Matematica, Cultura e Società

Rivista dell'Unione Matematica Italiana

Dario Bambusi, Alberto Maspero

Sistemi integrabili infinito dimensionali e loro perturbazioni

Matematica, Cultura e Società. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **2** (2017), n.3, p. 309–326.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=RUMI_2017_1_2_3_309_0>

Matematica, Cultura e Società. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2017.

Matematica, Cultura e Società – Rivista dell'Unione Matematica Italiana
Serie I, Vol. 2, N. 3, Dicembre 2017, 309-326

Sistemi integrabili infinito dimensionali e loro perturbazioni

DARIO BAMBUSI
Università di Milano - E-mail: dario.bambusi@unimi.it

ALBERTO MASPERO
SISSA, Trieste - E-mail: alberto.maspero@sissa.it

Sommario: *Durante gli ultimi 50 anni, sono stati fatti enormi progressi nella comprensione del comportamento qualitativo di equazioni a derivate parziali non lineari. In modo specifico, l'estensione a questo ambito dei metodi della meccanica Hamiltoniana ha permesso dapprima di capire che esiste un'intera classe di equazioni, chiamate "integrabili", le cui soluzioni hanno sempre carattere ricorrente, e successivamente di cominciare a comprendere ciò che avviene quando queste equazioni sono perturbate e danno luogo a sistemi in cui possono coesistere comportamenti regolari e comportamenti turbolenti. Nel nostro articolo, presenteremo alcuni dei risultati di questa teoria, a partire dalle sue origini fino a oggi, e discuteremo alcuni dei più importanti problemi aperti.*

Abstract: *The last 50 years have seen enourmous advances in the comprehension of the qualitative behaviour of solutions of nonlinear partial differential equations. In particular the extension to this field of the methods of Hamiltonian mechanichs has been the key for the discovery of a full class of equations called "integrable", whose solutions always have a recurrent behaviour and has also allowed to shed some light on the solutions of perturbations of integrable equations, which can display both a recurrent and a turbulent behaviour. In this paper we will present some of the results of the theory from its beginning to our days and we will discuss some of the most important open problems.*

1. – Introduzione

Se l'800 è stato il secolo in cui sono state scoperte le equazioni a derivate parziali e in cui si sono studiate le proprietà principali delle soluzioni delle equazioni lineari, nel '900 e in questi primi anni del 2000 si è cominciato a capire il comportamento delle equazioni a derivate parziali *non lineari*. In particolare si sono risolte esplicitamente alcune equazioni notevoli (equazioni integrabili) e messi in evidenza fenomeni che si presentano quando i sistemi piu semplici (in genere lineari) vengono perturbati, e che vanno dalla persistenza di alcuni moti ordinati sostanzialmente ricorrenti alla nascita di alcuni moti di tipo turbolento.

Una delle scoperte che hanno originato questi sviluppi è stata la possibilità di applicare la teoria dei sistemi Hamiltoniani alle equazioni a derivate parziali. Essa ha permesso di esportare a questo ambito molte delle tecniche sviluppate nell'800 e nella prima metà del '900 per studiare la dinamica dei sistemi meccanici. Ciò ha stimolato vari filoni di ricerca, portando a nuove connessioni tra diverse branche della matematica e a risultati di notevole eleganza e completezza.

Dal punto di vista concettuale, la teoria si articola abbastanza chiaramente in due parti, e questo sia nel caso di sistemi meccanici che nel caso di sistemi di equazioni a derivate parziali: la parte dedicata ai sistemi integrabili e la parte dedicata alle loro perturbazioni.

Per quanto riguarda i sistemi meccanici, il caposaldo della teoria dei sistemi integrabili è dato dal teorema di Liouville-Arnold, che descrive in modo completo sia la struttura delle soluzioni che la sottostante geometria dello spazio delle fasi. Per quanto

Accettato: il 21 dicembre 2017.

riguarda invece la teoria dei sistemi quasi integrabili, i capisaldi sono il teorema KAM ed il teorema di Nekhoroshev, che permettono di mettere in luce comportamenti regolari di molte soluzioni. Ci si aspetta che nei sistemi quasi integrabili siano anche presenti comportamenti caotici, ma la teoria necessaria a spiegarli presenta ancora parecchi aspetti oscuri. Parlando di sistemi meccanici, in questo articolo ci occuperemo quasi esclusivamente di quei fenomeni che ad oggi sono chiari, avendo in mente di concentrarci principalmente sul comportamento di sistemi infinito dimensionali.

Passando ai sistemi infinito dimensionali (qui ci concentreremo sulle equazioni alle derivate parziali), la teoria dei sistemi integrabili si fa più elaborata e meno completa. In effetti, è ormai chiaro come descrivere il comportamento di sistemi in una dimensione spaziale, ma poco è noto quando si passi in dimensione superiore.

In questo articolo, tratteremo prima il caso di equazioni lineari che possono essere completamente risolti utilizzando gli sviluppi di Fourier, e costituiscono i casi in cui è facile riconoscere la connessione con i sistemi Hamiltoniani classici. Successivamente passeremo a studiare il caso dei sistemi integrabili non lineari, usando come guida il più famoso tra di essi: l'equazione di Korteweg de Vries. Si tratta di un'equazione che, oltre a rappresentare il sistema più studiato tra quelli integrabili infinito dimensionali, ha un grande interesse fisico in quanto compare come modello per la propagazione di onde lunghe in una classe molto vasta di problemi. Anche da un punto di vista storico è un'equazione che ha giocato un ruolo notevole e in appendice abbiamo riportato un famoso aneddoto che la riguarda. Da un punto di vista matematico, la teoria di quest'equazione è molto ben sviluppata ed è noto un risultato che ne descrive completamente la dinamica (nel caso di condizioni periodiche al bordo). Si tratta di un teorema (Teorema 3.4) che è il risultato di un gran numero di contributi di scienziati diversi: come cercheremo di rendere evidente sono stati sviluppati e utilizzati strumenti matematici molto sofisticati per arrivare alla descrizione che esso contiene e che costituisce il culmine di ricerche che hanno coperto quasi mezzo secolo.

Quando si studiano le perturbazioni di un sistema di equazioni a derivate parziali integrabile, si entra nel mondo della ricerca contemporanea. Ad oggi sono noti alcuni capisaldi, ma restano moltissimi problemi aperti. In questo articolo, cercheremo di presentare i risultati acquisiti e di dare un'idea di alcune delle questioni che sono attualmente in discussione, evitando di fornire enunciati formali che spesso in questo ambito sono estremamente tecnici e poco "leggibili".

2. – Sistemi di dimensione finita

2.1 – *Sistemi Integrabili*

Lo scopo primario della teoria dei sistemi meccanici è quello di descrivere il movimento dei corpi soggetti a forze, o come diremmo in linguaggio moderno, quello di risolvere le corrispondenti equazioni del moto, cioè scrivere delle formule per le funzioni che risolvono tali equazioni. Sorprendentemente tale programma ha avuto successo in molti esempi rilevanti: forse il problema più importante risolto esplicitamente è il problema di Keplero, per il quale si è mostrato che le orbite di una particella soggetta ad una forza centrale inversamente proporzionale al quadrato della distanza soddisfano alle tre leggi di Keplero. Un altro caso importante è la trottola di Lagrange (un corpo rigido con un asse di simmetria che ha un punto fisso e si muove sotto l'azione della forza peso); un altro ancora, fondamentale per la comprensione della dinamica rotazionale dei pianeti, è il moto di un corpo rigido libero. Abbiamo citato un certo numero di esempi in quanto la loro soluzione esplicita, oltre ad un ovvio interesse diretto per lo studio dei sistemi in oggetto, ha messo in evidenza un interessante aspetto comune a tutti i casi trattati: la soluzione risultava essere quasiperiodica, cioè scrivibile come composizione di un certo numero di moti periodici con periodi diversi.

È stato Liouville, nella prima metà dell'800, a capire che la caratteristica comune a tutti questi sistemi era il fatto di possedere un numero sufficiente di costanti del moto; egli ha inoltre capito che, se un sistema possiede un numero sufficiente di costanti del moto, allora le sue equazioni sono risolubili tramite formule "elementari". Tale enunciato è stato completato nella seconda metà del secolo scorso da un risultato di Arnold che rende conto anche del fatto che le soluzioni abbiano sempre le caratteristiche di quasiperiodicità osservate nei casi trattati esplicitamente. L'insieme dei due risultati è oggi noto con il nome di teorema di Liouville-Arnold, teorema che costituisce il primo caposaldo della nostra presentazione.

2.2 – *Il teorema di Liouville-Arnold*

La classe di sistemi di cui si occupa il teorema di Liouville-Arnold è la classe dei sistemi Hamiltoniani. Ricordiamo che un sistema di equazioni differenziali si dice Hamiltoniano se può essere scritto nella forma

$$\frac{dq_k}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_k} \ , \quad \frac{dp_k}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_k} \ , \quad 1 \le k \le n \ , \tag{1}$$

dove H è una funzione detta *Hamiltoniana* del sistema che dipende dalle variabili $(p_1, \ldots, p_n, q_1, \ldots, q_n)$. Lo spazio in cui avviene il moto, $\mathbb{R}^{2n}$ in questo caso, viene chiamato "spazio delle fasi". L'esempio più elementare di sistema Hamiltoniano è fornito dalle equazioni del moto di una particella soggetta a forze conservative. In questo caso $n = 3$, le variabili q coincidono con le componenti della posizione della particella e le variabili p con le componenti del vettore quantità di moto. La funzione H coincide con l'energia del sistema. Più in generale le equazioni di un sistema di particelle soggetto a forze conservative e a vincoli ([1]) sono scrivibili in forma Hamiltoniana con Hamiltoniana data dall'energia totale del sistema.

Un sistema Hamiltoniano si dice avere n gradi di libertà se il suo spazio delle fasi ha dimensione $2n$.

Le costanti del moto effettivamente utili per risolvere le equazioni del moto devono avere alcune proprietà che andiamo ora a specificare. Intanto ricordiamo che una funzione $\Phi(q, p)$ si dice costante del moto se è costante lungo le soluzioni delle equazioni del moto. Poi, date due o più costanti, esse si dicono indipendenti se i loro gradienti sono quasi ovunque indipendenti. Infine due costanti del moto Φ_1 e Φ_2 si dicono in involuzione se la loro parentesi di Poisson, cioè la quantità

$$\{\Phi_1; \Phi_2\} := \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \Phi_1}{\partial q_k}\frac{\partial \Phi_2}{\partial p_k} - \frac{\partial \Phi_1}{\partial p_k}\frac{\partial \Phi_2}{\partial q_k} \tag{2}$$

è zero.

([1]) Più precisamente a vincoli ideali olonomi.

Teorema 2.1. – [Liouville] *Se un sistema Hamiltoniano ad n gradi di libertà ammette n costanti del moto indipendenti ed in involuzione, allora è integrabile per quadrature.*

Ricordiamo che un sistema si dice integrabile per quadrature se è possibile calcolare le sue soluzioni soltanto tramite il calcolo di integrali definiti e l'inversione di funzioni ([2]).

Il teorema di Arnold consiste in un'analisi della geometria della superficie su cui avviene il moto e in un risultato di esistenza di variabili (azione angolo) in cui il sistema assume una forma particolarmente semplice. Per illustrare tale teorema cominciamo con il considerare un esempio in cui la situazione è particolarmente semplice e trasparente: il caso di una particella di massa 1 che si muove su una retta ed è soggetta ad una forza di richiamo verso l'origine. In questo caso l'Hamiltoniana (che coincide con l'energia) assume la forma

$$H(q, p) = \frac{p^2}{2} + V(q) \ ,$$

dove V è il potenziale della forza, e in questo caso ha un minimo nell'origine (siccome la forza attrae verso l'origine). Per fissare le idee si può pensare al caso dell'*oscillatore armonico*, cioè il caso in cui il potenziale sia quello armonico e in più la costante della molla sia 1; in questo caso si ha $V(q) = \frac{q^2}{2}$.

È facile rendersi conto che la Hamiltoniana stessa è una costante del moto per il sistema, e dunque, avendo il sistema 1 grado di libertà, ci troviamo in presenza di un sistema integrabile. Inoltre, la Hamiltoniana ha un minimo stretto in $(q, p) = (0, 0)$. Essendo l'energia conservata, la dinamica avviene sulle sue curve di livello, che per piccoli valori dell'energia sono curve chiuse (cerchi di raggio $\sqrt{2E}$ nel caso armonico). Almeno per piccole energie, lo spazio delle fasi risulta quindi foliato in tori invarianti monodimensionali (i cerchi di cui sopra).

([2]) Si tratta veramente di operazioni elementari, se paragonate alla difficoltà di risolvere un'equazione differenziale (operazione per la quale non esiste una ricetta generale). Tra l'altro, oggi sappiamo che spesso le soluzioni di equazioni differenziali hanno comportamenti caotici, e non sono descrivibili tramite funzioni elementari!

La prima parte del teorema di Arnold afferma che anche nel caso ad n gradi di libertà, a patto che ci siano n costanti del moto indipendenti e in involuzione e che la superficie dell'energia sia compatta, lo spazio delle fasi è foliato in tori invarianti, che però hanno dimensione n.

La seconda parte del teorema di Arnold afferma che esistono delle coordinate canoniche (cioè in cui le equazioni assumono la forma (1)) di solito denotate con $(I, \alpha) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{T}^n$ in cui la Hamiltoniana dipende solo dai momenti I, cioè si ha $H = H(I)$. Vale la pena di osservare che in tali coordinate le equazioni del moto diventano totalmente banali, infatti assumono la forma

$$(3) \qquad \frac{d\alpha_k}{dt} = \frac{\partial H}{\partial I_k} \ , \quad \frac{dI_k}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \alpha_k} \equiv 0 \ , \quad 1 \leq k \leq n$$

la cui soluzione è

$$(4) \qquad I_k(t) = I_k(0) \ , \quad \alpha_k(t) = \alpha_k(0) + \omega_k t \ ,$$

dove $\omega_k := \dfrac{\partial H}{\partial I_k}(I(0))$ sono quantità che giocano il ruolo di frequenze. Le equazioni (4) rendono evidente le proprietà del moto ed in particolare il fatto che il moto consista di n angoli che avanzano uniformemente nel tempo. La dinamica del sistema risulta quindi la composizione di n moti periodici ciascuno con una propria frequenza, da cui il nome di dinamica *quasi-periodica*.

Nel caso dell'oscillatore armonico (cioè del potenziale $V = q^2/2$) le coordinate azione angolo sono coordinate di tipo polare nel piano delle fasi: esse sono definite da

$$(5) \qquad q = \sqrt{2I} \cos \alpha \ , \quad p = -\sqrt{2I} \sin \alpha \ .$$

Nel caso di potenziali più generali, le variabili azione angolo sono ancora variabili di tipo polare, ma costruite in modo che I sia costante sulle orbite e l'angolo avanzi uniformemente nel tempo.

Un'ulteriore proprietà interessante che si vede in questa situazione è che le variabili angolo azione hanno una singolarità nell'origine, punto in cui l'angolo non è definito. Tale punto è anche una singolarità della foliazione in cerchi invarianti dello spazio delle fasi. In questo punto infatti la superficie dell'energia degenera ad un punto. Si tratta di un fenomeno che ritroveremo anche nel caso infinito dimensionale.

Si noti tuttavia che le variabili cartesiane (q, p) non presentano tale singolarità e risultano ben definite su tutto lo spazio delle fasi. Anticipiamo che in dimensione infinita il "trucco" di sostituire le variabili azione angolo con opportune variabili di tipo cartesiano giocherà un ruolo fondamentale.

Una generalizzazione di questo esempio è dato dal caso di un sistema Hamiltoniano lineare: è facile vedere che se la superficie dell'energia è compatta, allora esistono sempre coordinate in cui il sistema si rappresenta come un numero finito di oscillatori armonici aventi frequenze diverse e non interagenti e le corrispondenti coordinate azione angolo sono variabili simili alle variabili polari (come in (5)) per i singoli oscillatori.

Prima di proseguire citiamo un altro esempio di applicazione del teorema di Liouville-Arnold: il problema di Keplero, limitandoci al caso planare in cui ci sono 2 gradi di libertà e le due costanti del moto sono date dal momento angolare e dall'energia. In tal caso risulta che le variabili di azione I sono sostanzialmente il semiasse maggiore dell'ellisse Kepleriana ed il modulo del momento angolare del pianeta. Gli angoli corrispondenti sono l'angolo formato dalla direzione del perielio con una direzione fissa nel piano e un angolo lungo l'ellisse ([3]). Sottolineiamo che da un punto di vista fisico (ed in particolare climatico) le quantità significative sono le azioni: infatti un incremento del semiasse maggiore corrisponde ad un incremento della distanza media dal sole, mentre un incremento del momento angolare corrisponde a passare ad orbite di grande eccentricità, in cui il pianeta si trova per lunghi periodi dell'anno lontanissimo dal sole e per brevi periodi vicinissimo al sole.

Infine ricordiamo che il caso di due corpi interagenti con un potenziale centrale si riconduce, mettendosi nel sistema del centro di massa, al caso di un punto soggetto ad una forza centrale. Quindi, nel caso Kepleriano, la dinamica obbedisce ancora alle leggi di Keplero e le azioni hanno la stessa interpretazione del caso precedente. La situazione cambia completamente se si considera anche l'interazione con un terzo pianeta (Giove nel caso del

([3]) Precisamente si tratta di un angolo riscalato in modo tale che la sua velocità di avanzamento sia costante.

sistema solare): in questo caso il sistema risulta non essere integrabile e come discuteremo nel prossimo paragrafo, la dinamica diventa molto diversa.

2.3 – *Perturbazioni di sistemi integrabili*

Già alla fine dell'800 Poincaré scoprì che in generale piccole perturbazioni di sistemi integrabili non possiedono alcuna costante del moto indipendente dall'energia ([4]). Quindi perturbando un sistema integrabile, in generale si trova un sistema che integrabile non è! Il problema di capire come sia fatta la sua dinamica è tutt'altro che banale, come dimostra anche la famosa vicenda di Poincaré e del premio del Re di Svezia ([5]). I principali risultati in questo ambito sono il teorema KAM (dall'acronimo dei suoi scopritori Kolmogorov – Arnold – Moser ([6])) ed il teorema di Nekhoroshev [41]. Il primo garantisce che la maggior parte dei tori invarianti in cui è foliato lo spazio delle fasi di un sistema integrabile sopravvivono sotto perturbazione, mentre il secondo mostra che le azioni del sistema imperturbato evolvono poco su tempi estremamente lunghi.

Per quanto riguarda la sopravvivenza dei tori, la situazione è però piuttosto complicata, infatti la sopravvivenza o meno di un toro è determinata in modo non elementare dalle proprietà di tipo diofanteo delle frequenze con cui avviene il moto imperturbato sul toro stesso. Il punto è che, dopo aver introdotto le variabili azione angolo, la dinamica del sistema imperturbato si riduce alla forma banale (3). La principale caratteristica dinamica di tale soluzione è data dal vettore delle frequenze $\omega_1, ..., \omega_n$ che dipende dal valore iniziale di I e quindi in particolare varia da punto a punto dello spazio delle fasi. Si consideri ad esempio il caso a due gradi di libertà in cui ci sono solo due frequenze, allora si può mostrare che i tori su cui ω_1/ω_2 è razionale spariscono quando il sistema è soggetto a perturbazione. Nel caso in cui siano presenti più di due frequenze le quantità rilevanti sono le combinazioni lineari a coefficienti interi delle frequenze, cioè quantità della forma $\omega \cdot k$ con $k = (k_1, ..., k_n)$ un vettore di interi positivi e negativi. Se esiste un vettore intero k diverso da zero tale per cui $\omega \cdot k = 0$, allora il corrispondente toro non persiste sotto perturbazione; in caso contrario il toro corrispondente è candidato a sopravvivere. Ora, il fatto che $\omega \cdot k$ non si annulli non è sufficiente a garantire la sopravvivenza del toro con frequenze ω: si deve chiedere di più, cioè che il vettore delle frequenze sia "abbastanza non-risonante". Ad esempio una condizione che garantisce la sopravvivenza dei tori è che esistano costanti $\gamma > 0$ e τ tali per cui

$$(6) \quad |\omega \cdot k| \geq \frac{\gamma}{|k|^\tau} \ , \quad \forall k = (k_1, ..., k_n) \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\} \ .$$

In questo caso il vettore ω delle frequenze si dice diofanteo, ed è noto che l'insieme dei vettori diofantei è non banale: ha misura piena, ma il suo complementare è denso ([7]).

Si ha quindi che tra due tori invarianti che persistono sotto perturbazione si trovano sempre spazi vuoti (lasciati dai tori che "si rompono"), inoltre risulta che la misura (in qualche senso, il volume) occupato dai tori invarianti che persistono diminuisce al crescere della taglia della perturbazione. Risulta anche che la regione di spazio delle fasi complementare all'insieme dei tori invarianti è (in più di due gradi di libertà) connessa ([8]), e quindi in linea di principio è possibile

---

([4]) Questo è uno dei tanti risultati ottenuti da Poincaré nel suo famoso *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste* [42].

([5]) Nel 1887 Poincaré vinse il concorso indetto da re Oscar II per la risoluzione del problema dei tre corpi; la dimostrazione conteneva però un errore fondamentale e Poincaré fu costretto a riacquistare tutte le copie della sua memoria che nel frattempo era stata pubblicata. La correzione dell'errore ha avuto un impatto enorme sulla comunità scientifica, infatti essa ha portato Poincaré ha capire come le intersezioni omocline possano portare all'insorgere del caos.

([6]) Il risultato fu annunciato da Kolmogorov nel 1954 [32] che diede una traccia della dimostrazione; la dimostrazione fu poi scritta in tutti i dettagli ed il risultato esteso da Moser nel 1962 [40] e da Arnold nel 1963 [2].

([7]) Un po' come l'insieme dei numeri irrazionali ha misura piena, ma qualsiasi irrazionale è approssimabile bene quanto si vuole con numeri razionali, cioè i numeri razionali sono densi negli irrazionali.

([8]) Cioè è possibile connettere due suoi punti arbitrari con una curva continua interamente contenuta nell'insieme.

l'esistenza di orbite che viaggiano in tutta quella regione ([9]).

Il teorema di Nekhoroshev si occupa proprio di dire qualcosa sulle orbite che si trovano nell'insieme complementare ai tori invarianti. Il teorema di Nekhoroshev afferma che, detta ε la taglia della perturbazione, allora le azioni si muovono al più di una quantità di ordine $\sqrt{\varepsilon}$, per tempi esponenzialmente lunghi con ε^{-1}.

Segnaliamo come l'applicazione di tali risultati a sistemi fisici abbia in anni recenti dato frutti notevoli. Ad esempio è stata dimostrata la stabilità delle orbite dei pianeti maggiori quando si tenga conto anche dell'interazione reciproca tra i vari pianeti (che costituisce una perturbazione al sistema integrabile Kepleriano dato da un pianeta che interagisce con il Sole). In questo caso per stabilità si intende stabilità su tempi dell'ordine dell'età dell'universo ([10]).

3. – Equazioni a derivate parziali integrabili

3.1 – *Equazioni a derivate parziali integrabili lineari*

Il caso più semplice di equazioni a derivate parziali (EDP) integrabili è il caso di equazioni lineari, il quale costituisce la generalizzazione diretta di un sistema costituito da un numero finito di oscillatori armonici.

Le EDP studiabili con metodi Hamiltoniani sono quelle che descrivono fenomeni ondulatori, come ad esempio l'equazione delle onde o della corda vibrante:

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 \ , \tag{7}$$

dove il pedice sta per la derivata parziale rispetto alla variabile indicata. A tale equazione devono poi essere aggiunte le condizioni al bordo, ad esempio condizioni nulle o di Dirichlet

$$u(t,0) = 0 = u(t,L) \ . \tag{8}$$

In tal caso l'equazione descrive una corda di lunghezza L fissata agli estremi; il valore $u(t,x)$ denota lo spostamento della corda dalla posizione di riposo nel punto x all'istante t. La quantità $c := \sqrt{\tau/\rho}$ rappresenta la velocità di propagazione dei segnali nella corda (ed è legata allo spettro dei suoni che può emettere, o come direbbe un matematico alla frequenza del suo modo fondamentale); qui τ è la tensione della corda e ρ la sua densità. Questo è ad esempio un ottimo modello di una corda per chitarra.

In effetti, in una corda vibrante si riescono a produrre facilmente delle oscillazioni periodiche (basta dare un colpetto alla corda nel mezzo), e la domanda naturale è trovare delle coordinate adatte in cui leggere questa dinamica periodica. La soluzione formale fu trovata inizialmente da Daniel Bernoulli nel 1755 col metodo di separazione di variabili, ma per un calcolo più completo e rigoroso si dovette aspettare l'invenzione, da parte di Joseph Fourier, delle serie di Fourier e più in generale di quella che oggi chiamiamo *analisi di Fourier* ([11]).

Ricordiamo in particolare che l'analisi di Fourier garantisce che ogni funzione $u(x)$ sufficientemente regolare, definita sull'intervallo $[0,L]$ e soddisfacente la condizione (8), sia esprimibile come combinazione di funzioni trigonometriche:

$$u(x) = \sum_{k\geq 1} \hat{u}_k \sin\left(\frac{\pi k}{L} x\right) \ , \tag{9}$$

dove $\hat{u}_k$ è il k-esimo coefficiente di Fourier definito da

$$\hat{u}_k := \frac{1}{L}\int_0^L u(x) \sin\left(\frac{\pi k}{L} x\right) dx \ .$$

([9]) Ci si aspetta che tali orbite abbiano un moto caotico che copre tutta la porzione di spazio delle fasi lasciata libera dai tori, ma ad oggi non sono noti risultati in questa direzione. Il primo esempio concreto di orbite le cui azioni cambiano di molto fu mostrato da Arnold in [3], ma soltanto per un problema modello. In caso di perturbazioni più generali, persino la costruzione di una sola orbita lungo cui le azioni cambiano molto è stata ottenuta solo recentissimamente (e sempre solo per una certa classe di Hamiltoniane), si veda [8].

([10]) Si vedano [24, 25] per una rassegna sulla storia della meccanica celeste e il problema dell'applicabilità dei teoremi KAM e Nekhoroshev al sistema solare.

([11]) Il concetto di serie di Fourier fu introdotto per la prima volta da Fourier nel trattato *Mémoire sur la propagation de la chaleur dans les corps solides* del 1807, dove viene studiata la soluzione dell'equazione del calore. Il lettore interessato può trovare la storia della nascita e sviluppo dell'analisi di Fourier nel libro [15].

L'idea è quella di cercare una soluzione per l'equazione (7) nella forma di serie di Fourier come in (9), in cui però i coefficienti $\hat{u}_k$ dipendono dal tempo. Allora, sostituendo l'espressione (9) nell'equazione delle onde (7), si ottiene che ciascuno dei coefficienti di Fourier $\hat{u}_k(t)$ deve soddisfare l'equazione di un oscillatore armonico:

$$\frac{d^2\hat{u}_k}{dt^2} = -\omega_k^2\hat{u}_k \ , \qquad k \geq 1 \tag{10}$$

dove $\omega_k := \pi ck/L$. Come nel caso dei sistemi lineari di dimensione finita, abbiamo trovato che il sistema è equivalente ad una collezione di oscillatori armonici. Qui però troviamo una collezione di *infiniti* oscillatori armonici caratterizzati da una successione di frequenze che va all'infinito.

Risulta anche che l'equazione della corda vibrante possiede un'energia conservata che, scritta in termini dei coefficienti di Fourier, risulta essere effettivamente la Hamiltoniana del sistema, per la quale le coordinate q_k coincidono con i coefficienti di Fourier $\hat{u}_k$, mentre i momenti p_k sono le loro derivate temporali: $p_k := \frac{d\hat{u}_k}{dt}$. Inoltre è possibile introdurre variabili angolo azione, in modo analogo a quanto fatto per l'oscillatore armonico in (5), ma ovviamente si paga un prezzo, e cioè si introduce una singolarità nell'origine delle coordinate.

In questo caso si tratta di una questione particolarmente spinosa: infatti, se si vuole che la serie (9) converga, si deve chiedere che i coefficienti di Fourier $\hat{u}_k$ tendano a zero quando $k \to \infty$, e quindi si avvicinano sempre più al punto singolare del sistema di coordinate. Risulta quindi chiaro che in questa situazione non conviene introdurre coordinate polari. Torneremo più avanti su questo punto.

Una generalizzazione interessante dell'equazione delle onde (7) è l'equazione di Klein Gordon:

$$\frac{1}{c^2}u_{tt} - \Delta u + \frac{m^2c^2}{\hbar^2}u = 0 \tag{11}$$

dove Δ è il Laplaciano. Tale equazione gioca un ruolo fondamentale in teoria dei campi: descrive il campo di un bosone in ambito relativistico. Le costanti nell'equazione sono c la velocità della luce, m la massa del bosone e $\hbar$ la costante di Plank. L'equazione (11) compare anche come equazione che descrive situazioni meccaniche (ovviamente con costanti diverse!), ad esempio per la descrizione di cavi elettrici sospesi o di ponti sospesi (si tratta in questi casi di modelli semplificati, ma spesso di un grande utilità).

Prima di proseguire val la pena di osservare che è sempre possibile scegliere unità di misura in cui $c = \hbar = 1$ e l'equazione si riduce quindi alla forma

$$u_{tt} - \Delta u + m^2 u = 0 \ , \tag{12}$$

in cui compare un solo parametro che rappresenta la massa del bosone (anche quando si utilizzi l'equazione (12) per descrivere fenomeni meccanici è sempre possibile scegliere unità di misura di spazio e tempo in modo che essa assuma la forma semplificata (12)).

È interessante calcolare le soluzioni di (12) in serie di Fourier, supponendo ancora di essere in dimensione 1 e che $u(t, x)$ soddisfi alle condizioni al bordo (8). Scegliendo, per semplicità di notazione, $L = \pi$, risulta allora che i coefficienti di Fourier soddisfano ancora l'equazione (10), ma con frequenze date da

$$\omega_k = \sqrt{k^2 + m^2} \ ,$$

che quindi dipendono dal parametro m.

Si tratta di una situazione molto interessante, in quanto se si calcolano i rapporti tra due frequenze, ad esempio la prima e la seconda, si trova

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{\sqrt{1 + m^2}}{\sqrt{4 + m^2}} \ ,$$

che è una funzione continua di m. È chiaro allora che il rapporto tra queste frequenze sarà razionale per certi valori di m, mentre irrazionale per altri. Anche considerando combinazioni lineari a coefficienti interi delle frequenze (per costruire quantità come quelle che si trovano a lato sinistro dell'equazione (6) e che determinano la sopravvivenza o la distruzione dei tori invarianti) si troverà zero o un numero diverso da zero a seconda del valore di m. Ci si può quindi aspettare che la "robustezza" di queste soluzioni quando il sistema è sottoposto a perturbazione dipenda fortemente dal valore della costante m, e questo è esattamente quello che succede!

Val la pena ancora di sottolineare che il moto è notevolmente diverso a seconda del valore di m. Ad esempio, se $m = 0$ i moti sono tutti periodici con lo stesso periodo, mentre per valori generici ([12]) del parametro m i moti avvengono con infinite frequenze "indipendenti sui razionali" cioè per le quali la quantità $\omega \cdot k$ non si annulla qualunque sia il vettore intero k. Corrispondentemente a questi valori delle frequenze quello che succede è che il moto avviene su un toro effettivamente infinito dimensionale e viene detto *almost periodico* ([13]).

Va specificato che, tranne che nel caso di equazioni della meccanica quantistica, le equazioni lineari appaiono come modelli che descrivono fenomeni fisici in un certo limite, ad esempio l'equazione delle onde descrive le *piccole* oscillazioni di una corda vibrante, mentre quando si vadano a considerare oscillazioni di ampiezza non infinitesima si devono considerare correzioni non lineari.

3.2 – *KdV: un esempio non lineare di equazione a derivate parziali integrabile.*

Come nel caso dei sistemi meccanici, la teoria delle equazioni a derivate parziali integrabili si fa non banale quando si inizia a parlare di sistemi nonlineari e ci si interessa al comportamento di soluzioni che non siano di piccola ampiezza.

La teoria delle EDP integrabili vede la sua nascita con un bellissimo articolo di Zabuski e Kruskal [48] che studiarono numericamente l'equazione di Korteweg de Vries (KdV), cioè l'equazione

$$u_t + u_{xxx} - 6uu_x = 0 \ . \tag{13}$$

Come abbiamo già accennato, la funzione $u(x)$ descrive il profilo di un'onda di superficie che viaggia in un canale poco profondo. In questo articolo Zabuski e Kruskal hanno osservato numericamente che esistono delle soluzioni particolari, aventi la forma di onde localizzate nello spazio (i cosiddetti *solitoni*), che interagiscono fortemente quando si incontrano, per poi tornare a propagarsi in modo sostanzialmente immutato dopo essersi attraversate.

Queste notevoli proprietà di stabilità hanno immediatamente stimolato la ricerca su questa equazione e si è rapidamente scoperto non solo che l'equazione è Hamiltoniana ([14]), ma addirittura che esiste per essa una *gerarchia* di infinite costanti del moto indipendenti ed in involuzione.

Si è quindi cercato di capire se fosse possibile anche nel caso delle equazioni a derivate parziali utilizzare le costanti del moto per integrare le equazioni.

Il passo fondamentale in questa direzione è stata la scoperta secondo la quale l'equazione KdV è scrivibile nella forma che oggi chiamiamo di *coppie di Lax* ([15]).

L'osservazione principale è quella che se si definiscono gli operatori

$$L := -\partial_{xx} + u \ , \quad B := -4\partial_{xxx} + 3u\partial_x + 3\partial_x u \ , \tag{14}$$

allora u soddisfa l'equazione di Korteweg de Vries se e solo se gli operatori L e B soddisfano all'equazione

$$\frac{dL}{dt} = [B, L] \ , \tag{15}$$

dove $[B, L] := BL - LB$ è il commutatore tra i due operatori.

Si capisce bene l'importanza di questa riscrittura, apparentemente banale, se si osserva che (15) coincide con l'equazione di Heisenberg che si incontra in meccanica quantistica. Più precisamente, in meccanica quantistica l'equazione del moto di un'osservabile descritta da un operatore $\hat{F}$ (nella formulazione originale di Heisenberg, la quantità di moto o la posizione di una particella), in un sistema avente operatore Hamiltoniano ([16]) $\hat{H}$ è data da

$$\frac{d\hat{F}}{dt} = i[\hat{H}, \hat{F}] \ , \tag{16}$$

dove i è l'unità immaginaria. Si vede dunque che l'equazione (15) coincide con l'equazione per l'evolu-

([12]) Ancora una volta nel senso di appartenere ad un insieme di misura grande.

([13]) Viene cosí chiamato un moto quasiperiodico ad un numero infinito di frequenze.

([14]) Nel senso che l'equazione di KdV sono le equazioni Hamiltoniane di una certa Hamiltoniana, si veda l'appendice 13 di [1].

([15]) Tale formulazione fu trovata da Lax in [36].

([16]) Oggi sappiamo che esiste una procedura standard per quantizzare la Hamiltoniana classica, cioè la funzione Hamiltoniana di cui ci stiamo occupando in questo articolo, e produrre un operatore Hamiltoniano $\hat{H}$ che poi si usa per scrivere la equazioni di Heisenberg o l'equazione di Schrödinger.

zione dell'osservabile quantistica L in un sistema di Hamiltoniana iB.

Tale analogia puramente formale permette di sfruttare gli strumenti sviluppati in meccanica quantistica per capire meglio la dinamica dell'equazione KdV.

In particolare la proprietà fondamentale è quella secondo cui il flusso quantistico è dato da un operatore unitario, cioè se si definisce l'operatore $U(t) = e^{-i\hat{H}t}$, esso è unitario e la soluzione delle equazioni di Heisenberg (16) è data da $\hat{F}(t) = U(-t)\hat{F}(0)U(t)$. Ora, è ben noto che in tal caso lo spettro ([17]) di $\hat{F}(t)$ coincide con lo spettro di $\hat{F}(0)$. Vale quindi una notevole proprietà che enunceremo sotto forma di teorema.

Per dare un enunciato preciso si ricordi che, perchè un'equazione o un operatore siano definiti correttamente, occorre specificare anche le condizioni al bordo cui le soluzioni devono soddisfare. Considereremo qui l'equazione KdV con condizioni al bordo periodiche, cioè cercheremo soluzioni di (13) soddisfacenti a

$$u(0,t) = u(1,t)\ , \quad u_x(0,t) = u_x(1,t)\ , \tag{17}$$

e corrispondentemente considereremo l'operatore

$$L = -\partial_{xx} + u \tag{18}$$

come operatore su $L^2([0,2])$ (si noti il raddoppio del periodo!) con condizioni periodiche al bordo:

$$f(0,t) = f(2,t)\ , \quad f_x(0,t) = f_x(2,t)\ . \tag{19}$$

Vale allora il seguente risultato, dovuto a Lax:

TEOREMA 3.1. – [[36]] *Se la funzione $u(x,t)$ soddisfa all'equazione di Korteweg de Vries, allora lo spettro dell'operatore* (18) *è indipendente da t.*

Risulta quindi che le soluzioni dell'equazione KdV evolvono, ma in modo che l'insieme degli autovalori dell'operatore (18) resti constante. In altre parole, ciascun autovalore dell'operatore (18) è una costante del moto del sistema, e siccome tale operatore ha un numero infinito di autovalori, abbiamo trovato un numero infinito di costanti del moto per l'equazione KdV.

([17]) Ricordiamo che lo spettro è una generalizzazione del concetto di autovalore al caso di operatori lineari su spazi di dimensione infinita.

Ne segue che ha interesse conoscere l'insieme delle funzioni u aventi lo stesso spettro e cercare di utilizzare l'insieme degli autovalori (cioè delle costanti del moto) per integrare le equazioni del moto.

Prima di attaccare questo problema, ci si può chiedere se valga la pena risolverlo (ammesso di riuscirci). Il punto è che, da una parte ha interesse risolvere l'equazione KdV (che come abbiamo già osservato è un modello fisicamente interessante) e dall'altra possiamo immaginare che tale equazione non sia un caso isolato, ma che esistano altri modelli ai quali applicare tecniche simili. In effetti, risulta che ci sono altre interessanti equazioni a derivate parziali che ammettono una rappresentazione in coppie di Lax, e che le tecniche sviluppate per studiare l'equazione KdV trovano effettivamente applicazione anche in tali modelli (ad esempio l'equazione di Schrödinger non lineare e la catena di Toda).

3.2.1 – Il problema spettrale ed il problema di Cauchy

In effetti, l'operatore (18) è uno degli oggetti più studiati nell'ambito della teoria classica delle equazioni differenziali. Tale operatore viene chiamato operatore di *Sturm-Lioville* e il suo spettro ha una struttura notevole. In tale ambito la funzione u viene chiamata *potenziale*, nome che utilizzeremo anche qui.

La teoria classica di Sturm-Liouville garantisce che lo spettro dell'operatore (18) con potenziale di classe L^2 è puramente puntuale ed è formato da una successione infinita di autovalori $\{\lambda_j\}_{j\geq 0}$. La successione ha la forma

$$\lambda_0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 < \lambda_3 \leq \lambda_4 < \dots < \lambda_{2k-1} \leq \lambda_{2k} < \dots \tag{20}$$

Sottolineiamo che, in effetti, esistono potenziali in corrispondenza dei quali l'uguaglianza è realizzata laddove sono presenti i segni "$\leq$".

Risulta che gli autovalori λ_k non dipendono con regolarità dal potenziale e quindi non sono le quantità giuste da utilizzare per integrare il sistema. Al contrario, i cosiddetti *gap* spettrali, cioè le differenze $\gamma_k := \lambda_{2k} - \lambda_{2k-1}$, risultano essere indipendenti, in involuzione e in più i loro quadrati γ_k^2 sono funzioni regolari di u su tutto L^2. Inoltre risulta che la successione γ_k determina l'intera successione λ_k [22, 38].

Ciò detto, la prima domanda che viene da porsi è quali siano le informazioni che si possono ottenere sulla funzione u quando si conosca la successione dei gap γ_k. La scoperta dell'importanza di tale questione per lo studio della dinamica in equazioni di evoluzione ha stimolato un enorme lavoro a partire dagli anni '70; uno dei risultati più notevoli ottenuti in tale ambito ha messo in luce un'analogia notevole tra la successione dei gap spettrali e la successione dei coefficienti di Fourier della funzione u. Ciò si esprime in modo particolarmente semplice introducendo i coefficienti di Fourier sugli esponenziali, definiti da ([18])

$$u_k := \int_0^1 u(x)e^{-2\pi\, ikx}\, dx\ .$$

La cosa notevole è che risulta possibile leggere dal comportamento di tale successione il fatto che u appartenga agli spazi di Sobolev ([19]) H^s. Vale infatti il seguente risultato classico

TEOREMA 3.2. – *La funzione u appartiene ad H^s se e solo se la successione dei suoi coefficienti di Fourier ha la proprietà che*

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} (1+|k|)^{2s}|u_k|^2 < \infty\ . \tag{21}$$

Ora, risulta che, esattamente allo stesso modo, l'andamento asintotico della successione dei gap determina la regolarità della funzione u: vale infatti il seguente teorema, dimostrato inizialmente da Marcenko e Ostrowski ([20])

TEOREMA 3.3. – [[37]] *Sia $s \geq 0$, allora la funzione u appartiene ad H^s se e solo se la successione dei gap γ_k dello spettro di $-\partial_{xx} + u$ soddisfa a*

$$\sum_{k\geq 1} (1+|k|)^{2s}\gamma_k^2 < \infty\ . \tag{22}$$

Da tale risultato segue immediatamente un risultato di regolarità per le soluzioni dell'equazione KdV: si ha infatti che se il dato iniziale è di classe H^s, allora la successione dei gap spettrali ha la proprietà (22), ma, poichè lo spettro è invariante per la dinamica, tale proprietàè goduta anche dai gap spettrali di $u(t)$ e quindi anche $u(t)$ è di classe H^s.

Particolare interesse rivestono quelle funzioni u con la proprietà che il corrispondente spettro ha solo un numero finito di gap diversi da zero. Tali funzioni sono dette *finite gap potentials*. Se il numero di gap diversi da zero è n, si dirà che la funzione corrispondente è un n-gap potential. Risulta ovviamente che l'insieme dei finite gap potentials è invariante sotto la dinamica di KdV. Inoltre il teorema precedente dice che tali funzioni sono di classe H^s per ogni s.

Le tecniche spettrali sono anche utilizzate per dimostrare stime a priori che permettono di mostrare che l'equazione di KdV è ben posta anche in spazi di funzioni estremamente irregolari, in particolare per funzioni di classe H^{-1} [31]. Tali risultati sono i migliori attualmente disponibili, nel senso che tutti i risultati precedenti, basati su tecniche di analisi armonica (sviluppate principalmente da Bourgain, da Kenig-Ponce-Vega e dall'I-team, cioè Colliander, Keel, Staffilani, Takaoka e Tao) avevano solo permesso di dimostrare la buona positura per $s \geq -1/2$.

3.2.2 – Teoria spettrale, superfici di Riemann e tori invarianti

Tornando alla teoria dei sistemi integrabili, è naturale tentare, come nel caso finito dimensionale, di utilizzare le costanti del moto per cercare di conoscere non solo le proprietà di regolarità delle soluzioni, ma anche il loro comportamento qualitativo. A tal fine la tecnica che viene dal teorema di Arnold consiste nell'effettuare un'analisi della geometria dello spazio delle fasi per cercare di identificare la struttura delle superfici su cui avviene la dinamica (i tori invarianti) e successivamente introdurre variabili angolo azione nelle quali la dinamica risulta banale.

Ora, lo strumento essenziale per studiare la geometria dello spazio delle fasi è una funzione detta

([18]) Si noti che in questo caso l'espansione di Fourier sarà in esponenziali complessi. Ovviamente c'è una relazione semplice con i coefficienti di Fourier introdotti più sopra, ma, essendo irrilevante per la nostra trattazione, evitiamo qui di scriverla.

([19]) Ricordiamo che, per $s \geq 0$, lo spazio H^s è lo spazio delle funzioni che ammettono s derivate deboli a quadrato integrabili, mentre per $s < 0$, lo spazio H^s è il duale di H^{-s}.

([20]) Si veda anche [28] per il caso di potenziali C^∞ e [46] per potenziali analitici.

discriminante (21) del problema di Sturm-Liouville (18). Tale funzione, di solito denotata con $\Delta(\lambda, u)$, ha la proprietà che gli autovalori λ_j dell'operatore $-\partial_{xx} + u$ sono i valori di λ per i quali $\Delta(\lambda, u) = \pm 2$, quindi le soluzioni dell'equazione

$$\Delta(\lambda, u)^2 - 4 = 0 \ . \tag{23}$$

La proprietà notevole della funzione Δ è che essa risulta essere una funzione analitica intera di λ (cioè definita ed analitica per tutti i valori $\lambda \in \mathbb{C}$).
Usando la funzione (23) si può definire una superficie di Riemann che gioca un ruolo fondamentale nella teoria dell'equazione KdV. Tale superficie di Riemann dipende dalla funzione u ed è definita da

$$\Sigma(u) := \left\{ (\lambda, z) \ : \ z^2 = \Delta(\lambda, u)^2 - 4 \right\} \subset \mathbb{C}^2 \ . \tag{24}$$

La sua struttura risulta ovviamente legata alla struttura dello spettro di u ed in effetti il genere di Σ (qualitativamente il numero di "buchi" della superficie) risulta uguale al numero di gap γ_k diversi da zero, o come si dice normalmente, il numero di gap *aperti* (22). Ne risulta quindi che se lo spettro di L ha un numero finito di gap aperti, allora la superficie Σ ha genere finito, mentre se tutti i gap sono aperti, la superficie ha genere infinito. Va osservato che tutte le funzioni aventi una regolarità finita hanno infiniti gap aperti e quindi le corrispondenti superfici di Riemann hanno genere infinito.

Uno dei primi risultati notevoli in questo ambito, dimostrato da McKean e Trubowitz [39], è che, se si fissa una successione $\{\gamma_k\}_{k=1}^n$ e la si completa ponendo $\gamma_k = 0$ per tutti i $k > n$, allora l'insieme delle funzioni u il cui spettro ha questa successione di gap è diffeomorfo ad un toro n dimensionale. Questo ci dice che l'insieme dei punti (funzioni u) a $n - gap$ è diffeomorfo ad un toro: abbiamo trovato un toro invariante n dimensionale, l'analogo in KdV dei tori del teorema di Liouville-Arnold!

Di più: se si fanno variare le ampiezze dei gap $(\gamma_1, ..., \gamma_n) \in \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ si trova un insieme di funzioni u isomorfo a $\mathcal{U} \times \mathbb{T}^n$, insieme che per costruzione è invariante per la dinamica. Quindi quello che abbiamo fatto in questo modo è costruire un sottoinsieme $2n$ dimensionale dello spazio delle fasi invariante per la dinamica, e con la proprietà che la restrizione dell'equazione di KdV a tale insieme è un sistema integrabile finito dimensionale. Inoltre, in una serie di bellissimi lavori a cavallo tra l'analisi e la geometria complessa (principalmente dovuti a Dubrovin e Novikov) furono ottenute le formule esplicite delle n gap solutions [19, 17, 18].

Immediatamente viene in mente di provare ad applicare la seconda parte del teorema di Arnold a questo sottosistema integrabile dell'equazione KdV per costruire delle variabili angolo azione. Ciò è in effetti possibile ed è stato fatto alla fine degli anni '70 producendo delle interessantissime formule per le variabili angolo azione di KdV (si veda l'articolo di Flaschka e McLaughlin [21]), formule che possono essere espresse utilizzando molti degli strumenti introdotti per lo studio delle superfici di Riemann. In particolare le variabili d'azione si trovano come integrali lungo i cammini non contraibili di tali superfici, mentre le variabili angolari si trovano facendo uso delle 1-forme analitiche non esatte sulla varietà.

Il risultato di questa costruzione risulta però parzialmente insoddisfacente. Prima di tutto osserviamo che si sono così introdotte variabili azione angolo solo su sottoinsiemi finito dimensionali, precisamente di dimensione $2n$, nello spazio infinito dimensionale. Si può però pensare di ripetere la costruzione per tutti gli n e passare quindi al limite con $n \to \infty$ per coprire l'intero spazio delle fasi.

Ora ci sono due problemi. Il primo è che all'interno del sottospazio degli stati ad n gap, i punti in cui uno dei gap si annulla sono delle singolarità delle coordinate azione angolo, esattamente come nel caso dei sistemi ad un grado di libertà l'origine è una singolarità per le variabili angolo azione.

(21) Si ricordi che il discriminante è definito in termini delle soluzioni fondamentali del problema di Sturm-Liouville: si considerino le soluzioni $y_1(x, \lambda)$ e $y_2(x, \lambda)$ dell'equazione $-y'' + uy = \lambda y$ definite dalle condizioni iniziali

$$\begin{array}{ll} y_1(0, \lambda) = 1 & y_2(0, \lambda) = 0 \\ y_1'(0, \lambda) = 0 & y_2'(0, \lambda) = 1, \end{array}$$

allora il discriminante è definito da

$$\Delta(\lambda, u) := y_1(1, \lambda) + y_2'(1, \lambda),$$

dove abbiamo messo in evidenza anche la dipendenza da u.

(22) $\Sigma(u)$ può essere vista come due copie del piano complesso con dei tagli lungo $(-\infty, \lambda_0)$ e lungo ciascun gap aperto $(\lambda_{2k-1}, \lambda_{2k})$ che sono incollate assieme incrociandosi lungo questi tagli.

Il secondo problema è simile ma più sottile: l'azione I_k che si costruisce con le tecniche del teorema Liouville-Arnold ha taglia proporzionale a γ_k^2/k, ma per potenziali in L^2 la successione dei gap spettrali tende a zero (come dice il Teorema 3.3): qui, come per i sistemi lineari, le singolarità delle variabili azione angolo sono dense nello spazio delle fasi.

L'idea su come risolvere tale problema l'abbiamo già incontrata nel caso di dimensione finita, e consiste nel non utilizzare variabili azione angolo (costruite seguendo il teorema di Liouville-Arnold), ma utilizzare invece l'analogo di variabili cartesiane definite tramite le variabili azione angolo semplicemente dalla formula

$$x_k = \sqrt{2I_k}\cos\alpha_k\,,\ y_k = \sqrt{2I_k}\sin\alpha_k\,,\ \forall k \geq 1\,. \tag{25}$$

Tali variabili vengono chiamate in letteratura *coordinate di Birkhoff*. Ora, un'analisi dettagliata mostra che le coordinate di Birkhoff sono definite su tutto lo spazio delle fasi e non hanno singolarità. Risulta anche che costituiscono un sistema di coordinate globali nello spazio delle fasi e che sono globalmente analitiche [29, 7].

Val la pena di enunciare un teorema preciso che descrive completamente le proprietà delle variabili di Birkhoff in KdV e che costituisce il modello per tutti i risultati che ci si aspetta di ottenere in teoria dei sistemi integrabili infinito dimensionali ([23])

TEOREMA 3.4. – [[30]] *Si consideri la mappa* $u \mapsto \{(x_k, y_k)\}_{k\geq 1}$ *che ad un potenziale* u *associa la successione* $\{(x_k, y_k)\}_{k\geq 1}$ *di coordinate di Birkhoff. Se* $u \in L^2$*, allora*

$$\sum_{k\geq 1} |k| \left(|x_k|^2 + |y_k|^2\right) < +\infty\ . \tag{26}$$

Inoltre valgono le proprietà seguenti:

(i) *Le funzioni* $(x_k(u), y_k(u))$ *costituiscono un sistema di coordinate globalmente analitico e canonico.*

(ii) *Per ogni* $s \geq 0$*, un potenziale* u *appartiene ad* H^s *se e solo se le sue coordinate di Birkhoff soddisfano la condizione*

$$\sum_{k\geq 1} |k|^{2s+1} \left(|x_k|^2 + |y_k|^2\right) < +\infty\ . \tag{27}$$

(iii) *Le coordinate* $\{(x_k(u), y_k(u))\}_{k\geq 1}$ *sono una perturbazione dei coefficienti di Fourier, nel senso che*

$$u_k = \frac{x_k + iy_k}{\sqrt{k}} + \mathcal{O}(\|x\|^2 + \|y\|^2)\ .$$

(iv) *L'Hamiltoniana di KdV scritta nelle coordinate* $\{(x_k, y_k)\}_{k\geq 1}$ *è funzione solo delle azioni* $I_k = \dfrac{x_k^2 + y_k^2}{2}$*, ovvero è una funzione* $H(I_1, I_2, \dots)$*.*

Val la pena di spendere due parole sull'affermazione (i): essa in realtà contiene più affermazioni separate. La prima è la globalità delle coordinate di Birkhoff, il che significa che ad ogni successione che soddisfa (26) corrisponde una funzione $u \in L^2$. La seconda è che tale mappa è analitica, cioè che esiste un intorno complesso di ogni successione in cui le coordinate di Birkhoff possono essere estese per analiticità. La terza ed ultima è che le coordinate sono canoniche, cioè che in termini di queste coordinate l'equazione KdV si trova sostituendo nell'Hamiltoniana $u(x_1, y_1, x_2, y_2, \dots)$ e utilizzando le formule (1) (con x_k al posto di q_k e y_k al posto di p_k) per ricavare le equazioni del sistema.

Il Teorema 3.4 rappresenta il culmine di molti anni di ricerche e sforzi, e risponde a tutte le domande che ci eravamo posti in precedenza.

Infatti non solo la mappa che ad u associa la successione $\{(x_k, y_k)\}_{k\geq 1}$ è un buon cambio di coordinate, ma è anche globalmente definita, regolare ed invertibile. Inoltre le coordinate $\{(x_k, y_k)\}_{k\geq 1}$ sono canoniche e l'Hamiltoniana assume una forma particolarmente semplice in tali variabili, essendo solo funzione delle azioni, e quindi, come succedeva nel caso di dimensione finita, risulta essere indipendente dagli angoli!

Quindi, in totale analogia col caso di dimensione finita, abbiamo scritto l'equazione di partenza in un sistema di coordinate in cui il moto avviene in maniera lineare. A differenza del caso di dimensione finita, dove i tori avevano al più dimensione n, qui i tori possono avere dimensione finita arbitrariamen-

([23]) Anche se risultati così puliti sono disponibili solo in pochi altri casi, in particolare per l'equazione di Schrödinger nonlineare (caso defocusing) e per il reticolo di Toda, in cui però la situazione è un po' più complicata.

te grande o anche dimensione infinita (questo succede se un numero infinito di variabili x_k, y_k è diverso da zero).

Su ciascun toro invariante il moto avviene come una combinazione di moti periodici con frequenze $\omega_k(I)$ che dipendono dal valore delle azioni $I_1, I_2, \ldots$ Dunque, se il toro ha dimensione finita oppure ci sono solo un numero finito di frequenze diverse, si avranno dei moti quasi-periodici come nel caso a dimensione finita. Tuttavia ora sono presenti anche dei tori di dimensione infinita, con infinite frequenze diverse tra di loro e indipendenti: in tal caso il moto sarà una combinazione di infiniti moti periodici, ovvero soluzioni almost periodiche.

Chiudiamo il paragrafo segnalando che la teoria qui descritta si applica molto bene alle equazioni integrabili note, *quando l'incognita sia una funzione di una sola variabile spaziale* ([24]), mentre pochissimo è noto nel caso di equazioni che descrivano sistemi in più di una dimensione spaziale. Ora, sono noti alcuni modelli di equazioni a derivate parziali integrabili in dimensione spaziale superiore; il modello forse più famoso è costituito dall' equazione di Kadomtsev–Petviashvili (KP)

$$\partial_x(u_t + u_{xxx} + uu_x) \pm u_{yy} = 0$$

che descrive ancora la propagazione di onde di superficie in acque basse. Per quest'equazione è nota l'esistenza di infinite costanti del moto e di una tecnica per scrivere esplicitamente le soluzioni, ma non è nota nessuna teoria analoga alla teoria dei sistemi integrabili finito dimensionali del tipo del teorema di Liouville-Arnold. Lo sviluppo di questa teoria costituisce sicuramente una delle principali sfide che la teoria delle equazioni a derivate parziali integrabili dovrà affrontare nei prossimi anni.

4. – Perturbazioni di EDP integrabili

Ricordando il fatto che le equazioni integrabili, e in particolare la KdV, nascono come modelli approssimati per descrivere fenomeni fisici, risulta chiaro che è particolarmente importante capire la dinamica di piccole perturbazioni di queste equazioni.

Val la pena di sottolineare che per le equazioni a derivate parziali le questioni di persistenza dei tori invarianti e di costanza delle azioni (pensiamole come i gap al quadrato o le energie degli oscillatori di Fourier) sono intimamente legate ad un'altra questione: quella della *regolarità* delle soluzioni. Più precisamente, in ambito finito dimensionale ci siamo occupati solo della questione del comportamento delle soluzioni nel tempo, quindi di questioni di "regolarità temporale" (in particolare proprietà di periodicità nel tempo delle soluzioni). Nell'ambito delle equazioni a derivate parziali si pone anche una seconda questione, detta della *turbolenza debole*, legata alla regolarità spaziale delle soluzioni. Il problema è quello di capire se vi sia un trasferimento di energia dai modi bassi ai modi alti di Fourier. L'interesse di questo problema sta nel fatto che si può pensare che eccitazioni macroscopiche di un sistema, ad esempio ottenute pizzicando una corda di chitarra oppure sollevando un'onda nel mare, diano luogo a dati iniziali con energia concentrata su modi di Fourier di grande lunghezza d'onda e quindi caratterizzati da indici bassi. La domanda è se la dinamica non trasferisca l'energia su scale microscopiche, cioè caratterizzati da indici alti. La domanda ha interesse principalmente in fluidodinamica in quanto qui le eccitazioni dei modi di Fourier di piccola lunghezza d'onda corrispondono a quei moti su piccole scale spaziali tipici dei fenomeni di turbolenza. L'insorgere della turbolenza nei sistemi deterministici è a tutt'oggi un fenomeno totalmente inspiegato (oggetto di uno dei famosi problemi da un milione di dollari del Clay Mathematical Institute).

Per quanto riguarda la teoria della turbolenza debole, un modo particolarmente efficace di misurarla è quello di guardare il comportamento delle norme di Sobolev H^s con s diverso da zero e uno ([25]): se tali norme crescono nel tempo, è un segnale che l'energia si è trasferita ai modi alti di Fourier.

La questione del comportamento temporale è la tipica questione affrontata dal teorema KAM. A partire dalla fine degli anni '80 ci si è posti il problema

([24]) In effetti la tecnica è stata portata fino in fondo solo per pochi modelli (a nostra conoscenza KdV, NLS, Toda e sinh-gordon), ma non ci si aspetta di incontrare vere difficoltà nel trattare sistemi integrabili in una dimensione spaziale.

([25]) Tipicamente le norme di Sobolev per $s = 0$ e $s = 1$ sono controllate da costanti del moto del sistema, e quindi non possono crescere nel tempo.

dell'estensione della teoria KAM a equazioni a derivate parziali. La difficoltà principale che occorre superare è legata a problemi di teoria dei numeri ed è costituita dal fatto che la condizione (6) non ha un analogo in dimensione infinita. Infatti, se si prendono un numero infinito di frequenze, e si considerano i loro rapporti, quello che succede è che ve ne sono *sempre* alcuni troppo vicini ad essere razionali perchè ci si possa aspettare che il toro corrispondente persista.

La via d'uscita che ha portato ad avere un analogo della teoria KAM per alcune equazioni a derivate parziali è stata quella di rinunciare a controllare tutti i dati iniziali ed accontentarsi di studiare la persistenza dei tori finito dimensionali. Il primo risultato in questo campo è dovuto a Kuksin [34] (e quasi contemporaneamente a Wayne [47]) il cui lavoro ha segnato l'inizio di una linea di ricerca particolarmente attiva negli ultimi 30 anni.

Oggi conosciamo un risultato piuttosto generale che si applica ad un'ampia classe di perturbazioni di equazioni a derivate parziali integrabili *lineari* ed *in una dimensione spaziale* [43, 35]. Tale risultato garantisce proprio che la maggior parte dei tori finito dimensionali invarianti per il sistema integrabile lineare persistono sotto perturbazione, purché la perturbazione sia sufficientemente regolare.

A titolo di esempio si consideri una perturbazione dell'equazione di Klein Gordon (12) (in dimensione spaziale 1) data dall'equazione

$$u_{tt} - u_{xx} + m^2 u = \varepsilon f(x, u) \ , \tag{28}$$

con f di classe C^∞ e soddisfacente alla condizione di antisimmetria $f(-x, -u) = -f(x, u)$; se il parametro reale m sta in un insieme di misura grande (in modo che una generalizzazione della condizione (6) valga), allora, purché ε sia abbastanza piccolo, essa ammette tori invarianti di qualsiasi dimensione finita vicini ai tori invarianti ottenuti tramite serie di Fourier nel sistema linearizzato.

In realtà la teoria di Kuksin costituisce anche lo strumento fondamentale per studiare il comportamento di soluzioni di equazioni integrabili non lineari perturbate. A titolo di esempio si consideri l'equazione

$$u_t + u_{xxx} - 6uu_x = \varepsilon \partial_x f(u) \ , \tag{29}$$

che costituisce una perturbazione dell'equazione di KdV. Qui f è una qualsiasi funzione regolare. Un'applicazione del teorema di Kuksin, che si ottiene usando tutti gli strumenti sviluppati dal Teorema 3.4, permette di mostrare che, se ε è abbastanza piccolo, allora l'equazione (29) ammette tori invarianti di qualsiasi dimensione finita vicini ai tori invarianti dati dalle finite gap solutions della KdV.

Un ulteriore problema che si pone nelle equazioni a derivate parziali è legato al fatto che le perturbazioni che si incontrano nei modelli fisici, ad esempio nella teoria dell'elasticità, contengono termini nonlineari che dipendono dalle derivate dell'incognita, e questo rende il teorema di Kuksin non applicabile ([26]). Questo problema è stato recentemente risolto da parte di un gruppo di ricercatori italiani che hanno messo a punto una strategia per trattare problemi in una dimensione spaziale in cui la perturbazione contiene derivate (si veda ad esempio [4]). Questa strategia è già stata applicata con successo ad un certo numero di problemi di notevole interesse tra cui la costruzione di soluzioni quasi periodiche nel problema delle onde dell'acqua.

Per quanto riguarda la teoria KAM per equazioni a derivate parziali in dimensione superiore ad 1, ad oggi ci sono solo pochi risultati. L'attore principale su questa scena è stato J. Bourgain che a cavallo degli anni 2000 ha sviluppato una serie di metodi per dimostrare la persistenza di tori invarianti finito dimensionali in perturbazioni di equazioni tipo (11) [10, 11, 12] e in perturbazioni dell'equazione di Schrödinger (si veda anche [20]). Tuttavia ad oggi manca una teoria applicabile ad una buona classe di problemi e si può piuttosto parlare di una teoria che si applica ad alcuni interessanti esempi ([27]). Resta

([26]) Anche la perturbazione nell'equazione (29) contiene derivate, ma "poche", nel senso che il numero di derivate contenute nel termine principale, cioè 3, è sufficientemente maggiore del numero di derivate contenute nella perturbazione, cioè 1. Il caso più interessante, cioè quello in cui la perturbazione contiene lo stesso numero di derivate del termine imperturbato, come accade in elasticità, non è coperto dalla teoria di Kuksin.

([27]) Una delle limitazioni principali all'applicabilità della teoria è data dal fatto che si riescono a trattare solo problemi in cui la variabile spaziale varia in un toro d dimensionale o in gruppi di Lie[9], mentre non si riesce a dire nulla sul caso di domini più generali, come quelli che sarebbero necessari per studiare casi che siano veramente significativi dal punto di vista fisico.

inoltre completamente aperto il problema di trattare perturbazioni che contengono derivate in equazioni in dimensione spaziale superiore a uno ([28]).

Per quanto riguarda la teoria di Nekhoroshev, ad oggi sono note solo applicazioni a perturbazioni di sistemi lineari. La difficoltà principale che si incontra in questo ambito consiste nel fatto che essa prevede il controllo di tutte le variabili e quindi, in qualche senso, corrisponderebbe ad una teoria KAM in cui si costruiscono tori infinito dimensionali. Ciò è ovviamente solo parzialmente vero in quanto la teoria di Nekhoroshev pretende di controllare la dinamica per tempi lunghi, ma non infiniti, e ciò permette a sua volta di utilizzare condizioni di non-risonanza tra infinite frequenze di tipo più debole di quelle necessarie a sviluppare la teoria KAM. In questo ambito disponiamo ad oggi di una teoria piuttosto soddisfacente per perturbazioni di equazioni lineari in una dimensione spaziale soggette a pertubazioni che non contengono derivate [6].

Ad esempio, la teoria si applica all'equazione (28): in questo caso risulta che per valori generici ([29]) di m le azioni, che in questo caso sono le energie dei singoli oscillatori corrispondenti ai modi di Fourier, restano approssimativamente costanti per tempi lunghi come ε^{-N}, dove N è un numero arbitrario prefissato. Da ciò si possono dedurre risultati notevoli che permettono di limitare la crescita delle norme di Sobolev, e cioè l'insorgenza della cosiddetta turbolenza debole ([30]).

Attualmente non ci sono risultati validi per l'equazione (29) o per perturbazioni di altre equazioni a derivate parziali non lineari. Ciò è dovuto al fatto che si conosce troppo poco del modo in cui le frequenze cambiano con il dato iniziale nel sistema integrabile di riferimento.

Un altro problema che in questo campo è un po' più difficile da risolvere è quello legato alla presenza di derivate nella perturbazione. L'utilizzo di tecniche basate su quelle introdotte in [4] si è dimostrato efficace anche per questo problema, ma saranno i prossimi anni a dirci fino a che punto la teoria può essere spinta.

Per quanto riguarda la teoria di Nekhoroshev per sistemi in più di una dimensione spaziale la situazione è ancora più aperta che nel caso della teoria KAM, infatti anche qui sono noti solo alcuni esempi, ma essi sono ancora più particolari che per la teoria KAM ([31]).

Un ultimo problema di cui vogliamo parlare è il problema della dimostrazione della effettiva esistenza di orbite in cui la turbolenza debole si manifesti. L'attività in questo campo è aumentata moltissimo a partire dal 2010, soprattutto grazie a un notevole esempio dovuto all'I-team (si veda [14]). In questo esempio è stato mostrato come nell'equazione di Schrödinger nonlineare in dimensione 2 (con condizioni periodiche) esistano soluzioni le cui norme di Sobolev alte diventano arbitrariamente grandi (e quindi come si abbia un trasferimento arbitrariamente grande di energia alle microscale). Tali orbite richiedono un tempo lunghissimo (più che esponenziale in ε^{-1}) per trasferire energia ai modi di Fourier alti, e inoltre sono soluzioni lungo cui l'energia, dopo essere fluita dalle macroscale alle microscale, torna indietro e poi ritorna alle microscale e così via; costituiscono comunque un interessante esempio di come soluzioni di questo tipo possano esistere. Le tecniche dell'I-team sono recentemente state applicate allo studio dell'instabilità di equazione di Schrödinger più generali (si veda ad esempio [26]), ma a tutt'oggi non sono note altre equazioni in cui il fenomeno da loro messo in evidenza si manifesti ([32]).

([28]) In realtà sono al momento in corso lavori su alcuni esempi di questo tipo, ma si tratta di esempi con proprietà molto specifiche, che quindi permettono l'uso di tecniche ad hoc la cui esportazione a modelli generali è difficilmente immaginabile oggi.

([29]) O più precisamente, per m al di fuori di un insieme di Cantor di misura piccola.

([30]) Si tratta di risultati che hanno anche rilevanza per lo studio delle approssimazioni numeriche della dinamica dell'equazione in questione, infatti è possibile controllare teoricamente l'errore introdotto dagli algoritmi di discretizzazione numerica solo nel caso in cui le soluzioni restino molto regolari, e attualmente non sono note tecniche diverse da quelle alla Nekhoroshev per dimostrare tale regolarità.

([31]) Essenzialmente sono noti solo un risultato per una generalizzazione dell'equazione (28) in cui la variabile x varia su varietà appena più generali della sfera [5, 16].

([32]) La tecnica dimostrativa d'altra parte è molto legata all'equazione particolare studiata, anche se i fenomeni che portano all'esistenza di queste soluzioni sembrano poter esistere in modelli molto più generali.

Esistono infine due interessanti esempi in cui si presenta il fenomeno di crescita infinita di norme di Sobolev: il primo è la cosiddetta equazione di Szego cubica [23], la cui forma specifica non ha qui particolare importanza. In questo modello il fenomeno è particolarmente sorprendente in quanto tale equazione è integrabile. In questo momento non è chiaro se il fenomeno presente in questa equazione costituisca un esempio particolare o se possa essere il prototipo di un comportamento abbastanza generale ([33]).

Il secondo esempio è l'equazione di Schrödinger cubica in cui la variabile spaziale appartiene a $\mathbb{R} \times \mathbb{T}^2$ [27]. Il punto chiave è che, essendo il dominio di una delle variabili spaziali illimitato, ci sono effetti dispersivi che permettono di mostrare che il meccanismo scoperto in [14] è particolarmente efficace e conduce ad una crescita indefinita delle norme di Sobolev.

A – L'equazione di Korteweg de Vries

La storia dell'equazione di Korteweg de Vries è indissolubilmente legata alla prima osservazione di un solitone da parte di John Scott Russell nel 1834. Lo stesso Scott Russel così descrive il fenomeno da lui osservato durante una passeggiata a cavallo (vedi [45]):

> *Stavo osservando il moto di un battello che veniva trainato rapidamente lungo uno stretto canale da un paio di cavalli, quando il battello improvvisamente si fermò-non altrettanto fece la massa d'acqua del canale che esso aveva messo in moto; essa si accumulò attorno alla prua del battello in uno stato di violenta agitazione, dopo di che mosse in avanti con grande velocità, assumendo la forma di una grande solitaria elevazione, un cumulo d'acqua arrotondato e ben definito che continuò la sua corsa lungo il canale, apparentemente senza mutamento di forma o riduzione di velocità. La seguii a cavallo lungo la sponda del canale e la superai mentre stava ancora procedendo ad una velocità di otto o nove miglia all'ora [14 km/h], ancora conservando il suo aspetto originario di circa trenta piedi di lunghezza [9 m] e un piede o un piede e mezzo [30-45 cm] in altezza. La sua altezza diminuì gradualmente e dopo un inseguimento di un miglio o due [2-3 km] la persi nei meandri del canale. Questo, nel mese di agosto del 1834, fu il mio primo casuale incontro con quel fenomeno bello e singolare che ho chiamato "Onda di Traslazione".*

L'osservazione di Scott Russell fece clamore, poichè l'esistenza di onde con queste proprietà non era spiegata dalla teoria idrodinamica del tempo. Furono Boussinesq [13] nel 1872 e Reyleigh nel 1876, indipendentemente, i primi a mostrare che le equazioni idrodinamiche ammettevano (in particolari regimi corrispondenti al moto dell'acqua in canali) soluzioni a forma di onde localizzate viaggianti. Tuttavia le soluzioni da loro trovate erano della forma di due solitoni che si propagavano in direzione opposta, e dunque non descrivevano esattamente il fenomeno osservato da Scott Russell. Bisognerà attendere il 1895 per avere una spiegazione soddisfacente, quando Korteweg e de Vries [33] derivarono l'equazione KdV a partire dalle equazioni delle onde dell'acqua e mostrarono che tale equazione ammetteva soluzioni a forma di solitoni viaggianti come quelli osservati in natura.

La deduzione classica dell'equazione di Korteweg de Vries è però solo euristica: il lavoro per ottenere una giustificazione rigorosa è proseguito fino ai nostri giorni e per una dimostrazione veramente soddisfacente [44] bisogna aspettare il 2000!

([33]) La fenomenologia osservata sarebbe spiegabile se risultasse che alcuni dei tori invarianti in cui è foliato lo spazio delle fasi contengono funzioni di regolarità diversa. Risulterebbe allora che le orbite sul toro, essendo dense, si avvicinerebbero indefinitamente a punti a bassa regolarità dando luogo al fenomeno osservato. Oggi però la conoscenza della struttura integrabile dell'equazione non è sufficiente a trasformare tale affermazione euristica in un teorema.

References

[1] V. I. Arnold. *Metodi Matematici della Meccanica Classica.* Editori Riuniti, 1979.

[2] V. I. Arnold. *Proof of a theorem of A. N. Kolmogorov on the preservation of conditionally periodic motions under a small perturbation of the Hamiltonian.* Uspehi Mat. Nauk, 18(5 (113)):13-40, 1963.

[3] V. I. Arnold. *Instability of dynamical systems with many degrees of freedom.* Dokl. Akad. Nauk SSSR, 156:9-12, 1964.

[4] P. BALDI, M. BERTI, and R. MONTALTO. *KAM for quasi-linear and fully nonlinear forced perturbations of Airy equation.* Math. Ann., 359(1-2):471-536, 2014.
[5] D. BAMBUSI, J.-M. DELORT, B. GRÉBERT, and J. SZEFTEL. *Almost global existence for Hamiltonian semilinear Klein-Gordon equations with small Cauchy data on Zoll manifolds.* Comm. Pure Appl. Math., 60(11):1665-1690, 2007.
[6] D. BAMBUSI and B. GRÉBERT. *Birkhoff normal form for partial differential equations with tame modulus.* Duke Math. J., 135(3):507-567, 2006.
[7] D. BÄTTIG, A. M. BLOCH, J.-C. GUILLOT, and T. KAPPELER. *On the symplectic structure of the phase space for periodic KdV, Toda, and defocusing NLS.* Duke Math. J., 79(3):549-604, 1995.
[8] P. BERNARD, V. KALOSHIN, and K. ZHANG. *Arnold diffusion in arbitrary degrees of freedom and normally hyperbolic invariant cylinders*. Acta Math., 217(1):1-79, 2016.
[9] M. BERTI, L. CORSI, and M. PROCESI. *An abstract Nash-Moser theorem and quasi-periodic solutions for NLW and NLS on compact Lie groups and homogeneous manifolds*. Comm. Math. Phys., 334(3):1413-1454, 2015.
[10] J. BOURGAIN. *Construction of periodic solutions of nonlinear wave equations in higher dimension.* Geom. Funct. Anal., 5(4):629-639, 1995.
[11] J. BOURGAIN. *Quasi-periodic solutions of Hamiltonian perturbations of 2D linear Schrödinger equations.* Ann. of Math. (2), 148(2):363-439, 1998.
[12] J. BOURGAIN. *Green's function estimates for lattice Schrödinger operators and applications*, volume 158 of *Annals of Mathematics Studies*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2005.
[13] J. BOUSSINESQ. *Essai sur la théorie des eaux courantes*. Mémoires présentées par divers savants à l'Académie des Sciences. Imprimerie Nationale, 1877.
[14] J. COLLIANDER, M. KEEL, G. STAFFILANI, H. TAKAOKA, and T. TAO. *Transfer of energy to high frequencies in the cubic defocusing nonlinear Schrödinger equation.* Invent. Math., 181(1):39-113, 2010.
[15] P. J. DAVIS, R. HERSH, and E. A. MARCHISOTTO. *The mathematical experience*. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, study edition, 1995. With an introduction by Gian-Carlo Rota.
[16] J.-M. DELORT. *Quasi-linear perturbations of Hamiltonian Klein-Gordon equations on spheres.* Mem. Amer. Math. Soc., 234(1103):vi+80, 2015.
[17] B. A. DUBROVIN. *A periodic problem for the Korteweg-de Vries equation in a class of short-range potentials.* Funkcional. Anal. i Priložen., 9(3):41-51, 1975.
[18] B. A. DUBROVIN, V. B. MATVEEV, and S. P. Novikov. *Nonlinear equations of Korteweg-de Vries type, finite-band linear operators and Abelian varieties.* Uspehi Mat. Nauk, 31(1(187)):55-136, 1976.
[19] B. A. DUBROVIN and S. P. NOVIKOV. *Periodic and conditionally periodic analogs of the many-soliton solutions of the Korteweg-de Vries equation.* Ž. Èksper. Teoret. Fiz., 67(6):2131-2144, 1974.
[20] L. H. ELIASSON and S. B. KUKSIN. *KAM for the nonlinear Schrödinger equation.* Ann. of Math. (2), 172(1):371-435, 2010.
[21] H. FLASCHKA and D. W. MCLAUGHLIN. *Canonically conjugate variables for the Korteweg-de Vries equation and the Toda lattice with periodic boundary conditions.* Progr. Theoret. Phys., 55(2):438-456, 1976.
[22] J. GARNETT and E. TRUBOWITZ. *Gaps and bands of one-dimensional periodic Schrödinger operators.* Comment. Math. Helv., 59(2):258-312, 1984.
[23] P. GÉRARD and S. GRELLIER. *The cubic Szego equation.* Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4), 43(5):761-810, 2010.
[24] A. GIORGILLI. *Quasiperiodic motions and stability of the solar system. I. From epicycles to Poincaré's homoclinic point.* Boll. Unione Mat. Ital. Sez. A Mat. Soc. Cult. (8), 10(1):55-83, 2007.
[25] A. GIORGILLI. *Quasiperiodic motions and stability of the solar system. II. From Kolmogorov's tori to exponential stability.* Boll. Unione Mat. Ital. Sez. A Mat. Soc. Cult. (8), 10(3):465-495, 614, 2007.
[26] M. GUARDIA, E. HAUS, and M. PROCESI. *Growth of Sobolev norms for the analytic NLS on* $\mathbb{T}^2$. Adv. Math., 301:615-692, 2016.
[27] Z. HANI, P. PAUSADER, N. TZVETKOV and N. VISCIGLIA. *Modified scattering for the cubic Schrödinger equation on product spaces and applications.* Forum of Math. Pi, 3, 2015.
[28] H. HOCHSTADT. *Estimates of the stability intervals for Hill's equation.* Proc. Amer. Math. Soc., 14:930-932, 1963.
[29] T. KAPPELER. *Fibration of the phase space for the Korteweg-de Vries equation.* Ann. Inst. Fourier (Grenoble), 41(3):539-575, 1991.
[30] T. KAPPELER and J. PÖSCHEL. *KAM & KdV.* Springer, 2003.
[31] T. KAPPELER and P. TOPALOV. *Global wellposedness of KdV in* $H^{-1}(\mathbb{T}, \mathbb{R})$. Duke Math. J., 135(2):327-360, 2006.
[32] A. N. KOLMOGOROV. *On conservation of conditionally periodic motions for a small change in Hamilton's function.* Dokl. Akad. Nauk SSSR (N.S.), 98:527-530, 1954.
[33] D. D. J. KORTEWEG and D. G. DE VRIES. *Xli. on the change of form of long waves advancing in a rectangular canal, and on a new type of long stationary waves.* Philosophical Magazine Series 5, 39(240):422-443, 1895.
[34] S. B. KUKSIN. *Hamiltonian perturbations of infinite-dimensional linear systems with imaginary spectrum.* Funktsional. Anal. i Prilozhen., 21(3):22-37, 95, 1987.
[35] S. B. KUKSIN. *Nearly integrable infinite-dimensional Hamiltonian systems*, volume 1556 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 1993.
[36] P. D. LAX. *Integrals of nonlinear equations of evolution and solitary waves.* Comm. Pure Appl. Math., 21:467-490, 1968.
[37] V. A. MARCENKO and I. V. OSTROVSKI. *A characterization of the spectrum of hill's operator.* Mathematics of the USSR-Sbornik, 26(4):493, 1975.
[38] V. A. MARCHENKO. *Sturm-Liouville operators and applications*, volume 22 of *Operator Theory: Advances and Applications*. Birkhäuser Verlag, Basel, 1986. Translated from the Russian by A. Iacob.
[39] H. P. MCKEAN and E. TRUBOWITZ. *Hill's operator and hyperelliptic function theory in the presence of infinitely many branch points.* Comm. Pure Appl. Math., 29(2):143-226, 1976.
[40] J. MOSER. *On invariant curves of area-preserving mappings of an annulus.* Nachr. Akad. Wiss. Göttingen Math.-Phys. Kl. II, 1962:1-20, 1962.
[41] N. N. NEKHOROSHEV. *Behavior of hamiltonian systems close to integrable.* Functional Analysis and Its Applications, 5(4):338-339, 1971.

[42] H. Poincaré. *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste: Solutions périodiques. Non-existence des intégrales uniformes. Solutions asymptotiques. 1892.* Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste. Gauthier-Villars et fils, 1892.
[43] J. Pöschel. *A KAM-theorem for some nonlinear partial differential equations.* Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4), 23(1):119-148, 1996.
[44] G. Schneider and C. E. Wayne. *The long-wave limit for the water wave problem. I. The case of zero surface tension.* Comm. Pure Appl. Math., 53(12):1475-1535, 2000.
[45] J. Scott Russell. *Report on waves,* Fourteenth meeting of the British Association for the Advancement of Science, 1844.
[46] E. Trubowitz. *The inverse problem for periodic potentials.* Comm. Pure Appl. Math., 30(3):321-337, 1977.
[47] C. E. Wayne. *Periodic and quasi-periodic solutions of nonlinear wave equations via KAM theory.* Comm. Math. Phys., 127(3):479-528, 1990.
[48] N. J. Zabusky and M. D. Kruskal. *Interaction of "solitons" in a collisionless plasma and the recurrence of initial states.* Phys. Rev. Lett., 15:240-243, Aug 1965.


Dario Bambusi

Dario Bambusi si è laureato in Fisica e ha ottenuto un dottorato in Matematica presso l'Università degli Studi di Milano, dove ricopre attualmente il ruolo di professore ordinario di Fisica Matematica. La sua ricerca si è concentrata sulle proprietà dinamiche di sistemi Hamiltoniani infinito dimensionali e sulla loro ricaduta su problemi di fondamenti della fisica.


Alberto Maspero

Alberto Maspero si è laureato in Matematica presso l'Università Statale di Milano e ha conseguito un dottorato in Matematica in cotutela tra l'Università degli Studi di Milano e l'Università di Zurigo. Dopo aver trascorso un periodo di ricerca a Roma e Nantes, è attualmente postdoc in SISSA, Trieste. La sua ricerca si incentra su sistemi Hamiltoniani in dimensione infinita, in particolare sui problemi di stabilità e instabilità delle loro soluzioni