
Matematica, Cultura e Società

RIVISTA DELL'UNIONE MATEMATICA ITALIANA

ENRICO GIUSTI

Dalla Géométrie al calcolo: il problema delle tangenti e le origini del calcolo infinitesimale

Matematica, Cultura e Società. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. 1 (2016), n.3, p. 209–239.

Unione Matematica Italiana

[<http://www.bdim.eu/item?id=RUMI_2016_1_1_3_209_0>](http://www.bdim.eu/item?id=RUMI_2016_1_1_3_209_0)

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

Dalla Géométrie al calcolo: il problema delle tangenti e le origini del calcolo infinitesimale

ENRICO GIUSTI

"Il Giardino di Archimede", Firenze

E-mail: giusti@math.unifi.it

Sommario: *L'articolo prende in esame le vicende che hanno condotto all'invenzione del calcolo infinitesimale. Nel periodo che va dal 1635 al 1684 si sviluppano due programmi di ricerca, che poi confluiranno nel calcolo. Da una parte la Géométrie di Descartes (1637) pone il problema generale del tracciamento della tangente a una curva generica; un problema che verrà affrontato da numerosi autori, primo fra tutti Fermat, e che troverà la sua completa soluzione nel calcolo differenziale. Dall'altra la Geometria indivisibilium di Cavalieri (1635) apre la strada per affrontare in maniera generale il problema delle quadrature, che a sua volta condurrà al metodo newtoniano degli sviluppi in serie. Il lavoro si conclude con un breve resoconto della disputa sulla priorità.*

Abstract: *The article examines the events that led to the invention of calculus. In the period 1635-1684 two research programs develop, which eventually will merge into the calculus. On the one hand Descartes' Géométrie (1637) poses the general problem of drawing the tangent to a generic curve; a problem that will be tackled by various authors, most notably Fermat, and which will find its complete solution within the differential calculus. On the other hand Cavalieri's Geometria indivisibilium (1635) opens the way to deal in a general way the problem of the quadratures, which in turn will lead to the Newtonian method of infinite series. The paper concludes with a brief account of the priority dispute.*

La geometria delle curve

La pubblicazione nel 1637 del *Discours de la méthode*⁽¹⁾, di cui la *Géométrie* era l'ultimo dei saggi, segna un punto di svolta nella matematica moderna. Descartes aveva innovato radicalmente l'impianto classico della geometria delle curve, introducendo un nuovo oggetto: la curva-equazione, che gli aveva permesso, tra le altre cose, di risolvere completamen-

te il problema di Pappo, di dare un metodo universale per la soluzione geometrica delle equazioni, di porre in maniera generale e di risolvere il problema delle tangenti, "il problema più utile e generale, non solo tra quelli che conosco, ma

anche tra quelli che ho mai desiderato di conoscere in Geometria"⁽²⁾. Tra gli altri, fu proprio questo problema, e la soluzione che

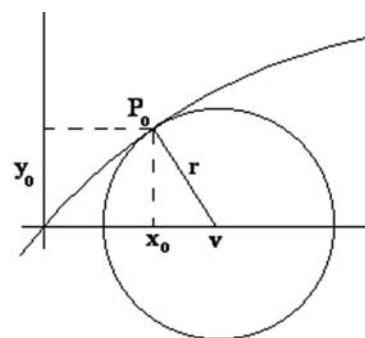


Fig. 1

⁽¹⁾ *Discours de la methode pour bien conduire sa raison, & chercher la verité dans les sciences. Plus la Dioptrique, les Meteores et la Geometrie, qui sont des essais de cete Methode.* A Leyde, de l'Imprimerie de Ian Maire, 1637. *Œuvres de Descartes*, publiées par C. Adam et P. Tannery, vol. VI. Nel seguito, questa edizione sarà indicata brevemente con *Œuvres de Descartes*, seguita dal numero del volume.

⁽²⁾ *Œuvres de Descartes* VI, p. 413. Quando non espressamente indicato, la traduzione in italiano dei vari passi è mia.

Descartes ne aveva proposto nella *Géométrie*, a essere oggetto di studi fin dall'apparire dell'opera cartesiana.

Come è noto, la soluzione di Descartes passa attraverso la considerazione della circonferenza tangente alla curva in un punto dato $P_0 = (x_0, y_0)$. Una volta trovata infatti quest'ultima, il suo raggio per P_0 sarà normale alla curva, e per ricavare la tangente non si dovrà far altro che prendere la perpendicolare al raggio. Descartes considera la circonferenza con centro nel punto v sull'asse delle ascisse e raggio s , dunque di equazione

$$(x - v)^2 + y^2 = r^2$$

e impone che essa abbia un'intersezione doppia in P_0 con la curva. Analiticamente, se la curva ha equazione $P(x, y) = 0$ (con P polinomio di grado arbitrario), si elimina una delle variabili, ad esempio la y , dal sistema formato dalle equazioni della curva e della circonferenza, e si richiede che il polinomio $Q(x)$ così ottenuto abbia una radice doppia in x_0 , ovvero che sia della forma

$$(1) \quad Q(x) = (x - x_0)^2 R(x)$$

con $R(x)$ da determinare. Se il polinomio $P(x, y)$ è di grado n , il risultante $Q(x)$ è di grado $2n$, e $R(x)$ di grado $2n - 2$. Uguagliando nella (1) i coefficienti dei termini dello stesso grado si ottengono dunque $2n + 1$ equazioni in $2n + 1$ incognite, i $2n - 1$ coefficienti di $R(x)$ e i due parametri della circonferenza v e s . Risolvendo questo sistema si ricavano questi due parametri, che determinano la circonferenza tangente. Una volta trovata quest'ultima, la retta tangente è perpendicolare al raggio che passa per il punto P_0 .

Il problema delle tangenti è dunque risolto nella sua generalità, almeno in linea di principio. In realtà il metodo conduce a calcoli piuttosto intricati, anche nei casi più semplici. A titolo di esempio, vediamo cosa avviene nella parabola, di equazione $y = mx^2$. Scrivendo questo valore di y nell'equazione della circonferenza, si ottiene $(x - v)^2 + m^2x^4 = r^2$, ossia

$$m^2x^4 + x^2 - 2vx + v^2 - r^2 = 0.$$

Il polinomio a primo membro deve avere una radice doppia per $x = x_0$, e dunque deve essere della forma

$$(x - x_0)^2(ax^2 + bx + c),$$

che sviluppando diventa

$$ax^4 + (b - 2ax_0)x^3 + (c - 2bx_0 + ax_0^2)x^2 + (bx_0^2 - 2cx_0)x + cx_0^2.$$

Confrontando termine a termine con l'equazione precedente, si ottiene

$$\begin{aligned} a &= m^2 \\ b - 2ax_0 &= 0 \\ c - 2bx_0 + ax_0^2 &= 1 \\ bx_0^2 - 2cx_0 &= -2v \\ cx_0^2 &= v^2 - r^2, \end{aligned}$$

dalle quali si possono ricavare una ad una le cinque incognite a, b, c, v e r . Si ha

$$\begin{aligned} a &= m^2 \\ b &= 2m^2x_0 \\ c &= 1 - 3m^2x_0^2 \\ v &= x_0 + 2m^2x_0^2 = x_0 + 2\frac{y_0^2}{x_0}, \end{aligned}$$

il risultato più importante, che dà la posizione del centro della circonferenza; e infine

$$r^2 = m^2x_0^4 + 4m^4x_0^6.$$

La soluzione ottenuta in questo modo è piuttosto formale, e per ritrovare la soluzione "classica" occorre ancora un po' di geometria.

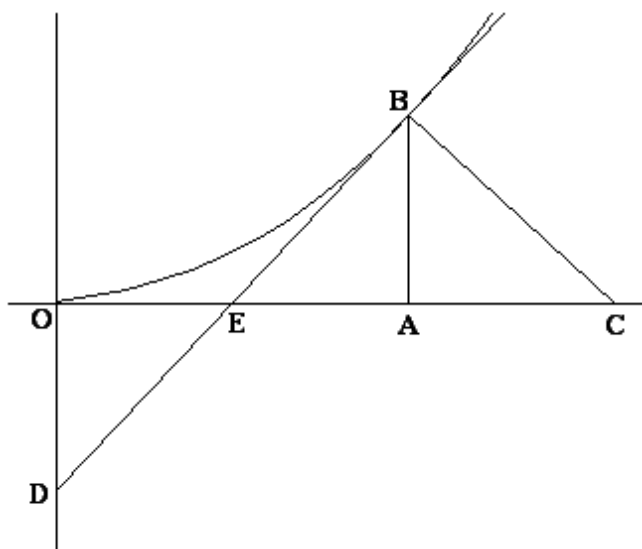


Fig. 2

Nel disegno, si ha $OA = x_0$, $AB = y_0$, $OC = v$ e $BC = r$. Si ha inoltre $AC = v - x_0$, e se si pone $EA = z$, risulta $OE = x_0 - z$.

I triangoli ABC e AEB sono simili, perché sono rettangoli e gli angoli ACB e ABE sono uguali perché hanno i lati perpendicolari. Si ha allora $AC:AB = AB:AE$, e quindi $(v - x_0) : y_0 = y_0 : z$. Di qui si può ricavare $z = y_0^2 / (v - x_0)$, e ricordando che $v = x_0 + 2y_0^2 / x_0$, si trova infine $z = x_0 / 2$. Ma allora $OE = EA$, e i due triangoli EBA ed EDO sono uguali, per cui $OD = AB = y_0$. Si ritrova allora il risultato classico, secondo cui per trovare la tangente alla parabola in un punto B si riporta sull'asse un segmento OD uguale all'ordinata AB ; la retta che congiunge D con B è tangente alla parabola.

In conclusione, se il metodo cartesiano permette di tracciare la tangente ad ogni curva che si può esprimere con un'equazione (o come diceva Descartes, a ogni curva "geometrica"), il risultato coinvolge calcoli che sono lunghi anche nei casi più semplici e che lo diventano sempre più a misura che aumenta il grado della curva. Inoltre, la soluzione viene data in termini analitici, e non sempre ha l'immediatezza e l'eleganza di una soluzione geometrica.

Non mancavano quindi gli stimoli per ulteriori ricerche, che in effetti iniziarono negli ambienti cartesiani, in particolare olandesi, già nel periodo immediatamente seguente la pubblicazione della *Géométrie*. Ma prima di seguire questo percorso, lasciamo per un momento il metodo di Descartes per esaminare quello che negli stessi anni veniva proposto più privatamente da un altro grande matematico francese: Pierre de Fermat.

Il metodo dei massimi e minimi

Quando nel 1637 Descartes pubblica la sua *Géométrie*, Fermat già da qualche anno possedeva un suo metodo per le tangenti, basato sulla rappresentazione analitica delle curve. Lungi dal renderle pubbliche, il matematico tolosano aveva preferito comunicare le sue scoperte solo a una ristretta cerchia di amici, e con ogni probabilità fu proprio la notizia della prossima pubblicazione della *Géométrie* di Descartes, e le anticipazioni sul suo contenuto, che lo spinsero a dare al suo metodo una diffusione maggiore, anche per evitare che venisse messa in dubbio non

solo la priorità, ma anche l'indipendenza dei suoi risultati. Anche in queste circostanze, Fermat non pensò nemmeno a una pubblicazione a stampa dei suoi risultati, ma si limitò a diffonderli in un certo numero di opuscoli, che circolarono manoscritti in Francia e più tardi in Italia, grazie soprattutto alle cure di Mersenne, che ne fece pervenire copia allo stesso Descartes. Le reazioni di quest'ultimo furono risentite, e diedero luogo a una controversia che si protrasse per alcuni mesi, e della quale ci occuperemo dopo aver descritto brevemente le idee di Fermat⁽³⁾.

In realtà, più che di metodo si dovrebbe parlare di *metodi* di Fermat, o quanto meno di un'evoluzione delle tecniche del matematico tolosano. Un'evoluzione d'altra parte tutta da ricostruire, dato che le idee di Fermat furono poste su carta solo molto tempo dopo il loro apparire, e con ogni probabilità non nell'ordine nel quale esse si erano presentate.

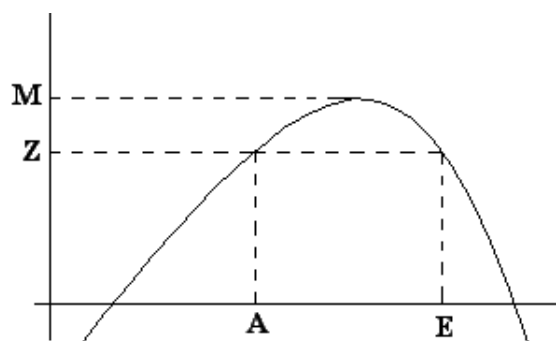


Fig. 3

Il metodo prende origine dalle ricerche di Fermat sui massimi e i minimi di una funzione (o meglio di una grandezza variabile, dato che il concetto di funzione si preciserà solo molti decenni più tardi), che a loro volta si sviluppano a partire dallo studio dell'opera di Viète, da cui Fermat trae anche le sue notazioni. Consideriamo dunque una funzione $f(X)$, di cui vogliamo trovare ad esempio il massimo, che chiamiamo M . Se prendiamo un valore Z minore di M – dice Fermat –, l'equazione $f(X) = Z$ avrà due soluzioni A ed E , che si troveranno una da una parte

⁽³⁾ Sulla figura e l'opera di Fermat è di rigore il rinvio al volume di M. S. Mahoney, *The mathematical career of Pierre de Fermat 1601-1665*, Princeton University Press, 1973 (2 ed. 1994).

e l'altra dall'altra del punto di massimo. Poiché $f(A)=Z$ e $f(E)=Z$, si avrà $f(A)=f(E)$, ossia $f(A)-f(E)=0$, e dividendo per $A-E$:

$$\frac{f(A)-f(E)}{A-E}=0$$

Se ora aumentiamo il valore di Z , sempre però restando al di sotto del massimo M , i due punti A ed E si avvicineranno sempre più tra loro, finché verranno a coincidere quando Z raggiunge il valore massimo M . Se dunque, dopo aver fatte le dovute semplificazioni, si pone $E=A$ nell'equazione precedente, si troverà un'equazione dalla quale si potrà ricavare il punto di massimo A , e dunque il valore massimo M .

Ad esempio, supponiamo di voler trovare, tra tutti i rettangoli di perimetro dato, quello che ha area massima. Se chiamiamo $2B$ il perimetro, e X la base del rettangolo, l'altezza sarà $B-X$, e l'area del rettangolo $(B-X)X=BX-X^2$. Si tratta allora di trovare il massimo della funzione $f(X)=BX-X^2$.

Seguendo il metodo precedente, avremo $f(A)-f(E)=0$, cioè $BA-A^2-BE+E^2=0$, ovvero

$$B(A-E)-(A^2-E^2)=0.$$

Dividiamo ora per $A-E$ e semplifichiamo. Ricordando che $A^2-E^2=(A-E)(A+E)$, avremo

$$B-(A+E)=0.$$

Per trovare il punto di massimo, si deve porre $E=A$ nella relazione precedente; si ha allora $B-2A=0$, e dunque $A=B/2$. Di conseguenza, il rettangolo di area massima è il quadrato.

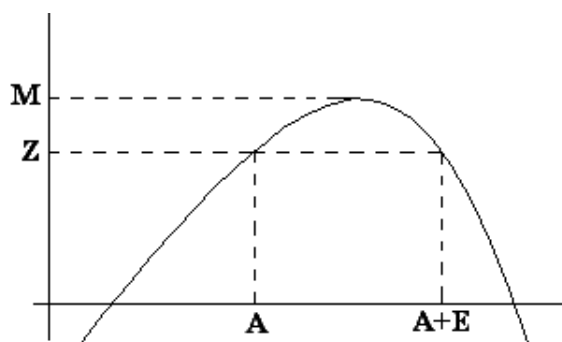


Fig. 4

Le tangenti e l'adequazione

Prima che il metodo dei massimi e minimi fosse applicabile al problema delle tangenti, occorre una piccola modifica. Come abbiamo visto, uno dei passaggi del metodo precedente consisteva nel dividere per $A-E$ e semplificare. Ora questa semplificazione, che nell'esempio richiedeva solo la conoscenza della formula della differenza dei quadrati, o se si vuole di eseguire la divisione di A^2-E^2 per $A-E$, quando entrano in gioco potenze di grado più alto ha bisogno di divisioni più complicate, e dunque di calcoli molto più lunghi e difficili. Di qui una piccola variante che evita queste divisioni complesse. L'idea, ci dice Fermat, consiste nell'indicare le due soluzioni (incognite) dell'equazione $f(X)=Z$, non già con A ed E come in precedenza, ma con A ed $A+E$; infatti "poiché E (allo stesso modo di A) è una quantità variabile, niente vieta di chiamarla $A+E$ "⁽⁴⁾.

Le differenze col metodo precedente sono minime. In questo caso bisognerà scrivere $f(A+E)-f(A)=0$, poi dividere per E , e infine porre $E=0$. Riprendendo l'esempio precedente, in cui $f(X)=BX-X^2$, avremo

$$f(A)=BA-A^2, f(A+E)=B(A+E)-(A+E)^2=BA+BE-A^2-E^2-2AE,$$

e quindi

$$f(A+E)-f(A)=BE-E^2-2AE.$$

Dividendo per E , otteniamo $B-E-2A=0$, e ponendo $E=0$, arriviamo come prima alla relazione $B-2A=0$ che risolve il problema. Da un punto di vista tecnico, la sola differenza è stata di sostituire la divisione per $A-E$, che in questo caso non comporta difficoltà ma che in generale può essere piuttosto lunga, con la divisione più semplice per la sola E . Si tratta di una semplificazione reale, perché se è vero che così facendo bisogna calcolare $f(A+E)$, più complicata di $f(E)$, è vero anche che questo calcolo comporta solo quello di potenze di $A+E$, più facili da eseguire che non le divisioni per $A-E$ necessarie con l'altro metodo.

⁽⁴⁾ *Œuvres de Fermat* publiées par P. Tannery et Ch. Henry, tome I, p. 150. Nel seguito, questa edizione sarà indicata brevemente con *Œuvres de Fermat*, seguita dal numero del volume.

Il secondo metodo dei massimi e minimi può dunque sembrare un puro e semplice miglioramento tecnico del primo, che non ne cambia la struttura concettuale. In realtà le cose non stanno precisamente così. Se infatti esaminiamo la natura delle quantità A ed E che entrano nei due metodi, vediamo che si è prodotto un cambiamento, che per quanto piccolo sarà importante per gli sviluppi successivi. Nel primo metodo, le quantità A ed E entravano in maniera simmetrica, rappresentando le due soluzioni dell'equazione $f(X)=Z$. Al variare di quest'ultima grandezza, anche A ed E variavano di conseguenza, fino a coincidere quando al posto di

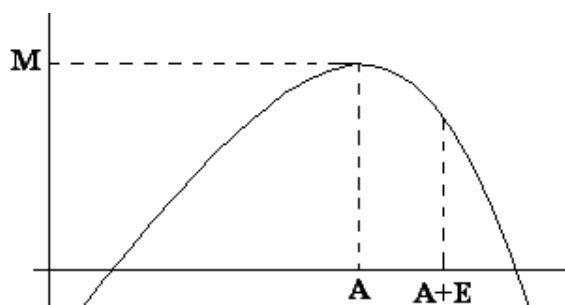


Fig. 5

Z si prendeva il valore massimo M . In altre parole, A ed E erano ambedue incognite e variabili. Solo quando $Z=M$, cioè quando le due soluzioni A ed E si fondevano in una sola, una di esse, quella che avevamo indicato con E , spariva e l'altra perdeva il suo carattere di variabile per conservare solo quello

di incognita, che veniva determinata risolvendo l'equazione risultante. Nel secondo metodo invece la situazione è molto più ambigua. È vero che in definitiva non si è fatto altro che cambiare il nome di una delle variabili, indicando con $A+E$ quella che prima si era chiamata E ; ma è anche vero che così facendo la simmetria formale tra le due variabili si è spezzata, e che ora la variabile A porta fin dall'inizio il segno di quello che diventerà ponendo $E=0$. In breve, mentre nel primo metodo A ed E erano ambedue allo stesso tempo variabili e incognite, nel secondo le due caratteristiche precedentemente condivise si spezzano: A diventa fin dall'inizio la posizione, incognita ma non variabile, del punto di massimo, mentre E rappresenta la variazione, variabile ma non incognita, che facciamo subire al punto di massimo al fine di paragonare i valori relativi. Di conseguenza, la relazione $f(A)=f(E)$, che nel primo metodo era una vera equazione, quando nel secondo si scrive $A+E$ al posto di E essa diventa un'adequazione, un'equazione approssimata che non sarà vera che nello stadio finale, quando cioè si sarà posto $E=0$.

Questo confronto per adeguazione produce due termini disuguali, che alla fine producono l'equazione (secondo il mio metodo) che ci dà la soluzione del problema.⁽⁵⁾

In quest'ultima formulazione, il metodo è particolarmente adatto per affrontare il problema delle tangenti. Per comprenderne il meccanismo, seguiamo

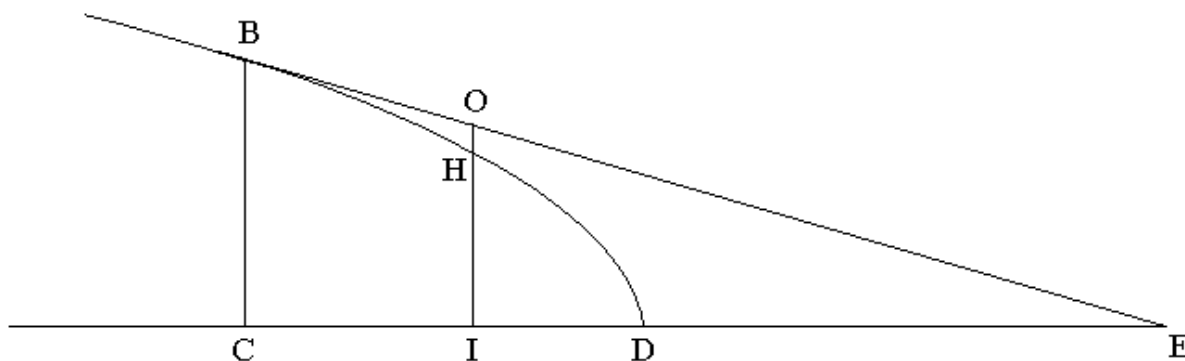


Fig. 6

⁽⁵⁾ Lettera a Mersenne, 1 aprile 1640. *Œuvres de Fermat*, II, p. 187–188.

Fermat nel suo calcolo della tangente alla parabola. Sia dunque BHD una parabola, con asse EC, e sia B un punto nel quale si vuole trovare la tangente BE. È evidente che questa tangente sarà determinata quando si conoscerà la lunghezza del segmento DE.

La proprietà caratteristica della parabola è che le ordinate ID, CD stanno tra loro come i quadrati delle ascisse corrispondenti IH, CB:

$$ID:CD = IH^2:CB^2.$$

Se ora al posto del segmento IH con un estremo sulla curva si mette il segmento IO con l'estremo sulla tangente, essendo $IO > IH$ sarà anche $ID:CD < IO^2:CB^2$. D'altra parte, poiché $IO:CB = IE:CE$, avremo $ID:CD < IE^2:CE^2$.

A questo punto Fermat sostituisce la disuguaglianza trovata con un'adequazione, scrivendo

$$ID:CD \approx IE^2:CE^2.$$

Si può esprimere quest'ultima adeguazione in termini algebrici, ponendo $CD=B$, $DE=A$, e $CI=E$. Si ha allora $ID=B-E$, $CE=B+A$, $IE=B+A-E$, e dunque

$$(B-E):B \approx (B+A-E)^2:(B+A)^2$$

ossia

$$(B-E)(B+A)^2 \approx B(B+A-E)^2.$$

A questo punto non resta che sviluppare i quadrati e semplificare. Si giunge così all'adequazione

$$-E(B+A)^2 \approx -2BE(B+A) + BE^2$$

e dividendo per E dopo aver cambiato il segno ad ambedue i membri:

$$(B+A)^2 \approx 2B(B+A) - BE.$$

Se ora si pone $E=0$, l'adequazione diventa un'equazione. Si ha allora $(B+A)^2 = 2B(B+A)$, e dividendo per $(B+A)$ si ottiene $B+A=2B$ e quindi in conclusione $A=B$.

Per trovare la tangente alla parabola nel punto B basta allora prendere sull'asse un punto E in modo che $DE=CD$. La retta EB sarà tangente alla parabola, ritrovando così il risultato classico.

Naturalmente è possibile rileggere il metodo delle tangenti di Fermat come un'applicazione di quello per i massimi e i minimi. Basta infatti osser-

vare che, posto $CB=D$, il rapporto

$$ID:IO^2 = \frac{ID \times CE^2}{CB^2 \times IE^2} = \frac{(B-E)(B+A)^2}{D^2(B+A-E)^2}$$

è sempre minore del rapporto $CD:CB^2$, a cui è uguale solo per $E=0$. Di conseguenza la funzione

$$f(E) = \frac{(B-E)(B+A)^2}{D^2(B+A-E)^2}$$

ha un massimo per $E=0$. Si può allora applicare a questa funzione il metodo dei massimi e minimi, ma con una differenza: che mentre in precedenza l'incognita era la posizione del massimo o del minimo, ora si sa a priori che questo deve cadere nel punto $E=0$, e da questa condizione ci si serve per trovare la distanza incognita $A=DE$. Ma tutto ciò vale solo in linea di principio, perché in realtà Fermat non si serve mai di questa funzione, ma utilizza direttamente l'adequazione ottenuta scrivendo sulla tangente la proprietà caratteristica della curva. E d'altra parte la riduzione della tangente alla parabola a un problema di massimo passa attraverso la considerazione del rapporto $ID:IO^2$ tra grandezze non omogenee, che Fermat, in omaggio al principio di omogeneità della teoria delle proporzioni, si guarda bene dall'introdurre, utilizzando invece i rapporti $ID:CD$ e $IH^2:CB^2$ tra grandezze omogenee.

Possiamo vedere lo stesso metodo all'opera su un altro esempio, quello della tangente alla cissoide di Nicomede⁽⁶⁾.

Per trovare la tangente a questa curva in un dato punto H , Fermat chiama A la sottotangente DF , e pone $AD=Z$, $DG=N$, $DH=R$, e $DE=E$.

La proprietà caratteristica della cissoide IHG è espressa dalla proporzione

$$MD:DG = DG:DH,$$

cioè, tenendo conto che per le proprietà della circonferenza si ha $DM^2=ZN$,

$$R\sqrt{ZN} = N^2.$$

Ciò posto, "si deve considerare la proprietà specifica non più sulla curva, ma sulla tangente"⁽⁷⁾; si dovrà

⁽⁶⁾ *Œuvres de Fermat*, I, p. 160.

⁽⁷⁾ *Œuvres de Fermat*, I, p. 160.

se si vuole si possono prendere le ordinate sulle tangenti trovate col metodo precedente al posto di quelle sulle curve; e inoltre (che è il pregio del metodo) si possono prendere porzioni delle tangenti già trovate al posto delle porzioni corrispondenti delle curve, in modo da trovare l'adequazione⁽⁸⁾.

Possiamo vedere all'opera quest'ultimo precetto nella ricerca della tangente alla cicloide, la sola che Fermat sviluppò nei dettagli.

La cicloide è la curva disegnata da una circonferenza OLD O che ruota sulla retta NO. La sua proprietà caratteristica è che tagliandola con una retta orizzontale come AE, il segmento AG tra la cicloide e il cerchio generatore è uguale all'arco GD.

Per trovare la tangente alla cicloide in un suo punto A, si traccia la retta orizzontale AE, e nel punto G la tangente GC alla circonferenza. Quest'ultima è nota dalla geometria elementare; in particolare si possono considerare noti i segmenti GC e CE. Se scriviamo la proprietà caratteristica della cicloide relativamente alla retta IF, avremo che il segmento HL è uguale all'arco LD, e dunque alla somma dei due archi DG e GL:

$$HL = \text{arco}(DG) + \text{arco}(GL).$$

Mettiamo ora in pratica la ricetta di Fermat. In primo luogo “si possono prendere le ordinate sulle tangenti trovate col metodo precedente al posto di quelle sulle curve”; nel nostro caso ciò significa che invece del segmento HL (con gli estremi sulle curve) si può prendere il segmento IM con gli estremi sulle tangenti. Inoltre, “si possono prendere porzioni delle tangenti già trovate al posto delle porzioni corrispondenti delle curve”, cioè invece dell'arco GL si può prendere la porzione di tangente GM. Ciò facendo, l'equazione precedente diventa un'adequazione. Ricordando che l'arco DG è uguale al segmento GA, si ottiene allora

$$IM \approx AG + GM.$$

Introduciamo ora alcune notazioni algebriche, ponendo⁽⁹⁾

$$\begin{aligned} DE &= B \\ FE &= E \\ BE &= A \\ AG &= C \\ AE &= D \\ GC &= L \\ CE &= M. \end{aligned}$$

Avremo allora $BF = A + E$, e applicando il teorema di Talete ai triangoli IFB e MFC:

$$\begin{aligned} IF &= \frac{(A + E)D}{A} \\ MF &= \frac{(M + E)(D - C)}{M} \\ GM &= \frac{LE}{M} \end{aligned}$$

da cui

$$\begin{aligned} IM = IF - MF &= D + \frac{DE}{A} - D + C - \frac{(D - C)E}{M} = \\ &= C + \frac{DE}{A} - \frac{DE}{M} + \frac{CE}{M} \end{aligned}$$

L'adequazione diventa allora

$$C + \frac{DE}{A} - \frac{DE}{M} + \frac{CE}{M} \approx C + \frac{EL}{M}$$

e dunque

$$\frac{DE}{A} - \frac{DE}{M} + \frac{CE}{M} \approx \frac{EL}{M}$$

Dividendo per E si ottiene

$$\frac{D}{A} \approx \frac{D}{M} - \frac{C}{M} + \frac{L}{M}$$

da cui in conclusione⁽¹⁰⁾

$$A = \frac{MD}{L + D - C}.$$

Descartes contro Fermat

Come si è detto, uno dei motivi che indussero Fermat a mettere su carta il suo metodo dei massimi e minimi e delle tangenti fu l'annunciata pubblicazione della *Géométrie* di Descartes. Verso la fine del

⁽⁸⁾ *Œuvres de Fermat*, I, p. 162.

⁽⁹⁾ Seguendo Fermat, indichiamo con le vocali le quantità incognite, e con le consonanti quelle note.

⁽¹⁰⁾ Notiamo che non comparendo nell'ultima formula la variabile E , non è necessario porre $E=0$.

1637, poco dopo la pubblicazione della *Géométrie*, Fermat mandò un breve trattato a Mersenne, che si affrettò a comunicarlo a Descartes. Lo scritto di Fermat non conteneva la prima versione della sua teoria dei massimi e minimi, né alcun tentativo di spiegazione di un metodo che veniva enunciato apoditticamente, e applicato ad alcuni problemi di massimo o di minimo e alla determinazione delle tangenti ad alcune curve, molte delle quali, come ad esempio la parabola, note fin dall'antichità.

Occorreva dunque una buona disposizione per accettare la bontà di un metodo appena abbozzato, e come si sa la pazienza non era tra le principali doti di Descartes. D'altra parte quest'ultimo non aveva tutti i torti a diffidare delle intenzioni del tolosano, che pochi mesi prima aveva criticato la sua *Diottrica* prima ancora che venisse pubblicata, sulla base di una copia che Jean de Beaugrand, incaricato di rivedere il Discorso sul metodo, gli aveva mandato senza nemmeno avvertire l'autore.

Che dunque Descartes guardasse all'opuscolo di Fermat come a un'opera proveniente da un ambiente ostile e mirante a sminuire la sua *Géométrie* è giustificabile, come pure è comprensibile che il suo esame del metodo delle tangenti fosse particolarmente severo e mirasse, più che a impadronirsi di un algoritmo che vedeva come diretto concorrente del suo, a trovarne i punti deboli ed eventualmente a ricondurlo nell'ambito della sua trattazione.

Le direzioni nelle quali Descartes porta il suo attacco sono due. In primo luogo, attenendosi strettamente alla lettera del testo di Fermat, in particolare al calcolo della tangente alla parabola, egli obietta che il metodo impiegato può condurre a risultati erranei. Come abbiamo visto, Fermat basava il suo metodo sul fatto che la proprietà caratteristica della parabola $ID:CD = IH^2:CB^2$ (vedi fig. 6), scritta sulla tangente diventa una disuguaglianza $ID:CD < IO^2:CB^2$, e quindi dà luogo all'adequazione $(B-E):B \approx (B+A-E)^2:(B+A)^2$, da cui si ricava la quantità A , e quindi la tangente. Ora, benché nella figura il punto I sia preso a destra di C , e quindi la quantità E sia positiva, è evidente dal metodo che la disuguaglianza $ID:CD < IO^2:CB^2$ debba valere sia quando I è a destra di C come nella figura, sia quando è a sinistra, o in altre parole che

l'adequazione $(B-E):B \approx (B+A-E)^2:(B+A)^2$ debba valere sia per E positivo che per E negativo. Descartes invece prende alla lettera la figura e il calcolo di Fermat, come se fosse necessario assumere la disuguaglianza solo per E positivo. Gli è allora facile far vedere che l'argomento di Fermat si applica sostituendo "ellisse" a "parabola", senza alterare una virgola (infatti se la curva è un'ellisse, la disuguaglianza $ID:CD < IO^2:CB^2$ resta valida, ma solo per i punti I a destra di C , come nella figura), e dove Fermat aveva affermato "nec unquam fallit methodus" può concludere "semperque fallit methodus".

Che si tratti di una lettura chiaramente pretestuosa e malevola è evidente: qualsiasi lettore non prevenuto non avrebbe mancato di convenire sul fatto che quando al posto di una parabola si prendeva un'ellisse, si sarebbe dovuto anche sostituire al posto della proprietà caratteristica della parabola la corrispondente proprietà dell'ellisse. Più giustificata è invece la seconda obiezione mossa contro il "metodo" di Fermat. Come si è detto, questi aveva asserito il legame tra il metodo delle tangenti e quello dei massimi e minimi, senza tuttavia spiegare come i due metodi fossero connessi. Descartes interpreta questa relazione nel senso che la tangente AB a una

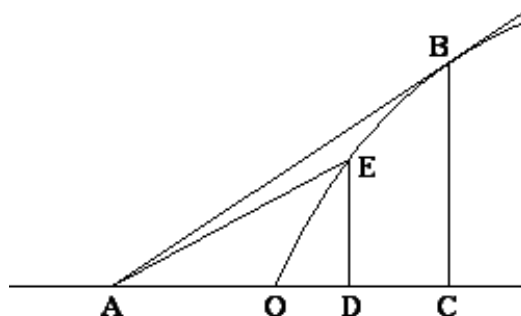


Fig. 9

curva OEB è la retta più lunga tra tutte quelle che da A vengono tirate verso la curva, come AE . Prendendo una parabola, e ponendo

$$\begin{aligned} OC &= D \\ BC &= B \\ AC &= A \\ DC &= E \end{aligned}$$

si ha $AD = A - E$, $OD = D - E$, e tenendo conto della proprietà caratteristica della parabola: $DE^2:BC^2 = OD:OC$, si ricava

$$DE^2 = B^2 \frac{D - E}{D}.$$

Risulta dunque

$$AE^2 = AD^2 + DE^2 = (A - E)^2 + B^2 \frac{D - E}{D} < A^2 + B^2.$$

Si può allora scrivere l'adequazione

$$(A - E)^2 + B^2 \frac{D - E}{D} \approx A^2 + B^2,$$

che semplificata dà

$$2AE + B^2 \frac{E}{D} - E^2 \approx 0.$$

Se ora si applica il metodo di Fermat, dividendo per E e ponendo $E = 0$, si perviene alla relazione

$$2A + \frac{B^2}{D} = 0,$$

che dà un risultato assurdo, perché A deve ovviamente essere positivo.

In questo caso la critica di Descartes coglie effettivamente un punto delicato nel metodo di Fermat, che né il suo autore né i seguaci e i critici hanno chiarito. In effetti, la risposta di Fermat fu che la retta AB non dà veramente un massimo, perché se si prende il punto D a destra di C la corrispondente retta AE ha lunghezza maggiore di AB . A questo argomento Descartes replicò che in questo caso non si sarebbe trattato di una retta tirata fino alla parabola, perché la retta AE avrebbe incontrato la parabola prima di E . In altre parole, Fermat prendeva in considerazione anche i punti al di là di C , e quindi sosteneva che la retta AB non dava un massimo, Descartes invece si limitava ai punti compresi tra O e C , e in questo caso la retta AB dava sì un massimo, ma questo cadeva in un estremo, e il metodo di Fermat non era applicabile. Quest'ultima limitazione non emerse però dalla discussione, che si concentrò invece sulla legittimità di considerare anche i punti al di là di C .

Infine, Descartes sospetta che il metodo di Fermat si applichi solo a casi particolari, forse addirittura che sia stato costruito ad hoc per la parabola, e sfida il suo antagonista a trovare la tangente alla

curva che più tardi fu chiamata “folium di Descartes”, di equazione $x^3 + y^3 = pxy$. Fu forse proprio il successo di Fermat nel trovare la soluzione a questo problema, e anche la buona disposizione del matematico di Tolosa, sempre incline a smorzare i toni contrariamente a quanto facevano i suoi fautori, Roberval ed Etienne Pascal, che indusse Descartes a porre fine alla disputa e a riconoscere la bontà del metodo di Fermat. A parte questa conclusione positiva, ognuno dei contendenti rimase persuaso della sostanziale preminenza della sua impostazione, e la disputa si chiuse senza portare un reale progresso né una chiarificazione della portata e dei limiti dei due metodi rivali.

Il problema delle tangenti tra la *Géométrie* e il calcolo

Durante la sua vita, Fermat non pubblicò praticamente nulla, e il suo metodo delle tangenti, benché non del tutto ignorato, venne diffuso solo in una cerchia piuttosto ristretta di scienziati, praticamente limitata ai circoli parigini, dove però si trovava in concorrenza con l'altrettanto inedito metodo cinematico di Roberval, e ad alcuni ambienti galileiani, dove Mersenne lo aveva introdotto in occasione del suo viaggio in Italia nel 1644, ambienti però largamente digiuni delle tecniche dell'algebra letterale e dunque impreparati a raccogliere le novità in questo campo.

Al contrario, la *Géométrie* di Descartes ebbe una rilevante diffusione, sia come parte del *Discours de la méthode*, col quale era apparsa originariamente nel 1637, sia soprattutto grazie alle numerose edizioni della traduzione latina, arricchite da commenti e spiegazioni che ne facilitavano la comprensione. Anche se la *Géométrie* continuò ad essere stampata ancora nel Settecento, furono soprattutto le edizioni procurate da Franz van Schooten nel 1648 e poi nel 1659–61, che oltre alla traduzione contenevano commenti dello stesso Schooten, di van Heurat, di De Baune, di Bartholin, a determinare la fortuna della *Géométrie* tra gli scienziati europei.

I primi contributi di rilievo vennero ovviamente dagli studiosi più vicini a Descartes, in particolare dagli ambienti olandesi e parigini. Si trattava essenzialmente di ricerche che miravano a semplificare gli

aspetti tecnici del metodo cartesiano, ed a eliminarne i punti deboli.

In primo luogo, la considerazione della circonferenza al posto della retta tangente elevava artificialmente il grado del polinomio risultante da n a $2n$. Inoltre, la soluzione richiedeva l'eliminazione di una delle due variabili e la soluzione di un sistema in molte incognite, delle quali però solo due (i parametri v e s della circonferenza) erano essenziali per la soluzione. Infine il metodo cartesiano non era applicabile che alle curve che avevano un'equazione ⁽¹¹⁾, e quindi escludeva a priori tutte quelle, come la cicloide, la quadratrice o la spirale, che ne erano prive. Di qui la distinzione cartesiana tra curve geometriche e meccaniche, e l'esclusione di queste ultime dalla geometria, un'esclusione non di principio (lo stesso Descartes prenderà in esame la cicloide e ne troverà la tangente, introducendo en passant il centro istantaneo di rotazione) ma di metodo: per le curve meccaniche non si dà un calcolo generale. Su questi tre punti si concentrerà gran parte della ricerca post-cartesiana.

Il primo punto ad essere affrontato riguarda la circonferenza tangente. Già nella prima edizione latina della *Geometria* ⁽¹²⁾, pubblicata nel 1649, Florimond De Beaune aveva osservato come la considerazione della retta tangente, di equazione $y = y_0 + m(x - x_0)$, permettesse di evitare l'innalzamento del grado del polinomio risultante, che così risultava di grado n . Nella seconda edizione di dieci anni successiva, una nota di Johannes Hudde insegnava come evitare l'introduzione del polinomio ausiliario $R(x)$, in modo da ridurre le incognite alle sole v e s nella formulazione cartesiana, o meglio alla sola m in quella di De Baune. Il metodo di Hudde consisteva nell'osservare che un polinomio

$$Q(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots + a_nx^n$$

⁽¹¹⁾ Con questo termine Descartes indicava le curve che si potevano rappresentare con un'equazione $P(x, y) = 0$, dove P è un polinomio, curve che oggi si chiamano algebriche. Le altre, le odierne curve trascendenti, all'epoca non avevano un'equazione, e venivano descritte mediante la loro costruzione o qualche altra proprietà caratteristica.

⁽¹²⁾ *Renati des Cartes Geometria, cum notis Florimondi de Beaune... opera atque studio Francisci a Schooten, Lugduni Batavorum, Ian Maire, 1649.*

ha una radice doppia in un punto x_0 se e solo se oltre a $Q(x_0) = 0$ è anche verificata l'equazione $Q_1(x_0) = 0$, dove $Q_1(x)$ è il polinomio che si ottiene da Q moltiplicando i singoli termini per una qualsiasi progressione aritmetica $k_0, k_1, \dots, k_n$:

$$Q_1(x) = k_0a_0 + k_1a_1x + k_2a_2x^2 + \dots + k_na_nx^n.$$

In particolare si può prendere la progressione $0, 1, 2, \dots, n$, e quindi in definitiva si giunge al sistema di due equazioni

$$a_0 + a_1x_0 + a_2x_0^2 + a_3x_0^3 + \dots + a_nx_0^n = 0$$

$$a_1x_0 + 2a_2x_0^2 + 3a_3x_0^3 + \dots + na_nx_0^n = 0$$

di cui la prima è automaticamente verificata in quanto il punto P_0 giace sulla curva, e la seconda dà il valore del parametro m .

Vediamo ad esempio il caso semplice della parabola di equazione $py = x^2$. Sostituendo $y_0 + m(x - x_0)$ al posto di y , si ottiene

$$Q(x) = x^2 - py_0 - pm(x - x_0)$$

e

$$Q_1(x) = 2x - pm,$$

da cui si ricava $m = 2x_0/p$. L'equazione della retta tangente alla parabola nel punto (x_0, y_0) è dunque

$$y = y_0 + 2m(x - x_0)/p.$$

Il metodo di Hudde, come si è detto, ha il gran vantaggio di evitare l'introduzione del polinomio ausiliario, e quindi di limitare i calcoli alla soluzione di una sola equazione. D'altra parte, esso richiede ancora in via preliminare l'eliminazione di una delle variabili tramite l'equazione della retta tangente, e quindi una manipolazione a volte laboriosa dell'equazione della curva; in due parole, si tratta di un metodo e non ancora di un algoritmo.

La definitiva automatizzazione del procedimento è ancora opera di Hudde, che come per il metodo precedente si era limitato a scrivere un lettera a Schooten, stavolta però con la raccomandazione "che ciò che vi mando resti segreto, e che non diciate a chicchessia che si sia trovato qualcosa di simile". La regola, che Hudde si limita a enunciare, è

Ordinate tutti i termini dell'equazione che esprime la natura della curva in modo che risultino = 0. ... Moltiplicate il termine in cui y figura alla massima potenza per un numero preso ad arbitrio, o anche per 0, multi-

plicate il termine in cui y ha una dimensione in meno per lo stesso numero diminuito di un'unità, e continuate allo stesso modo con gli altri termini dell'equazione. Similmente moltiplicate per un numero ad arbitrio o per 0 il termine in cui x compare con l'esponente massimo: il termine nel quale x ha una dimensione in meno deve essere moltiplicato per lo stesso numero meno l'unità, e così via. Quando si divide il primo di questi prodotti per il secondo, il quoziente moltiplicato per $-x$ è AC ⁽¹³⁾.

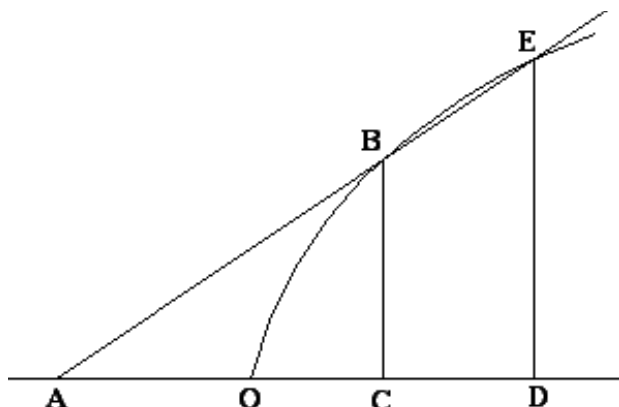


Fig. 10

Più o meno negli stessi anni, una regola simile era nota a François Sluse, che nel 1662 ne parlava a Huygens come di qualcosa che aveva trovato vari anni prima. Né Hudde né Sluse davano un cenno della dimostrazione, che invece troviamo in una memoria di Huygens, presentata all'Académie Royale des Sciences nel 1667 ⁽¹⁴⁾, ma pubblicata soltanto nel 1693 ⁽¹⁵⁾. Per condurla a termina, Huygens inserisce nel contesto cartesiano considerazioni di carattere infinitesimale.

Nella figura, sia $F(x, y) = 0$ l'equazione della curva OBF, e sia AE una retta che passa, oltre che per il punto B in cui si vuole tracciare la tangente, anche per un secondo punto E sulla curva. Se si pone $OC = x$, $BC = y$, $AC = t$ e $CD = e$, si ha $ED = y(1 + e/t)$. Dato

che il punto E sta sulla curva, si ha allora

$$F(x + e, y(1 + e/t)) = 0.$$

Se in questa relazione si sviluppano le potenze, i termini che non contengono e si annullano a causa dell'equazione $F(x, y) = 0$; divisi allora gli altri per e , e posto $e = 0$ si ottiene una relazione dalla quale si ricava la sottotangente t . Infatti,

se si considera BE già come la tangente, e cioè si prende CD, ovvero e , infinitamente piccola, i termini in cui resta ancora e conterranno delle quantità infinitamente piccole, ovvero del tutto evanescenti ⁽¹⁶⁾.

Si possono dunque trascurare fin dall'inizio i termini che contengono e^2 o potenze superiori, e sarà necessario tener conto solo di quelli che contengono e alla prima potenza. Di conseguenza, della potenza $(x + e)^k$ sopravviverà solo il termine $kx^{k-1}e$, mentre i fattori $[y(1 + e/t)]^m$ daranno luogo al termine $my^m e/t$. Di qui la conclusione: i termini dell'equazione finale

si costruiscono con una regola precisa a partire dalle date potenze delle x ed y ; e cioè da una qualsiasi potenza della x , come x^3 , cambiando una delle x in e , e moltiplicando per l'esponente della x : nel nostro, caso si ottiene $3exx$. Dalle potenze della y invece moltiplicandola per e/t , ed antepoendovi similmente l'esponente della y : così da y^3 si ottiene $3y^3 e/t$. ⁽¹⁷⁾

Si ha dunque la regola delle tangenti:

Portati tutti i termini dell'equazione da una stessa parte, che dunque risulterà uguale a zero, si moltiplichino dapprima i termini nei quali compare la y per il numero di dimensioni che negli stessi ha y , e questa sarà la quantità dividenda. Quindi similmente si moltiplichino i termini che contengono x per l'esponente della x , e da ognuno si tolga una x ; questa quantità si dovrà porre come divisore della quantità dividenda trovata sopra. Ciò fatto, si otterrà una quantità uguale a t ossia AD ⁽¹⁸⁾.

In questo modo il passaggio dal metodo all'algoritmo è compiuto: la regola di Hudde-Sluse fa passare

⁽¹³⁾ *Journal littéraire de la Haye*, 1713.

⁽¹⁴⁾ *Œuvres complètes de Ch. Huygens*, M. Nijhoff, La Haye, 1940, tomo XX, p. 242. La dimostrazione di Huygens risale al 1663, come risulta da una lettera a J. De Witt, del 25 febbraio di quell'anno (*Œuvres de Huygens*, IV, p. 312).

⁽¹⁵⁾ *Regula ad inveniendas tangentes linearum curvarum*, in *Divers Ouvrages de Mathématique et de Physique par Messieurs de l'Académie Royale des Sciences*, Paris, Imprimerie Royale, 1693, p. 330.

⁽¹⁶⁾ *Regula ad inveniendas tangentes*, in *Œuvres de Huygens*, XX, p. 242.

⁽¹⁷⁾ Ibidem.

⁽¹⁸⁾ Ibidem.

direttamente dall'equazione della curva all'equazione della tangente grazie a un procedimento meccanico di sostituzione dei termini. Ciò è ancora più evidente nella formulazione di Sluse, nella quale i passaggi intermedi sono puramente formali, non esprimendo nessuna relazione tra le grandezze geometriche coinvolte. Dice Sluse:

Per trovare AD ovvero t , questa sarà la *Regola Generale*:

- 1) Espunte dall'equazione le parti nelle quali non compare x né y , si pongano da un lato tutte quelle in cui c'è x , e dall'altro quelle in cui appare la y , con i loro Segni + o -. Per semplicità chiameremo quest'ultimo lato destro, e l'altro lato sinistro.
- 2) Nel lato destro, si apponga ad ogni termine l'esponente della potenza che in esso ha la y ; o, che è lo stesso, si moltiplichino per questo esponente.
- 3) Si faccia lo stesso per il lato sinistro, apponendo cioè ad ogni termine l'esponente della potenza che in esso ha la x . Ma inoltre, in ogni termine si cambi una x in x . Dico, che l'equazione così rimaneggiata fornisce il modo di condurre la tangente in un punto B dato ⁽¹⁹⁾.

La regola di Sluse appare in una lettera al segretario della Royal Society, e viene pubblicata nel gennaio 1672/73 sulle *Philosophical Transactions*. Nel contempo, Oldenburg trasmette a Sluse una lettera di Newton, nella quale viene formulato un metodo delle tangenti che il canonico di Liegi dirà essere identico al suo:

Nel frattempo non ti sarà ingrato ricevere quello che il nostro dottissimo Newton ha scritto recentemente sull'argomento al nostro Sig. Collins, con queste parole: "Non poco mi fa piacere sentire che Matematici stranieri hanno trovato lo stesso mio metodo per condurre le tangenti. Di quale a mio parere esso sia, ti renderai conto con questo esempio. ... Si esprima con una qualsiasi equazione, ad esempio $x^3 - 2xxy + bxx - bby + byy - y^3 = 0$, la relazione tra x ed y che determina la curva. La regola per condurre le tangenti è la seguente: si moltiplichino i termini dell'equazione per un'arbitraria progressione aritmetica secondo le potenze della y , come ad es.

$$\begin{array}{ccccccc} x^3 - 2xxy + bxx - bby + byy - y^3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 3 \end{array}$$

⁽¹⁹⁾ *An Extract of a Letter from the Excellent Renatus Franciscus Slusius.*

e secondo le potenze della x , come

$$\begin{array}{ccccccc} x^3 - 2xxy + bxx - bby + byy - y^3 \\ 3 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{array}$$

Il primo prodotto sarà il Numeratore, ed il secondo diviso per x il Denominatore della frazione, che esprime la lunghezza AD ⁽²⁰⁾.

In effetti, a cavallo degli anni '70 molti matematici in Inghilterra e sul continente sono in possesso di metodi per le tangenti più o meno simili tra loro. A parte quello appena ricordato di Newton, i metodi sviluppati dai matematici inglesi hanno molte affinità, e a volte sostanziali parti comuni, con le tecniche di Fermat. Ad esempio nelle sue *Lectiones Geometricae*, Barrow dirà

Se nel calcolo entrerà un elemento infinitesimo di una qualsiasi curva; si sostituirà al suo posto una particella della tangente opportunamente presa; e cioè una qualsivoglia retta ad essa equipollente (per l'indefinita piccolezza della curva) ⁽²¹⁾.

Naturalmente, Barrow non si limita a ripetere la strada percorsa da Fermat, ma amplia molto la portata del metodo, specie per quanto riguarda le curve trascendenti. Se Fermat, grazie alla sostituzione di una porzione di tangente al posto dell'analogica porzione di curva, era riuscito a sottomettere al calcolo alcune curve trascendenti, tra cui la cicloide, Barrow considera intere classi di curve trascendenti, dipendenti sia dalla rettificazione, sia dalla quadratura di altre curve; un metodo in cui alcuni storici nel passato hanno preteso di vedere un'anticipazione del teorema fondamentale del calcolo integrale.

Infine, è da registrare un singolare metodo per le tangenti dovuto al matematico tedesco Ehrenfried Walter von Tschirnhaus, o forse a Leibniz ⁽²²⁾, pub-

⁽²⁰⁾ *The correspondence of Henry Oldenburg*, edited and translated by A. Rupert Hall and M. Boas Hall, The University of Wisconsin Press, 1973, vol. IX, p. 427.

⁽²¹⁾ *Lectiones geometricae*, London, Godbid, 1670 (ristampate in *The mathematical works of I. Barrow*, edited by W. Whewell, Cambridge University Press, 1869; reprint G. Olms 1963), p. 81.

⁽²²⁾ Alcuni anni più tardi, Leibniz scriverà a Huygens che "è successo più di una volta che [Tschirnhaus] ha dimenticato di aver visto da me degli esempi di cose che poi ha pubblicato come sue"; *Die Briefwechsel von G. W. Leibniz mit Mathematikern*, a cura di C. I. Gerhardt, Berlin 1899 (reprint Olms 1962), vol. IV, p. 622.

blicato sul *Journal des Savants* dell'8 giugno 1682 e sugli *Acta Eruditorum* del dicembre dello stesso anno. Il metodo rimase praticamente sconosciuto ai contemporanei, sia perché immediatamente superato dal calcolo leibniziano che doveva apparire meno di due anni dopo, sia anche perché le regole enunciate, delle quali l'autore non dà alcuna giustificazione, a prima vista appaiono piuttosto bizzarre. Del pari esso è stato trascurato dagli storici, che hanno preferito per lo più soffermarsi su altre scoperte di Tschirnhaus, come la caustica per riflessione, e soprattutto sui suoi contributi alla teoria delle equazioni algebriche.

Non mi pare dunque inutile segnalare il metodo di Tschirnhaus sia perché a dispetto della sua apparente incongruità esso conduce alla corretta determinazione della tangente nei casi considerati, sia perché esso è di gran lunga più generale di quelli allora, noti, estendendosi ad una larga classe di curve trascendenti.

Sia ... BDE una qualsiasi curva geometrica, come le chiama Cartesio; l'ascissa BO sia uguale ad x , l'ordinata CD uguale ad y , la retta AB che determina la tangente sia t : sia data inoltre la natura della curva, che ad es. sia tale che $y^3 + x^3 + xxy$ sia uguale a $xyy - a^3 + aay - aax + axx - ayy$. Ciò posto, si ordinino tutti i termini di questa equazione in modo che la massima potenza dell'ordinata CD, ovvero y , sia da una parte dell'equazione: nel nostro caso sarà $y^3 = -x^3 - xxy + xyy - a^3 + aay - aax + axx - ayy$ Si formi una frazione il cui numeratore è costruito come segue: i termini che contengono la quantità nota a si assumano con i loro segni, e se questa è elevata alla prima potenza, si preponga a quel termine l'unità, se alla seconda il due, se alla terza il tre, e così via: nel presente esempio il numeratore sarà $-3a^3 + 2aay - 2aax + axx - ayy$. Si costruisca il denominatore con questo metodo: presi quei termini, nei quali compare l'ascissa x , e conservati i segni, se la quantità x compare alla prima potenza si preponga come sopra l'unità, se alla seconda il due; e avremo $-3x^3 - 2xxy + xyy - aax + 2axx$: diminuiti poi questi termini di una x il denominatore sarà $-3xx - 2xy + yy - aa + 2ax$. Dico che questa Frazione è uguale alla quantità AB, e dunque nel presente esempio

$$t = \frac{-3a^3 + 2aay - 2aax + axx - ayy}{-3xx - 2xy + yy - aa + 2ax}$$

E così in modo facile e universale si troveranno le tangenti a tutte le curve geometriche⁽²³⁾.

⁽²³⁾ *Nova methodus tangentes curvarum expeditè determinandi*, in *Acta Eruditorum* 1682, p. 392. Per comprendere

In realtà il metodo di Tschirnhaus non è limitato alle curve geometriche, ma si applica anche alle curve trascendenti nelle quali x rappresenta l'ascissa curvilinea, cioè la lunghezza d'arco di una curva data

Sia dunque BDE una curva qualsiasi, e si ponga uguale a x una sua porzione BD: DF inoltre sia uguale ad y ; e si formi una qualsiasi curva BF, ad esempio secondo la precedente equazione $y^3 + x^3 + xxy = xyy - a^3 + aay - aax + axx - ayy$: per determinare la tangente AF alla curva BFG procedo così. Si prenda la frazione, secondo quanto detto sopra, ed a essa si aggiunga la quantità x ; il risultato darà la porzione AD della tangente alla curva BDE ... Nel caso presente, se si conduce AD tangente alla curva BDE in D, e si prende t uguale a

$$\frac{3a^3 + 2aay - 2aax + axx - ayy}{3xx - 2xy + yy - aa + 2ax},$$

la retta AF è tangente alla curva BFG nel punto F⁽²⁴⁾.

In conclusione, alla fine degli anni '70 circolavano una gran varietà di metodi per le tangenti, alcuni derivati in linea diretta dalla *Géométrie* di Descartes, altri più vicini alle idee di Fermat. Questi ultimi si distinguevano per la loro applicabilità anche a curve trascendenti, specie a quelle, come la cicloide, dipendenti dalla lunghezza di altre curve note. Si può dunque affermare che il problema delle tangenti era stato risolto per tutte le curve allora note, mediante un algoritmo uniforme nel caso delle curve algebriche, mentre le trascendenti dovevano essere trattate caso per caso, o quanto meno per famiglie a seconda della loro generazione. Nondimeno, la soluzione non era del tutto soddisfacente, in quanto rimanevano ancora fuori della portata dei metodi nuovi le curve la cui equazione comprendeva un numero rilevante di radicali.

la formazione del numeratore, occorre ricordare che Tschirnhaus si muove nell'ambito della formulazione cartesiana, e che la a che appare nell'equazione della curva non è una qualsiasi costante, ma l'unità per la quale bisogna opportunamente moltiplicare o dividere in modo da rendere omogenea l'equazione (*Œuvres de Descartes*, VI, p. 371: "Si deve anche osservare che tutte le parti della stessa linea devono avere lo stesso numero di dimensioni quando l'unità non è determinata, ... ma non necessariamente quando l'unità è determinata, dato che essa può essere sottintesa dovunque il numero di dimensioni sia troppo alto o troppo basso").

⁽²⁴⁾ Ivi, p. 393.

La situazione è per molti versi paradossale. Infatti queste curve sono in tutto e per tutto delle curve algebriche, e Fermat aveva insegnato come sbarazzarsi dei radicali e ridurne l'equazione a forma polinomiale, dunque tale da essere abbordabile con i metodi standard. Ma se il linea di principio il metodo di eliminazione di Fermat poteva essere applicato a una qualsiasi curva, indipendentemente dal numero e dall'indice delle radici che comparivano nella sua equazione, in linea di fatto il polinomio che risultava da questa eliminazione era spesso di grado così elevato e coinvolgeva un tale numero di termini da non poter essere scritto materialmente. Abbiamo dunque un metodo che insegna come trattare queste curve, ma che non si può utilizzare a causa dell'enorme numero di calcoli che richiede; in breve non è tanto il carattere algebrico, irrazionale o trascendente della curva a determinare l'applicabilità del metodo, quanto la maggiore o minore complessità dell'equazione.

La ragione di questa limitazione sta nel carattere globale comune a tutti i metodi delle tangenti conosciuti. Per capire meglio di cosa si tratta, torniamo per un momento all'origine della teoria di Fermat: il metodo dei massimi e dei minimi. Per trovare il massimo o il minimo di una funzione $f(x)$, Fermat scriveva l'adequazione

$$f(A + E) - f(A) \approx 0,$$

che poi divideva per E :

$$\frac{f(A + E) - f(A)}{E} \approx 0$$

e infine poneva $E = 0$ per ottenere una vera equazione

$$\left. \frac{f(A + E) - f(A)}{E} \right|_{E=0} = 0.$$

In questa operazione, o meglio sequenza di operazioni, non pochi storici e matematici, a cominciare da Lagrange, hanno visto la prima apparizione della derivata. Per allettante che possa sembrare, questa interpretazione non coglie un punto centrale, che è rilevante soprattutto per comprendere la ragione profonda dei limiti dei vari metodi delle tangenti, non ultimo di quello dello stesso Fermat. In realtà si può con molta maggior ragione affermare che nel metodo di Fermat si trova tutto, tranne la derivata.

Per capire meglio cosa si intenda, pensiamo un momento al modo in cui oggi si calcola il minimo o il massimo di una funzione $f(x)$. Per questo, si calcola prima la derivata $f'(x)$, e poi si considera l'equazione $f'(x) = 0$, le soluzioni della quale daranno i possibili punti di massimo o di minimo. Abbiamo dunque un procedimento che si svolge in due passi: il calcolo della derivata, e la soluzione dell'equazione $f'(x) = 0$. Al contrario, se esaminiamo il procedimento di Fermat (ma lo stesso si può dire per tutti gli altri metodi, a cominciare da quello cartesiano), vediamo che questi due passaggi sono fusi in uno, e che esso consiste nello scrivere l'adequazione $f(A + E) - f(A) \approx 0$ e nel manipolarla fino a giungere all'equazione finale che dà i punti di massimo e di minimo.

A prima vista, la differenza può sembrare di poco conto. In realtà le conseguenze sono di non piccola portata, e il superamento delle difficoltà connesse col metodo di Fermat sarà uno dei caratteri principali del nuovo calcolo. La derivazione, o meglio la differenziazione è infatti un'operazione, che fa passare da una funzione $f(x)$ alla sua derivata $f'(x)$. Come tutte le operazioni, essa è soggetta a una serie di regole, che permettono di separare le difficoltà; ad esempio se la funzione $f(x)$ è somma di due funzioni: $f(x) = g(x) + h(x)$, anche la sua derivata sarà la somma delle derivate corrispondenti: $f'(x) = g'(x) + h'(x)$. Analogamente la derivata del prodotto può essere calcolata con delle opportune regole, così come esistono degli algoritmi che permettono di calcolare la derivata del quoziente, delle potenze e delle radici di ogni grado, delle funzioni composte. È l'uso sistematico di queste regole che permette di derivare anche funzioni molto complesse, automatizzando un calcolo che senza di esse risulterebbe laboriosissimo, quando non impossibile.

Contrariamente alla derivata, l'equazione è sempre globale; se la funzione f è somma di due funzioni, $f(x) = g(x) + h(x)$, l'equazione $f(x) = 0$ non ha nulla a che vedere con le due $g(x) = 0$ e $h(x) = 0$. Non è pertanto possibile separare le difficoltà, che devono sempre essere affrontate tutte insieme. Di qui vengono i limiti dei metodi delle tangenti, che vengono messi in crisi non dal carattere trascendente delle curve in esame, che anzi i metodi di Fermat, di Barrow e di Tschirnhaus trattavano senza problemi, ma dalla presenza di un cospicuo numero di radicali, che rendeva inapplicabile di fatto anche i metodi più sofisticati.

Questo punto è colto con precisione da Leibniz, che più volte proporrà come esempio della potenza del suo metodo il calcolo della tangente a curve molto complesse, come ad esempio quella di equazione ⁽²⁵⁾

$$a + bx\sqrt{y^2 + b^3\sqrt{1+y}} + h y x^2 \sqrt{y^2 + y\sqrt{1-y}} = 0.$$

Strettamente legato al precedente è un altro fattore bloccante, anch'esso proprio di tutti i metodi delle tangenti: la scelta della sottotangente come parametro per la descrizione della retta tangente. Da un punto di vista geometrico la scelta è la più naturale: dato che la tangente deve passare per il punto dato sulla curva, per individuarla basterà trovare un secondo punto, e quale sarà più semplice dell'intersezione con l'asse delle ascisse? Nondimeno, dal punto di vista analitico essa presenta l'inconveniente essenziale di una completa rigidità rispetto alle relazioni algebriche: quando l'ordinata di una curva si scrive come somma di quelle di due o più curve, non c'è nessuna relazione semplice che permetta di risalire dalle sottotangenti di queste a quella della curva di partenza ⁽²⁶⁾.

Ambedue questi problemi verranno risolti con l'invenzione del calcolo.

Il calcolo

Il calcolo differenziale vede ufficialmente la luce nel 1684, quando sugli *Acta Eruditorum* di Lipsia appare una memoria di Leibniz dal titolo *Nova methodus pro maximis et minimis, itemque tangentibus, quae nec fractae nec irrationales quantitates moratur, et singulare pro illis calculi genus*. In essa ambedue le difficoltà a cui avevamo accennato, la mancanza di un'operazione che consentisse di smontare la complessità dell'equazione di una curva, a la scelta di un parametro più adatto ad essere trattato algebricamente, cioè che si comportasse in maniera semplice rispetto alle operazioni algebriche, sono risolti contemporaneamente grazie all'introduzione del differenziale. Si è già detto del carattere operativo della

derivata, la cui assenza nella formulazione di Fermat era all'origine dei limiti di questo come degli altri metodi. Un tale concetto peraltro non poteva emergere, mancando completamente la nozione di funzione, che non si affermerà se non nel secolo successivo. Al suo posto, Leibniz introduce un'operazione, la differenziazione, che agisce non sulle funzioni, che quando Leibniz scrive non esistono, ma sulle variabili e sulle loro combinazioni, e che corrisponde a prendere la differenza tra due valori infinitamente vicini delle variabili. Sono le proprietà formali della differenza, ed insieme il carattere infinitesimo delle differenze in gioco, evidente anche se sempre sottinteso, che permettono di trovare le regole di differenziazione che Leibniz pone all'inizio della sua memoria sul calcolo.

Leibniz introduce il differenziale in un contesto che ricorda da vicino quello di Fermat: come in quest'ultimo la variabile E che determinava l'adequazione era generica ma non esplicitamente infinitesima, e la sua caratterizzazione in questo senso veniva non dalla sua definizione ma dal fatto che si poteva sostituire l'ordinata sulla tangente a quella sulla curva e dal suo destino ultimo di annullarsi, così nella formulazione di Leibniz i differenziali dx e dy non sono a priori infinitesimi, ma acquistano questo carattere dalle regole di differenziazione. Preso arbitrariamente uno dei differenziali, ad esempio dx , Leibniz ricava l'altro direttamente per mezzo della tangente:

Detta dx una retta presa ad arbitrio, una seconda retta che stia a dx come y sta ad AC la si chiamerà dy , ossia differenza delle y ⁽²⁷⁾.

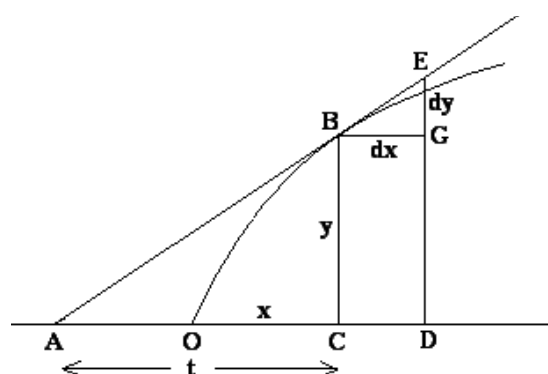


Fig. 11

⁽²⁵⁾ Lettera a Oldenburg, 21 giugno 1677, *Briefwechsel* p. 242.

⁽²⁶⁾ In realtà, James Gregory aveva trovato delle formule che legavano le sottotangenti alle operazioni algebriche sulle funzioni, ma a parte la loro laboriosità intrinseca, i suoi risultati erano rimasti manoscritti.

⁽²⁷⁾ *Nova methodus*, in G. W. Leibniz *Mathematische Schriften*, a cura di C. I. Gerhardt, Halle, 1858 (reprint G. Olms 1962), vol. V, p. 220.

In questo modo la determinazione della sottotangente t segue immediatamente dal calcolo del rapporto dx/dy , dato che per la similitudine dei triangoli ABC e BEG risulta AC:BC=BG:EG, ossia $t:y=dx:dy$, da cui

$$t = \frac{ydx}{dy}.$$

Quanto poi al calcolo del rapporto dx/dy , Leibniz si serve dell'equazione della curva, operando su di essa con le regole della differenziazione da lui stesso stabilite all'inizio della memoria:

$$d(x+y) = dx + dy$$

$$d(xy) = xdy + ydx$$

$$d\frac{x}{y} = \frac{ydx - xdy}{y^2}$$

e di quelle che ne derivano, in particolare il differenziale delle potenze

$$dx^n = nx^{n-1}dx$$

e delle radici:

$$d\sqrt[n]{x} = \frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}dx.$$

Una volta trovate le regole di differenziazione di somme, potenze e radici, si possono calcolare i differenziali di espressioni composte. Ad esempio, il differenziale di

$$w = x + \sqrt{xy - \sqrt[3]{\frac{x-y}{xy}}}$$

si potrà calcolare per passi successivi, ponendo dapprima

$$z = xy - \sqrt[3]{\frac{x-y}{xy}}$$

per cui

$$dw = dx + \frac{dz}{2\sqrt{z}}.$$

Se ora si pone

$$u = \frac{x-y}{xy}$$

risulta

$$dz = xdy + ydx - \frac{1}{3}u^{-\frac{2}{3}}du.$$

Infine

$$du = \frac{dx}{x^2} - \frac{dy}{y^2}$$

e quindi in conclusione

$$dw = dx + \frac{xdy + ydx - \frac{1}{3}\left(\frac{x-y}{xy}\right)^{-\frac{2}{3}}\left(\frac{dx}{x^2} - \frac{dy}{y^2}\right)}{2\sqrt{xy - \sqrt[3]{\frac{x-y}{xy}}}.$$

Quanto poi al rapporto dx/dy , questo si otterrà differenziando l'equazione della curva, che può essere anche molto complessa, come ad esempio ⁽²⁸⁾

$$\frac{x}{y} + \frac{(a+bx)(c-x^2)}{(ex+fx^2)^2} + ax\sqrt{g^2+y^2} + \frac{y^2}{\sqrt{h^2+kx+mx^2}} = 0$$

secondo le regole viste. In questo modo è possibile trovare la tangente a tutte le curve, indipendentemente dal grado di complicazione della loro equazione, dato che l'introduzione dei differenziali permette di separare le difficoltà in una serie di passi successivi.

L'introduzione dei differenziali, o delle differenze come erano chiamate originariamente, ha permesso dunque di risolvere completamente il problema delle tangenti nel caso algebrico, e di ricondurlo in ogni caso al problema di trovare il differenziale delle curve trascendenti: la logaritmica e l'esponenziale, la cicloide, la spirale, la quadratrice e quelle che via via si presentavano ai matematici come soluzione di problemi. Sono queste differenze che Leibniz prende come parametri principali al posto della sottotangente, che da ora conserverà solo il suo carattere di parametro geometrico, mentre sarà totalmente espunta dall'analisi. Si tratta evidentemente di una scelta non facile, non tanto per l'intervento di quantità infinitesime (inassegnabili), che erano ormai entrate da tempo nel linguaggio matematico, quanto perché queste quantità perdono il loro carattere ausiliario e di

⁽²⁸⁾ A commento di questo problema, Leibniz dirà: "Abbiamo riportato questo esempio piuttosto intricato solo perché appaia il modo di usare le regole precedenti anche in un calcolo più difficile".

artifici tecnici, destinati a sparire nella formulazione finale, per assumere invece il ruolo di parametri fondamentali per la descrizione delle curve.

Una scelta non facile, si può aggiungere, soprattutto per Leibniz, che a queste quantità infinitesime aveva sempre negato una reale esistenza, considerandole piuttosto delle “finzioni”, anche se ben fondate, alla stregua degli immaginari e delle quantità negative. Le difficoltà concettuali di questa formulazione sono evidenti, al punto che Leibniz cerca di mascherarle nascondendo il carattere infinitesimo dei differenziali, peraltro implicito nelle regole di differenziazione che non potrebbero sussistere altrimenti, ed introducendo questi ultimi per mezzo della tangente, definita più avanti come quella retta che congiunge punti infinitamente vicini della curva. Nondimeno, Leibniz è ben cosciente della superiorità del suo metodo rispetto a quelli precedenti, e ne individua le ragioni esattamente nell'introduzione della differenziazione come operazione sulle variabili, e nella conseguente separazione delle difficoltà che invece con i metodi precedenti dovevano essere affrontate contemporaneamente. Già nella *Nova methodus*, dopo aver descritto il calcolo della tangente mediante quello del differenziale, commenta:

I metodi finora pubblicati non hanno un tale gradino intermedio, e infatti usano per lo più rette come la AC [la sottotangente, vedi figura 11] o altre simili, ma non il segmento dy ... il che scombina tutto; di qui deriva che si debbano in primo luogo eliminare le quantità fratte e irrazionali che contengono le variabili. ⁽²⁹⁾

Il passaggio dall'equazione algebrica di una curva alla sua “equazione differenziale” risolve dunque il problema delle tangenti. Viceversa, la maggior parte dei problemi di geometria o di meccanica conducono a un'equazione differenziale, dalla quale bisogna risalire all'equazione “finita” della curva che dà la soluzione. In questo caso si ha il “problema inverso delle tangenti”, o in termini moderni l'integrazione di un'equazione differenziale, un problema che si affermerà come il più importante del nuovo calcolo. Se poi l'integrazione in termini finiti non è possibile, allora l'equazione differenziale prenderà il posto

dell'equazione algebrica per caratterizzare la curva in questione. Così ad esempio, quando l'elaborazione del problema della curva brachistocrona condurrà alla relazione

$$dy = dx \sqrt{\frac{x}{a-x}}$$

Johann Bernoulli concluderà direttamente che la soluzione è la cicloide, di cui la precedente è l'equazione differenziale.

Sono questi due problemi delle tangenti, quello diretto risolto da Leibniz e quello inverso dell'integrazione delle equazioni differenziali, che caratterizzano il calcolo differenziale, e non quello che è stato chiamato un secolo più tardi il “teorema fondamentale del calcolo”, che asserisce il carattere inverso delle operazioni di derivazione e di integrazione. Quest'ultimo problema, benché più semplice del problema inverso delle tangenti, richiede che sia stato introdotto il concetto di funzione, un concetto totalmente assente, o al più presente solo in forma larvale, nella matematica del Seicento. Non si tratta dunque, come più volte è stato affermato, di riconoscere il carattere inverso delle operazioni di derivazione e di integrazione, ma di affrontare i due problemi inversi il calcolo delle tangenti e la soluzione delle equazioni differenziali. Quest'ultimo in particolare rappresenterà il problema principale, attorno al quale ruoteranno la geometria delle curve e delle superfici, la meccanica, l'idrodinamica, l'astronomia, l'acustica; in breve, l'intero universo delle scienze fisiche.

Le quadrature dopo Cavalieri

Contemporaneamente alla geometria algebrica cartesiana, anche la teoria degli indivisibili attraversava una stagione di importanti successi. Cavalieri aveva pubblicato la sua *Geometria degli indivisibili* quasi contemporaneamente alla *Géométrie* di Descartes, e con essa era riuscito a estendere molto al di là dei limiti della geometria classica il calcolo di aree e volumi di figure piane e solide. Nonostante le critiche provenienti per lo più da ambienti gesuitici, alle quali il matematico milanese si era trovato a dover far fronte nei primi anni seguenti la pubblicazione della *Geometria*, il metodo degli indivisibili, e

⁽²⁹⁾ *Mathematische Schriften* V, p. 223

in particolare il principio di Cavalieri era diventato uno strumento chiave per il progresso dei metodi di quadratura.

In Italia, soprattutto nell'ambito della "scuola galileiana", hanno soprattutto corso i metodi "geometrici" degli indivisibili, che seguendo l'impostazione originale di Cavalieri coniugavano il nuovo metodo con un linguaggio geometrico classico, al quale attingevano per rendere la teoria degli indivisibili partecipe di un rigore spesso contestato. E se è vero che in alcuni casi, specie in alcuni scritti mai pubblicati di Torricelli, gli indivisibili cavalieriani acquistano un differente "spessore" a seconda della loro posizione, e vengono in questa veste utilizzati per la costruzione delle tangenti ad alcune semplici curve, è anche vero che questi metodi non arrivano mai ad acquistare quel livello di generalità necessario per poter condurre a un reale progresso.

In realtà, quando si parla dell'uso torricelliano degli indivisibili, si deve sempre distinguere tra le *Opere geometriche*⁽³⁰⁾, il solo scritto pubblicato in vita dal faentino, e la massa dei manoscritti di Torricelli, che sono stati pubblicati in una criticatissima edizione solo all'inizio di questo secolo⁽³¹⁾. Nella prima, a parte un uso virtuosistico della dottrina di Cavalieri (si pensi solo alle venti diverse quadrature della parabola), gli indivisibili sono usati nella loro formulazione originale per trovare risultati di rilievo, come il calcolo del volume del "solido acuto iperbolico", ottenuto ruotando un'iperbole attorno a un asintoto, in cui per la prima volta viene esibito un solido infinito con volume finito. Mancano invece del tutto le ricerche sui fondamenti della teoria, che dovevano portare Torricelli molto vicino a un punto di vista "differenziale", in cui gli indivisibili vengono considerati come dotati se non di uno spessore, quanto meno di una "quantità" distinta dalla loro lunghezza, e variabile a seconda della loro posizione.

Si tratta per molti versi dello stesso ordine di idee in cui si muovono Roberval e Pascal con la loro teoria dei "seni" delle curve, e che poi troverà la sua

espressione definitiva nei differenziali leibniziani. D'altra parte, pur se dotati di una "quantità" diversa dalla loro lunghezza, gli indivisibili di Torricelli non perdono mai il loro carattere di elementi unidimensionali, e non acquistano quella dimensione infinitesima necessaria per un allargamento di orizzonte.

In ogni caso, dopo la morte quasi simultanea di Cavalieri e Torricelli⁽³²⁾, gli indivisibili geometrici continueranno ad essere utilizzati dal solo Stefano degli Angeli, allievo e confratello di Cavalieri, che tra il 1654 e il 1667 pubblicherà quasi annualmente un volume dedicato agli sviluppi del metodo degli indivisibili, che abbandonerà per entrare in una polemica sulla caduta dei gravi in relazione al moto della Terra, nella quale sosterrà la lettera del dettato galileiano⁽³³⁾.

Con gli studi di Angeli, gli indivisibili di Cavalieri giungono al limite estremo delle loro potenzialità. Perché si potesse progredire in questo campo, sarebbe stata necessaria un'indagine molto più approfondita sui fondamenti teorici del metodo, indagine che, nonostante le esortazioni di Cavalieri, Torricelli non vorrà mai intraprendere, e Angeli non saprà fare. E probabilmente, anche se una tale ricerca fosse stata affrontata, non avrebbe dato i frutti che Cavalieri sperava; per ottenere i quali non ci si doveva muovere verso una rilettura dei fondamenti della teoria nel linguaggio della geometria classica, mantenendone inalterato il livello di generalità, come il gesuato indicava quando invitava Torricelli ad indagare sui fondamenti del metodo degli indivisibili curvi, ma al contrario verso lo sganciamento definitivo dai canoni classici e una corrispondente diminuzione di generalità.

Quest'ultima affermazione merita qualche spiegazione. Uno dei meriti della teoria degli indivisibili, era per l'appunto il superamento dello studio dei singoli casi particolari, proprio della geometria classica, che veniva rimpiazzato da dimostrazioni generali, valide per grandi classi di figure, alle quali poi rinviare in ogni singolo caso. In ciò Cavalieri si muoveva sullo stesso cammino già intrapreso da

⁽³⁰⁾ *Opera geometrica Evangelistae Torricellii*. Firenze, Massa e Landi, 1644.

⁽³¹⁾ *Opere di Evangelista Torricelli*, a cura di G. Loria e G. Vassura, Faenza, Montanari, 1919.

⁽³²⁾ Torricelli muore il 25 ottobre 1647; Cavalieri il 30 novembre dello stesso anno.

⁽³³⁾ Si veda P. Galluzzi, *Galileo contro Copernico*, Ann. Ist. e Museo di Storia della Scienza II(2) (1977), p. 87.

Valerio nel suo *De centro gravitatis solidorum*, e che due anni più tardi Descartes avrebbe percorso fino in fondo nella *Géométrie*. Ora uno dei problemi in questo passaggio dal particolare al generale è di scegliere la più opportuna classe di figure nelle quali operare; una classe che deve essere abbastanza estesa da contenere i vari casi che si possono presentare al geometra, ma allo stesso tempo abbastanza circoscritta da conservare quelle proprietà fondamentali che permettono la dimostrazione dei risultati essenziali.

Valerio aveva operato nella classe delle figure monotone, dimostrando i suoi risultati sui centri di gravità di queste figure; Cavalieri penserà di aver potuto comprendere nella sua teoria degli indivisibili tutte le figure geometriche. Una convinzione illusoria, perché non si dimostra senza avere punti di partenza; e infatti chi scorra le dimostrazioni della Geometria degli indivisibili si accorgerà che in esse entra l'ipotesi nascosta che ogni figura sia composta da un numero finito di figure monotone. Ma non una convinzione innocua, perché il non aver abbastanza delimitato la classe delle figure in esame porterà una tale complicazione nelle dimostrazioni da rendere praticamente impossibile ogni progresso in altre direzioni. Ad esempio, l'emergere di paradossi, ben noti a Cavalieri prima ancora della pubblicazione della Geometria, costringerà il gesuato a cautelarsi con prescrizioni efficienti ma per molti versi arbitrarie, come quella del retto transito, ossia che le figure che si comparano debbano trovarsi tra le stesse parallele, senza mai riuscire a trovare una

giustificazione al fatto che figure diverse in grandezza possano avere i loro indivisibili in corrispondenza biunivoca. In un contesto molto più ristretto, Pascal riuscirà non solo a dar conto di questo fenomeno, ma anche a volgerlo a suo favore, ricavandone una serie di risultati che lo porteranno a un passo dal calcolo integrale.

L'idea fondamentale è di Roberval, ma solo con Pascal essa giunge a un livello di elaborazione che va al di là del caso particolare, e che permette di delineare un quadro complessivo nel quale i singoli risultati trovano il loro posto e la loro giustificazione. Essi riconoscono che nel calcolare con gli indivisibili non è sufficiente dire in quale direzione (la *regula* di Cavalieri) si devono considerare gli indivisibili di una figura, ma è anche necessario che questi siano ugualmente densi, ovvero che traggano origine da una divisione della linea corrispondente in un numero indefinito di parti uguali. Così ad esempio, preso il trilineo rettangolo ABC, a seconda che si divida in parti uguali l'asse AB o la curva BC, tirando le rette orizzontali si hanno in un caso le ordinate all'asse, nell'altro i "seni" all'asse. Se invece si divide in parti uguali la base, e si tirano le verticali dai punti di divisione, si ottengono le "ordinate alla base". Ciò posto, Pascal può enunciare e dimostrare una serie di risultati, dei quali il più semplice dice che "la somma delle ordinate alla base è uguale alla somma delle ordinate all'asse", in quanto "ambedue sono uguali allo spazio del trilineo"⁽³⁴⁾. O anche: "La somma degli archi della curva compresi tra il vertice e ognuna delle ordinate all'asse è uguale alla somma

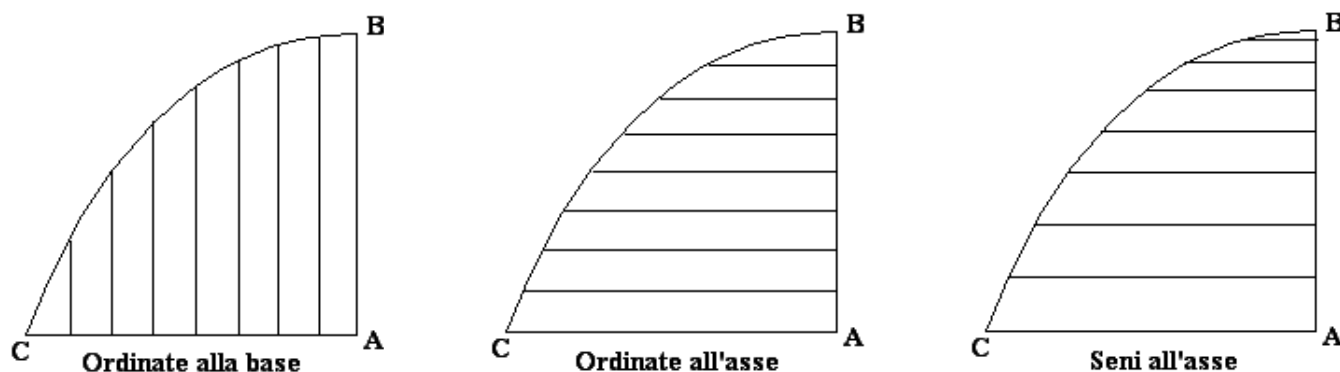


Fig. 12

⁽³⁴⁾ *Traité des trilignes rectangles et de leur onglets*, in *Œuvres complètes de B. Pascal*, Paris, Seuil, 1963, p. 143.

dei seni alla base”⁽³⁵⁾. E infine enunciare un risultato generale che lega gli indivisibili e la grandezza delle figure e i loro centri di gravità:

Se di un trilineo si conoscono le cose seguenti:

1. La somma delle ordinate all’asse,
2. La somma dei quadrati di queste ordinate,
3. La somma dei cubi di queste ordinate,
4. La somma triangolare di queste ordinate,
5. La somma triangolare dei quadrati di queste ordinate,
6. La somma piramidale di queste ordinate,

si conosceranno anche la misura e i centri di gravità, sia del trilineo che delle sue doppie ungule; in altre parole si conosceranno le cose seguenti:

1. La misura dello spazio del trilineo,
2. Il braccio del trilineo sull’asse,
3. Il braccio del trilineo sulla base,
4. La misura della doppia unghia della base,
5. Il braccio di questa unghia sulla base,
6. Il braccio di questa unghia sull’asse,
7. La misura della doppia unghia dell’asse,
8. Il braccio di questa unghia sulla base,
9. Il braccio di questa unghia sull’asse⁽³⁶⁾.

D’altra parte, nonostante questi importanti risultati teorici, la mancanza più volte rilevata di una nozione abbastanza elaborata di funzione impedisce che si sviluppi per le quadrature un calcolo analogo a quello per le tangenti. A differenza di quanto avviene con la geometria cartesiana, il metodo degli indivisibili di Cavalieri e Torricelli, anche nella versione algebrizzata di Roberval e Wallis o in quella di tipo infinitesimale di Fermat e di Pascal, non fa che stabilire un quadro generale, geometrico in Cavalieri e Torricelli, algebrico negli altri, nell’ambito del quale il geometra potrà operare per affrontare le singole quadrature senza dover ricorrere all’ingombrante metodo di esaurimento. Il problema delle quadrature assume dunque una forma sostanzialmente differente da quello delle tangenti: non si tratta di trovare una regola generale, un calcolo, per dare le quadrature di figure arbitrarie, ma piuttosto, approfittando della maggior duttilità della teoria degli indivisibili ri-

spetto al metodo di esaurimento, di trovare la quadratura di un maggior numero di figure, o al più di classi di figure, come le infinite parabole di Torricelli e di Fermat e le infinite spirali di Angeli. Una ricerca questa che, via via che si esaurivano le classi più semplici e più interessanti di figure, richiedeva sforzi sempre maggiori per dare dei risultati sempre più simili a delle esercitazioni accademiche.

Per questo motivo, nel quarto di secolo successivo alla scoperta degli indivisibili, la loro forza propulsiva va progressivamente esaurendosi, mentre riprendono corpo quei problemi classici, come la quadratura del cerchio e dell’iperbole, che il successo degli indivisibili era riuscito se non a risolvere, certo a far passare in secondo piano. E terminata con la sfortunata opera di Gregorio da St. Vincent la stagione della quadratura esatta del cerchio, si sviluppano le ricerche volte a trovare dei metodi di approssimazione eleganti ed efficaci sia per l’area del cerchio che per quella dell’iperbole, e dunque per il calcolo dei logaritmi. Già Snell⁽³⁷⁾ aveva dato nel 1621 una formula di approssimazione per la lunghezza della circonferenza di raggio unitario; indicando con p_n e P_n i perimetri, e con a_n ed A_n le aree dei poligoni di n lati inscritti e circoscritti al cerchio di raggio 1, Snell dimostrava le disuguaglianze

$$\frac{3p_n^2}{2p_{2n} + p_n} < 2\pi < \frac{1}{3}(P_{2n} + 2p_n).$$

È però solo dopo il 1650 che tali ricerche prendono vigore, dando luogo a risultati importanti. Così nel 1655 Wallis⁽³⁸⁾ trova il suo prodotto infinito:

$$\frac{4}{\pi} = \frac{2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 8 \cdots}{3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 \cdots},$$

una formula riscoperta più tardi da Mengoli⁽³⁹⁾; e Huygens⁽⁴⁰⁾ dimostra le disuguaglianze:

$$\frac{4}{3}a_{2n} - \frac{1}{3}a_n < \pi < \frac{1}{3}a_n + \frac{2}{3}A_n$$

⁽³⁷⁾ *Cyclometricus*. Lugduni Batavorum, Elzevier 1621.

⁽³⁸⁾ *Arithmetica Infinitorum*, in *Opera Mathematica*, Oxonii, e Theatro Sheldoniano, 1695, vol. I, p. 468.

⁽³⁹⁾ *Circolo*. Bologna, Benacci, 1672.

⁽⁴⁰⁾ *De circuli magnitudine inventa*, Lugduni Batavorum, Elzevier, 1654; *Œuvres de Huygens* XII, p. 129.

⁽³⁵⁾ *Œuvres de Pascal*, p. 145.

⁽³⁶⁾ *Œuvres de Pascal*, p. 147.

Poco più tardi, James Gregory⁽⁴¹⁾ otterrà per le successioni a_n ed A_n le formule di ricorrenza:

$$a_{2n} = \sqrt{a_n A_n}$$

$$\frac{1}{A_{2n}} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{A_n} + \frac{1}{a_{2n}} \right)$$

a partire dalle quali pretenderà di dimostrare la trascendenza di π . Infine nel 1682 Leibniz⁽⁴²⁾ pubblica il suo sviluppo in serie:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$$

uno sviluppo peraltro noto sia a Gregory che a Newton, il quale a quell'epoca aveva già ottenuto gli sviluppi di tutte le funzioni trigonometriche e delle loro inverse. Una sorte simile trovano le ricerche sulla quadratura dell'iperbole: dopo un certo numero di approssimazioni di vario tipo, l'area dell'iperbole e dunque i logaritmi vengono espressi da Mercator mediante uno sviluppo in serie, anche questo ben noto a Newton.

Nelle mani di quest'ultimo, gli sviluppi in serie subiscono una sostanziale metamorfosi. Per i geometri che lo avevano preceduto, essi erano uno tra i vari metodi di approssimazione, e dunque si situavano nel dominio del calcolo aritmetico ed analitico, un terreno contiguo, ma distinto dal nuovo calcolo differenziale. Al contrario, per Newton essi sono la chiave per affrontare e risolvere nella loro massima generalità i principali problemi del calcolo.

Il calcolo newtoniano

Gli stessi problemi, tangenti e quadrature, si ritrovano all'origine del calcolo newtoniano, ma la loro posizione relativa è sostanzialmente differente. Nell'ambito di una concezione "meccanica" della

geometria, Newton considera le variabili come grandezze il cui valore aumenta o diminuisce con continuità, e l'equazione $P(x, y) = 0$ di una curva come una relazione che regola le loro variazioni relative, e quindi come la traiettoria di un punto mobile. In altre parole, Newton immagina le variabili x e y come delle quantità *fluenti* correlate dall'equazione data. Egli introduce quindi due nuove grandezze $\dot{x}$ e $\dot{y}$, che sono le velocità istantanee, o *flussioni*, delle variabili; i loro rapporti, che determinano la tangente alla curva data dato che la velocità è tangente alla traiettoria, si potranno ricavare operando secondo opportune regole sulla funzione $P(x, y)$. Come in Leibniz, il ruolo centrale è giocato dall'algoritmo che consente di trovare la flussione di un prodotto, dalla quale si deducono quelle per le potenze, le radici, e quindi, con opportuni artifici, quelle per combinazioni più o meno complesse di queste. Siano dunque x e y due grandezze fluenti, e siano $\dot{x}$ e $\dot{y}$ le rispettive velocità. Per trovare la velocità del prodotto xy Newton considera un tempuscolo (infinitesimo) o , dopo il quale x e y saranno divenute rispettivamente $x + o\dot{x}$ e $y + o\dot{y}$. Allora la velocità di xy sarà

$$(x + o\dot{x})(y + o\dot{y}) - xy = o(\dot{x}y + x\dot{y}) + o^2\dot{x}\dot{y}$$

e dunque, dato che l'ultimo termine è infinitesimo:

$$\dot{xy} = \dot{x}y + x\dot{y}.$$

Le analogie matematiche con la formulazione leibniziana sono evidenti: sarà sufficiente sostituire le flussioni $\dot{x}$ e $\dot{y}$, (o meglio, i *momenti* $o\dot{x}$ e $o\dot{y}$, con i differenziali dx e dy per ottenere il metodo di Leibniz per le tangenti, dato che sono identiche le regole di differenziazione nei due casi. Altrettanto evidenti sono d'altra parte le differenze fondazionali: nella formulazione leibniziana il calcolo richiede una vera e propria rivoluzione epistemologica con l'introduzione essenziale di quantità evanescenti; con Newton restiamo invece nell'ambito delle quantità finite, le velocità, la cui definizione rigorosa avrebbe certo condotto verso difficoltà analoghe a quelle insite nella teoria di Leibniz, ma che potevano essere ignorate a causa della familiarità del concetto.

Naturalmente anche il calcolo newtoniano deve far uso di quantità infinitesime, in particolare quando si vogliano ricavare le regole di differenziazione del prodotto e delle espressioni composte; ma a

⁽⁴¹⁾ *Vera Circuli et hyperbolae quadratura*, Patavii. Cadorinis, 1667. Per le critiche di Huygens e la controversia che ne seguì si può vedere il tomo VI delle *Œuvres de Huygens*, e in particolare le pagine 228–230, 272–289 e 368–400.

⁽⁴²⁾ *De vera proportionem Circuli ad Quadratum circumscriptum in Numeris rationalibus a G.G.L. espressa. Mathematiche Schriften V*, p. 118.

differenza di Leibniz, Newton può confinare queste quantità minime ma ingombranti nel retrobottega degli artifici di calcolo, e presentare una vetrina di sole quantità finite e familiari. In definitiva, la soluzione del problema delle tangenti, che aveva richiesto a Leibniz una certa dose di coraggio intellettuale, si presentava per Newton come una naturale conseguenza dell'interazione dei suoi punti di vista sulla cinematica e sul moto con la geometria algebrica di Descartes; dunque in un certo senso priva di un reale carattere di novità.

Quest'ultimo si potrà trovare piuttosto nell'uso continuo ed essenziale degli sviluppi in serie, che seppure introdotti in precedenza, o quanto meno indipendentemente, da altri geometri, in particolare da Mercator e Gregory, trovano nell'analisi newtoniana un'estensione senza pari. Utilizzando un gran numero di metodi diversi, quali l'interpolazione, la divisione, l'estrazione di radice, il metodo dei coefficienti indeterminati, e l'integrazione termine a termine, Newton riesce a dare gli sviluppi di tutte le funzioni conosciute: di qui la possibilità di assumere le serie come parte integrante della sua teoria.

Nelle mani di Newton, gli sviluppi in serie subiscono una sostanziale metamorfosi. Per i geometri che lo avevano preceduto, ma anche per i suoi contemporanei, essi erano uno tra i vari metodi di approssimazione, e dunque si situavano nel dominio del calcolo aritmetico ed analitico, un terreno contiguo, ma distinto dal nuovo calcolo differenziale. Al contrario, per Newton essi sono la chiave per affrontare e risolvere nella loro massima generalità i principali problemi del calcolo.

Nell'analisi newtoniana le serie hanno un duplice aspetto. Abbiamo detto che Newton era riuscito a trovare gli sviluppi in serie di tutte le funzioni conosciute: le potenze e le radici, le funzioni circolari e le loro inverse, i logaritmi e gli esponenziali. In realtà, a voler essere precisi, non essendo ancora stato introdotto il concetto di funzione, il seno, la tangente, il logaritmo, ecc., venivano piuttosto considerati come quantità variabili le une in relazione alle altre. Il fatto che tutte queste quantità potessero essere espresse con delle serie, rendeva queste ultime un sostituto delle funzioni, di cui per così dire assumevano la rappresentanza. Di più, le serie sono per definizione una naturale estensione dei polinomi, dei quali conservano la semplicità algoritmica e

strutturale. Così ad esempio Newton risolve per mezzo delle serie il problema generale delle quadrature, riducendolo essenzialmente all'integrazione delle potenze: una volta trovato lo sviluppo in serie dell'ordinata della curva in questione, si può integrare termine a termine ottenendo una serie che ce ne dà la quadratura:

Wallis pubblicò la sua *Arithmetica Infinitorum* nel 1655; dalla proposizione 59 di questo libro risulta che se x è l'ascissa di una curva, se m e n sono due numeri, e se $x^{\frac{m}{n}}$ sono le ordinate innalzate ad angolo retto, allora l'area della figura sarà $\frac{n}{n+m} x^{\frac{m+n}{n}}$. Questo risultato è accolto da Newton come prima regola su cui fondare la sua quadratura delle curve. [...] Inoltre per la proposizione 108 dell' *Arithmetica Infinitorum* di Wallis, e per molte altre proposizioni ad essa seguenti: se l'ordinata è costituita da due o più ordinate unite insieme dai segni $+$ e $-$, anche l'area sarà allora costituita da due o più aree congiunte insieme rispettivamente dai segni $+$ e $-$. Anche questa proposizione è stata assunta da Newton come seconda regola su cui fondare il suo metodo delle quadrature. La terza regola consiste nel ridurre le frazioni, i radicali, le radici affette da esponente in serie convergenti, quando non è possibile trovare altrimenti la quadratura; e nel quadrare, secondo le regole prima e seconda, le figure le cui ordinate sono i singoli termini della serie ⁽⁴³⁾.

Così il metodo usato da Gregory per ottenere i logaritmi, e che equivaleva essenzialmente allo sviluppo in serie dell'ordinata dell'iperbole:

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots$$

e alla successiva integrazione termine a termine:

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$

viene esteso a tutte le curve conosciute, diventando così un metodo generale di quadratura.

Pertanto quello delle quadrature è solo un caso particolare del problema dell'integrazione delle equazioni

⁽⁴³⁾ I. Newton, *Recensio libri*, in *Commercium epistolicum D. J. Collins et aliorum de Analisi promota*. Traduzione italiana in *La disputa Leibniz-Newton sull'analisi*, a cura di G. Cantelli, Boringhieri, Torino, 1958 (ristampa 1969), p. 22.

differenziali, di cui Newton dà una soluzione generale in termini di una serie di potenze. Per illustrare il metodo, riportiamo dalla *Methodus fluxionum et serierum infinitarum* l'integrazione dell'equazione

$$\dot{y} = 1 - 3x + y + x^2 + xy$$

di cui Newton cerca la soluzione $y(x)$ con $y(0)=0$ ⁽⁴⁴⁾. Dall'equazione segue allora che $\dot{y}(0) = 1$, e dunque il primo termine dello sviluppo sarà $y=x$. Introducendo questo valore nell'equazione, e conservando solo i termini di primo grado, avremo $\dot{y}(0) = 1 - 2x$, da cui $y = x - x^2$. Di nuovo, si può inserire questo valore nell'equazione, e conservare i termini di secondo grado, e poi ancora, ogni volta aumentando di un grado secondo lo schema seguente

	+1	-3x	+x ²				
y	*	+x	-x ²	+x ³ /3	-x ⁴ /6	+x ⁵ /30	+...
+xy	*	*	+x ²	-x ³	+x ⁴ /3	-x ⁵ /6	+x ⁶ /30 +...
Somma	+1	-2x	+x ²	-2x ³ /3	+x ⁴ /6	-4x ⁵ /30	+...
y =	+x	-x ²	+x ³ /3	-x ⁴ /6	+x ⁵ /30	-x ⁶ /45	+...

Il cerchio è dunque chiuso: l'uso delle serie infinite permette di andare molto al di là dei risultati della *Nova methodus* leibniziana, e addirittura si propone come il metodo capace di dare la soluzione definitiva dei problemi più importanti dell'analisi. Questo punto di vista rende ancora più marginale il problema delle tangenti, centrale invece nell'elaborazione leibniziana, dato che la possibilità di sviluppare in serie ogni funzione rende applicabili al caso generale i metodi di Sluse, Hudde, e in genere dei matematici del periodo che aveva preceduto il calcolo, e che, come abbiamo visto erano limitati ai soli polinomi. La differenza tra i due punti di vista è particolarmente netta nella scelta degli esempi che i due scienziati portano ad illustrazione dei rispettivi metodi: mentre Leibniz tende a marcare la differenza tra le sue tecniche differenziali e quelle precedenti, suggerendo esempi complicatissimi, Newton si limiterà sempre a polinomi, al punto che Sluse, ricevendo da Oldenburg, a cui aveva

⁽⁴⁴⁾ Poco più avanti, Newton farà vedere che il valore in 0 non è essenziale, e che si può imporre alla y di assumere un valore qualsiasi, ad esempio $y(0)=1$.

inviato il suo metodo per le tangenti perché fosse pubblicato nelle *Philosophical Transactions*, una copia di una lettera di Newton sullo stesso argomento, non può fare a meno di replicare seccamente rivendicando la sua priorità rispetto a un metodo che a ragione crede equivalente al suo.

Abbiamo così messo in luce, a dispetto di evidenti similitudini matematiche, una profonda divergenza di punti di vista riguardo all'importanza relativa delle varie dottrine che compongono il calcolo. Per Leibniz il punto cruciale è la differenziazione, che risolve il problema delle tangenti e consente di impostare quello generale delle equazioni differenziali. Di quest'ultimo si richiede peraltro la soluzione in termini finiti, dato che gli sviluppi in serie rientrano nel campo delle approssimazioni. Al contrario, per Newton il nucleo del calcolo risiede negli sviluppi in serie, e le flussioni assumono un ruolo tutto sommato marginale, essendo applicate a situazioni nelle quali già funzionavano bene i metodi precedenti. Di più, al contrario dei differenziali di Leibniz, la cui introduzione, come si è detto, rappresentava un'innovazione considerevole e richiedeva una notevole dose di coraggio intellettuale, le flussioni newtoniane si presentano talmente naturali da sfiorare la banalità, dunque di molto minor peso in rapporto agli sviluppi in serie, questi sì realmente innovativi. Questa valutazione, o meglio svalutazione, delle flussioni sarà una costante del punto di vista newtoniano. Il passo che già nel 1676 Newton scriveva nell'*Epistola posterior*:

Poiché non posso dare qui il fondamento di queste operazioni, peraltro piuttosto ovvio, preferisco nasconderelo:
6a cc d ae 13e ff 7i 3l 9n 4o 4q rr 4s 9t 12v x. ⁽⁴⁵⁾

⁽⁴⁵⁾ Newton a Oldenburg per Leibniz, 24 ottobre 1676; *The Correspondence of Isaac Newton*, a cura di H. W. Turnbull, Cambridge 1960, vol. II, pag. 115. L'anagramma, che risolto diceva "Data un'equazione in un numero qualsiasi di quantità fluenti, trovare le flussioni e viceversa" venne rivelato solo più tardi, senza peraltro suscitare reazioni di rilievo in Leibniz, che il 4/14 settembre 1694 così scriveva a Huygens: "Sono anche contento di vedere infine la decifrazione degli enigmi contenuti nella lettera del Sig. Newton al fu Sig. Oldenburg. Ma mi spiace di non trovarvi affatto quelle nuova luce che mi ripromettevo sul problema inverso delle tangenti". *Œuvres de Huygens* X, p. 675.

viene ribadito quasi immutato nel 1718, senza che egli sentisse il bisogno di sfumarne i termini:

Ho detto in una di quelle lettere (quella del 24 ottobre 1676) che i fondamenti del Metodo erano ovvii ⁽⁴⁶⁾.

Naturalmente ciò non vuol dire che delle flussioni si potesse fare a meno, e Newton ha ragione quando dice che queste sono tanto essenziali per il suo metodo quanto lo sono le serie: senza le flussioni alcuni problemi, come quello inverso delle tangenti, non si potrebbero nemmeno formulare analiticamente. Quello che però è chiaro, è che le serie sono la chiave principale, se non l'unica, per la soluzione generale dei problemi del calcolo. Questa differenza di prospettiva ricorre più volte nella corrispondenza di Leibniz, che insiste sulla necessità di dare soluzioni in termini finiti, o quanto meno di perfezionare il metodo delle serie con criteri che permettano di stabilire quando una serie può essere espressa in termini finiti:

E se un uomo versatissimo in questa materia arriverà a un simile risultato, insegnandoci a trasformare una serie infinita in una finita quando ciò sia possibile, o quanto meno a riconoscere da quale serie finita sia stata dedotta, allora nel metodo delle serie infinita che si ottengono per divisione o estrazione difficilmente resterebbe ancora qualcosa a desiderare ⁽⁴⁷⁾.

Al di là di questioni di punti di vista, resta comunque il fatto che con l'uso combinato del calcolo flussionale e degli sviluppi in serie, Newton era riuscito a impostare e a risolvere i principali problemi del nuovo calcolo, e in particolare il problema inverso delle tangenti, e cioè l'integrazione delle equazioni differenziali. Dove Leibniz pone dei problemi, Newton dà dunque delle soluzioni. Paradossalmente, sarà proprio questa superiorità iniziale la causa principale della sconfitta del metodo newtoniano e del prevalere del programma leibniziano.

Il fatto è che il metodo delle flussioni e delle serie chiude i problemi, in primo luogo quello dell'integrazione

delle equazioni differenziali, ma non li esaurisce. Esso opera come una macchina frantumatrice: da una parte si introduce l'equazione differenziale da integrare, e dall'altra viene fuori pezzo a pezzo la soluzione sotto forma dei successivi termini della serie. Ma la serie non dà tutta la soluzione; infatti anche a prescindere da questioni di convergenza, il carattere delle serie è eminentemente locale: esse possono essere usate per operazioni che riguardino il comportamento della soluzione nell'intorno di un punto, ma non sono di nessun aiuto quando se ne vogliano studiare le proprietà qualitative e globali.

Con molto maggior evidenza tale divergenza di opinioni verrà alla luce in occasione della grande contesa.

La controversia sulla priorità

Newton aveva trovato i fondamenti del suo calcolo delle flussioni e delle serie fin dal 1666, dunque molti anni prima della pubblicazione della memoria di Leibniz. Non aveva però pubblicato nulla in proposito, affidando la diffusione dei suoi metodi, ma soprattutto di quello delle serie, alle lettere scambiate con i suoi corrispondenti: Collins, Barrow, Oldenburg. Da questi, le lettere erano poi fatte pervenire ad altri studiosi, e in particolare a Leibniz, che aveva ricevuto una lettera scritta a Collins nel 1672 e due scritte a Oldenburg nel 1676. Nella prima lettera, Newton descrive un metodo delle tangenti che nella sostanza è lo stesso di quello di Hudde e di Sluse, e accenna al fatto che

Talvolta ho unito questo metodo all'altro mediante il quale risolvo le equazioni riducendole a serie infinite ⁽⁴⁸⁾.

Il metodo delle serie è poi l'argomento principe delle due lettere a Oldenburg, nelle quali il metodo delle flussioni è sempre celato dietro anagrammi, i quali comunque contengono più gli enunciati di problemi che la loro soluzione. Di uno di questi abbiamo già parlato; l'altro, del quale Newton si serve solo per

⁽⁴⁶⁾ *The Mathematical Papers of Isaac Newton*, a cura di D. Whiteside, Cambridge 1967-1977, vol. VIII, p. 605.

⁽⁴⁷⁾ Ivi, p. 157.

⁽⁴⁸⁾ *Disputa*, p. 83.

fissare la sua priorità “qualora altri ottenessero lo stesso risultato”, una volta risolto si legge:

Il primo metodo consiste nell'estrazione di una quantità fluente dall'equazione che contiene la sua flussione; il secondo invece consiste nella semplice assunzione di una serie al posto di una qualsiasi delle quantità incognite, da cui possono facilmente ricavarsi le altre, e in un confronto dei termini omologhi dell'equazione risultante per determinare i termini della serie assunta.⁽⁴⁹⁾

Non è chiaro quanta parte queste lettere di Newton abbaino avuto nell'invenzione del calcolo differenziale da parte di Leibniz, avvenuta proprio in quegli anni. Certo le differenze sono molto grandi, e ancora nel 1687, in uno scolio al Lemma 2 del secondo libro dei Principia, nel quale trovava la flussione di una potenza, Newton asseriva che “il fondamento di entrambi [i metodi] è contenuto nel lemma precedente”. In ogni caso, sempre nello stesso scolio, Newton riconosceva, o quanto meno non metteva in dubbio, l'indipendenza della scoperta leibniziana. Pochi anni più tardi, John Wallis pubblicava nella sua *Algebra* un sunto del metodo newtoniano, e osservava che

Analogo a questo metodo è il metodo differenziale di Leibniz, e quell'alto metodo, anteriore ad entrambi, che Barrow espone nelle sue *Lectiones geometricae*⁽⁵⁰⁾,

confondendo ancora il metodo di Leibniz con quello di Barrow, che come abbiamo visto non è che una variazione sul tema di Fermat. In conclusione, sia dalle parole dello stesso Newton, sia da quelle di autori a lui vicini, si può inferire che essi ritenessero sufficienti i metodi delle tangenti del periodo precedente al calcolo, ai quali assimilavano non solo il metodo newtoniano, ma anche quello di Leibniz, non trovandovi che differenze di notazioni. Che Leibniz non concordasse con loro, era evidente; ed è provato dagli esempi che manda a Oldenburg⁽⁵¹⁾ in risposta alle lettere di Newton. Mentre questi non fa che riproporre curve algebriche e mette in primo piano gli sviluppi in serie, Leibniz propone le sue curve

dalle equazioni impossibili, come

$$a + bx\sqrt{y^2 + b^3\sqrt{1+y}} + hxy^2\sqrt{y^2 + y\sqrt{1-y}} = 0.$$

Indipendentemente da queste divergenze di punti di vista, non mancano in questo periodo reciproche attestazioni di stima e riconoscimenti di originalità.

Questa atmosfera idilliaca viene turbata per un momento da un opuscolo di Nicola Fatio de Duillier dedicato al problema della brachistocrona⁽⁵²⁾, in cui Fatio accusa apertamente Leibniz di aver preso il suo calcolo da Newton:

Newton è stato il primo a scoprire, molti anni fa, questo calcolo. Se Leibniz, suo secondo inventore, abbia tratto alcunché da Newton, è una cosa su cui preferisco non dare alcun giudizio, ma voglio lasciarla stabilire da quelli che ebbero modo di vedere le lettere e gli altri manoscritti di Newton⁽⁵³⁾.

Di questo attacco inopinato Leibniz si duole con Sloane, all'epoca segretario della Royal Society, che sconfessa l'operato di Fatio. L'anno successivo, nella recensione allo scritto di Fatio, Leibniz scrive

Quando nel 1684 pubblicai gli elementi del mio calcolo, delle sue scoperte in questo campo sapevo solo ciò che egli stesso una volta mi aveva comunicato per lettera, cioè che poteva trovare le tangenti senza essere costretto a togliere gli irrazionali. ... Quando però vidi i *Principia* mi resi conto che Newton era pervenuto a cose ben maggiori. Che tuttavia si servisse di un calcolo tanto simile al mio calcolo differenziale non lo appresi prima che uscissero i volumi I e II delle *Opere* di Wallis⁽⁵⁴⁾.

Per il momento, Newton tace, e il momento di crisi sembra completamente superato. Così per il momento passa anche sotto silenzio l'attacco mosso da George Cheyne, che nel 1703 scrive a conclusione della prima parte del suo *Fluxionum methodus inversa*⁽⁵⁵⁾

Quando rifletto su tutte queste scoperte del grande Newton, non posso fare a meno di dichiarare che tutto ciò che è stato pubblicato da altri negli ultimi venti-

⁽⁴⁹⁾ *Disputa*, p. 128.

⁽⁵⁰⁾ *Opera Mathematica*, vol. II, p. 396.

⁽⁵¹⁾ *Disputa*, p. 134.

⁽⁵²⁾ *Lineae brevissimi descensus investigatio geometrica duplex*, London, Taylor, 1699.

⁽⁵³⁾ Ivi. *Disputa*, p. 168.

⁽⁵⁴⁾ *Acta Eruditorum*, Maggio 1700. *Disputa*, p. 170.

⁽⁵⁵⁾ *Fluxionum methodus inversa, sive quantitatum fluentium leges generaliores*. Londini, typis I. Matthews, 1703, pp. 59-60.

quattro anni relativamente a questo o a metodi simili, non è che una ripetizione o un facile corollario di quanto Newton molto tempo fa ha comunicato ai suoi amici e al pubblico.

Lo stesso anno, Newton è nominato presidente della Royal Society; l'anno successivo esce l'*Opticks*, e unito a questa il *Tractatus de quadratura curvarum*, il primo scritto a stampa di Newton sul calcolo. Una recensione anonima, ma di Leibniz, apparsa immediatamente sugli *Acta Eruditorum*, si trova tra l'altro

Ora Newton, in luogo delle differenze di Leibniz, si serve, come d'altronde si è sempre servito [*adhibet semperque adhibuit*] delle flussioni ... E ne ha fatto un uso molto elegante nei suoi *Principia mathematica*, e in altri scritti pubblicati dopo, allo stesso modo che [*quemadmodum*] Onorato Fabri, nella sua *Synopsis geometrica* ha sostituito [*substituit*] al metodo di Cavalieri il progresso dei moti⁽⁵⁶⁾.

Abbiamo riportato i precisi termini latini perché più tardi sulla base delle parole *quemadmodum ... substituit* Leibniz verrà accusato di aver tacciato Newton di plagio, e si difenderà citando *adhibet semperque adhibuit*. Ma lo scontro è ancora una volta rimandato di qualche anno, ed esplode solo con la pubblicazione nel 1710 sulle *Philosophical Transactions of the Royal Society* di un articolo di John Keill sulle forze centripete, nel quale Keill scrive

Tutto ciò consegue dall'aritmetica delle flussioni, ormai divenuta famosa in questi ultimi tempi. Newton è senza alcun dubbio colui che l'ha scoperta per primo, come può accertarsene chiunque legga le sue lettere pubblicate da Wallis. In seguito questo stesso calcolo venne pubblicato da Leibniz negli *Acta Eruditorum*, sotto diverso nome e con diversa notazione⁽⁵⁷⁾.

Davanti a una così esplicita accusa di plagio, Leibniz pensa di poter ripercorrere la strada di dieci anni prima, e scrive al segretario della Royal Society chiedendogli di invitare Keill a scrivere una rettifica. Di fronte a una risposta ambigua di quest'ultimo, Leibniz si rivolge al presidente, cioè allo stesso

Newton, chiedendogli di pronunciarsi in merito. Per tutta risposta, viene nominata una commissione, composta da Halley, Jones, Burnet, Machin, de Moivre e Taylor, oltre ad altri personaggi estranei alla scienza, incaricata di dirimere la disputa. Nel 1713, la commissione pubblica il *Commercium epistolicum*, nel quale le affermazioni di Keill vengono riconosciute valide. Lo stesso Newton scrive una recensione a questo volume, pubblicata sulle *Philosophical Transactions* del gennaio 1715, e in versione francese nel tomo VII del *Journal littéraire* dell'Aia. Una versione rivista verrà poi inserita in testa alla seconda edizione del *Commercium*, pubblicata nel 1722.

Nel frattempo Leibniz, che probabilmente era stato colto di sorpresa dal succedersi degli eventi, comincia a scrivere una *Historia et origo calculi differentialis*⁽⁵⁸⁾, che però resterà inedita a causa della sua morte, avvenuta nel 1716.

Fin qui la cronaca degli avvenimenti. Ma quello che colpisce nell'atteggiamento dei principali attori di questa, che fu una delle più accese contese letterarie della storia è l'assoluta estraneità dei punti di vista dei due contendenti. Da una parte Leibniz, che continua a ripetere di non avere difficoltà ad accordare a Newton la priorità e il primato negli sviluppi in serie, ma che continua a rivendicare a sé stesso l'invenzione del calcolo dei differenziali, del quale egli non trova traccia negli scritti dell'avversario. Di contro Newton insiste sull'unità del metodo *delle flussioni e delle serie infinite*, che invece Leibniz vorrebbe fare in pezzi per attribuirsi una parte, lasciando a Newton solo il metodo delle serie. Ma più e meglio di ogni commento sono i testi a parlare nella loro immediatezza.

a. *L'oggetto del contendere.*

L'argomento ivi discusso [nel *Commercium epistolicum*] è il metodo generale per risolvere le equazioni finite in equazioni infinite, e applicare tanto le une che le altre alla soluzione dei problemi secondo il metodo delle flussioni e dei momenti.⁽⁵⁹⁾

Quando finalmente ebbi una copia del *Commercium epistolicum*, mi accorsi che si allontanava completamente dal suo scopo, e che le lettere in esso

⁽⁵⁶⁾ *Acta Eruditorum*, Gennaio 1705. *Disputa*, p.176.

⁽⁵⁷⁾ *Philosophical Transactions*, 1708. *Disputa*, p. 177. Nonostante porti al data 1708, l'articolo uscì solo nel 1710.

⁽⁵⁸⁾ *Mathematische Schriften* vol. V, pp. 392-410.

⁽⁵⁹⁾ *Disputa*, p. 17.

pubblicate non contenevano una sola parola capace di porre in dubbio la mia scoperta del calcolo delle differenze, su cui verteva la vera questione. Notai che invece si preferiva puntare tutto sulle serie, dove si accorda senza difficoltà la precedenza a Newton.⁽⁶⁰⁾

Egli [Leibniz] si duole che il Comitato si sia allontanato dal suo scopo, gettandosi ad esaminare le serie infinite; ma deve considerare che i due metodi di cui mi servo sono le due branche di un unico e identico metodo generale di analisi.⁽⁶¹⁾

Hanno addirittura cambiato lo stato della controversia; ed infatti in quel loro scritto, che sotto il nome di Commercio epistolico di John Collins hanno pubblicato allo scopo di mettere in dubbio il primato di Leibniz, si trova a malapena qualche traccia del calcolo differenziale: ogni pagina è piena delle serie cosiddette infinite.⁽⁶²⁾

E si son serviti dell'arte degli avvocaticchi, per stornare l'attenzione dei giudici dall'oggetto del contendere ad altro, e cioè alle serie infinite.⁽⁶³⁾

b. La portata del metodo.

Nel 1684 Leibniz pubblicò soltanto gli elementi del calcolo differenziale, che egli applicò ad alcune questioni sulle tangenti, e ad alcune altre riguardanti il metodo dei massimi e dei minimi, come Fermat e Gregory avevano fatto prima di lui; e fece vedere come si poteva procedere in questo genere di questioni, senza togliere le quantità irrazionali. Ma non passò ai problemi della più alta geometria.⁽⁶⁴⁾

Ma di tutto questo calcolo non si trovano nemmeno le tracce negli scritti dell'emulo precedenti i fondamenti del calcolo pubblicati dal nostro, né di alcunché che non avrebbero trovato allo stesso modo anche Huygens e Barrow, se avessero studiato gli stessi problemi.⁽⁶⁵⁾

c. I metodi per le tangenti.

Sia AB l'ascissa e CB l'ordinata, che forma con l'ascissa un angolo qualsiasi; si ponga $AB = x$ e $BC = y$, e si esprima il rapporto fra x e y con una qualsiasi equazione, per esempio $x^3 - 2xxy + bxx - bbx + byy - y^3 = 0$ con cui si determina la curva AC. Allora la regola per condurre la tangente sarà: si moltiplichino tutti i termini di questa equazione per una qualsiasi pro-

gressione aritmetica, secondo le dimensioni di y , cioè

$$\begin{array}{cccccc} x^3 - 2xxy + bxx - bbx + byy - y^3 & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 3 \end{array}$$

oppure secondo le dimensioni di x , cioè:

$$\begin{array}{cccccc} x^3 - 2xxy + bxx - bbx + byy - y^3 & & & & & \\ 3 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{array}$$

Il primo prodotto sarà il numeratore e il secondo, diviso per x , il denominatore di una frazione che esprimerà la lunghezza di BD, dalla cui estremità D si deve condurre la tangente CD.⁽⁶⁶⁾

Questo stesso metodo può applicarsi anche quando si hanno radici sotto altre radici; per esempio, in un'equazione assai complessa come questa:

$$a + bx\sqrt{y^2 + b^3\sqrt{1+y}} + hyx^2\sqrt{y^2 + y\sqrt{1-y}} = 0.$$

In una curva che abbia y come ascissa, ed x come ordinata, l'equazione utile per trovare la tangente TC potrà subito venir scritta senza bisogno di nessun calcolo, e cioè⁽⁶⁷⁾

$$\begin{aligned} bdx\sqrt{y^2 + b^3\sqrt{1+y}} + \frac{bx}{\sqrt{y^2 + b^3\sqrt{1+y}}} \left(2ydy + \frac{bdy}{3(1+y)^{\frac{2}{3}}} \right) + \\ (hx^2dy + 2hxydx)\sqrt{y^2 + y\sqrt{1-y}} + \\ \frac{hx^2y}{\sqrt{y^2 + y\sqrt{1-y}}} \left(2ydy + dy\sqrt{1-y} - \frac{ydy}{2\sqrt{1-y}} \right) = 0 \end{aligned}$$

d. La priorità

In queste due lettere Newton aveva ricordato di essere in possesso di un'analisi generale, di cui una parte consisteva nel metodo delle serie convergenti, e un'altra in un metodo che permetteva di applicare quelle serie alla soluzione di quasi tutti i problemi.⁽⁶⁸⁾

Non ho mai negato che nel mio secondo viaggio in Inghilterra abbia visto alcune lettere di Newton, ma non ho mai visto dove Newton abbia spiegato il suo metodo delle flussioni, e continuo a non trovarlo nel *Commercium epistolicum*.⁽⁶⁹⁾

Nella mia lettera del 13 giugno 1676 ho detto che il mio metodo delle serie si estendeva a quasi tutti i problemi, ma che diveniva generale solo con l'aiuto di altri metodi, intendendo con ciò (come spiegavo nella lettera seguente) il Metodo delle flussioni ed il Metodo

⁽⁶⁰⁾ *Disputa*, p. 210.

⁽⁶¹⁾ *Disputa*, p. 229.

⁽⁶²⁾ *Historia et origo calculi differentialis, Mathematicae Schriften* V, p. 393.

⁽⁶³⁾ Ivi, p. 410.

⁽⁶⁴⁾ *Disputa*, p. 234.

⁽⁶⁵⁾ *Historia et origo calculi differentialis, Mathematicae Schriften* V, p. 409.

⁽⁶⁶⁾ Newton a Collins, 10 dicembre 1672; *Disputa*, p. 82.

⁽⁶⁷⁾ Leibniz ad Oldenburg, 21 giugno 1677; *Disputa*, p. 134.

⁽⁶⁸⁾ *Recensio libri. Disputa*, p. 41.

⁽⁶⁹⁾ Leibniz a Conti, 9 aprile 1716, *Disputa*, p. 213.

delle serie arbitrarie. Volermi ora carpire questi due altri metodi, è restringere il metodo delle serie, e limitarne la generalità. E se al sig. Leibniz è piaciuto di fare a pezzi questo mio metodo generale, e di sottrarmene prima una parte, poi un'altra, tralasciando il resto, ha offerto al Comitato una legittima occasione per esaminare il tutto nel suo complesso.⁽⁷⁰⁾

Unicuique suum

Quest'ultimo brano di Newton, scritto nel 1716 a pochi mesi dalla morte del suo antagonista, è per molti aspetti rivelatore dei mutamenti che erano intervenuti tra la scoperta e i primi progressi del calcolo durante il XVII secolo, e il 1711, anno d'inizio della disputa. Nel ventennio che va dal 1690 al 1710 è avvenuto esattamente ciò di cui Newton si lamenta. Il suo metodo generale, di cui egli più volte ha vantato l'evidente superiorità rispetto a quello di Leibniz, è stato fatto a pezzi, e una gran parte gli è stata sottratta, lasciandogli solo il merito di aver sviluppato e portato a perfezione la tecnica delle serie infinite. Contrariamente però a quanto egli pensa, questo non è stato il risultato di un subdolo piano messo in opera da Leibniz e dai suoi seguaci, ma bensì il naturale svolgimento di un processo storico che aveva le sue radici nei due diversi punti di vista che abbiamo messo in evidenza.

Ricordiamo un momento i termini della questione. Con il suo calcolo differenziale Leibniz aveva risolto completamente il problema delle tangenti, ed aveva posto su basi algebriche il problema delle quadrature, che peraltro era ridotto ad un caso particolare del più generale problema dell'integrazione delle equazioni differenziali. Su tali problemi, e sulle loro applicazioni alla geometria e alla meccanica, Leibniz e i suoi lavoreranno a partire dal 1684 con crescente successo.

Non sarà qui fuori luogo ricordare che il metodo delle serie si poteva proporre come metodo universale solo una volta trovati gli sviluppi di tutte le funzioni note, e cioè dopo la sistemazione newtoniana.

A quell'epoca Newton aveva non solo sviluppato il suo calcolo delle flussioni, come abbiamo visto equivalente al primo, ma era riuscito, con un abilissimo

intreccio tra questo e il metodo degli sviluppi in serie, a risolvere in maniera del tutto generale il problema inverso delle tangenti. Dove Leibniz pone dei problemi, Newton dà dunque delle soluzioni. Paradossalmente, sarà proprio questa superiorità iniziale la causa principale della sconfitta del metodo newtoniano e del prevalere del programma leibniziano.

Il fatto è che il metodo delle flussioni e delle serie chiude i problemi, in primo luogo quello dell'integrazione delle equazioni differenziali, ma non li esaurisce. Esso opera come una macchina frantumatrice: da una parte si introduce l'equazione differenziale da integrare, e dall'altra viene fuori pezzo a pezzo la soluzione sotto forma dei successivi termini della serie. Ma la serie non dà tutta la soluzione; infatti anche a prescindere da questioni di convergenza, il carattere delle serie è eminentemente locale: esse possono essere usate per operazioni che riguardino il comportamento della soluzione nell'intorno di un punto, ma non sono di nessun aiuto quando se ne vogliano studiare le proprietà qualitative e globali.

Ma c'è di più. Infatti, a differenza del suo collega del continente, il matematico newtoniano che avesse intrapreso lo studio di un'equazione differenziale, ad esempio in connessione con un problema di meccanica o di geometria, sapeva benissimo che esisteva un metodo, per di più elaborato dalla più alta autorità in materia, che avrebbe immancabilmente condotto alla soluzione senza richiedere alcuno sforzo intellettuale. È ben vero che Newton aveva più volte ricordato l'opportunità di ricorrere alle serie solo quando fosse impossibile trovare la soluzione altrimenti; ma questa raccomandazione era ben poca cosa di fronte alla generalità e alla sicurezza delle tecniche di approssimazione, al punto che ben raramente i geometri inglesi si cimenteranno con questi importanti aspetti del calcolo, limitandosi a rinviare alla soluzione newtoniana. Quest'ultima poteva vantare un'indubbia superiorità nelle fasi iniziali del calcolo, quando i risultati del programma leibniziano erano ancora frammentari e dunque insufficienti a bilanciarne la generalità. A vent'anni di distanza, e cioè al momento del divampare della disputa, la situazione si è completamente rovesciata, ed è ora il metodo di Newton ad essere eclissato dal numero e dalla qualità dei risultati ottenuti sul continente. E

⁽⁷⁰⁾ Newton a Conti. *Disputa*, p. 229.

così a Newton, che riferendosi alla situazione quale era attorno al 1680 scrive nell'*Account*, poi rifiuto nella *Recensio libri*:

Se l'operazione non arriva a dare equazioni finite, Newton ricorre alle serie convergenti; per cui il suo metodo risulta incomparabilmente più universale di quello di Leibniz, che è limitato alle sole equazioni finite dato che egli non ha accesso al metodo delle serie infinite,⁽⁷¹⁾

Johann Bernoulli può rispondere nel 1713:

ora un certo Cheyne se ne va in giro a dire che negli ultimi 20 o 30 anni non abbiamo pubblicato nulla, che non sia un'ennesima ripetizione o al più un corollario di poco peso di ciò che Newton aveva trovato prima; quasi che per noi non fosse rimasto nulla da fare, e che non siano di nessun pregio le cose che abbiamo pubblicato, e delle quali in Newton non si trovano nemmeno le tracce, come le Catenarie, le Velarie, le Isocrone paracentriche, le Brachistocrone, le nuove proprietà della Cicloide e i suoi innumerevoli segmenti quadrabili, il Calcolo degli esponenziali e il metodo di differenziarli, la misura delle Coevolute, il Moto trattorio e reptorio, la riduzione delle curve alle circolari, e innumerevoli altre che gli inglesi in parte tentarono, ma con tutto il loro calcolo delle flussioni hanno lasciato irrisolte, come si vede dal solo problema della Catenaria e della Trasformazione delle curve, al quale hanno sudato per lungo tempo senza produrre altro che turpi paralogismi.⁽⁷²⁾

L'elenco è impressionante, e testimonia da solo del solco che si è aperto tra i due campi. Più ancora però impressiona il fatto che nessuno dei risultati menzionati da Bernoulli sia stato ottenuto da matematici inglesi o sia derivato da problemi da essi proposti o studiati. Questi sono del tutto estranei al punto di vista newtoniano, e quando Newton stesso o altri si cimenteranno con qualcuno di questi o con altri problemi simili, lo faranno solo a causa di stimoli e sfide provenienti dal continente.

Né probabilmente poteva essere altrimenti. Perché per entrare come parte attiva nell'attuazione di quello che oggi ci appare come un vero e proprio programma leibniziano di costruzione della nuova

analisi occorre, se non compiere una scelta di campo, certo abbandonare il terreno della stretta ortodossia; e se non era necessario diventare leibniziani, di certo si doveva smettere di essere newtoniani.

Non era necessario diventare leibniziani; infatti, nonostante quanto taluni hanno sostenuto e sostengono, l'uso delle notazioni newtoniane, senza dubbio meno eleganti e complete di quelle del calcolo differenziale, non costituiva una seria remora nell'affrontare problemi geometrici e meccanici, e anzi in alcuni casi, come ad esempio nei problemi di dinamica nei quali le notazioni newtoniane sono tuttora in uso, queste erano altrettanto adatte delle altre.

Si doveva però smettere di essere newtoniani; dato che era essenziale separare in due parti la teoria di Newton, e di queste assumere solo il calcolo flussionale, relegando le serie tra i procedimenti di approssimazione numerica. In altre parole era necessario compiere quella separazione tra il metodo delle flussioni e quello delle serie che Newton aveva visto come una subdola manovra del suo antagonista per privarlo di quanto gli spettava. Che poi si assegnasse a Newton la paternità di uno solo o di ambedue tali metodi era tutto sommato secondario; quello che contava era la necessità di riconoscere che nel giudizio sulla loro importanza relativa Leibniz aveva visto più lontano di Newton.

Nessuno dei geometri inglesi se la sentirà di compiere un tale passo per tutto il Settecento; al contrario tutti continueranno a proclamare non solo l'indiscutibile priorità di Newton per quanto riguarda l'invenzione del metodo delle flussioni, ma anche la superiorità, altrettanto indiscutibilmente smentita dai fatti, del suo metodo generale delle serie. Così facendo, porteranno la matematica inglese nella migliore delle ipotesi a dedicarsi esclusivamente ai problemi degli sviluppi in serie, e altrimenti ad estenuarsi su questioni fondazionali senza sbocchi. Nel momento in cui la sentenza della *Royal Society* sancisce la priorità newtoniana per quanto concerne la scoperta del calcolo, quella meno tangibile ma più duratura della storia riequilibra la bilancia stabilendo il primato del programma leibniziano. La matematica del diciottesimo secolo si svilupperà seguendo la strada tracciata dallo scienziato tedesco.

⁽⁷¹⁾ *Recensio libri. Disputa*, p. 58.

⁽⁷²⁾ Johann Bernoulli a Leibniz, 29 luglio 1713. *Mathematische Schriften* III-2, p. 916.

Ringraziamenti

Si ringrazia l'Istituto dell'Enciclopedia Italiana che ha concesso di ristampare il presente articolo già apparso nel vol. V della Storia della Scienza (2002).

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

- I. BARROW, *Lectiones geometricae*, London, Godbid, 1670.
- I. BARROW, *The mathematical works of I. Barrow*, edited by W. Whewell, Cambridge University Press, 1869 (reprint G. Olms 1963).
- G. CANTELLI, *La disputa Leibniz-Newton sull'analisi*, a cura di G. Cantelli, Boringhieri, Torino, 1958 (ristampa 2006).
- B. CAVALIERI, *Geometria indivisibilibus continuorum nova quadam ratione promota*, Bologna, Ferroni, 1635. (Trad. ital. *Geometria degli indivisibili*, a cura di L. Lombardo Radice, Torino, UTET, 1966)
- G. CHEYNE, *Fluxionum methodus inversa, sive quantitatum fluentium leges generaliores*, London, Matthews, 1703.
- J. COLLINS, *Commercium epistolicum D. J. Collins et aliorum de Analisi promota*, London, Pearson, 1712.
- R. DESCARTES, *Discours de la methode pour bien conduire sa raison, & chercher la verité dans les sciences. Plus la Dioptrique, les Meteores et la Geometrie, qui sont des essais de cete Methode*. Leiden, Ian Maire, 1637.
- R. DESCARTES, *Œuvres de Descartes*, publiées par C. Adam et P. Tannery. Nouvelle présentation. Paris, Vrin, 1973-1983.
- R. DESCARTES, *Renati des Cartes Geometria, cum notis Florimondi de Beaune... opera atque studio Francisci a Schooten*, Leiden, Ian Maire, 1649.
- N. FATIO DE DUILLIER, *Lineae brevissimi descensus investigatio geometrica duplex*, London, Taylor, 1699.
- P. FERMAT, *Œuvres de Fermat* publiées par P. Tannery et Ch. Henry, Paris, Gauthier-Villars, 1891-1912.
- P. GALLUZZI, *Galileo contro Copernico*, in "Ann. Ist. e Museo di Storia della Scienza" II(2), 1977.
- GREGOIRE DE ST. VINCENT, *Opus Geometricum quadraturae circuli et sectionum conii*, Antwerp, Meursius, 1647.
- J. GREGORY, *Vera Circuli et hyperbolae quadratura*, Padova, Cadorinis, 1667.
- J. HUDDE, *Extrait d'une letter de feu M. Hudde à M. van Schooten, professeur en Mathématiques à Leyde, du 21 de Novembre 1659*, In "Journal littéraire", La Haye, T. Johnson, 1713.
- C. HUYGENS, *Œuvres complètes de Ch. Huygens*, La Haye, M. Nijhoff, 1940
- C. HUYGENS, *Regulas ad inveniendas tangentes linearum curvarum*, in *Divers Ouvrages de mathématique et de Physique par Messieurs de l'Académie Royale des Sciences*, Paris, Imprimerie Royale, 1693.
- C. HUYGENS, *De circuli magnitudine inventa*, Leiden, Elsevier, 1654.
- J. KEILL, *Epistola ad Clarissimum Virum Edmundum Halleium Geometriae Professore Savilianum, de legibus virium centripetarum*, in "Philosophical Transactions of the Royal Society", XXVI (1708), 1710.
- G. W. LEIBNIZ, *Die Briefwechsel von G. W. Leibniz mit Mathematikern*, herausgegeben von C. I. Gerhardt, Berlin 1899 (reprint Olms 1962).
- G. W. LEIBNIZ, *G. W. Leibniz Mathematische Schriften*, herausgegeben von C. I. Gerhardt, Halle, 1858 (reprint G. Olms 1962).
- G. W. LEIBNIZ, *Nova methodus pro maximis et minimis, itemque tangentibus, quae nec fractae nec irrationales quantitates moratur, et singulare pro illis calculi genus*, in "Acta Eruditorum", Lipsia, Günther, 1684.
- G. W. LEIBNIZ, *De vera proportionem Circuli ad Quadratum circumscriptum in Numeris rationalibus a G.G.L. espressa*, in "Acta Eruditorum", Lipsia, Günther, 1682.
- M. S. MAHONEY, *The mathematical career of Pierre de Fermat 1601-1665*, Princeton University Press, 1973 (2a ed. 1994).
- P. MENGOLI, *Circolo*, Bologna, Benacci, 1672.
- I. NEWTON, *The mathematical papers of Isaac Newton*, a cura di D. Whiteside, Cambridge University Press, 1967-1977.
- H. OLDENBURG, *The correspondence of Henry Oldenburg*, edited and translated by A. Rupert Hall and M. Boas Hall, The University of Wisconsin Press, 1973.
- B. PASCAL, *Traité des trilogies rectangles et de leur onglets*, in *Œuvres complètes de B. Pascal*, Paris, Seuil, 1963.
- R. F. SLUSE, *An Extract of a Letter from the Excellent Renatus Franciscus Slusius*, in "Philosophical Transactions of the Royal Society", gennaio 1672/73.
- W. SNELL, *Cyclometricus*, Leiden, Elsevier, 1621.
- E. TORRICELLI, *Opera geometrica Evangelistae Torricellii*. Firenze, Massa e Landi, 1644.
- E. TORRICELLI, *Opere di Evangelista Torricelli*, a cura di G. Loria e G. Vassura, Faenza, Montanari, 1919.
- E. W. TSCHIRNHAUS, *Nova methodus tangentes curvarum expedite determinandi*, in "Acta Eruditorum", Lipsia, Günther, 1682.
- J. WALLIS, *Arithmetica infinitorum*, Oxford, Lichfield, 1655; *Opera Mathematica*, Oxford, e Theatro Sheldoniano, vol. I, 1695.
- J. WALLIS, *Opera Mathematica*, Oxford, e Theatro Sheldoniano, vol. II, 1693.



Enrico Giusti

Dopo un primo breve periodo in cui si è occupato di fisica teorica, è passato agli studi di matematica, compiendo ricerche nei campi delle equazioni alle derivate parziali, del calcolo delle variazioni e delle superfici di area minima. Più tardi è passato agli studi di storia della matematica e ancora più di recente alla divulgazione della matematica, con la fondazione del Giardino di Archimede.