
Matematica, Cultura e Società

RIVISTA DELL'UNIONE MATEMATICA ITALIANA

GABRIELE LOLLI

RECENSIONE: La matematica e il mondo reale. Il ruolo decisivo dell'evoluzione nella costruzione matematica del mondo (2014) di Zvi Artstein Bollati Boringhieri, Torino, 2017.

Matematica, Cultura e Società. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. 2 (2017), n.3, p. 343–350.

Unione Matematica Italiana

[<http://www.bdim.eu/item?id=RUMI_2017_1_2_3_343_0>](http://www.bdim.eu/item?id=RUMI_2017_1_2_3_343_0)

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

RECENSIONE

La matematica e il mondo reale. Il ruolo decisivo dell'evoluzione nella costruzione matematica del mondo (2014) – di Zvi Artstein

Bollati Boringhieri, Torino, 2017, € 32.00 (2014)

GABRIELE LOLLI

Accademia delle Scienze di Torino
E-mail: gabrielelolli42@gmail.com

Questo libro è un'originale riflessione dell'autore, matematico israeliano del Weizman Institute che studia sistemi dinamici, limiti variazionali, controllo ottimale, sul ruolo della matematica per la comprensione del mondo: *tratta della matematica della natura, della natura della matematica e della loro connessione*, p. 11. Contiene molte idee provocatorie, come quando rovescia come vedremo l'idea diffusa che la matematica sia un'approssimazione della natura, risalente se si vuole ad Aristotele, in quello che chiama un platonismo applicato, cioè che la natura è un'ottima approssimazione della matematica (p. 157). La sua lettura è da suggerire sia ai matematici, che dovrebbero forse dedicarsi maggiormente a simili riflessioni (sono le loro idee che determinano dove va la matematica) e metterle a disposizione di chi non è impegnato nella ricerca, sia a chi voglia solo arricchire la sua conoscenza dello sviluppo e delle svolte della matematica, tra questi naturalmente gli insegnanti. Non è un libro di storia come sembra suggerire la scritta editoriale sulla copertina *La storia della matematica non è mai stata tanto concreta*; la storia è frammentata, prendendo in considerazione fasi ed eventi funzionali ad illustrare la particolare visione dell'autore che motiva il libro, visione che, pur non essendo rivoluzio-

naria, è originale nel tentativo di comprendere il risultato dell'evoluzione umana, nei milioni di anni precedenti la civiltà, sulle nostre capacità intellettive. Nell'esposizione *sarà sempre presente la questione di quale sia l'entità dell'effetto dell'evoluzione della specie umana sullo sviluppo della matematica e delle sue applicazioni*. [...] *[I]l modo in cui il cervello umano è stato plasmato da milioni di anni di evoluzione ha influenzato le capacità matematiche umane e il tipo di matematica che è facile da sviluppare e da capire per gli esseri umani [...] ed è in larga misura responsabile della nostra difficoltà a capire certi altri settori della matematica*, p. 11. L'ultimo capitolo su cui torneremo al termine è intitolato *Perché la matematica è così difficile da insegnare e da imparare*.

L'autore nel primo capitolo ricorda le conclusioni della psicologia cognitiva relative alle capacità dei neonati e di molti animali sul senso della quantità, limitato a numeri piccoli (si veda S. Dehaene, *Il pallino dei numeri* (1996), Cortina, 2000) e argomenta che *le operazioni aritmetiche semplici offrono un vantaggio nella gara evolutiva*: riconoscere il grande dal piccolo, contare, sommare e sottrarre; la chiama *matematica naturale*, e vi include oltre ai numeri e alle operazioni di base anche le figure, il riconoscimento di forme. Il fatto che queste capacità siano precoci nei neonati lo porta a concludere che sono radicate nei geni.

Accettato: il 28 novembre 2017.

Altre capacità matematiche non sono trasmesse per via genetica perché non costituiscono un vantaggio evolutivo nella formazione della specie. Artstein riconosce che le sue considerazioni sono speculative ma le ritiene ragionevoli; certe capacità si sono sviluppate dopo il periodo in cui i geni erano in via di sviluppo. Come si siano sviluppati o si sviluppino i geni non è tuttavia un argomento su cui si possano alla leggera fare affermazioni categoriche. Lo psicologo Vittorio Girotto (1957-2016), prematuramente mancato, era per esempio convinto che la disposizione al ragionamento probabilistico fosse innata, ma non la dava per scontata e costruiva sofisticati esperimenti per provarla. Artstein è meno cauto e sembra sicuro della nostra conoscenza della dotazione genetica umana.

Tra le capacità non radicate nei geni Artstein considera la padronanza delle affermazioni che riguardano tutti gli oggetti di una determinata specie, per esempio i triangoli, e ritiene che il *perdere tempo* a ragionare di *tutti* non abbia un vantaggio evolutivo; lo stesso dicasi per il dimostrare che i numeri primi sono infiniti, o in generale che una certa popolazione, di tigri per esempio, è infinita; basta, per le tigri, il molto grande. La considerazione di eventi impossibili, che potrebbe dare origine a ragionamenti per assurdo, non è naturale, è *in contrasto con il modo naturale di funzionare del cervello umano*, p. 50; può essere fattibile e utile, ma non è né semplice né intuitiva. Anzi diventa pericolosa o dannosa; in determinate situazioni dove si deve sfuggire a un predatore, o prendere una decisione non si ha tempo per ragionare. *Gli interrogativi fondamentali sono lussi che la lotta evolutiva non può permettersi*, p. 64.

Nel cap. 5 dedicato alla casualità Artstein ricorda come gli animali riescano a riconoscere stati casuali e ad adottare strategie ottimali, come sappiano distinguerli da quelli di mera incertezza dove la casualità non ha alcun posto e comportarsi in modo simile a quello delle persone in situazioni analoghe. Sono riassunti esperimenti con uccelli come la cincia bigia americana e i suoi predatori, che lo confermano. Quindi *la relazione con la casualità e l'incertezza deriva dall'evoluzione*, p. 163. Ma *l'evoluzione non ci ha fornito gli strumenti per riflettere in modo intuitivo su situazioni in cui si può applicare la logica*, p. 192; se è vero, è un limite forte quando il *si può* è in realtà un *si deve*.

La ragione degli errori che si commettono nel ragionamento probabilistico è che *il cervello percepisce certi dati e decide intuitivamente quali sono importanti, senza intraprendere un'analisi metodica delle informazioni. Non va alla ricerca delle informazioni mancanti. L'evoluzione ha instillato in noi, o più precisamente nel nostro subconscio, la percezione che in generale non vale la pena di dedicare lo sforzo necessario a un'analisi rigorosa del problema*, p. 194.

L'autore torna a considerare la responsabilità dell'eredità genetica a proposito del processo decisionale umano e degli errori tipici ricorrenti, considerati nel cap. 6: *Il cervello considera tutti i dati che emergono in relazione a una decisione e decide in base a questi dati, senza controllare e chiarire quanto siano pertinenti. [...] Le persone che devono prendere una decisione non hanno tempo da perdere con un'analisi intelligente di ciò che è pertinente e ciò che non lo è [...]. D'altra parte l'esigenza di cercare e trovare forme e regolarità è profondamente radicata nei nostri geni, tanto che interpretiamo eventi come successioni [di esiti] che sono in accordo con la statistica degli eventi casuali, come eventi genuinamente non casuali*, p. 201.

Si potrebbe concludere che l'uomo primitivo è sempre sul chi vive, mentre quello civilizzato ha tempo per gli ozi, e la sua matematica è *slow* ma, come documenta proprio l'esposizione successiva, terribilmente efficace.

Con il secondo capitolo inizia la panoramica storica, che ora riassumiamo. Bisogna avvertire che Artstein, forse per rispetto dei lettori il cui cervello possiede solo le capacità innate, evita di utilizzare la matematica, salvo che per qualche figura, invitando a non rompersi la testa. La sostituisce con descrizioni intuitive o metaforiche.

Fino ai greci, con accenni alle conoscenze di babilonesi ed egiziani, gli sviluppi della matematica furono in linea con ciò che si può prevedere in base ai principi dell'evoluzione; poi la matematica greca rappresentò un *netto allontanamento da migliaia di anni di attività matematica e propose un approccio che per lo più contraddiceva la via dettata da una sana intuizione*, p. 46. Se l'aggettivo *sana* è tradotto bene, sembra che Artstein abbia maggiore simpatia per quella matematica che per la *slow* che egli stesso coltiva con successo. Due furono le nuove

caratteristiche: l'infinito, come abbiamo detto, ancorché potenziale (il senso dei numeri innato non va oltre il 6-7) e la dimostrazione: *l'obbligo di fornire una dimostrazione assoluta sarebbe d'impaccio nella lotta evolutiva*, p. 47.

La spiegazione dei motivi di questa rivoluzione è un po' deludente. I greci certamente avevano secondo Artstein *la convinzione che in questo modo avrebbero ottenuto una comprensione migliore del mondo circostante*, p. 51. *Talete (vi sec. a. C.) fu anche [oltre a inventare la dimostrazione] il primo a sostenere che la matematica è lo strumento per elaborare una simile costruzione* (visto il poco che sappiamo di Talete, sono attribuzioni congetturali). Alla base della convinzione dei greci sono indicati tre fattori: il primo, considerato poco rilevante, è che si erano accorti di errori e incongruenze nei calcoli degli antichi e volevano maggiore precisione; il secondo è lo sviluppo dell'abitudine argomentativa nella formazione della democrazia; il terzo che i greci conoscevano le illusioni geometriche, o ottiche (purtroppo non è detto quali, sono riportate quelle della moderna psicologia) e cercavano di non fidarsi delle apparenze attraverso le dimostrazioni. Siccome queste erano sempre accompagnate da figure, Artstein avanza quindi implicitamente un'interessante ipotesi, che le dimostrazioni fossero funzionali alla precisione delle figure. Ancora nella matematica avanzata, pur se questa si regge da sé senza figure, *il cervello ha bisogno di modelli o metafore per poter analizzare e assimilare la matematica*, p. 62.

Artstein infine propone un'altra acuta osservazione che non collega alle precedenti, e non sviluppa, che la matematica naturale aiutava nella lotta evolutiva, mentre la matematica creata dai greci aiutava nella lotta tra società diverse in competizione (p. 64).

Oltre alle regole di funzionamento del mondo, i greci si posero anche domande più astratte, come: quale è lo scopo di una legge di natura (scopo significa ragione scientifica); queste non sono domande naturali. *Una specie che inizia a sprecare risorse ed energia andando alla ricerca di uno scopo [...] diminuisce le proprie possibilità di sopravvivenza a breve termine*. Non si capisce se è un'allusione alla praticità dei romani. Sono descritti soprattutto i modelli del sistema solare da quello eliocentrico di Aristarco a Tolomeo.

Il terzo capitolo è dedicato alla rivoluzione scien-

tifica del Cinque e Seicento: vi si incontrano Copernico, Galileo, Newton, Leibniz. La matematica entra da padrona, in modo essenziale ed esclusivo nella spiegazione scientifica, attraverso il calcolo infinitesimale. *Tutto ciò che volevate sapere sul calcolo infinitesimale* è titolo di un paragrafo, ma è proprio poco, due pagine, e si usa la versione moderna, senza citare gli infinitesimi, solo con la spiegazione intuitiva della velocità e dell'accelerazione. Giusto due formule, *per ragioni di completezza*; la derivata è indicata x' ; la notazione per le derivate di Leibniz dx/dt è ricordata di passaggio come *tuttora in uso*.

L'esposizione è chiara, ma su molti punti insoddisfacente; per esempio sulla disputa di priorità tra Newton e Leibniz è reticente, si limita a dire che non tutto è chiaro: *Leibniz si imbatté in una versione preliminare del concetto*, così, per caso? (e non era affatto preliminare).

Ora le leggi di natura sono formulate come equazioni, i principi matematici non devono spiegare lo scopo. *Il fatto stesso che una legge di natura possa essere descritta da una descrizione matematica semplice ed elegante costituisce uno scopo*, p. 115. Le soluzioni delle equazioni sono una descrizione dei fenomeni e permettono di prevederli. Il loro successo è giustificato dalla provvidenza di Dio che ha creato il mondo su leggi matematiche (Newton). Curiosamente non è citata la famosa frase *Hypotheses non fingo* di Newton, a proposito della natura della forza di gravità.

Molti scienziati tuttavia non si accontentavano della matematica e continuavano a cercare le ragioni razionali, sicché alcuni risultati restano ambigui; un esempio è il principio di minima azione. La luce che è riflessa obliquamente da uno specchio o che attraversa due mezzi diversi cambiando direzione rispetta una condizione empiricamente nota (fin dai tempi di Erone, I sec. d. C., per la riflessione e da Willebrord Snell (1580-1626) per la rifrazione all'inizio del Seicento). Pierre de Fermat (1601-1665) mostrò che la legge di Snell è la soluzione del problema matematico di trovare il percorso più veloce tra due punti rispettivamente nei due mezzi diversi. Quasi che il raggio di luce risolvesse il problema di trovare il cammino che porta più velocemente da un punto all'altro. Fermat e sostanzialmente tutti i successori consideravano questa proprietà un principio fonda-

mentale, oltre che una descrizione matematica. In altri fenomeni si troverà che la natura si conforma a un principio di minimo, o di minima azione: la forma esagonale delle celle degli alveari, o delle lastre di lava raffreddate (pp. 110-1). Il principio del minimo fu generalizzato ad altri problemi, fino ad arrivare con William Rowan Hamilton (1805-1865) al principio che postula la minimizzazione lungo il percorso dei corpi in movimento dell'integrale della quantità di moto. Nasceva un settore di ricerca matematica, uno strumento di enorme efficacia, il calcolo delle variazioni.

Il quarto capitolo tratta della visione scientifica moderna del mondo, forse è il più riuscito e interessante, discutendo delle origini della teoria elettromagnetica, della relatività e delle geometrie non euclidee, della meccanica quantistica, della dualità onda-corpuscolo. In particolare emerge nella prima parte la figura di James Clerk Maxwell (1832-1879), che appare a buon diritto uno degli eroi di Artstein. Oltre allo studio della composizione dei colori nello spettro della luce e ad importanti contributi ingegneristici, Maxwell costruì la teoria dell'elettromagnetismo. Le equazioni di Maxwell spiegavano tutti gli effetti e le forze dei campi elettrici e magnetici che si potevano osservare in laboratorio e le relazioni tra di essi. Come le leggi di Newton per la gravità, le equazioni non spiegavano come tali forze attraversassero lo spazio, e non si poteva neanche fare ricorso come Newton all'etere. Maxwell provò a definire un modello meccanico, a ingranaggi e sfere, di una ipotetica sostanza che avrebbe dovuto riempire lo spazio per permettere il trasporto delle forze elettriche e magnetiche. Non sosteneva tuttavia l'esistenza di una materia con le stesse proprietà degli ingranaggi. Chiamò onde elettromagnetiche le soluzioni delle equazioni, sposò decisamente la posizione di non pronunciarsi sulla fisica di queste onde, ma ne affermò l'esistenza prima che Heinrich Hertz (1857-1894) riuscisse a individuarle, otto anni dopo la morte di Maxwell. Questi decise quindi di affidarsi solo alle espressioni matematiche: *Questa è fisica, la fisica è insita nella matematica*, p. 124. Faraday ironico lo provocava: *"I matematici potrebbero essere tanto gentili da tradurre in un linguaggio intuitivo comprensibile i geroglifici matematici in cui sono scritte le loro conclusioni, in modo che i fisici possano capirle?"*.

Mentre i movimenti descritti dalle equazioni di Newton sono in accordo con la nostra intuizione formata nel corso dello sviluppo della specie umana, quelli di Maxwell no, le onde non sono il risultato di alcun movimento di alcunché, solo l'equazione le definisce come onde. Hertz seppe dirlo bene: la teoria di Maxwell è l'equazione di Maxwell.

Artstein ricorda che a differenza delle equazioni della meccanica di Newton quelle di Maxwell contengono la velocità e non sono indipendenti dal movimento del sistema di coordinate, e afferma senza dare spiegazioni che la loro formulazione era in contrasto con la geometria conosciuta. Fatto si è che per mettere d'accordo Newton e Maxwell occorre Einstein, con una nuova geometria.

Così si arriva necessariamente a parlare delle geometrie non euclidee. Queste nascono dal tentativo di dimostrare che il quinto postulato di Euclide, che afferma in una delle sue versioni l'esistenza di una e una sola parallela a una retta data, passante per un punto esterno, è dimostrabile a partire dagli altri postulati oppure, via via che gli sforzi in questa direzione fallivano, che è indipendente. Artstein afferma che le geometrie di Abraham Kästner (1719-1800), insegnante di Carl Gauss (1777-1855), nelle quali il postulato era falso, erano strane e quindi non pertinenti nel contesto di una descrizione della natura, e quindi si è dovuto aspettare il 1831 con Janos Bolyai (1802-1860) e Nikolaj Lobačevskij (1792-1856) per dimostrare che il quinto postulato di Euclide è indipendente dagli altri assiomi (p. 130). Opportunamente Artstein ricorda la proprietà della somma degli angoli interni di un triangolo, che nelle nuove geometrie per piccoli triangoli è quasi 180° come è nella geometria euclidea; le geometrie di Kästner, che pochi conoscono, in effetti non soddisfano questa condizione, ma avrebbe potuto dirlo, per meglio collocare la posizione di Kästner.

Il resto del capitolo arriva fino alla teoria delle stringhe, ed è una veloce sintesi della visione del mondo che ci dà la fisica contemporanea. Termina con una discussione interessante sull'indispensabilità della matematica per capire gli effetti osservati nella natura, riassumendola nella tesi, citata in apertura, che la natura è un'ottima approssimazione della matematica. Rafforza quest'idea con un esempio illuminante, che fa riferimento al principio di minimizzazione dell'energia, analogo al principio di

minima azione: in natura i fenomeni si sviluppano in modo da raggiungere una situazione di minima energia, almeno un minimo locale (p. 157). Se non sono soggetti a una forza, rimangono in uno stato di energia minimo. Artstein descrive un esperimento di John Ball (Oxford) e Richard James (Minnesota) per cercare la struttura che avrebbe minimizzato l'energia di un corpo elastico soggetto a sollecitazione. La soluzione matematica richiedeva che le molecole del corpo si disponessero simultaneamente in due modi diversi, impossibile. Gli esperimenti di laboratorio hanno portato una conclusione inaspettata, che la struttura dell'oggetto è un'approssimazione del risultato matematico: il volume del corpo si divide in parti microscopiche tali che in ciascuna di esse le molecole si dispongono in una delle forme che costituiscono la soluzione matematica; se il volume microscopico è relativamente grande entrambe le disposizioni compaiono nelle giuste proporzioni in modo che la media è molto vicina al minimo matematico.

Seguono due capitoli, sulla casualità e sulla matematica delle decisioni, a cui ci siamo riferiti all'inizio per le osservazioni sull'evoluzione. Viene ricordata una distinzione tra l'incertezza e la casualità, che si distingue dalla prima perché si riferisce alle situazioni in cui anche se non sappiamo prevedere gli esiti sappiamo che ciò che avviene è governato da un processo dove si possono assegnare probabilità. Sono ricordati i giochi d'azzardo tra gli antichi, l'origine della probabilità nella discussione tra Pascal e Fermat nel 1654 sulla divisione della posta all'interruzione di un gioco, e quindi brevemente la storia di questa teoria, fino all'assiomatizzazione di Kolmogorov nel 1933. Sono esaminati gli errori tipici, soprattutto con le probabilità condizionate e il teorema di Bayes, pericolosi per esempio nell'interpretazione di esami medici. Nel capitolo sulla matematica del comportamento umano sono discusse l'aggregazione delle preferenze e i sistemi di voto, giochi e decisioni.

Al calcolo e ai computer è dedicato il denso capitolo 7. Dei greci si ricordano i metodi di calcolo che intervenivano nella trigonometria e il metodo di Eudosso perfezionato da Archimede; si commentano poi i logaritmi, i contributi di Gauss e di Fourier. La storia delle macchine calcolatrici arriva ai calcolatori elettronici, da Pascal e Leibniz a Babbage, Zuse,

Atanasoff e Berry, von Neumann. Curiosamente dai primi esemplari è omissso quello di Turing, benché il suo ACE (Automatic Computing Engine) fosse stato progettato nel 1946 e realizzato, in scala minore, a Manchester nel 1948. Alan Turing (1912-1954) ha lo spazio dovuto per la teoria della calcolabilità: le sue macchine, come modello virtuale, sono utilizzate secondo Artstein soprattutto per la teoria della complessità, a proposito della quale sono introdotte le classi P dei problemi trattati da algoritmi deterministici polinomiali e NP dei problemi trattati da analoghi algoritmi non deterministici. Altri argomenti brevemente toccati sono: gli algoritmi genetici, le dimostrazioni con alta probabilità (di esistere, ma senza scriverle), il computer quantistico.

Artstein torna su questioni generali e filosofiche nel capitolo 8 dove, a differenza degli altri argomenti ben meditati e documentati, si ha l'impressione che l'autore riferisca opinioni e valutazioni raccolte tra colleghi non competenti in discussioni intorno al distributore di caffè (le letture consigliate in bibliografia confermano il basso livello di informazione, sono citati il Nagel-Newman, sconfessato da Gödel, il Davis-Hersh e Morris Kline, questi ultimi due con una predisposizione negativa verso la logica e i fondamenti della matematica e quindi verso l'eventuale sforzo di studiarli); è spiacevole dover segnalare i molti errori di questo capitolo, ma necessario e doveroso anche pensando agli eventuali studenti di matematica che leggendo il libro rischiano di farsi un'idea distorta della formazione della loro disciplina.

In generale, la distinzione tra la matematica naturale e quella posteriore alla fissazione dei geni sembra confondersi con una polemica contemporanea tra intuizione e logica. *Poiché l'intuizione sviluppata nel corso dell'evoluzione è in contrasto con una parte significativa degli elementi logici usati nell'analisi matematica, in molti sviluppi matematici di tutte le epoche i matematici hanno ignorato il rigore richiesto dal metodo logico e così di solito nella ricerca sia le definizioni sia le dimostrazioni si basavano soltanto sull'intuizione o sul formalismo, senza riferimento al modello della logica*, p. 281. Ma intuizione e formalismo hanno avuto significati e sfumature molto diverse nelle varie epoche. Per quel che riguarda il modello della logica, fino all'Ottocento questo non esisteva, e comunque

non era quello dei logici, ma di Euclide, e i matematici non l'hanno ignorato. Certo il modello non era sempre rispettato, ma non per il motivo sostenuto da Artstein; era rispettato con fatica quando si doveva controllare un concetto nuovo o costruire una nuova teoria, a prescindere dalla contrapposizione tra intuizione e logica. Lo confermano gli esempi che porta Artstein, che hanno tutt'altre ragioni di quelle imputate. I numeri negativi non furono rifiutati perché non avevano posto nel sistema di assiomi, ma perché (per ragioni evolutive) i numeri misuravano le grandezze, e si pensava che grandezze negative non avessero senso. I numeri complessi non furono usati molto prima che nell'Ottocento fosse precisata la loro logica e i loro assiomi (p. 283); Gerolamo Cardano (1501-1576) non propose i numeri complessi come soluzioni [di equazioni di terzo grado], p. 283, ma formule risolutive in cui potevano comparire radici di numeri negativi; fu Rafael Bombelli (1526-1572) che cercò di trovare le regole per calcolare con le espressioni contenenti radici di numeri negativi, ma senza un successo soddisfacente; solo Eulero (1707-1783) (oltre a Abraham de Moivre (1667-1754)) incominciò a usare le regole adeguate, pur cadendo qualche volta in errore, e continuando a pensare che non erano numeri, se non immaginari, perché non erano né positivi né negativi né nulli. Lo stesso si può dire per il calcolo infinitesimale, che era formulato con il rigore che si era in grado di rispettare nel trattare gli infinitesimi (e De l'Hospital abbozzò una presentazione assiomatica); e non è vero che di conseguenza furono commessi molti errori lampanti, p. 283, non precisati; è sorprendente anzi quanti pochi.

Artstein passa quindi a raccontare della rigorizzazione dell'analisi nell'Ottocento per liberarla dall'appoggio dell'intuizione geometrica. Espone la definizione dei reali di Richard Dedekind (1831-1916) mediante sezioni, ma afferma che la definizione geometrica dei numeri reali sarebbe *più semplice e comprensibile*, p. 287. Non spiega di cosa si tratti, porta solo l'esempio della radice di 2 come lunghezza della diagonale; e gli altri? Tuttavia la comunità matematica secondo Artstein approvò e accolse la definizione di Dedekind, e insieme a questa la dipendenza dagli insiemi nei fondamenti della matematica (p. 288); l'affermazione è discutibile, di definizioni dei numeri reali ne esistevano altre, forse

preferite in analisi, come quella di Cantor mediante successioni di Cauchy; si dovrebbe dire che accettando la definizione di Cantor si accettava la dipendenza dagli insiemi? Nel 1872, anno delle diverse definizioni dei reali, le successioni, come le funzioni, non avevano ancora una definizione insiemistica, né esisteva la relativa teoria. La fondazione insiemistica non solo non era ancora accettata, ma neanche formulata. Tuttavia per Artstein [come fece notare George Boole] *tra insiemi e operazioni naturali [unione, intersezione, complemento] eseguibili su di essi da una parte, e argomenti logici dall'altra, vi è una corrispondenza completa [...]. Ciò permette di basare tutta la matematica su insiemi e operazioni su insiemi*, pp. 288-9. Ovviamente, occorre ben altro. In particolare gli argomenti logici di Boole sono solo quelli della logica proposizionale; non è corretto poi il commento che Boole ottenne questo risultato nella convinzione che fosse il modo per analizzare eventi probabilistici; prima sviluppò il calcolo logico, poi pensò alle applicazioni alla probabilità.

Per spiegare come si definiscono i numeri naturali, Artstein ricorda i naturali di von Neumann (dove ogni numero è uguale all'insieme dei numeri minori, e $\emptyset$ è $\emptyset$, 1 è $\{\emptyset\}$, 2 è $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$, ecc.) e l'addizione definita come unione di insiemi disgiunti (p. 290); l'accostamento non ha senso perché i numeri di von Neumann sono uno contenuto nell'altro; l'addizione come unione di insiemi disgiunti è quella dei cardinali, i numeri di von Neumann sono ordinali; occorre un teorema e formulazioni precise per dimostrare che nel caso finito coincidono. Aggiunge che *queste strutture [reali e naturali] sono state sviluppate esclusivamente e semplicemente per mostrare che la matematica si può basare su insiemi e operazioni su insiemi*, p. 290. Queste strutture invece furono sviluppate per necessità interne alla matematica; quella dei numeri reali fu pubblicata da Dedekind nel 1872, concepita e usata nelle lezioni fin dal 1858 (come faceva anche Weierstrass); quella dei numeri naturali fu pubblicata da Dedekind nel 1888, ed elaborata negli anni settanta e ottanta; entrambe le definizioni precedono la teoria degli insiemi che Georg Cantor (1845-1918) andava elaborando negli anni ottanta; Dedekind non definisce i singoli numeri ma la loro struttura, che è la più piccola struttura, a meno di isomorfismi, che contiene 1 (allora si partiva da 1) ed è chiusa rispetto a una funzione

iniettiva e non suriettiva (la funzione successore); una conseguenza immediata della definizione è il principio di induzione, di cui Artstein tace, che è anche al centro degli assiomi di Giuseppe Peano (1858-1932) del 1889; i numeri di von Neumann risalgono agli anni venti del Novecento; ma Artstein insiste che dopo che i numeri naturali erano stati definiti da insiemi, *successivamente* [sic] *si riuscirono a definire i numeri irrazionali come sezioni di Dedekind*, p. 294; e tale dipendenza dagli insiemi produsse un rinnovato interesse per il concetto di infinito, p. 290. Di nuovo l'ordine è quello opposto, l'interesse per l'infinito, in Cantor come in Bernard Bolzano (1781-1848), viene prima.

Per quel che riguarda la logica, di sfuggita si afferma che *Poincaré adottò con entusiasmo la dipendenza dalla logica* (p. 296), e ora si rivolterà nella tomba, lui sostenitore dell'intuizione dei numeri naturali, dell'irriducibilità logica del principio di induzione, e fustigatore dei logicisti. Corretta è l'aggiunta che il matematico francese avrebbe affermato *la logica disinfecta la matematica impedendo gli errori*, ma solo quella, terapeutica, poteva essere per Poincaré la sua funzione. A proposito del teorema di incompletezza di Kurt Gödel (1906-1978), per spiegarne la risonanza viene detto che come sua conseguenza certe proposizioni matematiche come il teorema di Fermat o la congettura di Goldbach sarebbero potute essere tra le proposizioni indecidibili, rendendo vani gli sforzi per risolverle (p. 303). In realtà il teorema di incompletezza non riguarda questi esempi; proposizioni come quella di Fermat e quella di Goldbach e molte altre di una classe ben definita non sono per loro natura indecidibili, al massimo potrebbero essere indimostrabili se vere, ma se sono false sono dimostrabili false. Artstein considera quindi l'ipotesi del continuo, che non è il caso di descrivere, e afferma che *Gödel in seguito aggiunse un risultato un po' disorientante: se il sistema di Zermelo-Fraenkel è coerente [...] sarà impossibile dimostrare [l'ipotesi del continuo]*, p. 304. Gödel dimostrò invece che nelle ipotesi fatte l'ipotesi del continuo non è refutabile, cioè è impossibile dimostrare la sua negazione. Fu Paul Cohen (1934-2007) a dimostrare l'altra parte, e quindi che l'ipotesi del continuo è indipendente.

All'insegnamento è dedicato l'ultimo capitolo, un po' deludente per il lettore che dopo il lungo excur-

sus storico vorrebbe riprendere forse i fili dell'analisi svolta. Ci si aspetterebbe che fosse recuperata la discussione sull'evoluzione; la questione fin dove si estenda l'influenza delle capacità innate è ancora controversa; se alcuni pensano che con il patrimonio genetico si debbano fare i conti a ogni livello scolare, altri come Keith Devlin (*Il gene della matematica* (2000), Longanesi, 2002) ritengono che tra la matematica naturale e la matematica delle scuole superiori ci sia uno stacco deciso.

Inoltre alcune intuizioni di Artstein potrebbero essere sviluppate; per esempio quella sulla innaturalità di affermazioni universali, relative a *tutti*, trova una conferma indiretta nelle vicende fondazionali dell'inizio del Novecento, dove la pretesa di parlare del tutto (tutti gli insiemi, tutti i cardinali, tutti gli ordinali) ha dato origine alle classiche antinomie di Russell, di Cantor, di Burali-forti, e ha portato Bertrand Russell (1872-1970) a costruire un sistema di logica con tipi, dove le affermazioni universali non ristrette sono vietate.

L'unico riferimento all'eredità genetica ripreso da Artstein in questo capitolo è l'affermazione che il nostro cervello ha la *tendenza naturale a credere ciò che ci viene detto*, p. 341, per cui è bene imparare un sistema di logica per dirimere i dubbi quando sorgono. Come controllare sul dizionario il plurale di camicia, se si è incerti sulla regola.

Artstein per la scuola fa riferimento alla situazione in Israele, che conosce per esperienza come genitore, e che non differisce molto da quella dei paesi occidentali. Per esempio pare siano molto diffusi e richiesti dai genitori corsi di *pensiero matematico*, che si riducono a ripetere alcuni argomenti di matematica. Per Artstein non esiste il pensiero matematico: il pensiero è di due tipi, comparativo quando si devono confrontare problemi e situazioni con altre simili già incontrate, e creativo quando è necessaria una soluzione nuova mai sperimentata. Entrambi i tipi sono presenti in ogni disciplina. Non possono essere insegnati, migliorano con l'esperienza e l'applicazione. In conclusione, Artstein ricapitola quello che resterà sempre difficile: il ragionamento per assurdo, l'uso corretto di *tutti* ed *esiste*; il pensare in termini di condizioni che possono o no essere soddisfatte, invece di affrontare ogni problema come completo nei suoi dati.

La polemica maggiore è contro la nuova matematica: il partire da definizioni e assiomi invece che da quello che già si sa, il giustificare in modo contorto proprietà che i bambini peraltro conoscono e accettano senza remore, l'impostazione insiemistica. Artstein una volta ha suggerito a un dirigente scolastico l'idea di non tenere lezioni formali nella scuola elementare, ma di lasciare che l'insegnante intrattenga gli alunni con problemi ed esercizi legati al mondo reale, ai giochi, alle storie. I genitori si opposero. Artstein scoprì in seguito che nel 1929 un simile esperimento era stato condotto, con successo, nel New Hampshire (p. 351). Non è difficile convenire che il compito dell'insegnante che seguisse tali indicazioni diventerebbe più difficile delle presentazioni logicamente strutturate e autoritarie, ma forse sarà impossibile arrivarci finché manca nell'insegnamento della matematica nelle scuole una prospettiva ampia che abbracci tutta la materia, p. 365.

Se non contenesse il capitolo 8, il libro avrebbe una sua importanza; è originale soprattutto nel

proporre la discussione, sia pure da considerare in modo critico, sull'eredità lasciata dallo sviluppo evolutivo della specie. L'interesse per le deviazioni dalle reazioni corrette nelle decisioni e nelle valutazioni di probabilità, o per gli errori, anche in matematica, ha portato a riconoscere tendenze e predisposizioni, *bias*, che sembra si possano attribuire al corredo genetico; questi studi sono interessanti e utili, da seguire, ma non si capisce l'entusiasmo che suscitano. Viene quasi il sospetto che si voglia giustificare con l'eredità genetica l'incapacità di ragionare; ma si corre il rischio di predisporre anche un alibi per l'insuccesso nell'apprendimento delle disposizioni corrette, dichiarandole innaturali; in fondo le si vogliono pur sempre insegnare, si spera. ⁽¹⁾

⁽¹⁾ Pino Rosolini su *Maddmaths*, ottobre 2017) ha rilevato che a p. 69 invece di "icosaedro" compare due volte "dodecaedro".



Gabriele Lolli

Ha insegnato Logica matematica per diversi anni, prevalentemente nell'Università di Torino; in seguito è stato Professore di Filosofia della matematica presso la Scuola Normale di Pisa, cofondatore del network Filmat di filosofia della matematica; ora a riposo per limiti di età.