

---

# *Matematica, Cultura e Società*

RIVISTA DELL'UNIONE MATEMATICA ITALIANA

---

MICHELA VARAGNOLO

## **Su un teorema di Ariki**

*Matematica, Cultura e Società. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. 3*  
(2018), n.1, p. 31–44.

Unione Matematica Italiana

[<http://www.bdim.eu/item?id=RUMI\\_2018\\_1\\_3\\_1\\_31\\_0>](http://www.bdim.eu/item?id=RUMI_2018_1_3_1_31_0)

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

---

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma  
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)*

*SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>



# Su un teorema di Ariki

MICHELA VARAGNOLO

Università di Cergy-Pontoise

E-mail: michela.varagnolo@u-cergy.fr

**Sommario:** *In questa nota si vuole introdurre il lettore alla teoria delle rappresentazioni. Presenteremo un risultato di Ariki del 1996, un esempio delle tecniche recenti che usano le interazioni tra le differenti teorie (rappresentazioni di gruppi, di algebre associative, di algebre di Lie) e con la geometria (ma faremo solo un cenno alla fine su quest’ultimo punto).*

**Abstract:** *In this note we introduce the reader to the representation theory. We present a result of Ariki (1996) which gives a flavour of the modern way to study it, using interactions between different theories (representations of groups, associative algebras, Lie algebras), and with geometry (but we do not insist on this latter).*

Una rappresentazione di un gruppo  $G$  è un morfismo di gruppi  $G \rightarrow GL(V)$  dove  $V$  è uno spazio vettoriale. Dunque dare una rappresentazione di  $G$  significa dare uno spazio vettoriale  $V$  nel quale gli elementi del gruppo agiscono come operatori lineari invertibili in modo compatibile con l’operazione. Le rappresentazioni appaiono in molti settori della matematica e della fisica teorica. Per esempio, in meccanica quantistica, per studiare l’atomo di idrogeno si deve risolvere un’equazione di Schrödinger per un potenziale radiale. Usando la simmetria di questa equazione rispetto al gruppo  $SO(3)$  di rotazioni dello spazio, si deduce che lo spazio delle soluzioni è una rappresentazione di  $SO(3)$  e ci si riduce dunque a calcolare questa rappresentazione esplicita.

Una classe importante di gruppi finiti è quella dei gruppi simmetrici (ogni gruppo finito è un sottogruppo di un gruppo simmetrico). Le rappresentazioni del gruppo simmetrico su un campo di caratteristica zero sono note già dalla fine dell’800 grazie ai lavori di Young e Frobenius. Quest’ultimo intorno al

1900 ha calcolato il carattere e in particolare la dimensione delle rappresentazioni semplici, cioè le più piccole possibili (si rimanda al testo, qui e altrove, per una terminologia precisa). Ora sorprendentemente la teoria modulare delle rappresentazioni (cioè su un campo di caratteristica positiva) resta a tutt’oggi un problema aperto, forse il più importante in quest’area della matematica. Non sono note neanche le dimensioni delle rappresentazioni semplici.

L’algebra di Iwahori-Hecke  $H_n$  (chiamata così in onore a Erich Hecke e Nagayoshi Iwahori, nel futuro però la chiameremo sempre algebra di Hecke) è una deformazione a un parametro dell’algebra del gruppo simmetrico  $\mathfrak{S}_n$ . Il gruppo simmetrico può considerarsi un gruppo (finito) generato da riflessioni, ed esistono algebre di Hecke associate ad ogni tale gruppo, e più generalmente ad ogni gruppo di Coxeter ma non le considereremo in questa nota. L’algebra  $H_n$  può essere vista come un quoziente dell’algebra del gruppo delle trecce di Artin. Quest’ultimo è il gruppo fondamentale dello spazio delle configurazioni di  $n$  punti distinti non ordinati del piano reale. Usando la connessione tra il gruppo delle trecce e l’algebra di Hecke insieme alla teoria delle tracce di Markov, Vaughan Jones, in un famoso

*Accettato:* il 10 aprile 2018.

articolo del 1987 ([12]), ha costruito un nuovo invariante di nodi, il polinomio di Jones per l'appunto. Da allora vari altri invarianti sono stati proposti usando dei raffinamenti della costruzione di Jones. Non si è ancora costruito un invariante che sappia distinguere due nodi non isotopi ma esiste ormai un invariante che sa riconoscere se un nodo non è isotopo al nodo triviale ([17]).

L'algebra di Hecke è un oggetto centrale in varie teorie delle rappresentazioni, citiamone due. La prima riguarda i gruppi finiti di tipo Lie, come il gruppo  $GL(\mathbb{F})$  con  $\mathbb{F}$  campo finito (ma anche l'analogo simplettico o ortogonale). Fin dai lavori di Harish-Chandra negli anni 70 si sa che l'insieme delle rappresentazioni semplici di un tale gruppo si partiziona in varie serie, dette di Harish-Chandra. Ogni serie può essere identificata con l'insieme delle rappresentazioni semplici di un'algebra di Hecke. Questo resta vero anche nel caso modulare grazie a un lavoro più recente di Geck-Hiss-Malle ([5]). La teoria modulare delle rappresentazioni dei gruppi finiti di tipo Lie è un'altro dei grandi problemi aperti del settore.

Come secondo esempio consideriamo il caso dei gruppi detti  $p$ -adici (come il gruppo lineare o simplettico su un corpo  $p$ -adico). Nel caso non modulare, la situazione è simile a quella dei gruppi finiti di tipo Lie, ci sono degli analoghi delle serie di Harish-Chandra (i blocchi di Bernstein) e ancora una volta intervengono delle algebre di Hecke. Qui la teoria è meno nota del caso dei gruppi finiti di tipo Lie ed esistono ancora molti problemi aperti. Per esempio nel caso modulare non si ha neanche una classificazione completa delle rappresentazioni semplici (anche limitandosi alle cosiddette ammissibili).

In questa nota ci interesseremo alle rappresentazioni complesse dell'algebra di Hecke nel caso in cui il parametro è una radice dell'unità. Nel caso in cui il parametro è generico la teoria è analoga a quella del gruppo simmetrico in caratteristica zero e dunque nota. Il caso delle radici dell'unità riveste una particolare importanza dato che James nel '90 ([10]) ha mostrato che questo caso è, in un senso preciso, un'approssimazione della teoria modulare del gruppo simmetrico. Presenteremo un risultato di Ariki, che ci fornirà un algoritmo per il calcolo delle dimensioni delle rappresentazioni semplici.

## 1. – Rappresentazioni

### 1.1 – Cosa è una rappresentazione

Per dimostrare certi teoremi di struttura di un gruppo fissato (per esempio i teoremi di Cauchy o di Sylow) si può fare agire il gruppo su un insieme ben scelto. Questo significa che gli elementi del gruppo agiscono come applicazioni invertibili dell'insieme in sé in modo tale che il prodotto di due elementi è la composizione delle applicazioni corrispondenti. Potrebbe quindi essere interessante classificare tutti gli insiemi che ammettono una tale azione, ma è chiaramente un problema troppo arduo. Se però ci si limita agli spazi vettoriali e a delle applicazioni lineari la cosa cambia. Studiare la teoria delle rappresentazioni di un gruppo consiste in questo e l'interesse è piuttosto chiaro: se si può provare che un certo spazio ammette l'azione di un gruppo di cui si conoscono le rappresentazioni si hanno subito delle informazioni supplementari.

Si possono considerare delle rappresentazioni non solo di gruppi (insiemi con una operazione) ma anche, per esempio, di algebre e cioè spazi vettoriali muniti in più di una moltiplicazione. Esempi di algebre sono l'algebra di dimensione infinita  $\mathbb{C}[x]$  dei polinomi a coefficienti complessi o l'algebra  $M_n(\mathbb{C})$  di dimensione  $n^2$  delle matrici  $n \times n$  a coefficienti complessi. In tal caso una rappresentazione di  $A$  è un morfismo di algebre (un'applicazione lineare che rispetta la moltiplicazione)  $A \rightarrow \text{End}(V)$ . Si può anche dire che  $V$  è un  $A$ -modulo. Tutte le nozioni che per semplicità introdurremo per i gruppi si traspongono in modo intuitivo alle algebre.

Il teorema di Ariki che presenteremo in questa nota è un'illustrazione dell'interesse di uno studio sistematico delle rappresentazioni: per conoscere le rappresentazioni di una certa algebra si usa la teoria delle rappresentazioni di un'algebra totalmente differente.

### 1.2 – Rappresentazioni semplici

Una rappresentazione  $(V, \rho)$  di un gruppo  $G$  è un morfismo di gruppi  $\rho : G \rightarrow GL(V)$ . Una sottorappresentazione  $(V', \rho')$  di  $(V, \rho)$  è una rappresentazione  $\rho' : G \rightarrow GL(V')$  ottenuta per restrizione a un

sottospazio vettoriale  $V'$  di  $V$  che deve essere stabile per l'azione di tutti gli elementi  $\rho(g)$ . Nel futuro si ometterà  $\rho$  e, con abuso di linguaggio, diremo che  $V$  è una rappresentazione di  $G$ . Una sottorappresentazione di dimensione uno è dunque generata da un autovettore comune all'azione di tutti gli elementi (ma bastano i generatori) del gruppo. Se ne deduce che il caso delle rappresentazioni complesse (al quale ci limiteremo) è più semplice dato che si evitano problemi legati ad eventuali autovalori non appartenenti al campo base.

Una rappresentazione (diversa da  $\{0\}$ ) è detta semplice se le sue sole sottorappresentazioni sono  $\{0\}$  e lei stessa. È detta semisemplice se è una somma diretta di rappresentazioni semplici. Se tutte le rappresentazioni di un gruppo dato sono semisemplici è chiaro che quello che resta da fare è classificare le rappresentazioni semplici. È il caso delle rappresentazioni di dimensione finita dei gruppi finiti (teorema di Maschke). Certi gruppi di cardinalità infinita ammettono invece delle rappresentazioni di dimensione finita che non sono semisemplici. Per esempio si consideri la rappresentazione  $\mathbb{C}v_1 \oplus \mathbb{C}v_2$  del gruppo  $\mathbb{Z}$  degli interi determinata dall'azione del generatore 1 data dalla matrice  $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ . Questa rappresentazione non può essere semisemplice dato che ammette una e una sola sottorappresentazione di dimensione uno e cioè  $\mathbb{C}v_1$ , l'unico autospazio della matrice. È un esempio di rappresentazione indecomponibile, cioè che non può scriversi come somma diretta di sottorappresentazioni non banali. Per inciso, come si può forse intuire a questo punto, la teoria delle rappresentazioni di dimensione finita di  $\mathbb{Z}$  è sostanzialmente descritta dal teorema di Jordan sulla forma canonica di un endomorfismo ed è dunque alquanto ricca nonostante  $\mathbb{Z}$  sia il gruppo più semplice.

### 1.3 – Gruppo di Grothendieck

Anche nel caso di una teoria non semisemplice conoscere le rappresentazioni semplici resta un'informazione importante. Una serie di composizione della rappresentazione  $V$  è una catena finita di sottorappresentazioni

$$(1.1) \quad \{0\} \subset V_1 \subset V_2 \subset \cdots \subset V_m = V$$

tale che, per ogni  $i$ , il quoziente  $W_i = V_i/V_{i-1}$  è una rappresentazione semplice. Il teorema di Jordan-Hölder ci assicura che questi quozienti non dipendono, modulo isomorfismo e permutazioni, dalla serie scelta e sono detti i fattori di composizione di  $V$ . Il gruppo di Grothendieck della categoria  $\mathcal{C}$  delle rappresentazioni di un gruppo o di un'algebra è il gruppo abeliano generato dalle classi di isomorfismo delle rappresentazioni modulo la relazione seguente: se  $V \rightarrow W$  è un morfismo (di rappresentazioni, dunque che commuta con l'azione) suriettivo di nucleo  $U$  allora  $[V]$ , la classe di isomorfismo di  $V$ , coincide con la somma di  $[W]$  e  $[U]$ . Denoteremo con  $[\mathcal{C}]$  il gruppo di Grothendieck di  $\mathcal{C}$  con coefficienti estesi a  $\mathbb{C}$ . Si tratta dunque di uno spazio vettoriale; nel caso in cui ogni elemento di  $\mathcal{C}$  ammetta una serie di composizione (sarà vero nel caso che ci interessa) una base è fornita dalle classi di isomorfismo delle rappresentazioni semplici. Nel gruppo di Grothendieck ogni rappresentazione diventa semisemplice; con le notazioni di (1.1) si ha:

$$[V] = \sum_i [W_i].$$

Per esempio la categoria delle rappresentazioni di  $\mathbb{C}[x]$  non è semisemplice dato che  $\mathbb{C}[x]/(x^2)$ , con azione di  $x$  indotta dalla moltiplicazione, non è semisemplice ma nel gruppo di Grothendieck si ha

$$[\mathbb{C}[x]/(x^2)] = [(x)/(x^2)] + [\mathbb{C}[x]/(x)],$$

dove le due rappresentazioni  $(x)/(x^2)$  e  $\mathbb{C}[x]/(x)$  hanno dimensione uno e sono dunque dei  $\mathbb{C}[x]$ -moduli semplici. Per certi problemi (come il calcolo delle dimensioni) l'approssimazione data dal gruppo di Grothendieck è sufficiente, come vedremo più tardi.

## 2. – Gruppo simmetrico e algebra di Hecke

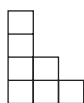
### 2.1 – Il gruppo simmetrico e le sue rappresentazioni

Il gruppo simmetrico di rango  $m$ ,  $\mathfrak{S}_m$ , è il gruppo, rispetto alla composizione, delle permutazioni di un insieme di  $m$  oggetti. Ogni rappresentazione complessa di dimensione finita è semisemplice per il teorema di Maschke. Inoltre come nel caso di tutti i gruppi finiti, le rappresentazioni semplici sono

parametrizzate dalle classi di coniugio. Dato che ogni permutazione può scriversi come prodotto di cicli disgiunti tali classi sono in biiezione con l'insieme  $\mathcal{P}_m$  delle partizioni dell'intero  $m$ :

$$\mathcal{P}_m = \{\lambda = (\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots) \mid \lambda_i \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \sum_i \lambda_i = m\}.$$

Per esempio  $\mathcal{P}_5 = \{(5), (4, 1), (3, 2), (3, 1, 1), (2, 2, 1), (2, 1, 1, 1), (1, 1, 1, 1, 1)\}$ . Una partizione può essere rappresentata da un diagramma, detto diagramma di Young: la partizione  $\lambda = (3, 2, 1, 1)$  di 7 è rappresentata dal diagramma (adottiamo qui la convenzione francese, per facilitare la lettura di [18])



Si può anche scrivere  $\lambda = (3, 2, 1^2)$  e si dirà che 1 ha molteplicità due in  $\lambda$ . La rappresentazione semplice associata a  $\lambda$ , che denoteremo  $S(\lambda)$ , può essere descritta esplicitamente. Una tabella di Young di forma  $\lambda \in \mathcal{P}_m$  è il diagramma di Young di  $\lambda$  riempito con i numeri  $1, 2, \dots, m$ , dove ognuno appare esattamente una volta. Il gruppo simmetrico  $\mathfrak{S}_m$  agisce naturalmente sull'insieme delle tabelle di Young di forma una partizione data di  $m$ , per permutazione delle entrate. Per esempio se  $m = 3$ :

$$(123) \begin{array}{|c|c|} \hline 3 & \\ \hline 1 & 2 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & \\ \hline 2 & 3 \\ \hline \end{array}.$$

Un tabloide è la classe di una tabella per la relazione d'equivalenza seguente: due tabelle sono equivalenti se e soltanto se si passa dall'una all'altra per permutazione delle righe. Per esempio, per  $m = 3$

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 3 & \\ \hline 1 & 2 \\ \hline \end{array} \sim \begin{array}{|c|c|} \hline 3 & \\ \hline 2 & 1 \\ \hline \end{array} \approx \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & \\ \hline 3 & 1 \\ \hline \end{array}.$$

La classe di equivalenza della tabella  $T$  è denotata  $\{T\}$ . L'azione del gruppo simmetrico è compatibile con la relazione d'equivalenza  $\sim$ , dunque induce un'azione sull'insieme dei tabloidi e sullo spazio vettoriale  $V_m$  di base questi tabloidi. Per  $\lambda \in \mathcal{P}_m$ , la rappresentazione  $S(\lambda)$  è il sottospazio vettoriale di  $V_m$  generato dagli elementi  $v_T$ , al variare di  $T$  nell'insieme delle tabelle di Young di forma  $\lambda$  dove

$$v_T = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_T} \text{sgn}(\sigma) \sigma \{T\}, \quad \mathfrak{S}_T = \{\sigma \in \mathfrak{S}_\mu \mid \sigma \text{ preserva le colonne di } T\}.$$

ESEMPIO 2.1 – Se  $m = 3$ , lo spazio  $V_3$  ha dimensione 3 e una base è  $\{T_1\}, \{T_2\}, \{T_3\}$  con

$$T_1 = \begin{array}{|c|c|} \hline 3 & \\ \hline 1 & 2 \\ \hline \end{array} \quad T_2 = \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & \\ \hline 1 & 3 \\ \hline \end{array} \quad T_3 = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & \\ \hline 2 & 3 \\ \hline \end{array}$$

La rappresentazione  $S(2, 1)$  è il sottospazio di  $V_3$  generato da

$$\begin{aligned} v_{T_1} &= \{T_1\} - \{T_3\}, \\ v_{T_2} &= \{T_2\} - \{T_3\}, \\ v_{T_3} &= \{T_3\} - \{T_2\}. \end{aligned}$$

È di dimensione due e una base è data da  $(v_{T_1}, v_{T_2})$ . Si tratta di una rappresentazione semplice dato che (12) e (23) agiscono come

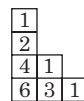
$$(12) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad (23) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

che non hanno autovettori comuni.

Le tabelle  $T_1, T_2$  dell'esempio sono standard, cioè gli elementi sulle righe sono in ordine crescente, idem per le colonne (a partire dal basso). Questo risultato si generalizza, dato che si può provare che

$$\{v_T \mid T \text{ tabella standard di forma } \lambda\}$$

è una base del modulo semplice  $S(\lambda)$ . Per calcolare la dimensione di  $S(\lambda)$  basta quindi contare le tabelle standard di forma  $\lambda$  e questo è dato dalla cosiddetta formula della lunghezza dei ganci. La lunghezza del gancio di una casella di un diagramma di Young è il numero di caselle esattamente sopra e esattamente a destra compresa la casella in questione. Nell'esempio abbiamo scritto in ogni casella la lunghezza del suo gancio



La dimensione della rappresentazione di  $\mathfrak{S}_m$  associata alla partizione  $\lambda$  è il quoziente di  $m!$  per il prodotto delle lunghezze dei ganci. Nell'esempio:

$$\frac{7!}{6 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1} = 35.$$

Rimandiamo per esempio a [20] per approfondimenti.

Terminiamo questo paragrafo con una osservazione che può rivelarsi utile a capire quanto segue. Il gruppo simmetrico  $\mathfrak{S}_{m-1}$  può essere

visto come il sottogruppo di  $\mathfrak{S}_m$  delle permutazioni che fissano  $m$ . Dunque ogni rappresentazione semplice di  $\mathfrak{S}_m$  può restringersi ad una rappresentazione di  $\mathfrak{S}_{m-1}$  che non sarà più semplice ma semisemplice. Esiste una regola esplicita, detta regola di Pieri: la restrizione di  $S(\lambda)$  a  $\mathfrak{S}_{m-1}$  è (isomorfa a)  $\bigoplus_{\mu} S(\mu)$ , dove la somma è sui diagrammi di Young di taglia  $m-1$  che si possono ottenere da  $\lambda$  togliendo una casella. Così, ad esempio, se  $m=7$ , la restrizione di  $S(3, 2, 1^2)$  a  $\mathfrak{S}_6$  è

$$S(2^2, 1^2) \oplus S(3, 1^3) \oplus S(3, 2, 1).$$

**OSSERVAZIONE 2.2.** – Il gruppo simmetrico è un caso particolare di gruppo di riflessioni. Sia  $O_m(\mathbb{R})$  il gruppo delle isometrie dello spazio euclideo  $\mathbb{R}^m$  con base canonica ortonormale  $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m)$  e, per ogni  $i=1, \dots, m-1$ , sia  $s_i$  la riflessione ortogonale di retta  $\mathbb{R}(\varepsilon_i - \varepsilon_{i+1})$ . Allora l'applicazione che manda la trasposizione  $(i, i+1)$  in  $s_i$  permette di identificare il gruppo  $\mathfrak{S}_m$  con un sottogruppo di  $O_m(\mathbb{R})$ . Per chi è interessato ai gruppi di riflessioni o più in generale ai gruppi di Coxeter, si consiglia ad esempio la lettura di [9].

## 2.2 – Una deformazione: l'algebra di Hecke

Si può vedere facilmente che la teoria delle rappresentazioni di un gruppo finito  $G$  è equivalente a quella di un'algebra, detta l'algebra di gruppo:  $\mathbb{C}[G]$ . È definita come il  $\mathbb{C}$ -spazio vettoriale di base gli elementi di  $G$  e prodotto

$$\left( \sum_{g \in G} a_g g \right) \cdot \left( \sum_{g \in G} b_g g \right) = \sum_{g \in G} \left( \sum_{g_1, g_2 \in G, g_1 g_2 = g} a_{g_1} b_{g_2} \right) g.$$

Esiste una deformazione ad un parametro dell'algebra  $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_m]$  che è particolarmente interessante. Grazie ad un teorema di Jimbo [11] è infatti legata ad una delle equazioni più importanti nello studio dei modelli integrabili in meccanica statistica e nella teoria quantistica dei campi, l'equazione di Yang Baxter quantica.

È definita come una  $\mathbb{C}(v)$ -algebra, dove  $v$  è una indeterminata e  $\mathbb{C}(v)$  il campo delle funzioni razionali, descritta per generatori e relazioni. Più preci-

samente si tratta dell'algebra  $H_m(v)$  generata dagli elementi  $t_i$  (per  $i=1, \dots, m-1$ ) soggetti alle relazioni

$$(2.1) \quad \begin{aligned} (t_i + 1)(t_i - v) &= 0, \\ t_i t_j &= t_j t_i \text{ (se } |i-j| > 1), \\ t_i t_{i+1} t_i &= t_{i+1} t_i t_{i+1} \text{ (se } i \neq m-1) \end{aligned}$$

Chiamiamo  $H_m(\zeta)$  l'algebra ottenuta specializzando  $v$  al numero complesso  $\zeta$ . Si noti che se  $\zeta=1$  si ottiene semplicemente l'algebra  $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_m]$  dato che in tal caso i  $t_i$  soddisfano esattamente le relazioni della trasposizione  $(i, i+1)$ .

Se  $\zeta$  è generico il teorema di deformazione di Tits ci assicura che le rappresentazioni semplici sono ancora parametrizzate dalle partizioni di  $m$  e hanno la stessa dimensione. Inoltre ogni rappresentazione è semisemplice. Se  $\zeta$  è una radice dell'unità le cose cambiano drasticamente: la teoria non è sempre semisemplice, si conosce una parametrizzazione delle rappresentazioni semplici ma non la loro dimensione. Per esempio

$$H_2(-1) = \mathbb{C}[t_1]/((t_1 + 1)^2)$$

e lei stessa vista come rappresentazione (di dimensione 2) con azione data dalla moltiplicazione a sinistra non è semisemplice dato che  $(t_1 + 1)/((t_1 + 1)^2)$  è l'unica sottorappresentazione di dimensione uno. Il criterio preciso di semisemplicità è:

$$H_m(\zeta) \text{ semisemplice} \iff \prod_{i=1}^m (1 + \zeta + \dots + \zeta^{i-1}) \neq 0.$$

Lo studio delle rappresentazioni dell'algebra di Hecke alle radici dell'unità è legato, grazie ai lavori di James, allo studio della teoria modulare del gruppo simmetrico che resta un problema aperto. Si veda per esempio [18, sezione 3.2] per un enunciato più preciso ma faccio notare che la congettura di James a cui si fa allusione in quell'articolo si è rivelata falsa, come dimostrato da Williamson [22, sezione 8].

## 2.3 – Rappresentazioni semplici e la matrice di decomposizione

Per quanto detto, per ogni  $\lambda \in \mathcal{P}_m$  si può definire, una rappresentazione semplice  $S_v(\lambda)$  di  $H_m(v)$ . Chiamiamo  $S_\zeta(\lambda)$  la sua specializzazione a  $\zeta$ , che a partire

da adesso sarà una radice  $n$ -sima primitiva fissata dell'unità. L'operazione è ben definita perchè  $S_v(\lambda)$  è dato precisando l'azione su una base fissata e i coefficienti matriciali sono dei polinomi di Laurent, cioè in  $\mathbb{C}[v, v^{-1}]$ . Dipper e James [3] hanno classificato le rappresentazioni semplici di  $H_m(\zeta)$ :

**PROPOSIZIONE 2.3.** – *Supponiamo che la partizione  $\mu$  sia  $n$ -regolare, cioè*

$$\mu \in \mathcal{P}_m^{n-reg} = \{\mu \in \mathcal{P}_m \mid \text{tutte le molteplicità sono inferiori a } n\}.$$

Allora  $S_\zeta(\mu)$  ammette un unico quoziente semplice,  $D_\zeta(\mu)$ . L'insieme  $\{D_\zeta(\mu) \mid \mu \in \mathcal{P}_m^{n-reg}\}$  è un insieme completo di rappresentanti dei moduli semplici di  $H_m(\zeta)$ . □

**ESEMPIO 2.4** – Per ogni  $n$ ,  $S_v(1^n)$  è la rappresentazione di dimensione uno di  $H_n(v)$  con azione dei  $t_i$  data dalla moltiplicazione per  $-1$  e  $S_v(n)$  è la rappresentazione di dimensione uno con i  $t_i$  che agiscono tramite il prodotto per  $v$ . Queste due rappresentazioni restano ovviamente semplici anche dopo specializzazione di  $v$  a  $\zeta$ .

La rappresentazione  $S_v(2, 1)$  di  $H_3(v)$  può essere definita come lo spazio vettoriale  $V$  di base  $(v_1, v_2)$  e azione data da

$$t_1 = \begin{pmatrix} v & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad t_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ v & v-1 \end{pmatrix}.$$

Si tratta in effetti di una rappresentazione semplice, dato che  $t_1$  e  $t_2$  non hanno autovettori comuni. Se ora si specializza  $v$  a  $\zeta \in \mathbb{C}$  con  $1 + \zeta + \zeta^2 = 0$ , il vettore  $w = v_1 + \zeta v_2$  è tale che

$$t_1 w = \zeta w, \quad t_2 w = \zeta w.$$

Dunque  $D_\zeta(2, 1) = S_\zeta(2, 1)/\langle w \rangle$ ,  $\langle w \rangle \simeq D_\zeta(3)$  e nel gruppo di Grothendieck

$$[S_\zeta(2, 1)] = [D_\zeta(2, 1)] + [D_\zeta(3)].$$

□

In generale non esiste una formula altrettanto semplice della formula dei ganci per la dimensione dei  $D_\zeta(\mu)$ .

**PROBLEMA 2.5.** – *Calcolare la dimensione delle rappresentazioni semplici  $D_\zeta(\mu)$ .*

Il teorema di Ariki, che dimostra una congettura di Lascoux-Leclerc-Thibon, ci permetterà di usare un certo algoritmo per calcolarle. Per il momento notiamo che per avere queste dimensioni basta conoscere la matrice di decomposizione. La matrice di decomposizione di  $H_m(\zeta)$  è una matrice (non quadrata in generale)

$$(d_{\lambda, \mu}), \quad d_{\lambda, \mu} \in \mathbb{N}, \quad \lambda \in \mathcal{P}_m, \quad \mu \in \mathcal{P}_m^{n-reg}.$$

È definita dall'uguaglianza, nel gruppo di Grothendieck di  $H_m(\zeta)$  (dove ricordo che ogni rappresentazione diventa semisemplice):

$$(2.2) \quad [S_\zeta(\lambda)] = \sum_{\mu} d_{\lambda, \mu} [D_\zeta(\mu)].$$

In altre parole  $d_{\lambda, \mu}$  è la molteplicità di  $D_\zeta(\mu)$  come fattore di composizione di  $S_\zeta(\lambda)$ . Per un risultato di Dipper e James si ha che

$$d_{\mu, \mu} = 1, \quad d_{\lambda, \mu} \neq 0 \implies \lambda \leq \mu,$$

dove  $\leq$  è l'ordine lessicografico. Dato che la dimensione della specializzazione  $S_\zeta(\lambda)$  è data dalla formula della lunghezza dei ganci e che la matrice  $(d_{\lambda, \mu})$  è 'unitriangolare' è chiaro che conoscere i numeri di decomposizione  $d_{\lambda, \mu}$  è equivalente a conoscere le dimensioni dei  $D_\zeta(\mu)$ .

### 3. – Algebre di Lie e deformazioni

Passiamo adesso ad un soggetto a priori assai distante dal nostro problema e cioè quello di certe algebre di Lie di matrici, di certe loro deformazioni e rappresentazioni. Vedremo nell'ultima sezione il legame con le algebre di Hecke. Il lettore interessato alle algebre di Lie e alle loro rappresentazioni può per esempio guardare [8].

#### 3.1 – L'algebra di Lie $\mathfrak{sl}_n$

Un'algebra di Lie è uno spazio vettoriale  $\mathfrak{g}$  dotato di un prodotto di Lie e cioè di un'applicazione bilineare antisimmetrica  $[\cdot, \cdot]$  che verifica l'identità di Jacobi:

$$\forall x, y, z \in \mathfrak{g}, \quad [x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0.$$

Non si tratta dunque (tranne nel caso  $[y, [z, x]] = 0$  per ogni  $x, y, z$ ) di un'algebra associativa. L'esempio



più significativo è quello dello spazio delle matrici quadrate, che chiameremo  $\mathfrak{gl}_n$ , dove il prodotto di Lie è il commutatore

$$[A, B] = AB - BA$$

delle matrici  $A$  e  $B$ . Più in generale per ogni spazio vettoriale  $V$ ,  $\mathfrak{gl}(V)$  è l'algebra di Lie degli endomorfismi di  $V$  con prodotto di Lie dato dal commutatore. Un altro esempio è il sottospazio  $\mathfrak{sl}_n$  di  $\mathfrak{gl}_n$  delle matrici di traccia nulla che eredita una struttura di algebra di Lie (il commutatore di due matrici ha sempre traccia nulla). Per  $i = 1, \dots, n-1$ , si considerino le matrici

$$E_i = E_{i,i+1}, \quad F_i = E_{i+1,i}, \quad H_i = E_{i,i} - E_{i+1,i+1}.$$

Qui  $E_{i,j}$  è la matrice elementare, cioè con un unico coefficiente non nullo e uguale a 1. L'algebra di Lie  $\mathfrak{sl}(n)$  è generata da queste matrici modulo le seguenti relazioni:

$$(3.1) \quad \begin{aligned} [E_i, F_j] &= \delta_{i,j} H_i, & [H_i, H_j] &= 0, \\ [H_i, E_j] &= a_{ij} E_j, & [H_i, F_j] &= -a_{ij} F_j, \\ [E_i, [E_i, E_{i+1}]] &= 0 = [F_i, [F_i, F_{i+1}]], \\ [E_i, E_j] &= 0 = [F_i, F_j] \quad \forall j \neq i, i+1, \end{aligned}$$

dove  $a_{ij} = 2\delta_{i,j} - \delta_{i,j-1} - \delta_{i,j+1}$ .

### 3.2 – Le sue rappresentazioni

Una rappresentazione  $V$  di un'algebra di Lie  $\mathfrak{g}$  è data da un morfismo di algebre di Lie (applicazione lineare che rispetta il prodotto di Lie)  $\mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$ . Per restare su un terreno più noto (e anche per capire poi le deformazioni) è meglio però ricondursi al caso delle algebre associative. Abbiamo già sottolineato che la teoria delle rappresentazioni del gruppo simmetrico è equivalente a quella dell'algebra  $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_n]$ . Allo stesso modo ad una algebra di Lie  $\mathfrak{g}$  si può associare un'algebra associativa  $U(\mathfrak{g})$ , detta la sua algebra involupante, che ha le stesse rappresentazioni. La costruzione è semplice: si considera quella che si chiama l'algebra tensoriale di  $\mathfrak{g}$  e cioè la somma diretta

$$\bigoplus_{n \geq 0} \mathfrak{g}^{\otimes n} = \mathbb{C} \oplus \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}^{\otimes 2} \oplus \mathfrak{g}^{\otimes 3} \dots$$

munita del prodotto dato dall'estensione bilineare del prodotto tensoriale. Si quozienta poi per la relazione, non omogenea, (cioè per l'ideale bilatero generato dalla differenza dei due termini)

$$[v, w] = v \otimes w - w \otimes v \quad \forall v, w \in \mathfrak{g}.$$

Il prodotto di Lie di  $\mathfrak{g}$  diventa quindi il commutatore usuale in  $U(\mathfrak{g})$ .

Per quanto riguarda le rappresentazioni di  $U(\mathfrak{sl}_n)$ , si può dimostrare che gli  $H_i$  sono diagonalizzabili in ogni rappresentazione di dimensione finita e, dato che commutano fra loro, sono dunque simultaneamente diagonalizzabili. Gli autospazi comuni agli  $H_i$  si chiamano i sottospazi di peso della rappresentazione. A causa delle relazioni (3.1), gli  $E_i, F_i$  non preservano mai (tranne il caso in cui agiscono trivialmente) i sottospazi di peso. In effetti, per ogni vettore  $v$  nell'autospazio di  $H_i$  di autovalore  $\lambda_i$  si ha

$$\begin{aligned} H_i(E_j v) &= E_j(H_i v) + a_{ij} E_j v = (\lambda_i + a_{ij})v, \\ H_i(F_j v) &= F_j(H_i v) - a_{ij} F_j v = (\lambda_i - a_{ij})v \end{aligned}$$

Le rappresentazioni semplici di dimensione finita sono sempre generate da un vettore detto di peso più alto. Questo significa, per definizione, che è un vettore di peso  $v$  tale che, per ogni  $i$ ,  $E_i v = 0$ . Se  $U^-(\mathfrak{sl}_n)$  (rispettivamente  $U^0(\mathfrak{sl}_n), U^+(\mathfrak{sl}_n)$ ) denota la sottoalgebra di  $U(\mathfrak{sl}_n)$  generata dagli  $F_i$  (rispettivamente  $H_i, E_i$ ), la moltiplicazione induce un isomorfismo di spazi vettoriali

$$U^-(\mathfrak{sl}_n) \otimes U^0(\mathfrak{sl}_n) \otimes U^+(\mathfrak{sl}_n) \rightarrow U(\mathfrak{sl}_n),$$

si parla di decomposizione triangolare dell'algebra  $U(\mathfrak{sl}_n)$ . Se ne deduce che ogni rappresentazione semplice è del tipo  $V = U^-(\mathfrak{sl}_n)v$ , dove  $v$  è un vettore di peso più alto.

ESEMPIO 3.1 – Nel caso di

$$\mathfrak{sl}_2 = \left\langle E = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, F = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

si possono descrivere facilmente tutte le rappresentazioni semplici: modulo isomorfismo, ce n'è una per ogni intero positivo o nullo  $r$  che chiameremo  $V(r)$ . Ha dimensione  $r+1$  e l'azione di  $E, F, H$  su una base  $v_0^{(r)}, v_1^{(r)}, \dots, v_r^{(r)}$  di  $V(r)$  è definita da

$$(3.2) \quad \begin{aligned} H v_k^{(r)} &= (r - 2k) v_k^{(r)}, \\ F v_k^{(r)} &= (k + 1) v_{k+1}^{(r)}, \\ E v_k^{(r)} &= (r - k + 1) v_{k-1}^{(r)}, \end{aligned}$$

visualizzato di solito così:  $v_0^{(r)} \rightarrow v_1^{(r)} \rightarrow \dots \rightarrow v_r^{(r)}$ . Si noti che se si definiscono le cosiddette potenze divise di  $F$  e  $E$

$$F^{(k)} = F^k/k!, \quad E^{(k)} = E^k/k!$$

si ha

$$v_k^{(r)} = F^{(k)}v_0^{(r)} = E^{(r-k)}v_r^{(r)}.$$

Il vettore  $v_0^{(r)}$  è un vettore di peso più alto e  $V(r) = U^-(\mathfrak{sl}_2)v_0^{(r)}$ .

**ESEMPIO 3.2** – Come altro esempio consideriamo la rappresentazione naturale di  $\mathfrak{sl}_n$ : si tratta di  $\mathbb{C}^n = \bigoplus_{i=1}^n \mathbb{C}v_i$  con azione data dall'inclusione  $\mathfrak{sl}_n \rightarrow \mathfrak{gl}_n = \mathfrak{gl}(\mathbb{C}^n)$ . Dunque:

$$v_1 \xrightleftharpoons[E_1]{F_1} v_2 \xrightleftharpoons[E_2]{F_2} v_3 \xrightleftharpoons{\dots} v_{n-1} \xrightleftharpoons[E_{n-1}]{F_{n-1}} v_n.$$

I sottospazi  $\mathbb{C}v_i$  coincidono con gli spazi peso dato che  $H_i v_j = \delta_{j,i} v_j - \delta_{j,i+1} v_{j+1}$ . Il vettore  $v_1$  è un vettore di peso più alto e  $V$ , che è semplice, coincide con  $U^-(\mathfrak{sl}_n)v_1$ .

### 3.3 – Un'affinizzazione di $\mathfrak{sl}_n$

Siamo interessati ad una affinizzazione,  $\widehat{\mathfrak{sl}}_n$ , dell'algebra di Lie  $\mathfrak{sl}_n$ . È definita come un'estensione centrale, tramite un elemento  $c$ , di  $\mathfrak{sl}_n \otimes \mathbb{C}[z, z^{-1}]$ . Si tratta cioè dello spazio vettoriale  $\mathfrak{sl}_n \otimes \mathbb{C}[z, z^{-1}] \oplus \mathbb{C}c$  munito del prodotto di Lie dato da

$$[A \otimes z^k + \alpha c, B \otimes z^l + \beta c] = [A, B] \otimes z^{k+l} + k\delta_{k,-l} \text{tr}(AB)c,$$

dove  $\text{tr}$  indica la traccia e  $\delta_{k,-l}$  è il simbolo di Kronecker. È un'algebra di Lie di dimensione infinita. Le algebre de Lie affini sono, in un senso che si può rendere preciso (si veda [16]) le più semplici generalizzazioni in dimensione infinita delle algebre di Lie semplici complesse. Possiamo scrivere esplicitamente una presentazione per generatori e relazioni dell'algebra involupante di  $\widehat{\mathfrak{sl}}_n$  usando i cosiddetti generatori di Chevalley:

$$e_i = E_i \otimes 1, \quad f_i = F_i \otimes 1, \quad h_i = H_i \otimes 1 \quad \forall i = 1, \dots, n-1$$

$$e_0 = E_{n,1} \otimes z, \quad f_0 = E_{1,n} \otimes z^{-1}, \quad h_0 = (E_{n,n} - E_{1,1}) \otimes 1 + c.$$

L'algebra  $U(\widehat{\mathfrak{sl}}_n)$  diventa la  $\mathbb{C}$ -algebra associativa generata dagli  $e_i, f_i, h_i$  ( $i = 0, \dots, n-1$ ) soggetti alle relazioni

$$h_i h_j = h_j h_i, \quad e_i f_j = f_j e_i + \delta_{i,j} h_i,$$

$$h_i e_j = e_j h_i + c_{ij} e_j, \quad h_i f_j = f_j h_i - c_{ij} f_j$$

$$\sum_{r=0}^{1-a_{ij}} (-1)^r \binom{1-a_{ij}}{r} e_i^{1-a_{ij}-r} e_j e_i^r = 0,$$

$$\sum_{r=0}^{1-a_{ij}} (-1)^r \binom{1-a_{ij}}{r} f_i^{1-a_{ij}-r} f_j f_i^r = 0 \quad (i \neq j)$$

dove

$$a_{ij} = 2\delta_{i,j} - \delta_{i,j+1} - \delta_{i,j-1}$$

come nel caso non affine ma gli indici sono da considerarsi 'modulo  $n$ ' (per esempio  $a_{0n} = -1$ ). Le ultime due relazioni sono anche dette relazioni di Serre. Si noti che la sottoalgebra generata dagli  $\{e_i, f_i, h_i | i \neq 0\}$  è isomorfa a  $U(\mathfrak{sl}_n)$  mentre quella generata, per un  $i$  fissato, da  $e_i, f_i, h_i$  è isomorfa a  $U(\mathfrak{sl}_2)$ .

L'algebra involupante affine condivide certe proprietà con il caso non affine, come la decomposizione triangolare.

Le rappresentazioni che ci interessano qui sono le rappresentazioni integrabili: per definizione sono delle rappresentazioni che ammettono una decomposizione in spazi di peso e per le quali l'azione degli  $e_i, f_i$ , per ogni  $i$ , è localmente nilpotente (l'azione di un elemento  $a$  è localmente nilpotente se per ogni vettore  $v$  esiste un intero positivo  $n$  e  $a^n v = 0$ ). Si noti che se  $c$  agisce non trivialmente non possono esistere rappresentazioni semplici di dimensione finita. In effetti la sottoalgebra di Lie di  $\widehat{\mathfrak{sl}}_n$  generata da  $H_1 \otimes z^r, H_1 \otimes z^{-r}$  al variare di  $r$  nei naturali è una sottoalgebra di Heisenberg, dato che

$$[H_1 \otimes z^r, H_1 \otimes z^{-r}] = 2rc,$$

quindi non ammette rappresentazioni semplici di dimensione finita. Questo è una conseguenza dal fatto che l'elemento  $c$  è centrale dunque agisce come uno scalare su ogni rappresentazione semplice (lemma di Schur, ogni autospazio di  $c$  è una sottorappresentazione), ma dato che deve anche essere un commutatore, dunque di traccia nulla, lo scalare può essere solo 0.

I moduli integrabili finitamente generati godono di proprietà analoghe alle rappresentazioni di dimensione finita per  $U(\widehat{\mathfrak{sl}}_n)$ . Tipicamente sono semisemplici e i semplici possono descriversi come dei quozienti di moduli ciclici generati da un vettore di peso più alto (come nel caso non affine). Ci interesseremo ad un modulo detto la rappresentazione basica. Si tratta dell'unico quoziente semplice  $V(\Lambda_0)$  del modulo ciclico generato da un vettore  $v_0$  di peso più alto:  $e_i v_0 = 0$  e  $h_i v_0 = \delta_{0,i} v_0$ ,  $\forall i = 0, 1, \dots, n$ .

### 3.4 – Deformazioni

Esattamente come nel caso del gruppo simmetrico in cui si deformava l'algebra  $\mathbb{C}[\mathfrak{S}_m]$  per ottenere l'algebra di Hecke  $H_m(v)$ , si può deformare l'algebra  $U(\widehat{\mathfrak{sl}}_n)$ . Il risultato è un esempio di gruppo quantico (che non è un gruppo!). Sono stati Drinfeld e Jimbo intorno agli anni '70 ad introdurre questo tipo di deformazioni per certe algebre di Lie. Rappresentano il quadro naturale per studiare le matrici di trasporto che appaiono in certi sistemi di fisica statistica. Le loro rappresentazioni permettono di costruire delle soluzioni dell'equazione di Yang-Baxter quantica (per esempio la rappresentazione naturale del gruppo quantico di  $\mathfrak{sl}_2$  permette di ritrovare la  $R$ -matrice associata al modello XXZ in fisica statistica quantica).

Fissiamo una incognita  $q$ . L'algebra  $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_n)$  è una  $\mathbb{C}(q)$ -algebra definita per generatori e relazioni. I generatori sono

$$e_i, f_i, q^{h_i} \quad (i = 0, 1, \dots, n-1)$$

e le relazioni sono delle deformazioni in  $q$  di quelle dell'algebra involupante, come

$$e_i f_j = f_j e_i + \delta_{i,j} \frac{q^{h_i} - q^{-h_i}}{q - q^{-1}},$$

$$q^{h_i} e_j q^{-h_i} = q^{c_{ji}} e_j, \quad q^{h_i} f_j q^{-h_i} = q^{-c_{ji}} f_j.$$

Per le relazioni di Serre basta sostituire il binomiale con un  $q$ -analogo che si ottiene sostituendo ogni numero  $r$  con  $[r]_q$ , dunque  $r!$  con  $[r]_q [r-1]_q \cdots [2]_q$  e il binomiale di conseguenza dove

$$[r]_q = \frac{q^r - q^{-r}}{q - q^{-1}}.$$

Facendo il limite classico  $q \rightarrow 1$  si ritrova l'algebra involupante di  $\widehat{\mathfrak{sl}}_n$ .

Per quanto riguarda le rappresentazioni, se il parametro non è specializzato ad una radice dell'unità si comportano esattamente come nel caso classico. Chiameremo  $V_q(r)$  e  $V_q(\Lambda_0)$  le deformazioni dei moduli per  $\mathfrak{sl}_2$  e  $\widehat{\mathfrak{sl}}_n$  introdotti precedentemente. Le formule in (3.3) per  $V_q(r)$  sono modificate come segue:

$$q^h v_k^{(r)} = q^{r-2k} v_k^{(r)},$$

$$f v_k^{(r)} = [k+1]_q v_{k+1}^{(r)},$$

$$e v_k^{(r)} = [r-k+1]_q v_{k-1}^{(r)}.$$

## 4. – Lo spazio di Fock e l'algoritmo LLT

### 4.1 – Lo spazio di Fock

Lo spazio di Fock è il  $\mathbb{C}(q)$ -spazio vettoriale

$$\mathcal{F}_q = \bigoplus_{\lambda \in \mathcal{P}} \mathbb{C}(q) \lambda$$

di base l'insieme  $\mathcal{P} = \bigsqcup_m \mathcal{P}_m$  di tutte le partizioni. Per poter definire un'azione di  $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_n)$  su questo spazio introduciamo la nozione di  $n$ -residuo di una casella, o nodo, di un diagramma di Young. L' $n$ -residuo della casella di riga  $i$  (a contare dal basso) e colonna  $j$  (a contare da sinistra) è il numero  $j-i$  modulo  $n$ . Nell'esempio i 3-residui di  $\lambda = (3, 2, 1^2)$  sono

0
1
2 0
0 1 2

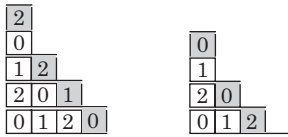
L'azione di  $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_n)$  su  $\mathcal{F}_q$  è data da ([7, 19])

$$f_i \lambda = \sum_{\nu} q^{n_i^r(\lambda, \nu)} \nu, \quad e_i \nu = \sum_{\lambda} q^{-n_i^l(\lambda, \nu)} \lambda, \quad q^{h_i} \lambda = q^{n_i(\lambda)} \lambda$$

dove le somme sono su tutte le partizioni  $\nu$  (risp.  $\lambda$ ) ottenute da  $\lambda$  (risp.  $\nu$ ) aggiungendo (risp. togliendo) un  $i$ -nodo, cioè una casella di  $n$ -residuo  $i$ . L'esponente  $n_i(\lambda)$  è

$n_i(\lambda)$  = numero degli  $i$ -nodi aggiungibili a  $\lambda$  – numero degli  $i$ -nodi rimovibili da  $\lambda$ .

Per esempio, se  $n = 3$ , si ha  $n_0(3, 2, 1^2) = 1 - 2 = -1$ ,  $n_1(3, 2, 1^2) = 1 - 0 = 1$ ,  $n_2(3, 2, 1^2) = 2 - 1 = 1$ , dato che (a sinistra i nodi aggiungibili, a destra i rimuovibili)



Per definire gli esponenti  $n_i^r(\lambda, \nu), n_i^l(\lambda, \nu)$ , chiamiamo  $\gamma$  il nodo di residuo  $i$  tale che  $\nu = \lambda \cup \gamma$ . Si ha

$n_i^r(\lambda, \nu) =$  numero degli  $i$ -nodi aggiungibili a  $\lambda$  alla destra di  $\gamma$  –  
numero degli  $i$ -nodi rimuovibili da  $\lambda$  alla destra di  $\gamma$ ,

$n_i^l(\lambda, \nu) =$  numero degli  $i$ -nodi aggiungibili a  $\lambda$  alla sinistra di  $\gamma$  –  
numero degli  $i$ -nodi rimuovibili da  $\lambda$  alla sinistra di  $\gamma$ .

Per esempio, se  $n = 3$ , si ha  $n_2^r((3, 2^2, 1), (3, 2, 1^2)) = 0 - 1$ ,  $n_2^l((3, 2^2, 1), (3, 2, 1^2)) = 0 - 0$ .

Si tratta di una rappresentazione di dimensione infinita integrabile (non finitamente generata) e semisemplice che ammette come sottorappresentazione particolare la rappresentazione basica  $V(\Lambda_0)_q$ : è la sotto-rappresentazione (che risulta essere semplice) generata da  $\emptyset$ , la partizione vuota (unico elemento di  $\mathcal{P}_0$ ). Si ha, per ogni  $i = 0, 1, \dots, n - 1$ ,

$$e_i \emptyset = 0, \quad q^{h_i} \emptyset = q^{\delta_{0,i}} \emptyset.$$

#### 4.2 – La base cristallina e la base canonica

Uno degli aspetti importanti della teoria delle rappresentazioni dei gruppi quantici è l'esistenza, almeno per i moduli integrabili finitamente generati, di basi dette canoniche introdotte indipendentemente da Lusztig e Kashiwara all'inizio degli anni '90. Una proprietà importante è che una volta definita una tale base per l'algebra involuante (anzi basta per la sottoalgebra generata dagli  $f_i$ ) è sufficiente applicarla al vettore di peso più alto per ottenerne automaticamente una base di ogni modulo semplice (finitamente generato e integrabile).

Adotteremo qui il punto di vista di Kashiwara: per costruire direttamente la base canonica su ogni modulo si introduce prima uno scheletro, detto base cristallina, da considerarsi come una 'base a  $q = 0$ '. La motivazione del nome viene dalla fisica: il parametro  $q$  del gruppo quantico è il parametro di temperatura in un modello risolubile di dimensione due e  $q = 0$  corrisponde alla temperatura assoluta zero dove la situazione deve essere più semplice. In seguito la base canonica è costruita come un sollevamento che è unico se si impone l'invarianza per una certa involuzione che scambia  $q$  e  $q^{-1}$ . Ma la base cristallina è già di per se stessa uno strumento combinatorico potente: permette, per esempio ma non solo, di calcolare i coefficienti di Littlewood-Richardson che descrivono la decomposizione del prodotto tensoriale di due rappresentazioni semplici.

Diamo qualche dettaglio (si rimanda per esempio a [15] per approfondimenti). Sia  $A$  la sottoalgebra di  $\mathbb{C}(q)$  data dalle funzioni senza poli in  $q = 0$  e sia  $V$  un  $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_n)$ -modulo. Una base cristallina di  $V$  è innanzi tutto una base locale. Una base locale o base a  $q = 0$  è per definizione una coppia  $(L, B)$  dove

$$L = A\text{-reticolo di } V,$$

$$B = \text{base del } \mathbb{C}\text{-spazio vettoriale } L/qL.$$

Per  $A$ -reticolo si intende un  $A$ -sottomodulo  $L$  di  $V$  tale che una volta estesi i scalari a  $\mathbb{C}(q)$  si ottiene  $V$ . La terminologia locale è giustificata dal fatto che un  $\mathbb{C}(q)$ -spazio vettoriale può essere visto come lo spazio delle sezioni meromorfe di un fibrato vettoriale su

$$\mathbb{P}^1 = \text{Spec}(\mathbb{C}[q]) \cup \text{Spec}(\mathbb{C}[q^{-1}]).$$

Per avere una base cristallina, che risulterà essere unica, si impone poi una compatibilità sia con la decomposizione in spazi di peso che con l'azione semisemplice della sottoalgebra  $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_2)_i$  del gruppo quantico generata da  $e_i, f_i$ , isomorfa a  $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_2)$ , e questo per ogni  $i$ . In effetti si può mostrare che ogni modulo integrabile è una somma diretta di moduli semplici di  $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_2)_i$ , dunque di  $V_q(r_j)$ . Si impone che per ogni  $i$  esista un isomorfismo di  $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_2)$ -moduli

$$(4.1) \quad V \simeq \bigoplus_j V_q(r_j)$$

che manda la base locale nella base locale  $\{v_k^{(r_j)} \mid 0 \leq k \leq r_j\}$  dei  $V_q(r_j)$ .

Ad ogni base cristallina  $(L, B)$  è associato un oggetto combinatorico, detto grafo cristallino. I vertici del grafo (orientato e colorato) sono gli elementi della base cristallina e per le frecce si pone

$$b \xrightarrow{i} b' \iff b' = \tilde{f}_i b,$$

dove l'operatore cristallino  $\tilde{f}_i$  è definito tramite l'isomorfismo (4.1). Se  $b \in B$ , esistono  $j$  e  $k$  tali che  $b = v_k^{(j)}$ . Si pone

$$\tilde{f}_i v_k^{(j)} = v_{k+1}^{(j)}.$$

PROPOSIZIONE 4.1. – [19]

- (1) La base cristallina di  $\mathcal{F}_q$  è  $(L = \bigoplus_{\lambda} A\lambda, \{\lambda \bmod qL \mid \lambda \in \mathcal{P}\})$  e il grafo è dato da  $\lambda \xrightarrow{i} \nu \iff \lambda$  si ottiene da  $\nu$  rimuovendo un inodo 'buono', dove la nozione di 'buono' può essere data combinatoricamente.
- (2) Per avere la base cristallina del sottomodulo  $V_q(\Lambda_0)$  basta limitarsi alle partizioni  $n$ -regolari.

□

Per quanto riguarda la base canonica (o cristallina globale) di  $V_q(\Lambda_0)$  bisogna innanzi tutto introdurre un'involuzione sull'algebra e sul modulo. Definiamo un'involuzione  $u \rightarrow \bar{u}$  su  $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_n)$  come il morfismo di  $\mathbb{C}$ -algebra tale che, per ogni  $i = 0, 1, \dots, n-1$

$$\bar{q} = q^{-1}, \quad \bar{q}^{h_i} = q^{-h_i}, \quad \bar{e}_i = e_i, \quad \bar{f}_i = f_i.$$

L'involuzione sul modulo è definita in modo che  $\forall u \in U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_n): \bar{u}\bar{\phi} = \bar{u}\phi$ . La forma intera  $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_n)\bar{\mathbb{C}}$  di  $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_n)^-$  è la  $\mathbb{C}[q, q^{-1}]$ -sottoalgebra generata dalle potenze divise  $f_i^{(k)} = f_i^k / [k]_q!$ , e il  $\mathbb{C}[q, q^{-1}]$ -reticolo  $V(\Lambda_0)\bar{\mathbb{C}}$  è definito da  $V(\Lambda_0)\bar{\mathbb{C}} = U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_n)\bar{\mathbb{C}}\phi$ .

PROPOSIZIONE 4.2. – ([14]) La base canonica di  $V_q(\Lambda_0)$  è l'unica  $\mathbb{C}[q, q^{-1}]$ -base  $\{G(\mu) \mid \mu \in \mathcal{P}^{n-reg}\}$  di  $V(\Lambda_0)\bar{\mathbb{C}}$ , tale che

$$G(\mu) \equiv \mu \bmod qL, \quad \overline{G(\mu)} = G(\mu)$$

□

Scriviamo,  $\forall \mu \in \mathcal{P}_m^{n-reg}$ ,

$$(4.2) \quad G(\mu) = \sum_{\lambda \in \mathcal{P}_m} d_{\lambda\mu}(q)\lambda, \quad d_{\lambda\mu}(q) \in \mathbb{C}[q, q^{-1}].$$

Nell'articolo [18], si congettura che i numeri di decomposizione di  $H_m(\zeta)$  sono dati dalla specializzazione a  $q = 1$  dei polinomi  $d_{\lambda\mu}(q)$ .

CONGETTURA 4.3 [Lascoux-Leclerc-Thibon]  $d_{\lambda\mu}(1) = d_{\lambda\mu}$ .

### 4.3 – L'algoritmo LLT

Lascoux-Leclerc-Thibon nell'articolo [18] propongono anche un algoritmo per il calcolo della base canonica dello spazio di Fock: l'idea è di calcolare prima una certa approssimazione della base costruita facendo agire sul vettore  $\phi$  certi elementi costruiti in modo combinatorico (metodo della scala) usando il diagramma di Young di una partizione  $n$ -regolare  $\mu$ . Si costruisce in questo modo una base  $\{A(\mu) \mid \mu \in \mathcal{P}_m^{n-reg}\}$  di  $V(\Lambda_0)_m$  che verifica le proprietà seguenti

$$\overline{A(\mu)} = A(\mu), \quad A(\mu) = \sum_{\lambda \in \mathcal{P}_m} a_{\lambda\mu}(q)\lambda, \quad a_{\lambda\mu} \in \mathbb{N}[q, q^{-1}]$$

con  $a_{\mu,\mu}(q) = 1$  e  $a_{\lambda\mu}(q) = 0$  a meno che  $\lambda \leq \mu$ . Si può provare che

$$G(\mu) = A(\mu) - \sum_{\nu \in \mathcal{P}_m^{n-reg}, \nu < \mu} c_{\nu\mu}(q)G(\nu).$$

Per calcolare i  $G(\mu)$  si procede quindi in modo ricorsivo usando una riduzione triangolare tipo eliminazione di Gauss. I coefficienti  $c_{\nu\mu}(q)$  sono completamente determinati da

$$c_{\nu\mu}(q^{-1}) = c_{\nu\mu}(q), \quad G(\mu) \equiv \mu \bmod qL.$$

Per quanto riguarda la costruzione degli elementi  $A(\mu)$  via i 'ladders' la diamo su un esempio.

ESEMPIO 4.4 – Mettiamoci nel caso  $n = 2, m = 5$ . Le partizioni 2-regolari di 5 sono  $(5) \geq (4, 1) \geq (3, 2)$ . Fissiamo delle coordinate nelle caselle dei diagrammi di Young rispettivi nel modo seguente

$$(0,0) (1,0) (2,0) (3,0) (4,0) \quad \begin{matrix} (0,1) \\ (0,0) (1,0) (2,0) (3,0) \end{matrix} \quad \begin{matrix} (0,1) (1,1) \\ (0,0) (1,0) (2,0) \end{matrix}$$

Si considerino le rette  $L_k$  di equazione  $y = (1-n)x + k = -x + k$  con  $k \in \mathbb{N}$ . Per ogni diagramma si prendano solo le rette che hanno dei punti in comune con il diagramma e cioè

$L_0, L_1, L_2, L_3, L_4$  nel caso di (5),  $L_0, L_1, L_2$  per (4, 1) e  $L_0, L_1, L_2, L_3$  per (3, 2). Per costruzione tutti i nodi sulle rette  $L_k$  hanno 2-residuo  $2 - k$  mod 2. Se il diagramma  $\mu$  ha rette, partendo

dalla sinistra,  $L_{k_1}, \dots, L_{k_s}$  con residuo  $r_1, \dots, r_s$  e tali che la retta  $L_{k_i}$  ha  $n_i$  punti in comune con  $\mu$  si pone  $A(\mu) = f_{r_s}^{(n_s)} \dots f_{r_1}^{(n_1)} \emptyset$ . Dunque nel nostro esempio

$$\begin{cases} A(5) &= f_0 f_1 f_0 f_1 f_0 \emptyset = (5) + (3, 2) + 2q(3, 1^3) + q^2(2^2, 1) + q^2(1^5) \\ A(4, 1) &= f_1 f_0 f_1^{(2)} f_0 \emptyset = (4, 1) + q(2, 1^3) \\ A(3, 2) &= f_0^{(2)} f_1^{(2)} f_0 \emptyset = (3, 2) + q(3, 1^2) + q^2(2^2, 1) \end{cases}$$

Ora si noti che

$$A(3, 2) \equiv (3, 2) \pmod{qL}, \quad A(4, 1) \equiv (4, 1) \pmod{qL},$$

dunque  $G(3, 2) = A(3, 2)$  e  $G(4, 1) = A(4, 1)$ . Quindi si ha

$$G(5) = A(5) - c_{(4,1)(5)}(q)A(4, 1) - c_{(3,2)(5)}(q)A(3, 2).$$

Il coefficiente  $c_{(4,1)(5)}(q)$  deve essere nullo perché (4, 1) non appare in  $A(5)$ . Inoltre, dato che (3, 2) appare con coefficiente 1, si ha  $c_{(3,2)(5)}(q) = 1$ . Se ne deduce

$$G(5) = A(5) - A(3, 2) = (5) + q(3, 1^2) + q^2(1^5).$$

Per completezza aggiungiamo che Goodmann e Wenzl in [6] hanno poi proposto un algoritmo più rapido. Inoltre si può dimostrare che i coefficienti  $d_{\lambda, \mu}(q)$  sono dei polinomi di Kazhdan-Lusztig affini ([21, 6]).

## 5. – Il teorema di Ariki

Ma quale è il legame tra lo spazio di Fock e l'algebra di Hecke  $H_m(\zeta)$ ? Per capirlo introduciamo la somma diretta, su tutti gli  $m$ , dei gruppi di Grothendieck complessificati:

$$[\text{Rep}(H(\zeta))] = \bigoplus_{m \in \mathbb{N}} [\text{Rep}(H_m(\zeta))].$$

Qui  $\text{Rep}(H_m(\zeta))$  è la categoria dei moduli di dimensione finita dell'algebra di Hecke  $H_m(\zeta)$  e  $H_0(\zeta) = \mathbb{C}$ . Il punto è che questo spazio è una rappresentazione di  $\widehat{\mathfrak{sl}}_n$ , più precisamente è isomorfo alla sottorappresentazione  $V(\Lambda_0)$  dello spazio di Fock classico  $\mathcal{F}_{q=1}$ .

### 5.1 – Induzione e restrizione per le algebre di Hecke

Dobbiamo introdurre degli operatori  $e_i, f_i$  ( $i = 0, \dots, n-1$ ) dello spazio  $[\text{Rep}(H(\zeta))]$ . Sono definiti usando l'induzione e la restrizione di una rappresentazione. Prima di tutto si noti che, per ogni  $m$  si ha un'inclusione d'algebre

$$H_m(\zeta) \hookrightarrow H_{m+1}(\zeta), \quad t_i \mapsto t_i \quad \forall i = 1, \dots, m-1.$$

In particolare ogni rappresentazione  $V$  di  $H_{m+1}(\zeta)$  può essere vista come una rappresentazione, che noteremo  $\text{Res}_m^{m+1}(V)$ , di  $H_m(\zeta)$ . Viceversa, data una rappresentazione  $V$  di  $H_m(\zeta)$  si può 'gonfiarla' in modo da ottenere una rappresentazione di  $H_{m+1}(\zeta)$ :

$$V \mapsto \text{Ind}_m^{m+1}(V) = H_{m+1}(\zeta) \otimes_{H_m(\zeta)} V.$$

Qui il prodotto tensoriale è un prodotto tensoriale di moduli dato che  $H_{m+1}(\zeta)$  è un  $H_m(\zeta)$ -modulo non solo a sinistra ma anche a destra (un bimodulo).

Definiamo adesso la  $i$ -induzione e la  $i$ -restrizione. A questo scopo introduciamo induttivamente degli elementi  $J_i$  ( $i = 1, \dots, m$ ) di  $H_m(\zeta)$ , detti gli elementi di Jucy-Murphy:

$$J_1 = 1, \quad J_k = \zeta^{1-k} t_{k-1} J_{k-1} t_{k-1}$$

Si può verificare che  $c_m = J_1 + \dots + J_m$  è un elemento nel centro di  $H_m(\zeta)$ . Di conseguenza, se  $V \in \text{Rep}(H_m(\zeta))$ , la decomposizione in autospazi generalizzati

$$V = \bigoplus_{\theta \in \mathbb{C}} V_\theta, \quad V_\theta = \{v \in V \mid \exists r \geq 1, (c_m - \theta)^r v = 0\}$$

è una somma diretta di sottorappresentazioni. Inoltre

$$\text{Ind}_m^{m+1}(V) = \bigoplus_{\theta} \text{Ind}_m^{m+1}(V_\theta) = \bigoplus_{\theta, \theta'} \text{Ind}_m^{m+1}(V_\theta)_{\theta'}.$$

Poniamo

$$i\text{-Ind}_m^{m+1}(V) = \bigoplus_{\theta} \text{Ind}_m^{m+1}(V_{\theta})_{\theta+\zeta^i}.$$

In modo analogo se  $V \in \text{Rep}(H_{m+1}(\zeta))$ , si pone

$$i\text{-Res}(V)_m^{m+1} = \bigoplus_{\theta} \text{Res}_m^{m+1}(V_{\theta})_{\theta-\zeta^i}.$$

La  $i$ -induzione e la  $i$ -restrizione sono dei funtori esatti, preservano cioè le sequenze esatte brevi. Ricordo che il gruppo di Grothendieck è un quoziente rispetto alla relazione che per ogni sequenza breve di moduli  $0 \rightarrow U \rightarrow V \rightarrow W \rightarrow 0$  si ha  $[V] = [U] + [W]$ . Dunque  $i\text{-Res}$  e  $i\text{-Ind}$  definiscono degli operatori su  $[\text{Rep}(H(\zeta))]$ , che chiameremo rispettivamente  $e_i$  e  $f_i$ :

$$e_i: [\text{Rep}(H(\zeta))] \rightarrow [\text{Rep}(H(\zeta))],$$

$$f_i: [\text{Rep}(H(\zeta))] \rightarrow [\text{Rep}(H(\zeta))].$$

Per capire cosa c'è dietro la nozione di  $i$ -induzione e  $i$ -restrizione bisogna parlare di blocchi di rappresentazioni. Si dice che due moduli semplici  $V$  e  $W$  sono nello stesso blocco se esistono dei moduli semplici  $V = V_1, V_2, \dots, V_r = W$  e, per ogni  $i = 1, \dots, r-1$ ,  $V_i$  e  $V_{i+1}$  sono dei fattori di composizione di uno stesso modulo indecomponibile. Si può estendere questa nozione a due moduli qualunque. Supponiamo ora che il modulo  $V$  di  $H_{m+1}(\zeta)$  sia indecomponibile (dunque in un solo blocco). La sua restrizione a  $H_m(\zeta)$  non è più indecomponibile ma può scriversi come somma diretta d'indecomponibili. Ebbene si tratta esattamente della decomposizione

$$\text{Res}(V)_m^{m+1} = \bigoplus_{i=0}^{n-1} i\text{-Res}(V)_m^{m+1}$$

(idem per l'induzione).

## 5.2 – Il teorema

Possiamo adesso enunciare il teorema di Ariki.

**TEOREMA 5.1.** – [1, Thm. 4.4] *Si fissi una radice primitiva  $n$ -sima dell'unità,  $\zeta$ .*

(1) *La rappresentazione  $[\text{Rep}(H(\zeta))]$  definita dagli operatori  $e_i$  e  $f_i$  di  $i$ -restrizione e  $i$ -induzione è isomorfa alla rappresentazione  $V(\Lambda_0)$  di  $U(\widehat{\mathfrak{sl}}_n)$ .*

(2) *La base*

$$\{[D(\mu)] \mid \mu \in \mathcal{P}^{n\text{-reg}}\}$$

*di  $[\text{Rep}(H(\zeta))]$  coincide con la specializzazione a  $q = 1$  della base duale della base canonica di  $V_q(\Lambda_0)$ . In particolare la congettura (4.3) è vera (si veda (2.2), (4.2)) e si possono calcolare le dimensioni dei moduli semplici via l'algoritmo LLT.*

Un corollario importante, che usa l'unicità del grafo cristallino, è che il grafo cristallino di  $V(\Lambda_0)$  (che ha una descrizione combinatorica semplice) coincide con il grafo di ramificazione dell'algebra di Hecke. Questo grafo è definito come segue: i vertici sono i moduli semplici in  $\text{Rep}(H(\zeta))$  (dunque le partizioni  $n$ -regolari) e le frecce sono date da

$$D(\mu) \xrightarrow{i} D(\nu) \iff D(\mu) = \text{soc}(i\text{-Res}_m^{m+1}(D(\nu))).$$

Qui per un modulo  $V$ ,  $\text{soc}(V)$ , lo zoccolo di  $V$ , denota la somma (diretta) dei suoi sottomoduli semplici. Ma si può dimostrare che la  $i$ -restrizione di un modulo semplice  $D(\mu)$  ha sempre zoccolo semplice.

Per concludere, qualche osservazione:

- (1) il teorema di Ariki è più generale della versione enunciata: fornisce dei risultati per una famiglia più vasta di algebre di Hecke (le algebre di Hecke ciclotomiche).
- (2) Il teorema di Ariki ci dice che si può 'categorificare' la rappresentazione basica  $V(\Lambda_0)$  di  $\widehat{\mathfrak{sl}}_n$  via le algebre di Hecke specializzate alle radici  $n$ -sime dell'unità. Negli ultimi anni sono state proposte delle categorificazioni di varie altre rappresentazioni o algebre. Citiamo, fra molti altri risultati, il teorema di Soergel di categorificazione di un'algebra di Hecke associata a un sistema di Coxeter tramite certi bimoduli. Si rimanda a [4] per il risultato di Soergel e gli sviluppi ulteriori.
- (3) La dimostrazione del teorema è basata su una categorificazione non solo di  $V(\Lambda_0)$  ma anche di  $U^-(\widehat{\mathfrak{sl}}_n)$  via le rappresentazioni di dimensione finita dell'algebra di Hecke affine. L'algebra di Hecke affine  $\widehat{H}_m(v)$  è la  $\mathbb{C}(v)$ -algebra generata dai  $t_i, x_j^{\pm 1}$  con  $i = 1, \dots, m-1$  e  $j = 1, \dots, m$  modulo le relazioni (2.1) per i  $t_i$  e

$$x_i x_j = x_j x_i \quad t_i x_i t_i = v x_{i+1} \quad x_i t_j = t_j x_i \quad (\text{se } i-j \neq 0, 1).$$

L'inclusione naturale di algebre  $H_m(\zeta) \hookrightarrow \widehat{H}_m(\zeta)$  è tale che l'applicazione asso-

ciata  $\text{Rep}(\widehat{H}_m(\zeta)) \rightarrow \text{Rep}(H_m(\zeta))$  data dalla restrizione dell'azione, a livello di gruppi di Grothendieck diventa l'azione

$$U^-(\widehat{\mathfrak{sl}}_n) \rightarrow V(\Lambda_0), \quad u \mapsto u\phi.$$

La teoria delle rappresentazioni dell'algebra di Hecke affine è più abbordabile dato che quest'ultima si può realizzare come gruppo di Grothendieck di una categoria di fasci coerenti e equivarianti su una certa varietà (grazie a Ginzburg e Kazhdan-Lusztig, si veda [2]).

- (4) Esiste un'interpretazione in termini di rappresentazioni di algebre di Lie anche dell'applicazione di specializzazione:  $[\text{Rep}(H(v))] \rightarrow [\text{Rep}(H(\zeta))]$ . Si rimanda all'articolo di Ariki.

## RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

- [1] ARIKI, S., *On the decomposition numbers of the Hecke algebra of  $G(m, 1, n)$* , J. Math. Kyoto Univ., **36** (4) (1996), 789-808.
- [2] CHRISS, N., GINZBURG, *Representation Theory and Complex Geometry*, Birkhäuser (1997).
- [3] DIPPER, R., JAMES, G.D., *Representations of Hecke algebras of general linear groups*, Proc. London Math. Soc., **52** (1986), 20-52.
- [4] ELIAS, B., WILLIAMSON, G., *The Hodge Theory of Soergel bimodules*, Annals of Maths. **180** (2014), 1-48.
- [5] GECK, M., HISS, G., MALLE, G., *Towards a classification of the irreducible representations in non-describing characteristic of a finite group of Lie type*, Math. Z. **221** (1996), no. 3, 353-386.
- [6] GOODMAN, F., WENZL, H., *Crystal bases of quantum affine algebras and affine Kazhdan-Lusztig polynomials*, Internat. Math. Res. Notices, **5** (1999), 251-275.
- [7] HAYASHI, T., *q-analogue of Clifford and Weil algebras-Spinor and oscillator representations of quantum enveloping algebra*, Comm. Math. Phys., **127** (1999), 129-144.
- [8] HUMPHREYS, J. E., *Introduction to Lie Algebras and Representation Theory*, Springer-Verlag, third printing, revised (1980).
- [9] HUMPHREYS, J. E., *Reflection Groups and Coxeter Groups*, Cambridge University Press (1990).
- [10] JAMERS, G., *The decomposition matrices of  $GL_n(q)$  for  $n \leq 10$* , Proc. Lond. Math. Soc., **60** (1990), 225-265.
- [11] JIMBO, M., *A q-analogue of  $U(\mathfrak{gl}(N+1))$ , Hecke algebra and the Yang-Baxter equation*, Lett. Math. Phys., **11** (1986), 247-252.
- [12] JONES V. F. R., *Hecke algebra representations of braid groups*, Annals of Math., **126** (2) (1987), 335-388.
- [13] JIMBO, M., MISRA, K., MIWA, T., OKADO, M., *Combinatorics of representations of  $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}(n))$  at  $q = 0$* , Comm. Math. Phys., **136** (1991), 543-566.
- [14] KASHIWARA, M., *On crystal bases of q-analogue of universal enveloping algebra*, Duke Math. J., **63** (1991), 465-516.
- [15] KASHIWARA, M., *On crystal bases*, CMS Conf. Proc., **16** (1995), 155-197.
- [16] KAC, V.G., *Infinite Dimensional Lie Algebras (third edition)*, Cambridge University Press, (1990).
- [17] KRONHEIMER, P.B., MROWKA, T.S., *Khovanov homology is an unknot-detector*, Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci., **113** (2011), 97-208.
- [18] LASCoux, A., LECLERC, B., THIBON, J-Y., *Hecke algebras at roots of unity and crystal bases of quantum affine algebras*, Commun. Math. Phys., **181** (1996), 205-263.
- [19] MISRA, K., MIWA, T., *Crystal base for the basic representation of  $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}(n))$* , Comm. Math. Phys., **134** (1990), 79-88.
- [20] SAGAN, B.E., *The Symmetric Group. Representations, Combinatorial Algorithms, and Symmetric Functions*, GTM Springer (2001).
- [21] VARAGNOLO, M., VASSEROT, E., *On the decomposition matrices of the quantized Schur algebra*, Duke Math. J., **100** (1999), 267-297.
- [22] WILLIAMSON, G., *Schubert calculus and torsion explosion*, J. AMS, **30** (2017), 1023-1046.



Michela Varagnolo

Michela Varagnolo è maître de conférence (professore associato) presso l'università di Cergy-Pontoise (Francia).

Si occupa di Teoria delle Rappresentazioni, in particolare di algebre di Hecke, algebre di Lie e deformazioni. Ha scritto una trentina di articoli di ricerca.