Matematica, Cultura e Società

Rivista dell'Unione Matematica Italiana

Gabriele Lolli

Dedekind filosofo della matematica

Matematica, Cultura e Società. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **2** (2017), n.1, p. 5–16.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=RUMI_2017_1_2_1_5_0>

Matematica, Cultura e Società. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2017.

Matematica, Cultura e Società – Rivista dell'Unione Matematica Italiana
Serie I, Vol. 2, N. 1, Aprile 2017, 5-16

Dedekind filosofo della matematica

GABRIELE LOLLI
Accademia delle scienze di Torino
E-mail: gabrielelolli42@gmail.com

Sommario: *Presentiamo i contriibuti di Dedekind ai fondamenti della matematica: le definizioni dei numeri naturali, dei numeri reali e dei numeri ideali sono le più note, ma decisivo è stato il suo ruolo nell'introduzione di una visione strutturale insiemistica nell'algebra astratta, insieme a molti dei nuovi concetti. Dedekind è stato anche il mentore di Cantor nella crescita della sua teoria dell'infinito, con alcune frizioni documentate nella corrispondenza.*

Abstract: *Dedekind is well known for his definitions of the natural, real and ideal numbers, but his long lasting influence is rooted in a structural vision of set-theoretic type in the foundations of abstract algebra. Several new concepts were due to him. Moreover many times Cantor relied on Dedekind's suggestions and assistance in the building of his own theory of the infinite. Their relation was not easy, as we will see from their correspondence.*

Richard Dedekind (1831-1916) dopo qualche iniziale incertezza sulla direzione della sua ricerca si è dedicato a un lavoro di ripensamento e sistematizzazione sia di teorie classiche sia di ricerche nuove che lo hanno fatto riconoscere come uno dei fondatori dell'algebra moderna. (1) Nel corso di questo lavoro, a parte l'interesse matematico in senso stretto Dedekind inizia a costruire l'impostazione che porterà a una matematica plasmata nel linguaggio insiemistico. La sua influenza si rafforza nell'attenzione che dedica alla ricerca di Georg Cantor (1845-1918) e nella guida che rappresenta per il più giovane collega. I suoi contributi fondazionali meglio conosciuti sono la definizione dei numeri reali (1872) e quella dei numeri naturali (1888). (2)

Dedekind è il prodotto forse più consapevole della scuola di Göttingen, dove Carl Friedrich Gauss (1777-1855), P. G. Lejeune Dirichlet (1805-1859) e Bernhard Riemann (1826-1866) avevano impostato una matematica concettuale (in contrasto con la scuola di Berlino, più algoritmica). (3) Da Riemann, Dedekind afferma di aver imparato ad evitare forme accidentali di rappresentazione a favore di semplici concetti fondamentali. (4) In relazione alla propria teoria degli ideali commenterà che "una teoria basata sui calcoli non offrirebbe il massimo grado di perfezione; è preferibile [...] cercare di ricavare le dimostrazioni non più dai calcoli ma direttamente dai concetti caratteristici fondamentali, e costruire una teoria nella quale sarà possibile al contrario predire i risultati dei calcoli".

I concetti si esprimono per Dedekind, a differenza che per altri protagonisti delle stesse ricerche, in

Accettato: il ???

(1) A partire dagli anni sessanta dell'Ottocento Dedekind cura la pubblicazione delle lezioni di teoria dei numeri di Dirichlet, [Dirichlet 1863], aggiungendo diversi supplementi nei quali sono presentate le sue idee originali. Le sue opere sono raccolte in [Dedekind 1932]. Su Dedekind si veda, oltre a [Ferreirós 2007], anche [Dugac 1976], [Stein 1968] e [Lolli 2013, cap. II].

(2) La corrispondenza tra Cantor e Dedekind è pubblicata per la parte principale in [Cantor e Dedekind 1937] e lettere rimanenti in [Dugac 1976, *Unverhöffentlicher Briefwechsel*, pp. 223-62]. Gli scritti [Dedekind 1872] e [Dedekind 1888] sono tradotti in italiano entrambi sia in [Dedekind 1926] sia in [Dedekind 1983].

(3) Si veda [Ferreirós 2007, pp. 24-38].

(4) Lettera a Lipschitz, in [Dedekind 1932, vol. 3, p. 468].

un linguaggio che egli chiama logico ma è insiemistico; nel corso dell'introduzione di diversi concetti algebrici Dedekind precisa e impone alcuni elementi fondamentali della teoria insiemistica delle strutture e del suo linguaggio.

1. – Algebra

Nel 1856-58 Dedekind tiene un corso sulla teoria di Galois, per la prima volta insegnata in lezioni universitarie. Dedekind aveva rielaborato il lavoro di Evariste Galois (1811-1832) con la messa in evidenza del ruolo svolto dai concetti soggiacenti e impliciti di gruppo e di corpo.

Dirà in seguito che aveva presentato la teoria dei gruppi di sostituzioni "in un modo tale che poteva essere applicata a gruppi Π di elementi arbitrari". (5) Sostanzialmente Dedekind ha in mente la concezione moderna dei gruppi: dopo due teoremi sul prodotto di sostituzioni, che stabiliscono la legge associativa e la legge di semplificazione (cioè che da due qualunque delle tre equazioni $\phi = \theta, \phi' = \theta'$ e $\phi\phi' = \theta\theta'$ segue la terza), egli scrive:

> Le indagini che seguono sono basate esclusivamente su questi due fondamentali teoremi che abbiamo dimostrato, e sul fatto che il numero delle sostituzioni è finito: perciò i loro risultati saranno ugualmente validi per qualsiasi dominio di un numero finito di elementi, cose, concetti $\theta, \theta', \theta'' \ldots$ che ammettono una composizione $\theta\theta'$ da θ, θ', definita arbitrariamente ma in modo tale che $\theta\theta'$ sia ancora un elemento del dominio, e che questa specie di composizione obbedisca alle leggi espresse nei due teoremi fondamentali. In molte parti della matematica, ma specialmente nella teoria dei numeri e nell'algebra, noi troviamo continuamente esempi di questa teoria; gli stessi metodi di prova sono validi lì come qui. (6)

Anche Arthur Cayley (1821-1895) fa compiere nel 1854 un passo avanti alla teoria dei gruppi presentando una assiomatizzazione dei gruppi finiti. (7) Ma un livello di astrazione simile a quello della precedente citazione di Dedekind si diffonderà solo dopo circa quaranta anni, (8) soprattutto quando i gruppi saranno riconosciuti essenziali nella fondazione della geometria.

Dedekind non ha l'atteggiamento assiomatizzatore che avranno altri, non cerca la stessa generalità nel caso di altre strutture. Non si può dire tuttavia che Dedekind fosse ignaro di come funziona un sistema assiomatico; lo illustra bene in un inciso di una lettera del 1876 a Rudolf Lipschitz (1832-1903), dove parla della sua analisi logica della geometria euclidea:

> Analizziamo tutte le assunzioni, quelle esplicite e quelle tacite, sulle quali poggia l'intero sistema della geometria euclidea; ammettiamo la verità di tutti i suoi teoremi e la possibilità di eseguire tutte le sue costruzioni. (Un metodo infallibile per una tale analisi consiste, secondo me, nel sostituire tutte le espressioni tecniche con parole inventate sul momento (finora senza senso); l'edificio non dovrebbe collassare, se ben costruito, e io asserisco che, ad esempio, la mia teoria dei numeri reali supera questa prova). (9)

Dedekind sembra anticipare l'osservazione di Hilbert a Frege che se a "punto, retta, piano" si sostituiscono le parole "legge, amore, spazzacamino" i teoremi della geometria restano validi e diventano proprietà di queste cose. (10)

Più che alla scrittura di assiomi Dedekind contribuisce alla comprensione di come si usa l'impostazione assiomatica, la quale negli algebristi inglesi sembra invece arbitraria, come un vestito alla ricerca di un corpo.

Dedekind usa in questa occasione la parola "dominio [*Gebiet*]" come "insieme", anche se in altri passi vicini compare *Komplex* con lo stesso senso. (11) In

(5) La citazione è dal Supplemento XI alla quarta edizione di [Dirichlet 1863, 4ª ed. 1894, p. 484, nota].

(6) Da manoscritti inediti pubblicati da [Scharlau 1981, p. 63].

(7) [Cayley 1854].

(8) Per esempio in [Weber 1898].

(9) [Dedekind 1932, vol. 3, p. 479].

(10) Lettera di Hilbert del 29-12-1899, in [Frege 1976, p. 52].

(11) Nonostante la chiara influenza di Riemann, Dedekind a differenza del primo Cantor non usa il termine *Mannigfaltigkeiten* per gli insiemi di punti. In una lettera del 1879, Dedekind suggerisce a Cantor di sostituire la ingombrante parola "Mannigfaltigkeit" con "Gebiet" (estensione, regione), che però si affretta a precisare che "è anche riemanniana", come se ci fosse un tacito impegno a raccogliere l'insegnamento del maestro.

altri scritti del periodo, parlando di classi di equivalenza, usa i termini "sistema" e qualche volta "classe", attribuendo quest'ultimo a Gauss. Questi lavorava tuttavia con i rappresentanti, mentre Dedekind parla tranquillamente, in uno scritto del 1856, dell'"intero sistema di infinite funzioni [che] si comporta come un singolo numero concreto della teoria dei numeri":

> I precedenti teoremi corrispondono esattamente a quelli della divisibilità dei numeri, nel senso che l'intero sistema di infinite funzioni di una variabile, congrue a ciascuna modulo p, si comporta come un singolo numero concreto della teoria dei numeri, giacché ciascuna funzione di quel sistema sostituisce completamente ogni altra sotto ogni aspetto; una tale funzione è la rappresentante dell'intera classe; ogni classe possiede il suo grado definito, i suoi divisori ecc., e tutti questi tratti corrispondono allo stesso modo a ciascun membro particolare della classe. (12)

In altri autori del tempo, l'operazione di "passaggio al quoziente" era considerata piuttosto una forma di astrazione, invece che una operazione insiemistica.

In un manoscritto dello stesso periodo, non pubblicato, sulla teoria di Galois, ora edito da Scharlau, è anche presente in posizione centrale la nozione di applicazione, che Dedekind chiama inizialmente "sostituzione".

> *Definizione [Erklärung].* Con *sostituzione* si intende, in generale, un processo qualsiasi grazie al quale certi elementi $a, b, c, \dots$ sono trasformati in oggetti $a', b', c', \dots$, o sono rimpiazzati da questi; nel seguito considereremo soltanto quelle sostituzioni nelle quali il complesso degli elementi rimpiazzanti $a', b', c', \dots$ è lo stesso di quello dei rimpiazzati $a, b, c, \dots$ (13)

L'argomento è ripreso con maggiori dettagli nel Supplemento XI:

> Capita molto spesso, in matematica e in altre scienze, che quando abbiamo un sistema Ω di cose o elementi ω, ciascun definito elemento ω è rimpiazzato da un definito elemento ω' che gli è fatto corrispondere secondo una certa legge; usiamo chiamare tale atto una sostituzione, e diciamo che per mezzo di questa sostituzione l'elemento ω è trasformato nell'elemento ω', e anche che il sistema Ω è trasformato nel sistema Ω' degli elementi ω'. La terminologia diventa ancora più conveniente se, come faremo, si concepisce tale sostituzione come un'applicazione [*Abbildung*] del sistema Ω e di conseguenza si chiama ω' l'immagine di ω, e anche Ω' l'immagine di Ω. [Nota: Su questa facoltà mentale di confrontare una cosa ω con una cosa ω', o di mettere in relazione ω e ω', o di far corrispondere ω' a ω, senza la quale non è possibile pensare, riposa anche la scienza dei numeri, come cercherò di far vedere in un'altra occasione.] (14)

Dedekind si riferisce ancora in questo brano a una legge di corrispondenza, mentre nella definizione di sostituzione aveva parlato di "processo di trasformazione", ma c'è un passo avanti, perché prima si parlava, lui incluso, solo di elementi che si corrispondevano, non della corrispondenza in sé.

Dedekind comunque si ispira alla concezione di Dirichlet, a cui si attribuisce la prima considerazione delle "funzioni arbitrarie":

> Non è per nulla necessario che y dipenda da x su tutto l'intervallo secondo la stessa legge, e non c'è neanche bisogno di pensare a una dipendenza che possa essere espressa da operazioni matematiche [...]. Questa definizione non prescrive per le differenti parti della curva alcuna legge comune; essa può essere pensata come composta dalle parti più diverse o assolutamente senza una legge. (15)

Questo riferimento è da tenere presente quando Dedekind usa la parola "legge" nelle sue descrizioni di una funzione.

Ci sono precedenti dell'uso di *Abbildung*, ma in geometria, non in questo modo così generale. Dal 1872 Dedekind userà sistematicamente *Abbildung*, che noi traduciamo "applicazione" per l'abitudine che viene dall'inglese *mapping*, ma la traduzione più fedele e significativa sarebbe "rappresentazione". Il termine tedesco *Bild* significa

(12) [Dedekind 1932, vol. 1, pp. 46-7].
(13) [Scharlau 1981, p. 60].

(14) Supplemento XI alla terza edizione di Dirichlet, in [Dedekind 1932, vol. 3, pp. 297-314]. L'"altra occasione" è [Dedekind 1888], si veda oltre.

(15) [Dirichlet 1837]. Siamo nel periodo nel quale è ancora un atto coraggioso pensare a una funzione continua che su due intervalli adiacenti sia definita da due leggi diverse.

"immagine" o "figura", ma anche "immagine mentale" o "idea". ([16])

Un manoscritto sui gruppi del periodo delle lezioni su Galois contiene il teorema di omomorfismo: Dedekind assume data una corrispondenza tra gli oggetti di un gruppo M e (tutti) quelli di un "complesso" M_I tale che l'immagine della composizione di due elementi in M sia la composizione, per definizione, delle loro immagini. Dimostra allora che M_I è un gruppo, considera il nucleo N dell'omomorfismo e mostra che la partizione M/N dà origine a un isomorfismo [*Äquivalenz*] tra il gruppo quoziente e l'immagine. La trattazione rivela che per Dedekind l'omomorfismo non è necessariamente iniettivo.

Un altro concetto gli appare essenziale non solo per la teoria di Galois ma anche per la nuova teoria degli ideali, quello di "corpo". Nel X supplemento alla seconda edizione, nel 1871, Dedekind racconta come sin dalle lezioni del 1856-58 avesse intuito come lo studio delle relazioni algebriche tra numeri si potesse e dovesse basare su un concetto collegato ai principi aritmetici più semplici. Decide di chiamarlo "corpo", per la sua compiutezza, o totalità organica.

> Nel tentativo di introdurre il lettore a queste nuove idee [di Ernst Kummer (1810-1893), sui numeri ideali] adotteremo un punto di vista in un certo senso più elevato, e cominceremo introducendo un concetto che sembra ben adatto a servire come fondamento per l'algebra superiore e le parti della teoria dei numeri che le sono connesse.
>
> Con corpo [*Körper*] intendiamo qualunque sistema di infiniti numeri reali o complessi che è in sé così chiuso e completo che l'addizione, la sottrazione, la moltiplicazione e la divisione di due qualunque di questi numeri porta sempre un numero dello stesso sistema. Il corpo più semplice è composto dai numeri razionali; il più grande da tutti i numeri. ([17])

Continua introducendo l'intersezione di due corpi, che è ancora un corpo e che chiama massimo comune divisore; chiama divisori di un corpo quelli in esso contenuti. La scelta è dovuta al fatto che tale terminologia era stata già usata per gli ideali, in quel caso con una giustificazione naturale. Peraltro tale terminologia regge in algebra fino intorno al 1930.

Cantor aveva letto e studiato il X supplemento, che cita nel 1878, e un fatto notevole e curioso è che nella sua serie di articoli sugli insiemi di punti dal 1879 al 1884 usa la terminologia di Dedekind di divisori e multipli per le operazioni insiemistiche, nonostante non appaia adatta al contesto insiemistico, e Dedekind stesso la eviti fuori dall'algebra.

Sempre nel X supplemento si trovano le definizioni di anello (chiamato "ordine", il termine "anello" sarà introdotto da Hilbert), modulo, ideale; l'esposizione è considerata da tutti gli specialisti, da Noether a Bourbaki a Landau, la creazione dell'algebra moderna.

Nell'ottica della nascitura insiemistica, è da rilevare il modo come Dedekind arriva alla definizione di "ideale". Siccome la introduzione dei numeri ideali da parte di Kummer serviva soltanto a ottenere una buona teoria della divisibilità con il teorema della fattorizzazione unica, Dedekind considera l'insieme dei numeri che sono divisibili da uno stesso numero ideale (nel senso impreciso e insoddisfacente di Kummer); esamina le proprietà di questo insieme che servono alla dimostrazione, e le individua in due condizioni: se due elementi vi appartengono anche la loro somma e differenza vi appartiene, e il prodotto di uno di essi per un numero qualunque vi appartiene. Dedekind definisce quindi come un ideale un insieme con queste proprietà. Alcuni ideali sono costituiti da tutti i multipli di un dato numero, e sono gli ideali principali, gli altri si dimostra che possono sempre essere scomposti in prodotti di ideali principali, facendo tornare il teorema della fattorizzazione unica.

Dedekind utilizza cioè in modo "naturale", per sua ammissione, il passaggio dalla proprietà di divisibilità all'insieme degli elementi divisibili; tecnicamente si tratta di una applicazione del principio di comprensione, ma il risultato è una versione estensionale delle proprietà che interessano e una maggior presenza di entità insiemistiche nella matematica:

> Il problema è essenzialmente semplificato dalle seguenti riflessioni. Siccome una tale proprietà caratteristica A serve a definire non il numero ideale in sé, ma solo la divisibilità dei numeri contenuti nel $\mathfrak{d}$

([16]) Nelle trad. it. sia di O. Zariski sia di F. Gana *Abbildung* è tradotto "rappresentazione", ma noi useremo, come detto, sia "rappresentazione" sia "applicazione", per facilitare il confronto con la terminologia attuale. In inglese è stata usata anche la traduzione *transformation*.

([17]) Supplemento X, del 1871, in [Dirichlet 1863, vol. 3, pp. 223-4].

> [anello di interi] da parte del numero ideale, si è naturalmente condotti a considerare l'insieme $\mathfrak{a}$ di *tutti* quei numeri α nel dominio $\mathfrak{o}$ che sono divisibili da un certo numero ideale; d'ora in avanti chiamerò tale sistema $\mathfrak{a}$, in breve, un *ideale* e così a ogni particolare numero ideale corrisponde un certo *ideale* $\mathfrak{a}$. Ma siccome, reciprocamente, la proprietà A [...] consiste solo nel fatto che α appartiene al corrispondente ideale $\mathfrak{a}$, si può, invece delle proprietà $A, B, C, \ldots$ [...] considerare i corrispondenti ideali $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, ... al fine di stabilire il loro carattere comune ed esclusivo. ([18])

Tuttavia Dedekind non chiama numeri né associa numeri agli ideali, a differenza di quanto farà per gli irrazionali. Li considera proprio insiemi:

> Proprio come noi possiamo concepire una totalità di *infinite* funzioni dipendenti da una variabile, come *un* tutto, ad esempio quando collezioniamo tutte le forme equivalenti in una classe, la denotiamo con una singola lettera e la sottoponiamo a composizione, con lo stesso diritto io posso concepire un sistema A di infiniti numeri completamente determinati in $\mathfrak{o}$, che soddisfano due condizioni estremamente semplici I e II, come *un* tutto, e chiamarlo ideale. ([19])

Gli ideali sono forse il primo esempio di un nuovo oggetto matematico introdotto consapevolmente come un insieme infinito.

Va ricordato che Dedekind non si limita a rifinire i concetti, ma li usa con profitto; con la teoria degli ideali, nel 1882 insieme a Heinrich Weber (1842-1913) darà un contributo fondamentale alla teoria delle superfici di Riemann, con la prima dimostrazione algebrica del teorema di Riemann-Roch. ([20])

2. – I numeri reali

Nel 1872 Dedekind si dedica alla definizione dei numeri con due fondamentali lavori, uno impostato e uno pubblicato. Inizia una bozza sui numeri naturali, ([21]) e pubblica *Stetigkeit und irrationale Zahlen* che contiene la definizione dei numeri reali e la discussione della continuità. Era stato spinto a interessarsi del problema dall'esperienza di insegnamento al Politecnico di Zurigo a partire dal 1858, quando si era accorto che la dimostrazione di teoremi sui limiti, quali il fatto che una grandezza variabile crescente limitata superiormente ha un limite, erano basate solo su considerazioni geometriche; pur didatticamente utile, tale impostazione non poteva considerarsi scientifica. Dedekind nella bozza sui numeri naturali aveva già scritto l'epigrafe che ripeterà nella pubblicazione del 1888: "Quello che è dimostrabile, non deve essere accettato nella scienza senza dimostrazione".

Nel 1872 sono pubblicate tre diverse definizioni dei numeri reali, quella di Karl Weierstrass (1815-1897) in un libro di E. Kossak, ([22]) quella di Cantor ([23]) e quella di Dedekind, mentre nel 1869 era uscita quella di Charles Méray (1835-1911), tutte indipendenti. La definizione dei numeri reali segna l'apice del metodo che Hilbert chiamerà genetico: tutte le soluzioni proposte assumono come dati i razionali. I gradini precedenti, degli interi come coppie di naturali e dei razionali come coppie di interi sono definiti nello stesso periodo. Si trovano in manoscritti di Dedekind non pubblicati ma forse precedenti di poco il 1872; è possibile che Dedekind sia stato influenzato dalla soluzione trovata da William R. Hamilton (1805-1865) per i complessi, definiti come coppie di numeri reali.

Per Dedekind era essenziale che l'estensione graduale del concetto di numero si basasse sempre sui concetti precedentemente stabiliti "e senza far intervenire rappresentazioni estranee (per esempio quella di grandezza misurabile)". Con la definizione dei numeri naturali, diventerà poi evidente che ogni teorema di algebra e di analisi si può esprimere come un teorema sui numeri naturali; ma Dedekind non caldeggia affatto una simile riduzione: "Al contrario, i progressi più grandi e fecondi nella matematica e nelle altre scienze sono dovuti prevalentemente alla creazione e all'introduzione di nuovi concetti, rese necessarie dalla frequente ricomparsa di fenomeni

([18]) [Dedekind 1876-77].
([19]) Lettera a Lipschitz del 1876, in [Lipschitz 1986, p. 62].
([20]) Si veda [Edwards 1987, p. 18].
([21]) La bozza dal titolo "Versuch einer Analyse des Zahl-Begriffs vom naiven Standpunkte aus" è pubblicata in appendice a [Dugac 1976, pp. 293-309].
([22]) [Kossak 1872]. Kossak era allievo di Weierstrass.
([23]) [Cantor, 1872].

complessi difficilmente dominabili per mezzo dei vecchi concetti". ([24])

In una lettera del 1876 a Lipschitz, Dedekind spiega come secondo lui la continuità sia un concetto che ha origine nell'analisi. Nella geometria euclidea non c'è bisogno di questa nozione, e giustamente Euclide non se ne è occupato.

> Analizziamo tutte le assunzioni, quelle esplicite e quelle tacite, sulle quali poggia l'intero sistema della geometria euclidea; ammettiamo la verità di tutti i suoi teoremi e la possibilità di eseguire tutte le sue costruzioni. [...] *In nessun luogo*, per quanto ho analizzato, incontriamo in questo modo la *continuità* dello spazio come condizione che sia indissolubilmente legata alla geometria euclidea. L'intero sistema regge senza la continuità. ([25])

Se infatti consideriamo soltanto i punti dello spazio a coordinate algebriche, lo spazio costituito da questi punti è ovunque discontinuo, ma tutte le costruzioni della geometria euclidea vi sono comunque realizzabili. Anche Cantor darà un esempio simile.

"Le trattazioni più rigorose che si hanno del calcolo differenziale non basano le loro dimostrazioni sulla continuità, ma fanno invece appello più o meno coscientemente a rappresentazioni geometriche o si servono di teoremi che a loro volta non furono mai rigorosamente dimostrati con mezzi puramente aritmetici". ([26]) Dedekind si convince che il teorema di Bolzano-Weierstrass, così detto perché Weierstrass lo usava frequentemente, e lo attribuiva a Bolzano, non perché Bolzano o Weierstrass lo avessero dimostrato, poteva essere considerato come base sufficiente del calcolo differenziale. "E allora si trattava soltanto di scoprire negli elementi dell'aritmetica la vera origine di questo teorema, acquistando con ciò nello stesso tempo una definizione effettiva della continuità".

Il modo di procedere di Dedekind è simile (con una differenza essenziale su cui torneremo) a quello usato a proposito degli ideali, e consiste in un ribaltamento che introduce all'inizio nella definizione quello che deve essere l'obiettivo che si vuole raggiungere. Come per gli ideali aveva considerato le proprietà di chiusura dell'insieme dei multipli di un intero, e aveva definito come ideale un insieme con le stesse proprietà formali, così ora considera le sezioni dei razionali, cioè le partizioni di $\mathbb{Q}$ in due insiemi disgiunti A e B con A chiuso verso il basso, B verso l'alto, e ogni elemento di A minore di ogni elemento di B; ove una sezione non sia prodotta da un razionale, introduce un numero che la produce. Per gli ideali non aveva introdotto numeri ideali ma aveva considerato gli insiemi in sé.

> Lei dice che il numero irrazionale non è altro che la sezione stessa, mentre io preferisco creare qualcosa di *nuovo* (differente dalla sezione) che corrisponde alla sezione di cui io dico che porta in essere, crea il numero. Abbiamo il diritto di ascrivere una tale potenza creativa a noi stessi. Noi siamo di stirpe divina, e possediamo senza dubbio una forza creativa non solo nell'ambito delle cose materiali (ferrovie, telefoni), ma anche nelle cose spirituali. ([27])

Il motivo di questa insistenza, a differenza del caso degli ideali, può dipendere dal fatto che si rischierebbe di mescolare in modo improprio il linguaggio algebrico a quello insiemistico: anche i razionali infatti producono sezioni, ma non si direbbe che un razionale è identico alla sezione che produce, e si possono dire tante cose sulle sezioni che non avrebbero molto senso per i reali.

In alcune lettere a Lipschitz del 1876 Dedekind spiega quello che c'è di nuovo nella sua definizione rispetto a quella di Euclide relativa al rapporto tra grandezze omogenee, nella quale molti vedono una anticipazione delle sezioni. ([28]) Sulla novità rispetto alla teoria delle proporzioni Dedekind insiste anche nella prefazione alla ristampa del 1888.

3. – I numeri naturali

La ricerca che porta a *Was sind und was sollen die Zahlen* del 1888 è documentata dall'abbozzo steso nel 1872 (rivisto a più riprese fino al 1878), e

([24]) Prefazione a [Dedekind 1888, trad. Gana, p. 82].

([25]) [Dedekind 1932, vol. 3, p. 479].

([26]) [Dedekind 1926, p. 122].

([27]) Lettera a Weber del 24-1-1888, trad. it. in [Dedekind 1983, p. 145].

([28]) Le lettere a Lipschitz sono tradotte in italiano in [Dedekind 1983, pp. 129-40].

una nuova versione del 1887, prima della stampa del volume.

L'abbozzo del 1872 va oltre precedenti riflessioni di Dedekind contenute in due manoscritti intitolati *Arithmetische Grundlagen* quasi certamente precedenti. ([29]) In questi, indipendentemente da Hermann Grassmann (1809-1877), Dedekind presenta definizioni ricorsive delle operazioni di somma e prodotto con dimostrazioni per induzione delle loro proprietà algebriche.

L'impostazione di Dedekind nei suoi primi tentativi è quella della creazione [*Erschaffung*] dei numeri a partire da 1 con un "atto $+1$". Ma nella penultima pagina introduce una impostazione astratta, considerando addizione e moltiplicazione come funzioni a due argomenti e scrivendo la definizione della prima come

$$\begin{cases} \varphi(a, d(b)) & = & d\varphi(a, b) \\ \varphi(a, 1) & = & d(a). \end{cases}$$

L'atto di aggiungere 1 è sostituito da una funzione $d : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ e la successione dei numeri è presentata come $1, d(1) = 2, d(2) = 3, \ldots$

L'abbozzo del 1872 si propone, per dichiarazione programmatica, di analizzare il concetto di numero da un punto di vista *naive*; con "*naive*" Dedekind intende che i concetti di sistema e applicazione [*Abbildung*], su cui si basa, e che secondo lui sarebbero indispensabili anche se il concetto di numero fosse dato in una sorta di intuizione interna, appartengono alla logica: nel paragrafo intitolato "Sistemi di elementi" nel 1887 compare a margine il richiamo "(Logica)", eliminato dalla versione a stampa.

La spiegazione di "sistema" è la seguente:

> Una *cosa* è qualunque oggetto del nostro pensiero [...]

[varietà]

> Un *sistema* o *totalità* S di cose è determinato quando di ogni cosa è possibile giudicare se essa appartiene o no al sistema.
>
> Noi trattiamo tutte le cose che hanno una proprietà comune, nella misura in cui le differenze tra di esse non sono importanti, come una cosa nuova in contrasto con tutte le altre cose. La chiamiamo sistema, o totalità di tutte queste cose.

La parola *Mannigfaltigkeit*, varietà, era scritta a margine, come indicato. Con "totalità" traduciamo *Inbegriff*; in inglese lo si rende usualmente con "collezione", ma sembra una traduzione forzata in senso insiemistico; in tedesco è ovvio il collegamento con *Begriff*, e fa pensare alla estensione di un concetto. ([30])

Vengono poi definiti "parte" e "parte propria", l'unione di due insiemi, chiamata minimo comune multiplo, o "sistema composto", e infine le applicazioni e le applicazioni iniettive, che Dedekind chiama *distinte*, e in seguito come vedremo *simili*:

> Un sistema S è *distintamente applicabile* [*rappresentabile*] *in un sistema* T quando a ogni cosa contenuta in S (originale) si può determinare una (corrispondente) cosa contenuta in T (immagine) in modo che immagini differenti corrispondano a originali diversi.

La definizione è anche riformulata in modo più scorrevole, dicendo che a ogni a corrisponde un elemento $a \mid \varphi$, e che l'applicazione è distinta quando $a' \mid \varphi \neq a'' \mid \varphi$ se a' e a'' sono differenti. L'intenzione dichiarata è quella di studiare le applicazioni di un sistema S in sé, distinte o non distinte.

Viene quindi la definizione di "infinito":

> Un sistema S è detto *infinito* (o, il *numero* delle cose contenute in esso è detto *infinitamente grande*) quando esiste una parte U di S che è differente da S e nella quale S può essere applicato in modo distinto [...].

Non si sa quando e come sia venuta a Dedekind l'idea di questa definizione. Nel 1888 Dedekind in una nota dichiara di averla comunicata a Cantor nel 1882, e a Hermann Schwartz (1843-1921) e Weber alcuni anni prima.

L'unico riferimento al travaglio intellettuale che ha partorito la sua definizione Dedekind lo accenna nella prefazione alla seconda edizione di *Was sind und was sollen die Zahlen*, dove parla della decisione di assumere la condizione scelta come definizione dell'infinito, per "costruire in modo puramente logico

([29]) La datazione è discussa in [Ferreirós 2007, p. 222].

([30]) Abbiamo usato "totalità" perché è la traduzione proposta dai dizionari italiani, che peraltro oltre a "totalità" danno anche "essenza", così esprimendo il legame con *Begriff*. Per "totalità" d'altra parte c'è anche il termine *Gesamtheit*, usato una volta da Dedekind.

la scienza dei numeri", come di un "faticoso lavoro", perché sono possibili definizioni completamente diverse. ([31])

Nella stesura definitiva del 1888, nella prefazione, Dedekind parla della teoria dei numeri come di una parte della logica, e afferma: "considero il concetto di numero del tutto indipendente dalle rappresentazioni, o intuizioni dello spazio e del tempo, e [...] lo ritengo piuttosto un'emanazione diretta delle pure leggi del pensiero". Alla domanda del titolo risponde così: "i numeri sono libere creazioni dello spirito umano e servono per cogliere più facilmente e precisamente la diversità delle cose". Nel contare si manifesta "una capacità dello spirito senza la quale è impossibile ogni pensiero, la capacità di mettere in rapporto cose con cose, di far corrispondere una cosa e un'altra ovvero di rappresentare una cosa mediante un'altra cosa".

La definizione di "sistema" presentata nel §1 è la seguente:

> Capita spesso che diverse cose $a, b, c \dots$ considerate per qualche ragione sotto uno stesso punto di vista, siano riunite insieme nella mente, e allora uno dice che esse formano un *sistema* S; le cose $a, b, c, \dots$ sono dette gli *elementi* del sistema S, che esse sono *contenute* in S; viceversa, S *consiste* di questi elementi. Un tale sistema S (o una totalità [*Inbegriff*], una varietà [*Mannigfaltigkeit*], una collezione [*Gesamtheit*]), come oggetto del nostro pensiero, è ugualmente una cosa; è completamente determinato quando, per ogni cosa, è determinato se essa sia un elemento di S o no.
>
> Il sistema S è perciò lo stesso del sistema T, in simboli $S = T$, se ogni elemento di S è anche elemento di T e se ogni elemento di T è anche elemento di S.

Gottlob Frege (1848-1925) avrebbe criticato, nell'introduzione a *Grundgesetze der Arithmetik*, 1893, il lavoro di Dedekind denunciando la non chiara distinzione tra inclusione ed appartenenza, la confusione tra un elemento e il suo singoletto e l'esclusione dell'insieme vuoto.

Nel 1888 l'esclusione dell'insieme vuoto è tuttavia decisa da Dedekind per comodità. Nel 1887 aveva scritto esplicitamente che una condizione contraddittoria ha come estensione l'insieme vuoto (privo di elementi). La distinzione tra $\subset$ e $\in$ sarà invece alla lunga imposta da Frege e da Peano, ma con fatica. Dedekind rimediò in seguito a queste deficienze, almeno in alcuni suoi appunti dove userà 0 per l'insieme vuoto e $[a]$ per il singoletto. Nel 1888 ha solo un simbolo per l'inclusione ed osserva che "poiché ogni elemento s di un sistema S può essere concepito esso stesso come sistema, possiamo usare anche in questo caso la [stessa] notazione".

Dopo l'introduzione dell'unione (*zusammengesetze System*, insieme composto) e dell'intersezione (*Gemeinheit*, comunione), con alcune prime proprietà, come l'associatività dell'unione, la definizione di Dedekind di "applicazione" [*Abbildung*], con un richiamo a Dirichlet, è la seguente:

> *Definizione.* Con *Abbildung* di un sistema S s'intende una legge in base alla quale a ogni determinato elemento s di S *appartiene* una determinata cosa, che si chiama l'*immagine* [*Bild*] di s e si designa con $\varphi(s)$; diremo anche che $\varphi(s)$ *corrisponde* all'elemento s, che $\varphi(s)$ *risulta*, o è *generato*, da s mediante la rappresentazione φ, che s è *trasformato* in $\varphi(s)$ dalla rappresentazione φ.

Nell'abbozzo quando parlava di insiemi applicabili non aveva menzionata alcuna legge.

Considera poi l'applicazione identica, dimostra che l'immagine di una intersezione (dopo aver esteso a insiemi X la nozione di immagine, $\varphi(X)$, insieme delle immagini $\varphi(s)$ per s in X) è contenuta nell'intersezione delle immagini, e definisce la composizione.

Quindi

> *Definizione.* Una rappresentazione φ di un sistema S si dice *simile*, o *distinta* quando a elementi diversi a, b del sistema S corrispondono sempre immagini diverse $a' = \varphi(a), b' = \varphi(b)$.

Seguono alcune proprietà delle applicazioni simili, inclusa la possibilità di considerare l'applicazione inversa.

Con le applicazioni simili (iniettive) e soddisfacenti la condizione che noi chiamiamo suriettività definisce gli insiemi simili; due insiemi sono dunque simili se esiste una corrispondenza biunivoca tra di essi; dopo aver provato che la similitudine è una relazione di equivalenza introduce le classi di equivalenza di insiemi simili, senza tuttavia proporre qui

([31]) Commenta poi un'altra possibile definizione, forse più intuitiva ma meno adatta alla trattazione logica [Dedekind 1983, p. 86].

la nozione di cardinalità. Dedekind preferisce usare la nozione di ordine come fondamentale.

La definizione di "infinito" è ora che un sistema è infinito se è simile a una sua parte propria, ricalcando la definizione dell'abbozzo ricordata sopra.

Il § 4 è dedicato alla nozione più importante introdotta da Dedekind, quella di "catena" [*Kette*].

Dato un sistema S e una applicazione $\varphi : S \longrightarrow S$, un sottoinsieme K di S è chiamato "catena" se e solo se $\varphi(K) \subseteq K$. La "catena del sistema A", dove $A \subset S$, è l'intersezione di tutte le catene K di S che contengono A, ed è indicata da A_0.

Dedekind dimostra quindi che la catena A_0 è il sistema (insieme) tale che: (i) $A \subseteq A_0$; (ii) $\varphi(A_0) \subseteq A_0$; (iii) se $K \subseteq S$ è una catena e $A \subset K$ allora $A_0 \subseteq K$. (32)

Segue il teorema di induzione nella forma generale seguente (anche per φ non iniettive):

> 59. *Teorema di induzione completa*. Per dimostrare che la catena A_0 è una parte di qualunque sistema Σ – sia esso parte di S o no – è sufficiente mostrare:
>
> ρ. che $A \subseteq \Sigma$, e
>
> σ. che l'immagine di ogni elemento comune ad A_0 e Σ è anche un elemento di Σ.

Nel § 6 sono introdotti gli insiemi semplicemente infiniti [*einfach unendliches System*] che sono insiemi N per cui esiste una applicazione iniettiva φ di N in sé tale che N è la catena di un elemento che non appartiene a $\varphi(N)$. Questo elemento è denotato con 1 e $N = 1_0$ (scritto così invece di $\{1\}_0$) si dice ordinato da φ.

Riportiamo il passo originale, che ha una importanza storica:

> 71. *Definizione*. Un sistema N si dice *semplicemente infinito*, se esiste una rappresentazione simile φ di N in se stesso tale che N risulti la catena di un elemento non contenuto in $\varphi(N)$. Chiamiamo questo elemento, che nel seguito indichiamo col simbolo 1, l'*elemento fondamentale* di N, e diciamo che il sistema semplicemente infinito N è *ordinato* dalla rappresentazione φ. Conservando le notazioni precedenti delle immagini e delle catene, possiamo dire che l'essenza di un sistema N semplicemente infinito è caratterizzata dall'esistenza di una rappresentazione φ di N, e di un elemento 1 che soddisfa le condizioni $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ seguenti:
>
> α. $N' \subseteq N$.
>
> β. $N = 1_0$.
>
> γ. L'elemento 1 non è contenuto in N'.
>
> δ. La rappresentazione è simile.
>
> [...]

Dopo aver dimostrato che ogni insieme infinito contiene un sottoinsieme semplicemente infinito, Dedekind caratterizza i numeri naturali, o ordinali, convenendo nella Definizione 73 che se in un sistema semplicemente infinito N si prescinde dalla natura dei suoi elementi e "si considerano esclusivamente le relazioni reciproche determinate dalla rappresentazione ordinante φ, allora questi elementi sono detti *numeri naturali* o *numeri ordinali* [...]. In considerazione di questo atto di eliminare dagli elementi ogni altro contenuto (astrazione), i numeri si possono giustamente chiamare una libera creazione dello spirito umano". La scienza dei numeri ha come oggetto per Dedekind le relazioni o le leggi che si ricavano unicamente dalle condizioni $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ nella definizione 71. (33)

La trattazione di Dedekind continua con lo studio della relazione di ordine. Dedekind introduce il concetto di segmento iniziale $\mathbb{N}_m = \{1, 2, \ldots, m\}$, come complemento di una catena, e di resto, concetti che si troveranno utili nella teoria cantoriana dei numeri ordinali transfiniti.

Presenta poi le definizioni ricorsive, ma soprattutto il teorema generale di ricorsione: (34)

> 126. *Teorema delle definizioni per induzione*. Data una qualunque applicazione θ (simile o no) di un sistema Ω in sé ed un fissato elemento ω di Ω, esiste una e una sola applicazione ψ della successione dei numeri naturali N che soddisfa le condizioni
>
> I. $\psi(N) \subseteq \Omega$,
>
> II. $\psi(1) = \omega$,
>
> III. $\psi(n') = \theta\psi(n)$, dove n denota un numero qualsiasi.

(32) Si riconosce facilmente il legame con l'induzione, che infatti sarà subito dimostrata, sicché i numeri naturali potranno essere concepiti come la catena di $\{1\}$.

(33) L'anno seguente Giuseppe Peano (1858-1932) presenta i suoi assiomi equivalenti, o letteralmente uguali salvo il mancato uso del termine "catena"; al suo posto compariva una formulazione esplicita del principio di induzione, [Peano 1889], che è il teorema 80 di Dedekind.

(34) La terminologia è recente, posteriore alla nascita della teoria della calcolabilità; Dedekind chiama definizioni per induzione le definizioni ricorsive.

Con il teorema di ricorsione si può dimostrare che tutti i sistemi semplicemente infiniti sono simili tra loro, quindi si può dire a $\mathbb{N}$, e che i numeri possono essere usati per definire la cardinalità degli insiemi finiti. Per questo è essenziale dimostrare l'equivalenza tra le definizioni di "insieme finito" (= "non infinito") e di "equipotente a un $\mathbb{N}_m$". Ne seguirà che a ogni insieme finito corrisponde un unico $\mathbb{N}_m$ equipotente, e la definizione dei numeri cardinali non richiede le classi di equivalenza.

In modo equivalente, si tratta di dimostrare che un Σ è infinito se e solo se ogni $\mathbb{N}_m$ è iniettabile in Σ. La dimostrazione di una direzione del teorema tuttavia, quella che se ogni $\mathbb{N}_m$ è iniettabile in Σ anche $\mathbb{N}$ è iniettabile in Σ, quindi Σ è infinito, richiede, nella fusione delle varie iniezioni, quello che sarà chiamato l'assioma di scelta.

Nel §5 Dedekind cerca di dimostrare l'esistenza di un insieme infinito, perché "senza una dimostrazione logica di esistenza resterebbe sempre il dubbio che l'idea di un tale sistema non possa per caso contenere contraddizioni interne".

Il tentativo è tardo, si trova solo nell'ultima versione del 1887, non in quella del 1872 dell'abbozzo. Nel frattempo Dedekind aveva preso visione dei *Paradossi* di Bolzano, dove si trova l'affermazione che l'insieme delle proposizioni vere è infinito. ([35])

Dedekind modifica l'argomento di Bolzano sostituendo all'insieme delle verità "l'universo dei miei pensieri"[*meine Gedankenwelt*] e considerando in questo dominio l'applicazione φ che a ogni pensiero s associa il pensiero "s può essere un oggetto del mio pensiero". φ è iniettiva, e non è suriettiva, perché ad esempio "il mio proprio ego" è una cosa che può essere un oggetto del mio pensiero, ma non è della forma $\varphi(s)$. ([36]) Questa dimostrazione entrerà in crisi solo quando saranno scoperte le antinomie.

4. – Cantor e Dedekind

Nel 1872 Cantor e Dedekind che si erano scambiati i lavori sui numeri reali iniziarono un lungo ma non sempre facile rapporto registrato nella corrispondenza. Le lettere non ebbero un flusso regolare; si concentrano in alcuni periodi, 1873, 1877, 1882, 1899, in occasione di difficoltà teoriche e pratiche di Cantor, che si rivolgeva a Dedekind per aiuto e consigli.

Quando Cantor trova la dimostrazione della non numerabilità dei reali nel dicembre del 1873, pubblicata nel 1874, Dedekind gliela semplifica, e inoltre gli propone anche una dimostrazione della numerabilità dei numeri algebrici che sarà inserita nella pubblicazione. Cantor nella versione a stampa usa la terminologia e le notazioni di Dedekind senza riconoscere il debito; lo "sgarbo" si comprende forse per il motivo nell'ambiente di Berlino, dominato da Weierstrass, al cui giudizio Cantor teneva in modo particolare, era proibito parlare dei colleghi di Göttingen; fatto si è che Dedekind si raffredda, e d'ora in avanti, pur non facendo mancare i suoi consigli quando richiesto, non lo informerà più delle proprie dimostrazioni.

Nel 1877 Cantor manda a Dedekind una prima prova della corrispondenza biunivoca tra quadrato e lato; l'idea di Cantor è basata sulla rappresentazione decimale dei numeri reali tra 0 e 1 e sulla fusione di due successioni in una; Dedekind gli fa notare un'imprecisione dovuta al fatto che la rappresentazione decimale non è unica, e Cantor riesce a modificare la dimostrazione usando la rappresentazione in frazioni continue degli irrazionali, che è unica, al prezzo di un ragionamento più tortuoso; esprime infatti il suo dispiacere "che la questione non possa essere risolta senza le più complicate considerazioni". Dedekind inoltre frena gli entusiasmi di Cantor, che pensava di aver confutato con il suo risultato l'idea geometrica di dimensione, suggerendo che per la definizione di dimensione occorra usare applicazioni continue.

A proposito della definizione di infinito, Cantor farà in privato una timida rimostranza a Dedekind affermando di aver sottolineato tale distinzione tra finito e infinito fin dal 1877, e averla pubblicata nel 1878, ([37]) pur non volendo sostenere la priorità; ma

([35]) [Bolzano 1851, trad. it. 1965, p. 13].

([36]) La dimostrazione è riportata in [Dedekind 1983, pp. 98-9].

([37]) Nella prefazione alla seconda edizione di *Was sind und was sollen die Zahlen*, 1893, Dedekind si sente in dovere di precisare che la proprietà da lui usata come definizione di "infinito" era stata enunciata da Cantor nel 1878, come anche da Bolzano nel 1851, ma che "nessuno dei due ha cercato di assumere questa proprietà come definizione dell'infinito".

Dedekind ricorda che Cantor nel 1882, quando "dubitava che fosse possibile una definizione semplice, rimase molto stupito quando io, provocato dai suoi dubbi, gli comunicai, su sua richiesta, la mia; a volte capita di possedere qualcosa senza apprezzarne debitamente il valore e il significato. Anch'io non ho nessuna voglia di una polemica sulla priorità". ([38])

Nel 1887 Dedekind, nel sistemare la sua ricerca sui numeri naturali, trova una dimostrazione del teorema di Cantor-Schröder-Berstein. ([39]) Dedekind era consapevole dell'importanza di questo teorema per la teoria di Cantor negli anni ottanta; in una lettera del novembre 1882 Cantor gli aveva confessato le sue difficoltà a dimostrare il lemma che è la chiave per la dimostrazione del teorema: Se $M'' \subset M' \subset M$ ed esiste una corrispondenza biunivoca tra M ed M'', allora M' ha la stessa potenza di M. ([40]) Tuttavia Dedekind non informa Cantor della sua dimostrazione, né la pubblica, ma include in *Was sind* una proposizione di significato oscuro, la §4.63, dichiarando che non sarebbe stata usata nel resto del libro e lasciando la "non difficile" dimostrazione al lettore.

Nel 1897 Dedekind racconta a Cantor con malcelata soddisfazione della reazione incredula di Bernstein, quando gli aveva rivelato di essere in grado di dimostrare facilmente il risultato con i suoi strumenti. ([41]) A Cantor la espone infine solo in una lettera del 29 agosto 1899. ([42])

Nel 1899 Cantor si prende una rivincita comunicando a Dedekind la scoperta di contraddizioni, inevitabili se si usano totalità assolutamente infinite, o inconsistenti, intendendo quelle che ora sono chiamate classi proprie, grandi come l'universo; secondo lui una di queste è la totalità dei pensieri considerata da Dedekind nella dimostrazione dell'esistenza di un insieme infinito. Dedekind appare incerto, tanto è vero che nel 1903 non concede l'autorizzazione alla terza ristampa del suo libro del 1888; quando la darà nel 1911, affermerà, senza menzionare l'assiomatizzazione della teoria degli insiemi di Zermelo del 1908: "La mia fiducia nell'armonia interna della nostra logica non è scossa; io credo che un'indagine rigorosa della capacità del nostro spirito di creare, a partire da determinati elementi, una nuova entità determinata, il loro sistema, necessariamente diversa da ciascuno di questi elementi, arriverà certamente a rendere i fondamenti del mio scritto immuni da ogni obiezione".

([38]) Lettera a Weber del 24-1-1888, trad. it. in [Dedekind 1983, p. 144].

([39]) Il teorema, dimostrato da Bernstein nel 1897, afferma che se un insieme A è equipotente a un sottoinsieme di B e B è equipotente a un sottoinsieme di A, allora A e B sono equipotenti.

([40]) In [Dugac 1976].

([41]) [Dugac 1976, p. 261].

([42]) [Cantor e Dedekind 1937].

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

[Aspray e Kitcher 1988] W. Aspray e Ph. Kitcher (a cura di), *History and Philosophy of Modern Mathematics*, Univ. of Minnesota Press, Minneapolis, 1988.

[Bolzano 1851] B. Bolzano, *Paradoxien des Unendlichen*, Reclam, Leipzig, 1851; trad. it. *Paradossi dell'infinito*, Feltrinelli, Milano 1965, e Bollati Boringhieri, Torino, 2003.

[Cantor, 1872] G. Cantor, "Über die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen", *Mathematische Annalen*, 5 (1872), pp. 123-32.

[Cantor e Dedekind 1937] G. Cantor e R. Dedekind, *Cantor-Dedekind Briefwechsel* (a cura di E. Noether e J. Cavaillès), Hermann, Paris, 1937; trad. franc. in [Cavaillès 1962, pp. 187-249].

[Cavaillès 1962] J. Cavaillès, *Philosophie mathématique*, Hermann, Paris, 1962.

[Cayley 1854] A. Cayley, "On the Theory of Groups, as depending on the Symbolic Equation $\theta^n = 1$", *Philosophical Magazine*, (4) 7, 1854, ristampato in [Cayley 1889-97, vol. 2, pp. 123-30].

[Cayley 1889-97] A. Cayley, *The Collected Mathematical Papers*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 13 voll., 1889-1897.

[Dedekind 1872] R. Dedekind, *Stetigkeit und irrationale Zahlen*, Vieweg, Braunschweig, 1872; trad. it. con il titolo *La continuità e i numeri irrazionali* in [Dedekind 1926, pp. 119-52] e con il titolo *Continuità e numeri irrazionali* in [Dedekind 1983, pp. 63-78].

[Dedekind 1876-77] R. Dedekind, "Sur la théorie des nombres entiers algébriques", *Bulletin des Sciences mathématiques et astronomiques*, 11 (1876), 1 (1877), in [Dedekind 1932, vol. 3, pp. 262-96].

[Dedekind 1888] R. Dedekind, *Was sind und was sollen die Zahlen*, Braunschweig, Leipzig, 1888; trad. it. di O. Zariski, col titolo *Essenza e significato dei numeri*, in [Dedekind 1926, pp. 7-118], e di F. Gana col titolo *Che cosa sono e a che servono i numeri?* in [Dedekind 1983, pp. 79-128].

[Dedekind 1897] R. Dedekind, "Über Zerlegungen von Zahlen durch ihre größten gemainsame Teiler", in H. Beckurts (a cura di), *Festschrift der Herzoglichen Technische Hochschule Carolo-Wilhelmina*, Vieweg & Sohn, Braunschewig, 1897, pp. 1-40, in [Dedekind 1932, vol. 2].

[Dedekind 1926] R. Dedekind, *Essenza e significato dei numeri. Continuità e numeri irrazionali* (a cura di O. Zariski), Casa Editrice Alberto Stock, Roma, 1926.

[Dedekind 1932] R. Dedekind, *Gesammelte mathematische Werke* (a cura di R. Fricke, E. Noether, Ö. Ore), 3 voll., Vieweg, Braunschweig, 1932.

[Dedekind 1983] R. Dedekind, *Scritti sui fondamenti della matematica* (a cura di F. Gana), Bibliopolis, Napoli, 1983.
[Dirichlet 1837] P. G. Lejeune Dirichlet, "Über die Darstellung ganz willkürlicher Funktionen durch Sinus- und Cosinus-reihen", *Repertorium der Physik*, 1 (1837), pp, 152-74.
[Dirichlet 1863] P. G. Lejeune Dirichlet, *Vorlesungen über Zahlentheorie* (a cura di R. Dedekind), Vieweg, Braunschweig, 1^a ed. 1863, 2^a ed. 1871, 3^a ed. 1879, 4^a ed. 1894.
[Dugac 1976] P. Dugac, *Richard Dedekind et les fondements des mathématiques*, Vrin, Paris, 1976.
[Edwards 1987] H. M. Edwards, "Dedekind's invention of ideals", in [Phillips 1987, pp. 8-20].
[Ferreirós 2007] J. Ferreirós, *Labyrinth of Thought*, Birkhäuser, Basel, 2007.
[Frege 1976] G. Frege, *Wissenschaftlicher Briefwechsel*, Felix Meiner, Hamburg, 1976; trad. it. *Alle origini della nuova logica*, Boringhieri, Torino, 1983.
[Kossak 1872] E. Kossak *Die Elemente der Arithmetik*, Friedrich-Werderschen Gymnasium, Berlin, 1872.
[Lipschitz 1986] R. Lipschitz, *Briefwechsel mit Cantor, Dedekind, Helmholtz, Kronecker, Weierstrass und anderen*, Teubner, Leipzig, 1986.
[Lolli 2013] G. Lolli, *Nascita di un'idea matematica*, Edizioni della Normale, Pisa, 2013.
[Peano 1889] G. Peano, *Arithmetices principia, nova methodo exposita*, Fr.lli Bocca, Torino, 1889, ritampato in [Peano 1958, 20-55].
[Peano 1958] G. Peano, *Opere Scelte*, vol. II, Cremonese, Roma, 1958.
[Phillips 1987] E. R. Phillips (a cura di), *Studies in the History of Mathematics*, vol. 26, MAA, Washington, 1987.
[Scharlau 1981] W. Scharlau (a cura di), *Richard Dedekind 1831/1981. Eine Würdigung zu seinem 150. Geburtstag*, Vieweg, Braunschweig, 1981.
[Stein 1968] H. Stein, "*Logos*, Logic, *Logistik*: Some Philosophical Remarks on Nineteenth-Century Transformation of Mathematics", in [Aspray e Kitcher 1988, pp. 238-59].
[Weber 1898] H. M. Weber, *Lehrbuch der Algebra*, 3 voll., Vieweg, Braunschweig, 1895-98.

Gabriele Lolli

Ha insegnato Logica matematica per diversi anni, prevalentemente nell'Università di Torino; in seguito è stato Professore di Filosofia della matematica presso la Scuola Normale di Pisa, cofondatore del network Filmat di filosofia della matematica; ora a riposo per limiti di età.