Matematica, Cultura e Società

Rivista dell'Unione Matematica Italiana

Nicolina A. Malara

RECENSIONE: Pentole, ombre, formiche di Emma Castelnuovo

Matematica, Cultura e Società. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **2** (2017), n.3, p. 305–308.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=RUMI_2017_1_2_3_305_0>

Matematica, Cultura e Società. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2017.

Matematica, Cultura e Società – Rivista dell'Unione Matematica Italiana
Serie I, Vol. 2, N. 3, Dicembre 2017, 305-308

RECENSIONE

Pentole, *ombre*, *formiche* di Emma Castelnuovo

NICOLINA A. MALARA
Università degli Studi di Modena e Reggio Emilia
E-mail: malara@unimore.it

La ristampa del libro di Emma Castelnuovo, *Pentole, ombre, formiche* (uscito nel 1993) per iniziativa della Unione Matematica Italiana (UTET 2017) vuole essere un omaggio ed un riconoscimento all'autrice per il suo pionieristico lavoro di innovazione e divulgazione dell'insegnamento della matematica. Per più di cinquanta anni la Castelnuovo, attraverso i libri di testo e i molteplici suoi scritti, è stata fautrice di un insegnamento della matematica dinamico e di ricerca, centrato sul coinvolgimento degli allievi e strettamente correlato alla osservazione ed esplorazione di ciò che ci circonda. (Per approfondimenti sulla figura e l'opera di Emma Castelnuovo rinviamo ad [1] e [2].)

Il titolo del libro, breve elenco di cose comuni e sconnesse, può incuriosire o disorientare (agli esperti può richiamare le famose 'insensate' triadi espresse da Hilbert, quali 'amore, legge, spazzacamino' [3], attraverso le quali lo studioso intendeva evidenziare come nei sistemi ipotetico-deduttivi i termini primitivi siano implicitamente definiti dagli assiomi) ma il suo sottotitolo 'In viaggio con la matematica' esprime al meglio ciò che il libro vuole essere: un percorso esplorativo attorno ad ampi *argomenti* matematici, introdotti a partire da situazioni esterne alla matematica, che vengono affrontati in modo euristico-intuitivo offrendo al lettore stimoli operativi ed intellettuali. Attraverso l'esplorazione si giunge al disvelamento di fatti matematici spesso contro-intuitivi chiarendone per grandi linee le ragioni. L'obiettivo dichiarato del libro è quello di "far capire qualcosa di matematica e anche qualcosa del modo di ragionare del matematico a chi ha frequentato, e anche male, la scuola dell'obbligo" sollecitando il lettore a "porsi delle domande, a cadere in errore e poi a rendersi conto dell'errore, a prendere insomma parte attiva alla lettura quasi fosse un ricercatore" (pag. 3, qui e nel seguito le pagine indicate si riferiscono all'edizione 2017 del testo)

Lo stile di scrittura è accattivante e diretto, il linguaggio essenziale, chiaro ed amichevole. Il lettore viene accompagnato passo-passo a muoversi con disinvoltura su terreni inizialmente semplici poi via via più complessi ma abilmente semplificati. Ogni capitolo è corredato da schede di tipo storico e di approfondimento che arricchiscono ed elevano la trattazione. Questi nell'ordine gli argomenti trattati:

1) *La matematica della terra in cui viviamo. La geometria delle piccole e grandi distanze* (pagg. 5-21), in cui l'autrice giunge a parlare del modello di geometria sulla sfera in relazione ai percorsi aerei intercontinentali (su questo torneremo più avanti);

2) *La matematica di tutti i giorni. Problemi di ottimizzazione* (pagg. 22-51) in cui partendo dall'osservazione della capacità delle pentole si affronta il concetto di volume ed attraverso le bolle di sapone e altri esperimenti si giunge a parlare di superfici minime a parità di volume, a vedere la sfera come solido di massimo volume a parità di superficie ed il cerchio come figura di massima area a parità di perimetro;

3) *Matematica e Medicina. Come intervengono probabilità e statistica* (pagg. 53-63), dove si parla di valutazione della probabilità in senso classico e sperimentale e ci si sofferma su aspetti probabilistici legati alla trasmissione di malattie ereditarie o all'apparire di anomalie genetiche;

Accettato: il 10 ottobre 2017.

4) *Matematica ed arte. Lo studio delle ombre in equazioni* (pagg. 65-97), in cui attraverso una serie di quadri e affreschi si riflette sul problema della rappresentazione dello spazio e sulla nascita della prospettiva e dove poi, puntando l'attenzione su vari tipi di ombre (solari o prodotte da luce puntiforme), si introducono affinità e proiettività e si giunge a rappresentare algebricamente particolati tipi di affinità, dopo opportuni esperimenti di stiramenti di strisce elastiche su cui sono disegnate delle figure;

5) *Matematica e realtà. La legge esponenziale* (pagg. 99-115), dove si esaminano processi di accrescimento di cellule, batteri e si modellizzano graficamente e formalmente; la legge viene definita come legge della vita, in quanto descrittiva in generale dell'accrescimento di popolazioni, ma viene anche mostrata come strumento di modellizzazione del fenomeno di decadimento radioattivo, inoltre affrontando il problema della datazione dei fossili si mette in luce il ruolo del logaritmo;

6) *Matematica ed arte. Una teoria matematica recente. I frattali* (pagg. 117-146), in cui partendo dall'osservazione di fiocchi di neve si passa alla costruzione di poligonali per iterazione di un modulo e poi alla generazione di curve, si introduce la curva di Peano e si mostra come essa giunga a riempire un quadrato, si passa poi allo studio di frattali, e si mostrano simulazioni di paesaggi naturali e immagini esteticamente avvincenti generate da specifiche formule;

7) *La matematica come ... matematica. L'Infinito* (147-178) dove entrano in gioco le formiche e si esamina il comportamento di somme infinite scaturite da percorsi di formica lungo un segmento unitario, prima con ragionamenti grafico-euristici, poi con dimostrazioni. Si considerano corrispondenze biunivoche tra segmenti diversi, tra un segmento ed una semiretta e tra un quadrato ed il suo lato. Nella scheda storica si parla dei paradossi di Zenone e del teorema di Pitagora, del superamento della concezione pitagorica e della maturazione della visione del punto senza dimensione.

Il libro si sviluppa in modo agile in aderenza all'obiettivo che si pone. È abbastanza equilibrato tra le sue parti anche se nella seconda parte, quando affronta questioni delicate legate ai processi infiniti prima ed all'equipotenza di insiemi infiniti poi, appare un po' azzardato. Ma su questo diremo più avanti.

Particolarmente interessanti per il lettore-insegnante sono i capitoli a carattere geometrico.

Nel primo capitolo, molto accattivante, si parte con un'interessante osservazione di particolari rotte aeree, che incomprensibilmente non puntano diritte alla meta, come ad esempio il percorso aereo da Milano a Los Angeles che non va immediatamente a Sud ma si dirige e naviga per una buona parte del viaggio verso Nord. Con semplici esempi e ragionamenti, appoggiandosi a felici rappresentazioni grafiche, si fa comprendere come sulla sfera i percorsi di lunghezza minima siano archi di cerchi massimi, ed attuando un confronto tra piano e sfera si rilevano le differenze tra triangoli piani e sferici e, cosa più importante, si mostra come – a differenza di ciò che accade sul piano – su questa ultima non sia possibile, dato un cerchio massimo ed un punto non appartenente ad esso che per questo punto passi un cerchio massimo privo di punti comuni con quello dato. Le considerazioni fatte offrono lo spunto di approfondire, in una interessante scheda storica, il significato degli 'Elementi' di Euclide. L'autrice parla del lavoro fatto da Euclide di raccolta, riesame e ripulitura di errori e tracce sperimentali delle conoscenze geometriche allora ritenute di base e della loro riorganizzazione logica in un sistema teorico basato su soli cinque postulati, che vengono riportati nella loro versione originale. Parla poi del V postulato e dei tentativi fatti per secoli di dimostrarlo, tentativi che hanno portato invece alla nascita "della geometria non-euclidea." Rileva l'aspetto produttivo e di anticipazione del pensiero teorico rispetto alle conquiste scientifico-tecnologiche, al riguardo scrive: "Ecco, di questa geometria astratta, immaginata dal pensiero dei matematici, abbiamo un modello della terra in cui viviamo quando ci si sposta da un continente all'altro. Sembra incredibile, ma il vedere la terra attraverso le rotte aeree ha reso concreta, alla portata di tutti, una delle più astratte concezioni della matematica!" (pag. 19).

Altrettanto interessanti e didatticamente spendibili sono i riferimenti storici riportati sia nel testo che negli approfondimenti al capitolo sui problemi di ottimizzazione. L'autrice richiama il classico brano di Galileo sul confronto dei volumi di due cilindri generati da un medesimo rettangolo quando lo si chiuda accostando l'una o l'altra coppia di suoi lati paralleli. Passa poi ai parallelepipedi ottenuti piegando un dato rettangolo in quattro strisce uguali secondo uno o l'altro lato, ne determina il volume e giunge a scoprire che il rapporto tra i volumi dei due parallelepipedi è pari al rapporto dei lati del rettangolo nell'ordine considerato. Studia i possibili parallelepipedi costruiti con otto cubetti uguali e mostra come tra di essi sia il cubo ad avere superficie minima. Attraverso opportuni esperimenti con le bolle di sapone affronta altre questioni di superficie minima giungendo a stabilire che: a) tra in corpi solidi: a_1) a parità di volume è la sfera ad avere superficie minima; a_2) a parità di superficie è la sfera ad avere il volume massimo; b) tra le figure piane: b_1) a parità di area è il cerchio ad avere perimetro minimo; b_2) a parità di perimetro è il cerchio ad avere area massima; in particolare deduce la proprietà b_1 da a_1 e la proprietà b_2 da a_2 sviluppando un ragionamento per assurdo. Nella relativa scheda storica fa presente come le proprietà del cerchio di avere massima area fra le figure di pari perimetro e di avere minimo perimetro tra le figure di pari area fossero note nell'antichità; richiama al riguardo il racconto dell'episodio di Didone dall'Eneide di Virgilio, (Didone avuta dal re una pelle di bue per delimitare il perimetro della città da fondare, riesce ad ottimizzare l'area da ottenere, realizza un cordone tagliando la pelle in striscioline finissime e disponendolo circolarmente) e riporta un brano di Galilei dal *Dialogo intorno a due nuove Scienze* in cui si caratterizza il cerchio "come poligono di infiniti lati capacissimo sopra tutti gli altri poligoni di equal circuito" e dove si sottolinea l'errore comune di confondere il concetto di area con quello di perimetro.

Interessantissimo, anche per l'apparato iconico, il capitolo 4, dedicato alla rappresentazione dello spazio, soprattutto nell'ultima parte riguardante le accentuazioni dell'effetto prospettico, tipiche del periodo barocco, introdotte per ottenere visioni ravvicinate o allontanate. Il capitolo comprende anche una parte dedicata alla matematizzazione di fenomeni sulle ombre, che porta alla caratterizzazione delle trasformazioni affini e proiettive, ma questo aspetto è decisamente meno originale anche perché ampiamente trattato nei libri di testo.

Il capitolo 3, dedicato agli aspetti statistico-probabilistici, è un po' povero. L'autrice partendo dall'uso del termine 'probabilità' nel quotidiano parla correttamente di valutazione della probabilità ma si limita ai soli casi dell'approccio classico (introducendo nel caso di esperimenti simmetrici la formula "numero dei casi favorevoli diviso numero dei casi possibili") e dell'approccio sperimentale (che nasce dal rilevamento statistico della frequenza di un evento in un numero elevato di casi). Si sofferma su aspetti probabilistici della trasmissione di malattie ereditarie e dello studio statistico di anomalie genetiche. Per le malattie ereditarie Emma Castelnuovo tratta il caso della microcitemia, un particolare tipo di anemia; mostra la distribuzione delle probabilità nel caso di un figlio di due portatori sani e indica su una carta dell'Italia le regioni in cui tale malattia è presente in modo significativo. Per le malattie studiate statisticamente parla della sindrome di Down, per la quale dagli studi statistici emerge come l'avanzata età della madre ne sia possibile causa. Per questioni di parità di genere è un peccato che manchi un riferimento all'autismo, malattia per la quale l'età avanzata del padre è causa riconosciuta.

Attraente e ben equilibrato è il capitolo 5, dedicato alla funzione esponenziale, per la molteplicità di situazioni in cui essa appare (biologici, geologici, economici), per la opportuna distinzione tra situazioni discrete e continue, per la differenziazione tra i caratteri delle funzioni a seconda che la base sia maggiore o minore di uno e più in generale per il carattere previsionale della matematica che emerge. Da un punto di vista matematico tuttavia, poco valorizzate appaiono le funzioni logaritmiche, nonostante il felice esempio della loro applicazione per la datazione dei fossili, sia dal punto di vista funzionale sia nel loro legame con le funzioni esponenziali.

Il più problematico tra i capitoli è l'ultimo, in cui introducendo il racconto del viaggio di una formica per raggiungere una briciola di pane, si studiano con ragionamenti euristici le serie a termini positivi rispettivamente di termine generale $1/2^n$, $1/3^n$, $1/4^n$, e si stabilisce che la loro somma è nel primo caso 1, nel secondo $1/2$, nel terzo $1/3$, si generalizzano tali risultati affermando che la serie di termine generale $1/m^n$ ha come somma $1/(m-1)$. Tali serie vengono dette convergenti. Esplorando la serie di termine generale $1/n$ si mostra che esistono anche serie divergenti. Negli approfondimenti si criticano i procedimenti intuitivi adottati nella trattazione e si dimostra che nel caso di serie generate da progressioni geometriche di primo termine a e ragione q la somma della serie è $a/(1-q)$. Sempre come approfondimento, usando la "scaletta" circoscritta, si mostra che l'area al di sotto della funzione esponenziale di base 1/2, pur estendendosi all'infinito, ha valore finito; si studiano poi perimetro ed area di un fiocco di neve.

Come in molti libri di divulgazione matematica, scritti con l'idea di attrarre l'attenzione del lettore e motivarlo verso l'apprendimento o approfondimento della disciplina, si semplifica volutamente su aspetti matematici delicati o complessi, così in questo capitolo si sorvola grossolanamente su particolari dimostrativi essenziali e si trattano concetti matematici sottili rifacendosi al senso comune.

Il libro affascina nella sua poliedricità, nei suoi molti riferimenti al reale, nella naturalezza delle esplorazioni condotte, nella attrazione e suggestione delle immagini, tuttavia agli occhi di un matematico puro può apparire in alcuni punti troppo 'audace', per la disinvoltura con cui si tacciono particolari importanti ed essenziali (si veda ad esempio la dimostrazione della biunivocità tra segmento e semiretta, o ancor più tra i punti di un quadrato e quelli di un suo lato), per le volute omissioni (si parla di convergenza/divergenza di serie, si calcolano somme infinite senza accennare minimamente al concetto di limite, si parla in modo intuitivo di dimensione non intera, si utilizzano in modo tacito importanti teoremi di esistenza nei reali, ...) per certe trascuratezze, come il mancato collegamento tra funzioni esponenziali e logaritmiche che lasciano in ombra significato e ragione d'uso dei logaritmi, o per certe reiterate affermazioni sugli esiti del lancio di una moneta equilibrata al crescere del numero delle prove (basate sul numero di uscite un certo esito invece che sul rapporto fra tale numero ed il numero delle prove effettuate) che inducono concezioni errate.

Al di là di queste pecche, che possono considerarsi il prezzo da pagare per la divulgazione, il libro è meritevole perché offre al lettore medio una visione della matematica come disciplina esplorativa, di ragionamento e di previsione, con ricadute di tipo socio-economico, decisamente più appropriata di quella corrente, passiva e tecnica. Ma è ancor più meritevole di attenzione per gli insegnanti, ai quali offre interessanti spunti di lavoro per le classi, oltre che stimoli per un loro autonomo approfondimento culturale.

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

[1] GIACARDI L., ZAN R. (a cura di), (2013), *Emma Castelnuovo. L'insegnamento come passione*, numero monografico de *La Matematica nella Società e nella Cultura* (rivista della Unione Matematica Italiana) dedicato ad Emma Castelnuovo in occasione del suo centesimo compleanno, Serie I, Vol. VI, Aprile 2013.

[2] DEGLI ESPOSTI C., LANCIANO N. (2016), *Emma Castelnuovo*, L'asino d'oro, Roma.

[3] LOLLI, G. (2016), *Tavoli, sedie e boccali di birra. David Hilbert e la matematica del novecento*, Raffaello Cortina, Milano

Nicolina A. Malara

Nicolina A. Malara è prof. ordinario del settore MAT 04 in pensione. Le sue ricerche riguardano la didattica della matematica con particolare riferimento all'algebra. In questo ambito ha promosso il progetto ArAl, di rivisitazione dell'aritmetica in ottica pre-algebrica, secondo un approccio linguistico e metacognitivo da attuarsi con modalità socio costruttive. Tale progetto coinvolge varie reti di scuole a livello nazionale ed è concepito come un sistema integrato di formazione insegnanti e di innovazione nelle classi. È autrice di oltre 150 pubblicazioni, più di metà delle quali presenti in testi e riviste in lingua inglese. Ha svolto importanti incarichi di tipo scientifico ed organizzativo a livello internazionale e nazionale. Nei suoi studi sono stati coinvolti numerosi insegnanti, alcuni dei quali sono oggi affermati ricercatori.