Matematica, Cultura e Società

Rivista dell'Unione Matematica Italiana

Jacopo Amidei, Duccio Pianigiani

Natura empirica della metamatematica: la filosofia della matematica di Roberto Magari

Matematica, Cultura e Società. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **1** (2016), n.2, p. 145–159.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=RUMI_2016_1_1_2_145_0>

Matematica, Cultura e Società. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2016.

Matematica, Cultura e Società – Rivista dell'Unione Matematica Italiana
Serie I, Vol. 1, N. 2, Agosto 2016, 145-159

Natura empirica della metamatematica: la filosofia della matematica di Roberto Magari

Jacopo Amidei
Scuola Normale Superiore di Pisa
E-mail: jacopo.amidei@sns.it

Duccio Pianigiani
Dipartimento di Ingegneria dell'Informazione e Scienze Matematiche, Siena
E-mail: duccio.pianigiani@unisi.it

Sommario: *Attraverso l'analisi di alcuni testi inediti o poco noti, abbiamo cercato di ricostruire la filosofia della matematica di Roberto Magari (1934-1994), algebrista e componente di quella ristretta cerchia di matematici e di filosofi cui si deve la rinascita della logica matematica nell'Italia dei primi anni '60 del secolo scorso. Ne è uscita l'immagine di uno studioso a cavallo fra due epoche, radicato in una concezione della matematica che si potrebbe forse dire "strutturalista", secondo un filone che culmina con "Bourbaki", ma aperto verso le nuove istanze emergenti in filosofia della matematica all'inizio degli anni '70, tendenti a valorizzarne i metodi euristici.*

Abstract: *Roberto Magari (1934-1994), a well-known algebraist, is unanimously recognized as a component of the small group of mathematicians and philosophers to whom we owe the revival of mathematical logic in Italy in the early 60s of the last century. Through the analysis of some unpublished or not well known papers, we tried with this research to reconstruct his philosophy of mathematics. The result was the image of a scholar whose philosophy bridged two eras: rooted in a conception of mathematics we could say "structuralist" according to a trend that culminated with "Bourbaki", but open to the new requirements emerging in philosophy of mathematics in the early 70s, tending to enhance the importance of heuristic methods.*

1. – Introduzione

Roberto Magari (1934-1994) è unanimemente riconosciuto come un componente di quella ristretta cerchia di matematici e di filosofi cui si deve la rinascita della logica matematica nell'Italia dei primi anni '60 del secolo scorso. Già nei primissimi lavori in geometria e in teoria dei gruppi successivi alla laurea conseguita a Firenze con Guido Zappa trapelava un forte interesse metateorico, che diventerà più marcato con la frequentazione di Ludovico Geymonat e Ettore Casari e dopo l'incontro con la "logica algebrica" di Paul Halmos. Un orientamento che si concretizzerà dapprima in una serie di lavori eseguiti assieme a Piero Mangani sulle algebre monadiche, per proseguire da metà degli anni '60 (con Mangani, Laura Toti Rigatelli e Paolo Pagli) in direzione dei cosiddetti "calcoli generali", che riprendevano sviluppandole in modo originale alcune idee di Alfred Tarski. Verso la fine degli anni '60, docente a Ferrara, Magari venne a contatto con un settore allora di recente fondazione, la teoria dei modelli, un interesse che poi si precisò, sfociando nello studio dell'algebra universale. In quella fase si amplia il gruppo di allievi nel campo della logica, che includerà tra gli altri Claudio Bernardi, Franco Montagna, Giovanni Sambin e Aldo Ursini, i cui successivi contributi allo sviluppo delle algebre diagonalizzabili e alla "logica della dimostrabilità" sono

Accettato: il 28 dicembre 2015

ben noti. Il trasferimento a Siena nel 1971 segna anche l'avvio di un nuovo interesse verso i teoremi limitativi e l'opera di Kurt Gödel, che fondendosi con la precedente familiarità acquisita con l'algebra universale dette origine appunto alle "algebre diagonalizzabili". All'ultima fase appartengono le sue riflessioni nel campo della probabilità, fortemente motivate da tensioni di carattere etico, più che matematico (1). Il contributo di Magari all'algebra universale, l'introduzione delle algebre diagonalizzabili, così come gli sviluppi che ne sono seguiti in campo logico-matematico sono abbondantemente noti. In anni recenti sono stati posti nel giusto risalto, segnatamente nel dettagliato lavoro di Arpaia [26], anche i lavori sui calcoli generali. Infine, una discreta popolarità ha avuto di recente la critica di Magari [16] alla formalizzazione della "prova ontologica" proposta da Gödel, grazie ad un volume [35] sul tema, curato da Lolli e Odifreddi.

Quasi del tutto inesplorati rimanevano invece i lavori di Magari intorno alle probabilità non-archimedee (vd. [14]), fino al tributo riservato ad essi da Leonesi e Toffalori in [46]. Ma è del tutto logico che nel quadro di una concezione che, come vedremo, interpreta la crescita della conoscenza come un processo di approssimazione, di creazione e revisione di ipotesi provvisorie, anche la teoria della probabilità rivesta un ruolo importante. Magari insistette in particolare sull'importanza del concetto di probabilità *infinitesima*, sostenendo che le idee e gli argomenti più strani e bizzarri dovessero essere considerati anch'essi in qualche misura *probabili*, cioè dovesse essere assegnata loro probabilità non nulla. Difensore della teoria soggettivista della probabilità, Magari fu influenzato dalla concezione di Bruno de Finetti e dal suo carattere operativista. Egli partiva dal presupposto che nella nostra condotta morale siamo guidati anche da attribuzioni più o meno consapevoli di probabilità. Riteneva tuttavia che le questioni morali di grande interesse non si potessero trattare probabilisticamente nel contesto usuale, dove le probabilità sono identificate con numeri reali, bensì più appropriatamente nella cornice dell'analisi non-standard, con il ricorso a campi non-archimedei. Sebbene Magari ricorresse alla nozione di "infinitesimo", nella sua ontologia della matematica non c'era spazio per entità infinite in atto e la sua concezione dell'infinito rimase pertanto fermamente potenzialistica (vd. [13, 8]).

Se si eccettua una sezione della tesi di dottorato di Bruni [28], dopo gli articoli di Bernardi [27], Gnani [34], Montagna, Simi e Sorbi [50], anche sul tema dei sistemi dialettici (un originale tentativo di formalizzazione di un "algoritmo" che procede per tentativi ed errori, parallelo, ma non equivalente a quello più celebre elaborato negli stessi anni da Hilary Putnam) era caduto l'oblio, almeno fino alla recente ripresa in [22, 23, 24].

Eppure le idee intorno a quella che Magari, secondo una peculiare accezione, chiamava "metamatematica", viste dalla prospettiva odierna, colgono la trasformazione che si andava delineando nella filosofia della matematica a partire dagli anni '70. La singolare coincidenza di un carteggio inedito risalente al 1973 fra Magari e Georg Kreisel, in cui il logico austriaco recentemente scomparso, criticando l'idea che la conoscenza matematica proceda per tentativi ed errori, riproponeva quasi *verbatim* gli argomenti intorno al rigore informale contenuti in [41] (sui quali si appuntò a sua volta la critica di Imre Lakatos nel suo celebre [45] sulla rinascita dell'empirismo in matematica), ha creato un inaspettato *trait-d'union*. Dal carteggio e da altre riflessioni di Magari emerge un'interessante immagine, si può dire a cavallo fra due epoche, dello studioso che fu fondatore della prima scuola di specializzazione italiana in Logica Matematica. L'eredità formalista appare esplicita ad esempio in uno scritto inedito [21] centrato sul concetto generale di "rappresentazione", che prende le mosse, sia pur criticamente, dal meccanismo della *échelle* e dalle strutture-madri di Bourbaki (2). Al contempo Magari appare aperto verso le nuove istanze emergenti nella filosofia della matematica all'inizio degli anni '70, tendenti ad evidenziare il carattere "dialettico" ed "empirico" della crescita della conoscenza matematica ed a valorizzarne i metodi euristici ed informali.

(1) Rinviamo a [1] per note biografiche e bibliografiche più esaustive.

(2) Qui Magari per molti versi anticipa temi dello strutturalismo matematico più recente (cf. [51], pp. 253-275).

2. – La scienza metamatematica

Un *leit-motiv* ricorrente in molti scritti di Magari è la concezione della *metamatematica* come di una *scienza empirica*, un'affermazione che può apparire abbastanza enigmatica, se non si precisano preliminarmente i termini della questione. Innanzitutto, la concezione dalla quale prende le mosse la riflessione di Magari intorno alla "metamatematica" è quella, per sommi capi, di matrice hilbertiana ([3]): il metalinguaggio in genere non è formalizzato; attraverso di esso si costruisce una metateoria composta di definizioni e dimostrazioni relative alla teoria oggetto, benché in questo caso "si tratta di un dimostrare le cui regole non sono esplicite" ([20], p. 2). Stigmatizzando la disinvoltura con la quale si è talvolta liquidato il programma di Hilbert dopo la scoperta dei risultati di Gödel, Magari prendeva le distanze da certe "riviviscenze di visioni platoniche" che ne sono conseguite; naturalmente, dopo i risultati di Gödel, l'ideale della metamatematica come fondazione delle teorie matematiche non è più sostenibile e semmai "cede il passo all'ammissione di una feconda circolarità" (*ibid.* p. 8). Sul fatto che al ruolo fondazionale della metamatematica si dovesse sostituire una sorta di cooperazione fra matematica e metamatematica, aveva insistito, in particolare, Tarski. Questi fu autore di una profonda trasformazione della metamatematica, alla quale assegnò un dominio ben più ampio di quello originariamente attribuitole da Hilbert, segnatamente con la volontà di renderla una disciplina interamente matematica. La metamatematica doveva essere capace di produrre risultati che si mostrassero a loro volta utili per la matematica ordinaria, senza porre un netto confine tra le due, bensì attraverso una fruttuosa interazione. Tarski fu sicuramente una fonte ispiratrice della concezione di Magari, del quale si può forse ripetere ciò che Solomon Feferman ha scritto a proposito del matematico polacco: "He would axiomatize and algebraicize whenever he could" ([30], p. 402).

L'influenza della formalizzazione della metamatematica proposta da Tarski tra gli anni '20 e i primi anni '30 si manifesta del resto in modo esplicito nelle ricerche condotte da Magari con Mangani, Pagli e Toti Rigatelli negli anni '60 intorno ai cosiddetti *calcoli generali* ([4]). Queste ricerche sviluppano in modo originale le idee tarskiane intorno alla assiomatizzazione della nozione di conseguenza posta in atto nella teoria generale dei sistemi deduttivi. Prendendo le mosse dai concetti primitivi di "insieme di espressioni" S, che è semplicemente un insieme non vuoto arbitrario, e da un operatore astratto di conseguenza Cn_S sull'insieme potenza di S che gode delle proprietà di essere una "chiusura di Moore" ([5]), Magari intendeva tramite questi calcoli portare lo studio dei sistemi logici al massimo livello di generalità. I successivi sistemi "formali", "metaformali" ed "iperformali" di cui parleremo più avanti, confermano l'intento dichiarato in [2] di portare lo studio metamatematico al "massimo livello di generalità". Anche nella loro presentazione sul piano formale mostrano una parentela con i calcoli generali; ma l'orizzonte della metamatematica verrà ora ampliato al punto da includervi una teoria formalizzata dei procedimenti euristici. Magari parla della metamatematica come di una scienza che, sia pure fortemente matematizzata, ha i tratti delle scienze naturali, mentre la matematica viene identificata grosso modo con la classe dei sistemi formali ([6]). La matematica *pura* non è allora un sapere empirico, nel senso che non dice niente sul mondo, mentre è viceversa la *metamatematica*, a costituire, a suo modo, una scienza empirica. Se infatti la matematica è identificata con la collezione dei sistemi formali assiomatici, in matematica non vi sono propriamente "leggi" e nessun oggetto matematico presenta "fenomeni". Benché non esistano leggi matematiche in matematica "pura", esistono nondimeno leggi matematiche in matematica *applicata*, le quali però sono leggi di una scienza che, pur utilizzando il linguaggio matematico, è – secondo Magari – sostanzialmente diversa dalla matematica pura. In questo schema, la "teoria formale" è una teoria non interpretata, mentre

([3]) In [20] — probabilmente la voce "assiomi" per un'enciclopedia non rintracciata — Magari ne offre un resoconto lungo binari canonici.

([4]) cf. [58] pp. 31-37 e [26] per una ricostruzione dettagliata dei contributi di Magari e della sua scuola.

([5]) Cioè soddisfa le condizioni $X \subseteq Cn_S(X)$, $Cn_S(Cn_S(X)) \subseteq Cn_S(X)$ e la monotonia (intuitivamente, se S è un insieme di formule, $Cn_S(X)$ denota l'insieme delle formule deducibili da X).

([6]) vd. [1], p. 73, [11] p. 14.

la "metateoria" è una teoria interpretata, nel senso che il suo dominio d'interesse è ben determinato ed è composto da tutti gli oggetti che la teoria descrive:

> [...] i teoremi metamatematici, in quanto hanno un contenuto, ossia generano delle aspettative, fanno parte di una teoria interpretata *che ha gli stessi caratteri di una scienza naturale* ed ha per oggetto di studio oggetti in definitiva concreti, ossia i simboli e le manipolazioni umane o meccaniche che essi possono subire. ([11], p. 11)

Il teorema di Gödel genera ad esempio in noi delle aspettative: se infatti T è una teoria formale contenente l'aritmetica di Peano ed ipotizziamo che esista in essa una dimostrazione dell'enunciato indimostrabile del primo teorema di Gödel, allora ci aspettiamo di poter dimostrare in T la proposizione $1 = 0$. La metamatematica diventa così, secondo Magari, al pari della meccanica razionale, una scienza naturale e le sue previsioni non sono qualitativamente diverse "da quelle che la meccanica può fornire sui movimenti della Luna, anche se hanno, forse, un maggior grado di certezza" (op. cit. p. 12).

Ci sono dunque leggi in forma matematica e riguardanti la matematica, appartenenti alla scienza che studia i fenomeni propri dei formalismi, ossia la metamatematica, che servendosi del linguaggio matematico può erroneamente essere confusa con la matematica. Essa è viceversa un ramo della matematica che, "colta nel suo momento applicativo, è in ultima analisi sperimentale" ed ha per oggetto i simboli e le loro manipolazioni:

> i suoi fondamenti assomigliano a quelli della fisica: sono ricavati dall'esperienza e/o dal pregiudizio (detto anche "sintetico a priori") che concatenando il segno "A" con il segno "B" e poi il risultato col segno "C" si ottiene lo stesso risultato che concatenando "A" al risultato della concatenazione di "B" con "C" (concatenare significa solo "scrivere di seguito"). Questa è la legge associativa dei segni, che appartiene alla metamatematica. ([1], p. 74)

Una teoria matematica, intesa come sistema formale, è un insieme di proposizioni "su" alcuni termini dati in partenza o definiti a partire da altri termini, che possiamo dividere in due sottoinsiemi: il primo è composto da proposizioni assunte in partenza e chiamate *assiomi*, mentre il secondo è formato da proposizioni derivate a partire dagli assiomi tramite regole di deduzione specificate in partenza. Nello scritto inedito [20] Magari presenta due concezioni a partire dalle quali è possibile fondare il concetto di assioma; l'evoluzione dalla prima alla seconda concezione è alla base delle moderne ricerche sui fondamenti della matematica. La prima concezione è quella che considera gli assiomi proposizioni "vere", la cui veridicità è garantita dall'evidenza, data a tali proposizioni, da una certa interpretazione; le regole di deduzione trasmettono correttamente la verità dalle premesse alle conclusioni. Solitamente una teoria nasce con l'aspirazione ad essere significante, ovvero una teoria che descrive "qualche cosa"; ha senso pertanto parlare della verità di una teoria matematica solo in quanto si considerano le sue proposizioni come dotate di un "significato". Il "metodo dimostrativo" nasce storicamente con l'intento di circoscrivere tutte e sole le proposizioni vere relative a un dato campo di indagine; perciò il presupposto è che le premesse o assiomi sono vere e che le regole di deduzione conservino la verità:

> tuttavia, data la variabilità dei criteri che sono stati invocati per stabilire premesse vere, i matematici moderni preferiscono costruire teorie in cui non si presenta alcun motivo per credere nelle premesse; al tempo stesso si lascia cadere il riferimento ad una precisa interpretazione della teoria. ([20], p. 3)

Secondo la concezione moderna, gli assiomi di una teoria sono semplici proposizioni di partenza completamente estranee a qualsiasi interpretazione, la quale può avvenire solo in un secondo momento ed indipendentemente dallo sviluppo della teoria. L'interpretazione degli assiomi è lasciata a chi *applica* la teoria. Una volta applicata la teoria ha senso porsi delle domande sulla verità, ma in questo caso parliamo di verità *di un'altra teoria* e non siamo più strettamente in una teoria matematica.

Si può obiettare che se la metamatematica è una scienza naturale, allora non è formalizzabile, o almeno ciò accade se le si pongono richieste eccessive:

> A rough inference would lead us to conclude that, even if Metamathematics is a natural science, it cannot be formalized as soon as one would require that: (1) once a theory has been formalized, it must deal with its

> own semantics, and (2) the consequences of the validity of the theory, for example its consistency, must be inserted in the axioms. In fact, in this case, the limitations due to Tarski and Gödel lead us immediately to enrich the theory, both from the expressive and deductive points of view. ([12], p. 270)

Lo scopo dichiarato dell'indagine di Magari [5] intorno ai sistemi detti "iperformali" sarà appunto quello di verificare entro quali limiti si possa procedere alla formalizzazione della metamatematica conservandone tuttavia i tratti di una "scienza naturale".

3. – Metamatematica ed euristica

La metamatematica hilbertianamente intesa, osservava criticamente Lakatos in [45], riguarda "un'astrazione della matematica", ossia i sistemi formali, dove le dimostrazioni sono intese come concatenazioni di formule: come tale, la metamatematica non è in grado di dar conto della dinamica che conduce alla crescita della conoscenza. La convinzione che la conoscenza matematica evolva attraverso successive revisioni ed aggiustamenti, la sua natura dunque congetturale, assieme alla critica serrata del carattere statico della matematica come vista dalla metamatematica, sono caratteristiche di quell'approccio alla filosofia della matematica legato oggi principalmente al nome del filosofo ungherese. Secondo questo punto di vista, la matematica non cresce per accumulazione di verità infallibili, ma è piuttosto un'attività soggetta a revisione attraverso una dinamica di prove e refutazioni ([45], [44]). La filosofia della matematica di Lakatos, spesso qualificata come fallibilista, antifondazionalista e antiformalista, istituisce una distinzione, per quanto non rigida, fra matematica *formale* ed *informale*, affermando quindi il primato della matematica informale sulle teorie formalizzate; se pertanto una teoria formale è la formalizzazione di una teoria informale, essa può essere refutata, non solo dalla scoperta di una contraddizione, ma anche da un corrispondente teorema della teoria informale, ossia da quello che Lakatos chiama un "falsificatore euristico". Nella filosofia della matematica più recente altri studiosi interessati ad un resoconto più realistico dello sviluppo della conoscenza matematica hanno optato per un approccio dove non si parla più di assiomi permanenti, ma di ipotesi provvisorie, trovate per tentativi ed errori, e dove la sostituzione di una ipotesi non comporta l'abbandono del sistema (7).

La veemente critica di Lakatos al formalismo non è presente in Magari, così come assente è l'enfasi sulla dimensione informale della matematica. D'altro canto, occorre riconoscere che la concezione della metamatematica di Magari è, per così dire, meno angusta di quella tratteggiata da Lakatos. Essa non trascura i processi euristici, ma esprime semmai la volontà di trattare formalmente anche la dinamica che conduce alla costituzione dei sistemi assiomatici, proponendo "sistemi formali" di tipo nuovo che incorporano la procedura di tentativo ed errore. Questi verranno definiti, per distinguerli dai sistemi tradizionali, "sistemi iperformali" e saranno oggetto dei prossimi due paragrafi. Per Magari i sistemi formali, pur rappresentando in modo adeguato l'attività matematica pura, non riescono infatti a schematizzare l'attività matematica nel suo aspetto dinamico. L'evoluzione della conoscenza matematica sembra pertanto essere meglio catturata da processi di apprendimento per tentativi ed errori, sebbene una tale idea sia stata considerata in passato con sospetto, a causa di "un certo orrore per la contraddizione" ([4], p. 121).

Dissolta l'illusione della certezza *a priori* dei teoremi matematici, legata alla credenza nella loro "tautologicità" (ovvero analiticità), Magari vedeva quello che chiamava "il mito della certezza" riaffiorare in metamatematica. A causa del fatto che i postulati metamatematici si presentano spesso come "innocue regole sulla concatenazione dei segni", la metamatematica ci appare ingannevolmente come scienza puramente deduttiva, più che *ipotetico*-deduttiva. Questo è in definitiva lo stesso meccanismo per cui, anche riguardo alla geometria euclidea, dimenticate le remote origini sperimentali, nel tempo ha potuto farsi strada una concezione secondo cui essa è puramente "analitica o comunque certa", benché questo non abbia impedito l'abbandono di un suo postulato e la nascita di geometrie non euclidee.

(7) cf. [29].

La posizione di Magari emerge con chiarezza nel vivace contrasto che lo oppose a Kreisel riguardo all'ipotesi che la conoscenza matematica evolva per tentativi ed errori, nel breve scambio epistolare non pubblicato (vd. [18]) intercorso dal Giugno all'Ottobre del 1973. In questo dibattito il logico austriaco ripropose con veemenza le sue critiche verso quelli che definiva filosofi della matematica *pragmatisti*, o *positivisti*, rivendicando un ruolo primario per l'intuizione. Kreisel riteneva che il ragionamento matematico iniziasse con quell'esame delle nozioni intuitive da lui denominato "rigore informale", quasi ripetendo alla lettera le sue ben note posizioni, che in [41] erano formulate in questi termini:

> The 'old fashioned idea' is that one obtains rules and definitions by analyzing intuitive notions and putting down their properties. This is certainly what mathematicians thought they were doing when defining length or area or, for that matter, logicians when defining rules of inference or axioms (properties) of mathematical structures such as the continuum. (p. 138)

Noi abbiamo, per esempio, una cognizione abbastanza chiara della gerarchia cumulativa, a prescindere dalle formalizzazioni della teoria degli insiemi. I paradossi scaturiscono dal fatto che questa nozione primitiva è una miscela di nozioni affatto diverse, che solo l'analisi riesce a chiarire. Nella lettera a Magari del 24 Settembre 1973, Kreisel criticava da un lato l'atteggiamento troppo "formalista" del suo interlocutore:

> 'We work in *ZF*', or 'we work in *MK*'. Most of the time we do nothing of this kind. We prove theorems about *sets*-and nowadays (at least for working mathematicians) this means sets generated by iterating the power set operator (8).

Dall'altro lato ribadiva il suo rifiuto della concezione per cui la conoscenza matematica evolve per tentativi ed errori:

> The choice of any system of axioms would be a matter of trial and error if we did not have in mind objects for which the theorems are intended to be valid. You commit a blatant *petitio principii*, if You try to support your analysis of mathematical practice as a trial and error scheme by simply neglecting the way we actually find and explain most axioms. (*ibid.*)

Scrivendo a Kreisel il 3 Settembre 1973, Magari aveva riconosciuto la difficoltà di dare in matematica delle "genuine trials" come nelle scienze empiriche, di fatto riducendosi a considerare, nella teoria dei sistemi dialettici, solo falsificatori di tipo logico (ossia le contraddizioni) e non di tipo "euristico". Pur consapevole della problematicità della trasposizione del fallibilismo popperiano in un contesto matematico, nondimeno Magari si chiedeva se la nozione stessa di sistema formale non fornisse un modo per rendere rigorosamente il concetto di *trial*. Se infatti usiamo il sistema Kelley-Morse *MK* di teoria degli insiemi per studiare la teoria Zermelo-Fränkel *ZFC*, allora gli enunciati del linguaggio di quest'ultima che sono dimostrabili in *MK* – tipicamente enunciati come quello che afferma la consistenza della teoria *ZFC*, che denoteremo *Con*(*ZFC*) – possono essere visti alla stregua di "trials", cioè di nuovi assiomi proposti nel senso di quella che nel prossimo paragrafo chiameremo "funzione proponente" dei sistemi dialettici:

> since many metamathematicians have this trend, the trial and error schemes are *a possible* (of course wide) *description of the metamathematical activity*. (*ibid.*)

Magari accennava anche alla possibile iterazione di questo schema (9), delineando un meccanismo simile a quello delle progressioni di Turing: per il teorema di Gödel ogni teoria *T* sufficientemente potente è incompleta, e tuttavia – osservava Turing – il teo-

(8) Verosimilmente qui Kreisel e Magari con *ZF* si riferiscono in realtà alla teoria degli insiemi Zermelo-Fränkel *con l'assioma di scelta*, più comunemente denotata *ZFC*; invece *MK* è una diversa formalizzazione della teoria degli insiemi, con due sorte di variabili, una per gli insiemi ed una per le classi proprie. Essa è strettamente più forte di *ZFC*: in *MK* è possibile dimostrare che la classe di tutti gli insiemi è un modello di *ZFC*, e pertanto che quest'ultima teoria è consistente.

(9) Ciò del resto è in linea con un tratto peculiare della personalità scientifica di Magari, che un corrispondente e biografo ha definito "la propensione a generalizzazioni sempre più ampie" (vd. [1], p. 48).

rema stesso indica un metodo per ottenere una teoria "più completa", iterando *ad infinitum* l'operazione che consiste nell'estendere T con la formalizzazione dell'affermazione "T è consistente". Nella stessa lettera a Kreisel, rivolgendosi ad uno scettico interlocutore, Magari argomentava che, lavorando in ZFC, dovremmo sospendere il giudizio circa l'enunciato $Con(ZFC)$ e tuttavia:

> we do not suspend the judgement, when we have not a theorem [...] when our mathematics is a guide for operating, then we work as trial and error machines.

I matematici tendono a proporre sistemi formali, e quindi teorie matematiche sempre più potenti, almeno finché non emergono contraddizioni. Al contrario, nel caso in cui venga individuata una contraddizione, il matematico tenderà a limitare la potenza della teoria eliminando o indebolendo alcune assunzioni di partenza. Feferman [32] rimarcando, nonostante tutto, i successi dell'analisi logica delle strutture della matematica sottolinea come, benché i sistemi formali rappresentino porzioni della matematica "in vitro" e non "in vivo", essi possano essere utilizzati per modellare la crescita ed il cambiamento. La teoria delle progressioni originata da Alan Turing e sviluppata principalmente da Kreisel e Feferman costituì un primo tentativo significativo di cogliere questa dinamica.

4. – Sistemi dialettici

La rimozione di assiomi dovuta al fatto di aver derivato da essi una contraddizione, o l'aggiunzione di assiomi alla teoria T è correlata, secondo Magari, allo stadio propriamente "metamatematico". Questo processo può essere precisato in termini di "sistemi iperformali", cioè, come vedremo, di limiti inferiori ([10]): come diremo meglio più avanti, ciò implica che una data ipotesi non possa essere presa in considerazione infinite volte, ma che, da un certo punto in poi, entri stabilmente a far parte delle tesi definitivamente accettate, oppure ne resti definitivamente esclusa. I cosiddetti "sistemi dialettici", ossia il modello di computazione al limite introdotto da Magari, costituiscono una sottoclasse propria della classe Δ^0_2 e dunque esempi specifici di Σ^0_2–insiemi, ovvero di quelli che Magari in [5] chiama "sistemi iperformali" ([11]). A metà degli anni '70, indipendentemente Magari [4] e Jeroslow [39] proposero due approcci formali, diversi tra loro e da quelli già allora venuti alla luce ad opera di Putnam [54] e di Gold [37], al concetto di "teoria che procede per tentativi ed errori" ([12]). L'insieme dei teoremi delle "logiche sperimentali convergenti" di Jeroslow coincide con la classe degli insiemi Δ^0_2, ovvero computabili a limite, per una serie di risultati dovuti a Joseph R. Shoenfield e a Emil Leon Post. Per comprendere il concetto di computabilità al limite è interessante il raffronto con gli insiemi computabilmente enumerabili. Un insieme è computabilmente enumerabile se è il codominio di una funzione totale computabile, ma tra le varie caratterizzazioni equivalenti è utile ai nostri scopi porre attenzione alla seguente: un insieme A è computabilmente enumerabile se esiste una funzione computabile $h : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \{0, 1\}$ tale che per ogni x:

1. $h(x, 0) = 0$,
2. per al massimo un s, $h(x, s + 1) \neq h(x, s)$,
3. $\lim_{s\to\infty} h(x, s) = A(x)$.

In altri termini A possiede una approssimazione computabile che, per ogni x, partendo dall'ipotesi che x all'inizio non appartenga ad A, può cambiare opinione *al più una volta*. Generalizzando possiamo considerare ora approssimazioni che cambino opinione *un numero finito di volte*: il "limit lemma" di Shoenfield caratterizza gli insiemi Δ^0_2 come quelli che hanno una approssimazione computabile con un

([10]) Sia $\{A_n\}_n$ una successione di sottoinsiemi dell'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali. Si introduce il limite inferiore degli A_n come l'insieme $\{x \in \mathbb{N} | \exists k \forall m \geq k, x \in A_m\}$. Si noti l'alternanza di quantificatori. Nella definizione di limite superiore sarà invertita.

([11]) Detto in modo informale, un insieme è nella classe Σ^0_2 se è definibile con una espressione che ha un prefisso della forma $\exists\forall$ ("esiste x tale che per ogni y..."), seguito da una relazione computabile. Un insieme definibile con un prefisso della forma $\forall\exists$ sarà invece nella classe Π^0_2; un insieme è Δ^0_2-definibile se è sia Σ^0_2-definibile che Π^0_2-definibile.

([12]) Jeroslow partecipò alla discussione epistolare tra Kreisel e Magari (vd. [19]). Per altri approcci vedi ad esempio [38].

numero finito di *mind changes*. Stabilisce in altri termini l'equivalenza fra l'appartenenza di un insieme A alla classe Δ^0_2 della cosiddetta "gerarchia aritmetica" ([13]) e l'esistenza di una funzione totale computabile h come sopra, dove però, per ciascun x, la condizione 2 vale non al più per uno, ma per un numero finito qualunque di s.

Diversamente dai modelli proposti da Putnam, Gold e Jeroslow, gli insiemi "dialettici" di Magari (ovvero gli insiemi delle cosiddette "tesi finali" sulle quali un sistema dialettico si stabilizza) costituiscono una sottoclasse propria di questa classe. L'idea intuitiva che Magari intende cogliere è così sintetizzabile:

> Un sistema formale schematizza il comportamento di un uomo che, data una proposizione p, si astenga da ogni giudizio sulla verità di p finché non abbia eventualmente dimostrato p, oppure $\neg p$. Un sistema dialettico invece schematizza il comportamento di un uomo che va enumerando (con un certo procedimento: la f) proposizioni in cui crede "fino a prova contraria". ([4], p. 147)

Nella presentazione di Magari, un sistema formale è quindi dato da un insieme di proposizioni, che possiamo identificare con $\mathbb{N}$, un operatore H di chiusura algebrica ("di Moore") che associa a ciascun sottoinsieme computabilmente enumerabile X di $\mathbb{N}$ un sottoinsieme computabilmente enumerabile $H(X)$ di $\mathbb{N}$, e infine un elemento privilegiato $c \in \mathbb{N}$ (la contraddizione) per il quale vale $H\{c\} = \mathbb{N}$. Con il concetto di "sistema dialettico" Magari introduce in questo formalismo un nuovo elemento, ossia una funzione totale ricorsiva f che calcola, ad ogni stadio della computazione, il successivo assioma che verrà proposto. L'attività dei matematici è quindi così schematizzata da Magari:

> In un primo tempo i matematici si dedicheranno a dedurre da A elementi di $H(A)$, cioè procederanno a una parziale enumerazione di $H(A)$. Se a un certo punto della enumerazione si troverà c, uno degli elementi di A verrà rimosso e con esso tutti gli elementi di $H(A)$ dedotti tenendone conto. In seguito qualcuno proporrà di aggiungere ad A nuovi elementi ed il processo si ripeterà. ([4], p. 123)

([13]) vd. [25], pp. 28-29.

Un sistema dialettico, in una formulazione equivalente a quella originaria di Magari, può essere allora definito come una tripla $d = \langle H, f, c\rangle$ dove la funzione f è la *funzione proponente* nuovi assiomi, ed è una permutazione computabile di $\mathbb{N}$, mentre H è un operatore di enumerazione ([14]) che soddisfa le proprietà di chiusura algebrica $X \subseteq H(X)$, $H(H(X)) \subseteq H(X)$ e per cui vale inoltre $H(\emptyset) \neq \emptyset$. Infine $c \in \mathbb{N}$ è un numero naturale inteso rappresentare la contraddizione, sul quale H si comporta come abbiamo detto sopra, deducendo l'intero insieme dei numeri naturali (*ex falso, sequitur quodlibet*). Ad ogni sistema dialettico viene associata una procedura di computazione per tentativi ed errori che mette capo ad un insieme A_d, detto delle tesi definitive, alle quali il sistema perviene dopo aver "cambiato opinione" un numero finito di volte; se H si riferisce ad una teoria formale consistente, ovvero se $c \notin H(\emptyset)$, allora A_d costituisce un completamento di Lindenbaum ([15]) di $H(\emptyset)$.

Abbiamo dunque un procedimento di computazione, ancorché al limite, per ottenere una teoria completa. Alla biiettività della funzione proponente f è legato il fatto che i sistemi dialettici danno luogo a particolari completamenti; tuttavia, osservava Magari, non è detto che la comunità matematica tenda proprio a questo scopo, suggerendo che l'ordinario comportamento dei matematici possa essere colto meglio da una variante dei sistemi dialettici, detta "temperata", per la quale la suriettività di f non era più richiesta. Successivamente Gnani [34] dimostrò che i due approcci, di Magari e di Jeroslow, risultano equivalenti, purché da un lato si modifichi la funzione proponente, che all'origine era una permutazione computabile di $\mathbb{N}$, lasciando cadere la suriettività, e dall'altro lato si considerino logiche sperimentali di Jeroslow in cui non sia richiesta una certa proprietà, detta di convergenza: in tal caso la classe degli

([14]) Cioè un insieme computabilmente enumerabile tale che $H(A) = \{n | \langle n, D\rangle \in H,\ per\ qualche\ D \subseteq A\ finito\}$ (vd. [22]).

([15]) Si ricordi che per il cosiddetto "lemma di Lindenbaum", ogni teoria del prim'ordine consistente può essere estesa ad una teoria consistente *completa*. Tuttavia per il teorema di Gödel, l'aritmetica di Peano, ad esempio, non può avere un completamento *computabile*.

insiemi dialettici e dei teoremi delle logiche sperimentali coincidono con la classe degli insiemi Σ^0_2.

Il modello degli insiemi dialettici costituisce solo un esempio di sistema iperformale, che oltretutto non risulta pienamente soddisfacente: ad esempio gli insiemi dialettici computabilmente enumerabili risultano essere solo quelli computabili e già Magari studiò una classe di sistemi intermedia fra quella di sistemi dialettici e quella dei limiti. Recentemente [22, 23, 24], anche con l'intento di verificare in che misura i sistemi di Magari possono eventualmente offrire un resoconto rigoroso di alcune idee di Lakatos, il meccanismo della aggiunzione e rimozione degli assiomi posto da Magari alla base dei suoi sistemi dialettici è stato arricchito con un meccanismo di revisione che consente di rimuovere assiomi che appaiano per qualche verso inadeguati, benché non diano luogo necessariamente a contraddizioni (gli unici "falsificatori potenziali" che considerava Magari nel modello originario dei sistemi dialettici erano infatti le contraddizioni).

5. – Verità e sensatezza

La metamatematica manifesta, secondo Magari, "un meraviglioso carattere di inesauribilità" ([11, 12]). L'allusione è evidentemente all' efficace espressione che Gödel mutua da Brouwer, secondo cui la matematica è "inesauribile" ed occorre pertanto attingere perennemente alla "fontana dell'intuizione". Anche l'argomento di Magari è di fatto una parafrasi di un passo di Gödel. Questi ritiene che sia impossibile consistentemente affermare da un lato che percepiamo con chiarezza matematica (Magari dice "crediamo") che gli assiomi di un dato sistema formale sono veri e le regole conservano la verità, e dall'altro lato che quel dato sistema di assiomi contiene tutta la matematica. La ragione è che dalla prima affermazione segue che allora percepiamo anche, con chiarezza, che quel sistema formale è consistente, ovvero, "a mathematical insight not derivable in his axioms" ([36], p. 309). Se noi crediamo, per esempio, in *ZFC* come base valida per la metamatematica, allora crediamo anche "in certe sue conseguenze, per esempio nella sua consistenza", e questo – commenta Magari – porta con sé "un impegno forse non meccanizzabile ... in linea con le progressioni ordinali, come le studiano, ad esempio, Turing e Feferman" ([11], p. 11). Una conclusione che Magari definisce "grossolana" potrebbe essere la seguente ([16]):

> even if Metamathematics is a natural science, it cannot be formalized as soon as one would require that: (1) once a theory has been formalized, it must deal with its own semantics, and (2) the consequences of the validity of the theory, for example its consistency, must be inserted in the axioms. ([12], p. 270)

In questo caso, infatti, le limitazioni dovute a Tarski e a Gödel portano immediatamente ad arricchire la teoria sia sul piano espressivo che sul piano deduttivo. Una formalizzazione della metamatematica che ne conservi i tratti di "scienza naturale" è comunque possibile, secondo Magari [11, 12], a patto che si riveda il concetto tarskiano di verità e che ci si restringa ad una classe di proposizioni, considerate "sensate". Magari introduce quindi il concetto generale di "sistema metaformale" e il superamento delle difficoltà legate ai risultati limitativi di Tarski e di Gödel, avviene anch'esso nella cornice di un concetto di computabilità intesa come computabilità al limite.

Già nell'articolo sui sistemi dialettici Magari si sofferma ampiamente sul tema della "genuinità" o "naturalezza" degli enunciati di consistenza, e se da un lato persegue la scelta di restringere il concetto di verità ad una classe di enunciati che definisce "sensati", dall'altro, scrivendo a Kreisel (20 Luglio 1973), rassicura al contempo che il concetto di consistenza da lui introdotto soddisfa la *intensional correctness* richiesta da Feferman [31]:

> I agree that for any presentation of a theory like arithmetic there exists a natural way of expressing consistency. This was clear from '60 (from the Feferman paper) [...] It is nevertheless necessary to observe that in the paper I discuss the consistency of trial and error schemes. Of course also for these schemes the problem is easy (I substantially solve it: see page 29,30: it is sufficient make $E(x, y, z)$ intentionally correct in the sense of Feferman).

([16]) L'articolo [12] è in larga parte desunto da [11], ma in alcuni passaggi, come quello citato, ci pare più preciso.

Il predicato $E(x, y, z)$ di cui si fa menzione formalizza "x appartiene all'insieme delle tesi provvisorie allo stadio z del sistema dialettico la cui funzione proponente è la funzione totale biiettiva ϕ_y". Dunque la formula $\exists x \exists z \forall n \geq z\ E(x, y, n)$ esprime la consistenza del sistema dialettico, ovvero il fatto che l'insieme delle sue tesi definitive non è vuoto. Sotto l'assunzione della correttezza dell'aritmetica di Peano PA, Magari dimostra che esiste un sistema dialettico che estende questa teoria ed ha fra le sue tesi definitive l'affermazione della propria consistenza in questa forma (un risultato che successivamente generalizza, slegandolo dalla particolare formula che esprime la consistenza).

L'analisi delle limitazioni espressive è oggetto soprattutto di [5]. Qui Magari isola, seguendo criteri "neopositivistici"(*sic*), l'insieme V_0 delle "proposizioni vere e sensate" di un dato sistema formale F, estensione consistente di PA. La prima proposta, banale, sarebbe quella di identificare le proposizioni vere con quelle dimostrabili, e dunque le proposizioni sensate con l'unione di quelle dimostrabili e delle loro negazioni. Tuttavia questo è errato: se per esempio consideriamo l'enunciato indecidibile p di Gödel si ha che, benché indimostrabile, la teoria "sa o meglio finisce per sapere che, se p è falso, lo dimostrerà". Ricordiamo che tale enunciato è universale, ovvero ha un prefisso della forma "per ogni x..." seguito da una relazione computabile. Magari allude allora evidentemente alla dimostrabilità in PA stessa della formalizzazione della proposizione: "se la negazione di p è vera, allora essa è dimostrabile in PA". Siccome la negazione di un enunciato universale è equivalente a un enunciato esistenziale, ovvero uno con un prefisso della forma "esiste x...", quello considerato da Magari è un caso particolare della dimostrabilità in PA della versione formalizzata della completezza ("se è vero, allora è dimostrabile in PA") per enunciati di questo ultimo tipo. Per quanto non rientri tra le proposizioni "sensate", p risulterebbe dunque nondimeno *falsificabile*. Raffinando questa proposta Magari giunge infine ad una definizione soddisfacente delle proposizioni "vere e sensate" come chiusura deduttiva dell'insieme delle proposizioni p che non sono teoremi di F e per le quali F dimostra tuttavia che, se la loro negazione è vera, allora è anche dimostrabile in F. Sulla base di queste definisce il sistema "metaformale" F^* associato ad F.

Partendo da un dato sistema formale $F = \langle P, T \rangle$, dove P è l'insieme delle formule ben formate del suo linguaggio e T è l'insieme delle tesi, si tratta dunque di estenderlo ad un sistema detto "metaformale" $F^* = \langle P_0, V_0 \rangle$, che è ottenuto focalizzando due specifiche sottoclassi delle espressioni del linguaggio, ossia le "proposizioni sensate" P_0 e le "proposizioni sensate e vere" V_0, dove $P_0 \subseteq P$ e $T \subseteq V_0$. È dimostrabile che entrambe queste collezioni sono limiti inferiori ([17]). È interessante notare che in questa cornice cade il teorema di Tarski di indefinibilità della verità. Si dimostra infatti che esiste un "predicato di verità" $\dot{V}_0(x)$ tale che $p \in V_0$ se e solo se $\dot{V}_0(\overline{p}) \in V_0$, cioè la proposizione che esprime la verità di p è vera e sensata ([18]). I teoremi limitativi gödeliani si ripropongono invece, in questo contesto, con risultati da cui segue che, sotto le condizioni del primo teorema di incompletezza, esistono proposizioni di F insensate (primo teorema di Gödel). Inoltre, se C è una formulazione della consistenza della teoria metaformale F^* da cui segua $\neg \dot{V}_0(\overline{0 \neq 0}) \in V_0$ – da leggersi: l'espressione la quale afferma che la contraddizione $0 \neq 0$ non è "vera e sensata" appartiene essa stessa alle proposizioni vere e sensate – allora C è insensata (secondo teorema di Gödel). In [6] Magari afferma più seccamente che tutte le formulazioni naturali della consistenza del sistema metaformale sono insensate. Cessa perciò "ogni discrepanza che spinga a distinguere fra teoria e metateoria" e F^* si rende adeguato a costituire la propria metateoria ([19]). Essendo i limiti inferiori "dominabili per tentativi ed errori", se ne può concludere che:

> le esigenze che possono portare a modificazioni della teoria assunta come metamatematica sono quelle di natura analoga alle esigenze che spingono i fisici ed ogni naturalista. ([11], p. 13)

([17]) vd. nota 10.

([18]) La sbarra sopra p e in genere sopra un'espressione, indica che stiamo considerando il numerale (cioè il termine del linguaggio della teoria) corrispondente alla sua codifica numerica.

([19]) Ulteriori caratterizzazioni dell'insieme delle proposizioni vere sensate ed approfondimenti di questo approccio sono stati dati in [61].

6. – Il finitismo e la mente umana

Magari aderisce in generale al programma bourbakista della "purificazione della matematica dall'intuizione", osservando che il "metodo metamatematico", sebbene a causa dei risultati gödeliani non venga più inteso nel senso di fondazione delle teorie matematiche, proprio da tali risultati viene in qualche modo valorizzato:

> con questo metodo, se non altro, il preteso ruolo dell'intuizione in matematica viene ridotto di molto. ([20], p. 9)

L'intuizione matematica, tuttavia, conserva ancora un ruolo nei processi creativi: riallacciandosi alla concezione di Poincaré, secondo cui l'invenzione è discernimento ([20]), Magari interpreta la creatività come capacità di operare scelte rare ed inusuali fra un numero di alternative *finito* (vd. [8], pp. 44-45). Anche a causa dei limiti percettivi di un organismo umano, la stessa creazione di una nuova forma artistica può ridursi alla scelta fra un numero finito di opzioni. L'intuizione conserva altresì un ruolo fondamentale come "intuizione dei segni su cui si opera" ([20], p. 9), come relazione immediata agli oggetti fisici, non ad astratti oggetti matematici. Gli esempi addotti in [11, 13] (i numerali come sequenze finite di sbarre |||||) rimandano all'epistemologia di Hilbert e dunque ad una concezione dell'intuizione sensibile, più o meno coerentemente di origine kantiana ([21]). Magari appare consapevole delle difficoltà di questa concezione quando afferma che i teoremi metamatematici fanno parte di una scienza che riguarda oggetti "concreti", ossia i "segni", soggiungendo però che essi vengono "idealizzati" ([11], p. 12). Circa le intuizioni, o "immagini basilari", si spinge a distinguere due livelli, ossia da un lato quello dell'intuizione del discreto, della manipolazione di oggetti "piccoli e duri, ben distinguibili tra loro", siano essi simboli grafici, sonori, elettrici, e dall'altro l'intuizione del continuo, originata dalla manipolazione di oggetti estesi, deformabili, come tessuti dalla trama molto fine o pezzi d'argilla. Alludendo alla *vexata quaestio* del rapporto fra il continuo cosiddetto "aritmetico" e il continuo "geometrico", Magari [13] osserva che il continuo viene di solito trattato con gli strumenti derivanti dall'intuizione del discreto, soggiungendo che non esistono fenomeni noti che non siano simulabili con mezzi discreti.

Gli oppositori del finitismo, oltre a sostenere erroneamente il carattere infinitario della creatività, ritengono che l'esperienza umana sia irriducibile a descrizioni "meccanico-materialistiche" (vd. [8]). Nel carteggio con Kreisel, alla domanda di quest'ultimo circa i sistemi dialettici introdotti da Magari: "do they have pedagogical value?", Magari risponde (3 Settembre 1973) che il suo aspira ad essere un contributo "useful (not decisive) against the 'argument from Gödel' as in Lucas ecc.", cioè contro la tesi sostenuta da Lucas [48], in epoca più recente rielaborata dal fisico Roger Penrose, secondo cui il primo teorema di Gödel implica che la mente umana non è una macchina di Turing: dato un qualsiasi sistema formale, noi siamo in grado di sapere che esiste un enunciato di questo sistema che è vero, benché il sistema stesso non sia in grado di dimostrarlo. Dunque "noi" (la mente umana) siamo più potenti di qualsiasi sistema formale. Queste critiche alla tesi computazionalistica poggiavano su una dubbia lettura del teorema di incompletezza; Magari [13] contestava questi argomenti, interpretando – non solo a nostro avviso – correttamente i risultati gödeliani:

> Qualche filosofo crede di poter inferire dai teoremi di Gödel una superiorità umana sulle macchine, il che potrebbe anche indurre a ritenere l'uomo infinito. Credo che queste inferenze siano erronee, credo che dove spesso si dice infinito sarebbe meglio dire molto grande. ([13], p. 45)

Com'è noto, pur avversando la tesi "computazionalistica", Gödel si guardò bene dall'asserire che posizioni *à la* Lucas fossero deducibili dal risultato di incompletezza. In effetti nella famosa *Gibbs Lec-*

([20]) Questa teoria è formulata in una lezione tenuta presso la *Société de Psychologie* a Parigi nel 1908. Le combinazioni più feconde, secondo Poincaré, saranno quelle più rare, formate da elementi tratti da settori molto distanti ([53], p. 325).

([21]) cf. [40]. La concezione hilbertiana fu notoriamente oggetto di acute osservazioni da parte del filosofo Aloys Müller nel 1923.

ture ([22]) del 1951 egli traeva dai propri risultati solamente una disgiunzione: la mente umana supera infinitamente la potenza di una macchina finita, oppure esistono problemi diofantei assolutamente insolubili. La tesi di una superiorità dell'attività matematica dell'uomo, intesa come una sorta di "teoria informale", sopra le "teorie formali", non è del resto deducibile dai risultati di Gödel ed è opinione diffusa che anche gli argomenti di Penrose (la versione più raffinata di questa tesi) contengano delle lacune. Questa tesi può essere sostenuta, sottolinea inoltre Magari, solo se per "teoria informale" si intende una teoria che proceda per così dire per tentativi ed errori: ma in tal modo la tesi ne esce in qualche modo depotenziata e dovrà essere precisata, essendo la procedura per prova ed errore una procedura essa stessa "quasi meccanica". Un "sistema dialettico" è appunto una possibile formalizzazione proposta da Magari di tale procedura.

Nella cornice di argomenti *à la* Lucas e Penrose, cosa fa un essere umano per superare una macchina? Per ogni sistema formale F supposto consistente che gli venga proposto, trova con la procedura di Gödel un enunciato indecidibile in F, e ne dà una dimostrazione: egli assume dunque in qualche modo un nuovo principio, pronto eventualmente a scartarlo qualora in seguito, incrementando la teoria con ulteriori principi, emergessero delle contraddizioni. In buona sostanza si comporta come un sistema dialettico. Il parallelo che ne scaturisce non è dunque tra l'uomo e la macchina di Turing, bensì tra l'uomo e quella sorta di "macchina" *trial and error* costituita dai sistemi dialettici o più in generale dai sistemi iperformali ([5], p. 347).

Kreisel, in una lettera a Magari del 20 Giugno 1973, affermava che l'interesse del suo interlocutore scaturisse essenzialmente dalla convinzione, da lui considerata "completely doctrinaire", che i processi di apprendimento si svolgano *realmente* attraverso tentativi ed errori. Va tuttavia segnalato che negli anni successivi, le macchine che procedono per tentativi ed errori hanno attirato l'attenzione di studiosi in *formal learning theory* ([23]). Questo principalmente grazie ai lavori di Gold [37] e Putnam [54], base per i successivi tentativi di formalizzazione di procedure di computazione che autorizzano a "cambiare opinione" ritrattando un numero finito di volte. Kugel [43], in particolare, che con Magari ebbe un breve scambio epistolare, prende in seria considerazione l'ipotesi che il cervello umano sia una macchina che procede per tentativi ed errori. Ma già negli scritti dell' ultimo Turing [59, 60] era stata in effetti adombrata l'ipotesi che una macchina possa modificare le proprie istruzioni.

([22]) Gödel precisa la sua posizione in questa famosa *Lecture*, *Some Basic Theorems on the Foundations of Mathematics and Their Philosophical Implications*. Per una discussione vedi ad esempio [33].

([23]) Vedi ad esempio [52].

7. – Tra strutturalismo ed empirismo

L'enfasi posta da Magari sulla distinzione fra matematica pura ed applicata, in alcuni scritti dove discute della "fortuna" della matematica nelle applicazioni, trae origine anch'essa, verosimilmente dai *Principia* di Russell. Magari prende però le distanze da quella che definisce la concezione "tautologica" russelliana della certezza matematica, ponendosi viceversa all'interno di una prospettiva formalista ed accettandone gli esiti "demistificanti" (*sic*). Sebbene infatti, a suo parere, non si diano risposte univoche su cosa sia l'attività matematica in genere, sono nondimeno possibili descrizioni parziali di processi che ne colgono aspetti rilevanti. In questo quadro:

> la vecchia presentazione della matematica come famiglia di sistemi formali non può certo pretendere di essere più di questo, ma non è detto neanche che sia meno di questo; non ci sono cioè argomenti solidi per ritenere che l'attività matematica non sia assimilabile alla costruzione di sistemi formali. ([11], p. 9)

Sollevare il problema della certezza delle proposizioni matematiche presuppone innanzitutto che esse si intendano dotate di un significato, che dunque si considerino come teorie interpretate, e che questo significato, o si intenda legato alle applicazioni, oppure si ammetta un ipotetico mondo popolato di enti matematici. Magari rifiuta l'alternativa realista ed osserva che la prima affermazione circa la matematica applicata lascia comunque spazio ad una dimensione della "matematica pura", la quale, prescindendo dalle applicazioni, "non avrebbe significato". Ciò consente di dare una risposta al quesito intorno alla certezza della matematica:

> Finché dunque si mantiene una chiara distinzione fra matematica pura ed applicata [...] sembra più plausibile risolvere il problema dell'apparente certezza delle proposizioni matematiche ritenendole prive di significato. (*ibid.*)

E tuttavia, accettata questa demarcazione fra matematica pura e matematica applicata, non si può eludere il problema di spiegare il successo della matematica pura nelle applicazioni (op. cit. p. 15). In una lettera al fisico Giuliano Toraldo di Francia (vd. [3]), Magari si soffermava sul problema che Eugene Wigner definì della *irragionevole efficacia* della matematica nelle applicazioni: come avviene che la matematica consente di effetture delle previsioni sul mondo fisico? Lo "stupore" per il successo nelle applicazioni, secondo Magari, può essere inteso sotto due aspetti: da un lato come stupore per il fatto che, una volta accettate attraverso l'esperienza certe ipotesi o "assiomi", le proposizioni interpretabili che se ne deducono siano verificabili (erroneamente questo aspetto viene considerato da molti non problematico), dall'altro lato come stupore per il successo delle ipotesi stesse. Il ruolo della matematica, in questo caso, è "sintetico", nel senso che offre "sintesi fortunate" per le scienze naturali:

> il ruolo delle teorie matematiche nelle applicazioni sembra essere quello di fornire poche formule e regole che si prestino a dare un procedimento di enumerazione di "molte" (di solito infinite) altre formule, parte delle quali interpretabili su fatti noti o anche proposizioni interpretabili su fatti ignoti. ([11], p. 15)

Quelle sintesi che appaiono appropriate allo scopo in realtà sono anch'esse poche e ben fatte. Anche il processo di costruzione delle teorie per tentativi ed errori va dunque precisato meglio, trattandosi di un processo che seleziona le ipotesi da testare secondo un certo criterio. La "fortuna" della matematica dipende dal fatto che normalmente non scegliamo tra tutte le leggi o assiomi che spiegano un certo insieme di fatti, bensì entro un dominio ristretto di ipotesi, e tra le ipotesi di questo dominio, abduttivamente scegliamo le migliori spiegazioni, cioè quelle che ci consentono non solo di spiegare quei fatti, ma anche altri fatti (benché non troppi). Su come si giunga a circoscrivere questo insieme di ipotesi, Magari non indaga ulteriormente e non offre una spiegazione esaustiva. Nella lettera a Toraldo di Francia [3] si limita a dire che si tratta di un comportamento adattivo, portato dell'evoluzione:

> Questo si spiega, direi, in termini di selezione naturale; banalmente, sopravvivono gli animali ben orientati. ([1], p. 204)

Il mondo è tale, per cui è stato più semplice per la selezione naturale arrivare ad un cervello che ne ha una profonda intelligenza, piuttosto che "ad un cervello ad hoc per un ambiente limitato" (vd. [10], p. 295). Magari non va oltre e rimanda non a caso ancora a Russell, più precisamente alla più matura epistemologia russelliana di un testo come *Human Knowldege* per un approccio naturalistico ad aspetti della conoscenza, giudicata la spiegazione più plausibile ([24]). Spesso ripete che allo stato attuale non possediamo una sufficiente conoscenza della mente e dei processi cognitivi, e questa epistemologia della matematica di impianto genericamente "naturalistico" pone in evidenza ancora una volta la concezione empirista di fondo nella quale si inscrive la sua riflessione sulla conoscenza matematica.

Imre Lakatos rintraccia una ripresa di quello che in [45] chiama genericamente "[an] empiricist-inductivist-mood" in molti matematici radicati in concezioni affatto diverse della matematica, sin dal primo '900. Alla fine degli anni '60 è emerso tuttavia un orientamento più preciso, che Putnam [55] e Lakatos [45] hanno definito *quasi*-empirismo, caratterizzatosi anch'esso per una critica al fondazionalismo ed una riproposta dell'empirismo in filosofia della ma-

([24]) "The forming of inferential habits which lead to true expectations is part of the adaptation to the environment upon which biological survival depends" ([57] p. 526). Magari si riferisce esplicitamente a quest'opera in [11].

tematica. A partire da Lakatos, una serie di *maverick philosophers* come ad esempio Kitcher, Tymoczko, Hersh (cf. [49]), cominciarono a pretendere una filosofia della matematica più aderente alla pratica e alla storia della matematica. Putnam [56] afferma in particolare che "mathematical knowledge is corrigible and not absolute... thus it resembles in many respects empirical knowledge"(p. 61). Magari appare idealmente in sintonia con queste posizioni quando parla della "illusione della certezza dei teoremi matematici" (vd. [7]) e sembra evocare il wittgensteiniano "superstizioso terrore della contraddizione", quando sostiene che il fatto di utilizzare un dato sistema formale non ci impegna a ritenerlo consistente. Tuttavia il paragone non può essere spinto oltre: Magari appare ad esempio ideologicamente lontano dall'antiformalismo, così marcato nella filosofia della matematica di Imre Lakatos. Al matematico senese può essere ascritto semmai il merito di aver tentato una conciliazione fra indagine euristica, centrata sui meccanismi della crescita della conoscenza matematica, e studio metamatematico dei sistemi formali assiomatici.

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

[1] P. PAGLI, *Roberto Magari; Una mente algebrica*, Quattro venti, Urbino, 2000, (Il volume contiene anche una bibliografia completa dei lavori di Magari).

Lavori di Roberto Magari citati in questo articolo

[2] R. MAGARI, *Calcoli generali e spazi V_α (Calcoli generali I)*, Le Matematiche, vol. 21, (1966), pp. 83-108.

[3] R. MAGARI, *Lettera a Giuliano Toraldo di Francia del 23 Giugno 1972*, in Paolo Pagli, *Roberto Magari; Una mente algebrica*, Quattro venti, Urbino, 2000, pp. 201-205.

[4] R. MAGARI, *Su certe teorie non enumerabili (Sulle limitazione dei sistemi formali, I)*, Annali di Matematica pura ed applicata, (IV), Vol. XCVIII (1966), pp. 119-152.

[5] R. MAGARI, *Significato e verità nell'aritmetica peaniana*, Annali di Matematica pura ed applicata, (IV), Vol. CIII (1975), pp. 343-368.

[6] R. MAGARI, *Une proposition pour dépasser les limitations des formalismes*, Bulletin d'information de la societé Francaise de Logique, Methodologie et Philosphie des Sciences, n. 7 (1979), pp. 1-7.

[7] R. MAGARI, *Natura empirica della metamatematica*, rapporto n. 35, Istituto di Matematica, Università di Siena (1980).

[8] R. MAGARI, *Finitismo e creatività*, Il Dubbio; rivista di opinioni neoilluministe, Anno I, n. 2/3 (1980), pp. 42-45 (poi in *Sapere*, Maggio 1986, pp. 35-38).

[9] R. MAGARI, *In difesa del concetto di progresso*, Il Dubbio, n. 3 (1982), pp. 62-68.

[10] R. MAGARI, *Intervento di Roberto Magari*, in *Atti degli incontri di logica matematica Volume 2*, Claudio Bernardi e Paolo Pagli (a cura di), pp. 293-295.

[11] R. MAGARI, *La fortuna della matematica*, Malvagia; trimestrale della cultura sommersa, Anno III, vol. 3 (1983) pp. 8-17.

[12] R. MAGARI, *The success of Mathematics*, Synthèse, Vol. 62, n. 2 (1985), pp. 265-274.

[13] R. MAGARI, *Aritmetica e geometria*, Sapere, Luglio (1986), pp. 43-45.

[14] R. MAGARI, *Morale e metamorale: un approccio probabilistico ai problemi morali*, Clueb Bologna, 1986.

[15] R. MAGARI, *Osservazioni sulla creatività*, Sapere, Ottobre 1986, pp. 41-43.

[16] R. MAGARI, *Logica e teofilia. Osservazioni su una dimostrazione attribuita a Kurt Gödel*, Notizie di Logica, vol. 7 (1988), n. 4. (poi in [35]).

[17] *Biblioteca del Dipartimento di Ingegneria dell'Informazione e Scienze Matematiche dell'università di Siena*. R. Magari, *Introduzione alle strutture matematiche*, 1993, inedito.

[18] *Biblioteca del Dipartimento di Ingegneria dell'Informazione e Scienze Matematiche dell'università di Siena*, Carteggio Magari-Kreisel inedito.

[19] *Biblioteca del Dipartimento di Ingegneria dell'Informazione e Scienze Matematiche dell'università di Siena*, Carteggio Magari-Jeroslow inedito.

[20] *Biblioteca del Dipartimento di Ingegneria dell'Informazione e Scienze Matematiche dell'università di Siena*. R. Magari, *Assiomi*, inedito.

[21] *Biblioteca del Dipartimento di Ingegneria dell'Informazione e Scienze Matematiche dell'università di Siena*. R. Magari (1968), *Strutture e rappresentazione*, inedito.

Bibliografia generale

[22] J. AMIDEI, D. PIANIGIANI, L. SAN MAURO, G. SIMI, A. SORBI. *Trial and error mathematics I: dialectical and quasi-dialectical systems*, 2014 (to appear).

[23] J. AMIDEI, D. PIANIGIANI, L. SAN MAURO, A. SORBI. *Trial and error mathematics II: dialectical sets and quasi-dialectical sets, their degrees, and their distribution within the class of limit sets*, 2014 (submitted).

[24] J. AMIDEI, U. ANDREWS, D. PIANIGIANI, L. SAN MAURO, A. SORBI. *Trial and error mathematics III: dialectical and quasi-dialectical systems with connectives.* Preprints, 2014.

[25] C. J. ASH, J. KNIGHT, *Computable structures and the hyperarithmetical hierarchy*, Elsevier, 2000.

[26] S. R. ARPAIA, *On Magari's concept of general calculus: notes on the history of Tarski's methodology of deductive sciences*, History and Philosophy of Logic, vol. 27, n. 1 (2006), pp. 9-41.

[27] C. BERNARDI, *Aspetti ricorsivi degli insiemi dialettici*, Bollettino della Unione Matematica Italiana, Series IV, vol. 9 (1974), pp. 51-61.

[28] R. BRUNI, *Riflessioni sull'incompletezza. I teoremi di Gödel tra logica e filosofia*, *Tesi di dottorato in Filosofia*, Università di Firenze, 2004.

[29] C. Cellucci, *The growth of mathematical knowledge: An open world view*, in E. Grosholz, H. Breger (a cura di), The Growth of Mathematical Knowledge, pp. 153-176, Dordrecht, Kluwer (2000).
[30] P. Suppes, S. Feferman, L. Barwise, *Commemorative meeting for Alfred Tarski*, in A Century of Mathematics in America, vol. III, American Mathematical Society (a c. di P. Duren), Providence R.I. (1989), pp. 393-403.
[31] S. Feferman, *Arithmetization of metamathematics in a general setting*, Fundamenta Mathematicae, vol. 49 (1960), pp. 35-92.
[32] S. Feferman, *The Logic of Mathematical Discovery vs. the Logical Structure of Mathematics*, in *Proceedings of the Biennial Meeting of the Philosophy of Science Association* (a c. di P.D. Asquith e I. Hacking), East Lansing (1978), pp. 309-327.
[33] S. Feferman, *Are there absolutely unsolvable problems? Gödel's dichotomy*, Philosophia Mathematica, vol. 14 (2006), pp. 134-152 pp. 233-244.
[34] G. Gnani, *Insiemi dialettici generalizzati*, Le Matematiche, XXIX, n. 2 (1974), pp. 1-11.
[35] K. Gödel, *La prova matematica dell'esistenza di Dio* (a c. di G. Lolli e P. Odifreddi), Bollati Boringhieri, Torino (2006).
[36] K. Gödel, *Some Basic Theorems on the Foundations of Mathematics and their Implications*, *Collected Works*, vol. 3, Unpublished essays and lectures (a c. di S. Feferman), Oxford University Press, 1995, pp. 304-324.
[37] E. M. Gold, *Limiting Recursion*, The Journal of Symbolic Logic, vol. 30 (1965), pp. 28-48.
[38] J. Hintikka and A. Mutanen, *An alternative concept of computability.* In J. Hintikka, editor, *Language, Truth, and Logic in Mathematics*, Dordrecht, Kluwer (1988).
[39] R. Jeroslow, *Experimental Logics and Δ_2^0-Theories*, Journal of Philosophical Logic, vol. 4, n. 3 (1975), pp. 253-267.
[40] P. Kitcher, *Hilbert's epistemology*, Philosophy of Science vol. 43, n. 1 (1976), pp. 99-115.
[41] G. Kreisel, *Informal rigour and completeness proofs*, in *Problems in the Philosophy of Mathematics* (a c. di I. Lakatos, New York, Humanities Press (1967), pp. 138-186.
[42] G. Kreisel, *Which Number Theoretic Problems can be Solved in Recursive Progressions on Π_1^1-Paths Through O*, The Journal of Symbolic Logic, Vol. 37, n. 2 (1972).
[43] P. Kugel, *Thinking may be more than computing*, Cognition, vol. 32 (1986), pp. 137-198.
[44] I. Lakatos. *Proofs and Refutations*. Cambridge University Press, Cambridge (1976).
[45] I. Lakatos, *A renaissance of empiricism in the recent philosophy of mathematics*, British J. Philos. Sci., vol. 27, n. 3 (1976), pp. 201-223.
[46] S. Leonesi, C. Toffalori, *L'arte di uccidere i draghi*, Università Bocconi, Milano (2013).
[47] G. Lolli, *Experimental methods in proofs*, In R. Lupacchini and G. Corsi (a cura di), *Deduction, Computation, Experiment*, pp. 65-79, Springer, Milan (2008).
[48] J. R. Lucas, *Minds, Machines and Gödel*, Philosophy, vol. 36 (1961), pp. 112-127.
[49] P. Mancosu, *The Philosophy of Mathematical Practice*. Oxford U. P., Oxford (2008).
[50] F. Montagna, G. Simi, and A. Sorbi, *Logic and probabilistic systems*, Arch. Math. Log., vol. 35, n. 4 (1996), pp. 225-261.
[51] C. Pincock, *A Role for Mathematics in the Physical Sciences*, Noûs, Vol. 41, n. 2 (2007).
[52] D. N. Osherson, M. Stob, S. Weinstein, *A Universal Inductive Inference Machine*, The Journal of Symbolic Logic, vol. 56, n. 2 (1991), pp. 661-672.
[53] H. Poincaré, *Mathematical creation*, The Monist, Vol. 20, n. 3 (1910), pp. 321-335.
[54] H. Putnam, *Trial and error predicates and the solution of a problem of Mostowski*. J. Symbolic Logic, vol. 30 (1965), pp. 49-57.
[55] H. Putnam, *Mathematics without Foundations*, The Journal of Symbolic Logic, vol. 64, n. 1 (1967).
[56] H. Putnam, *What is Mathematical Truth?*, in *Mathematics, Matter and Method*, Cambridge University Press (1975).
[57] B. Russell, *Human Knowledge*, Routledge (1948).
[58] A. Tarski (1931), *On some fundamental concepts of metamathematics*, in *Logic, semantics, metamathematics, papers from 1923 to 1938* (a c. di J. H. Woodger), Clarendon Press (1956).
[59] A. M. Turing, *Lecture to London Mathematical Society*, February 20, 1947. Turing Digital Archive (1947).
[60] A. M. Turing, *Intelligent machinery, a heretical theory*, Philosophia Mathematica, series III, vol. 4, n. 3 (1951), pp. 256-260.
[61] A. Ursini, *On the set of Meaningful sentences of arithmetic*, Studia Logica, Vol. 37, n. 3 (1978), pp. 237-241.

Jacopo Amidei

Ha studiato Filosofia presso la facoltà di Lettere e Filosofia di Siena. Laureato con una tesi in logica algebrica è attualmente dottorando in Filosofia alla Scuola Normale Superiore di Pisa. Si occupa di logica e fondamenti della probabilità, si interessa inoltre di storia della logica e filosofia della matematica.

Duccio Pianigiani

Laureato a Siena in Filosofia della Scienza si è poi specializzato in Logica Matematica presso la Scuola di Specializzazione (successivamente divenuta "dottorato LOMIT") istituita presso il Dipartimento di Matematica senese. In seguito ha conseguito un dottorato di ricerca in Filosofia, su argomenti di filosofia della matematica, presso l'università di Firenze. È stato ricercatore e docente di Logica presso il Dipartimento di Filosofia di Siena fino al suo scioglimento e adesso è ricercatore e docente presso il Dipartimento di Ingegneria dell'Informazione e Scienze Matematiche del medesimo ateneo.