10] FINOTTO F. (2011), *Landscape assessment: the ecological profile*, in Landscape Indicators. Assessing and Monitoring Landscape Quality (a cura di Cassatella, C., Peano, A.), Springer, Dordrecht, pp. 47-75.
- [11] FORMAN R.T.T., Godron M. (1986), *Landscape ecology*, John Wiley & Sons, New York.
- [12] FORMAN R.T.T. (1995), *Land Mosaics. The ecology of landscape and regions*, Cambridge University Press, Cambridge.
- [13] GOBATTONI F., LAURO G., LEONE A., MONACO R., PELOROSSO R. (2011), *A procedure for the mathematical analysis of landscape evolution and scenarios assessment*. Landscape , 103, 289-302.
- [14] GOBATTONI F., LAURO G., MONACO R., PELOROSSO R. (2013), *Mathematical models in landscape ecology: stability analysis and numerical tests*. Acta Appl. Math., 125, 173-192.
- [15] GOBATTONI F., GROPPI M., MONACO R., PELOROSSO R. (2014), *New developments and results for mathematical models in environment evaluations*. Acta Appl. Math., 132, 321-331.
- [16] HUDSON W.E. (1991) (a cura di), *Landscape Linkages and Biodiversity*, Island Press, Washington.
- [17] INGEGNOLI V. (1993), *Fondamenti di ecologia del paesaggio*, Città Studi, Milano.
- [18] INGEGNOLI V., MASSA R. (1999) (a cura di), *Biodiversità, Estinzione, Conservazione*. Fondamenti di conservazione biologica, UTET, Torino.
- [19] INGEGNOLI V., FORMAN R.T.T. (2002), *Landscape ecology: a widening foundation*, Springer-Verlag, New York.
- [20] INGEGNOLI V., GIGLIO E. (2005), *Ecologia del paesaggio. Manuale per conservare gestire e pianificare l'ambiente*, Esselibri, Napoli.
- [21] JORDAN, D.W., SMITH, P. (1977), *Nonlinear Ordinary Differential Equations*, Clarendon Press, Oxford.
- [22] LAURO, G., LISI, M., MONACO, R. (2010), *A modeling framework for analysis of landscape stability and bifurcation phenomena*. Rend. Sem. Mat. Univ. Politec. Torino, 68(4), 399-413.
- [23] LINDENMAYER D.B., FISCHER J. (2006), *Habitat fragmentation and landscape change, an ecological and conservation synthesis*, Island Press, Washington.
- [24] MALANSON G.P., CRAMER B.E. (1999), *Landscape, heterogeneity, connectivity, and critical landscapes for conservation*. Diversity and Distribution, 5, 27-39.
- [25] MONACO R., SOARES A.J. (2016), *A new mathematical model for environmental monitoring and assessment*. In print on Particle Systems and PDE's IV, Springer Proc. in Math. & Stat.
- [26] MURRAY J.D. (2002), *Mathematical Biology I. An Introduction*, Springer, Berlin.

- [27] NAVEH Z. (1987), *Biocybernetic and thermodynamic perspectives of landscape functions and land use patterns*. *Landscape Ecology*, 1(2), 75-83.
- [28] NAVEH Z. (2000), *What is holistic landscape ecology? A conceptual introduction*. *Landscape*, 50, 7-26.
- [29] NAVEH Z. (2001), *Ten major premises for a holistic conception of multifunctional landscapes*. *Landscape & Urban Planning*, 57, 269-284.
- [30] PELOROSSO R., GOBATTONI F., GERI F., MONACO R., LEONE A. (2016), *Evaluation of ecosystem services related to bio-energy landscape connectivity (BELC) for land use making across different planning scales*. *Ecological Indicators*, 61, 114-129.
- [31] PELOROSSO R., GOBATTONI F., GERI F., LEONE A. (2017), *PANDORA 3.0 plugin: A new biodiversity ecosystem service assessment tool for urban green infrastructure connectivity planning*, in stampa su *Ecosystem Services*, <http://dx.doi.org/10.1016/j.ecoser.2017.05.016>.
- [32] SHANNON, C.E., WEAVER, W. (1949), *The Mathematical Theory of Communication*, University of Illinois Press, Urbana.
- [33] SMITH H.L. (2008), *Monotone dynamical systems: an introduction to the theory of competitive and cooperative systems*. Amer. Math. So., No. 41.
- [34] TURNER M.G., ROMME V.H., GARDNER R.H., O'NEIL R.V., KRATZ, T.K. (1993), *A revised concept of landscape equilibrium: disturbance and stability on scaled landscapes*. *Landscape Ecology*, 8(3), 213-227.
- [35] TURNER M.G., GARDNER R.H. (2015), *Landscape Ecology in Theory and Practice*, Springer, New York.
- [36] WIEGAND T., REVILLA E., MOLONEY K.A. (2005), *Effects of habitat loss and fragmentation on population dynamics*. *Conservation Biology*, 19, 108-121.
- [37] *National Geographic website*, <http://education.nationalgeographic.org/encyclopedia/geographic-information-system-gis>.
- [38] <https://plugins.qgis.org/plugins/pandora/>



Roberto Monaco

Nato a Roma nel 1948, si è laureato in Fisica presso l'Università degli Studi di Roma. Nel 1976 è entrato al Politecnico di Torino come assegnista e via via ha assunto i vari ruoli della docenza fino a quello di professore ordinario di Fisica Matematica conseguito nel 1990. Dopo alcuni anni di servizio presso l'Università di Genova è tornato al Politecnico di Torino dove attualmente insegna matematica in vari corsi delle lauree in Pianificazione Territoriale, Urbanistica e Ambientale. I suoi interessi di ricerca sono rivolti ai sistemi fluidodinamici, anche alla scala molecolare, a problemi di propagazione ondosa e ai modelli matematici nelle scienze ambientali. È autore, su queste tematiche, di oltre centocinquanta articoli su riviste e raccolte a prevalente carattere internazionale, e di vari libri. Per diversi anni e fino alla primavera del 2017 è stato membro del Consiglio Scientifico del Gruppo Nazionale della Fisica Matematica (GNFM-INDAM).