Matematica, Cultura e Società

Rivista dell'Unione Matematica Italiana

Davide Bondoni

Alcuni pensieri sull'algebra assoluta di Schröder

Matematica, Cultura e Società. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **1** (2016), n.2, p. 133–143.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=RUMI_2016_1_1_2_133_0>

Matematica, Cultura e Società. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2016.

Matematica, Cultura e Società – Rivista dell'Unione Matematica Italiana
Serie I, Vol. 1, N. 2, Agosto 2016, 133-143

Alcuni pensieri sull'algebra assoluta di Schröder

DAVIDE BONDONI
E-mail: davidebond@yahoo.it

Sommario: *Il presente lavoro si articola in due parti: nella prima verrà presentato un breve profilo biografico di Ernst Schröder (1841–1902), mentre nella seconda parte verranno messi a fuoco la struttura e il contenuto de* Sugli elementi formali di un'algebra assoluta *di Schröder, fornendo al contempo alcuni spunti di riflessione. Lo scopo principale sarà quello di mettere in luce la meta-matematicità del lavoro schröderiano preso in esame.*

Abstract: *The present paper unfolds in two parts: in the first one, a short biographical profile of Schröder (1841–1902) is offered; in the second one, the structure and the content of Schröder's On the Formal Elements of Absolute Algebra (1874) are reviewed, casting light on some point deserving interest. Aim of this second part is to stress the meta-mathematical features of the text under issue.*

1. – Introduzione: cenni biografici su Ernst Schröder

Ernst Schröder nacque a Mannheim il 25 novembre 1841 e morì a Karlsruhe il 16 giugno 1902 ([1]). Non si sposò mai e non ebbe mai alcuna relazione con il sesso femminile ([2]). Per il resto, la sua vita fu solitaria, anche se colorita dalla pratica di vari hobbies, tra cui le lingue ([3]), bicicletta, giardinaggio ([4]), ecc. ([5]).

Schröder entrò nell'ambiente universitario solo dopo il 1874 e ricoprì per un anno ([6]) il ruolo di rettore dell'università di Karlsruhe ([7]). Nel 1901, scrisse un breve profilo autobiografico per il volume *Germania culturale. Contemporanei tedeschi attivi in letteratura, scienze e musica* edito

Accettato: il 28 maggio 2016.

([1]) In [Sch12, pp. 83–84] ho riprodotto il certificato di battesimo e quello di morte. Schröder pur essendo di religione evangelica non era praticante in quanto non si trovano altri documenti di carattere religioso. In particolare, Schröder non fece neppure la *confermazione*, forse, indizio di una scarsa pratica religiosa anche in famiglia.

([2]) Lüroth non ne parla nel suo ricordo di Schröder [Lür02] e non ci è pervenuta alcuna lettera *amorosa*.

([3]) Questa passione per le lingue portò Schröder a studiare anche il russo e, quindi, ad intrattenere una corrispondenza con il logico Poretstkii [Dip91, p. 120]. Su Poretstkii si veda [Stj80, pp. 228–263] e [Ky01, pp. 27–34]. Ho argomentato in [Bon15] come il progetto di un nuovo simbolismo per la matematica, da Schröder chiamato *pasigrafia*, fosse anche dovuto a questo amore per le lingue, cioè al trovare un linguaggio adatto per la matematica che fosse comprensibile ad una comunità scientifica sempre più internazionale.

([4]) Fu socio dell'associazione botanica di Karlsruhe per cui scrisse un breve testo sulla potatura delle piante [Sch88], da me scoperto nel 2010.

([5]) Si veda [Dip91, p. 126].

([6]) Precisamente l'anno accademico 1890/1891 [var, foglio 41].

([7]) Si veda [var] che raccoglie tutta la documentazione amministrativa dell'attività scolastica di Schröder nel Baden e nell'Hesse.

da Karl Barton ([8]). In questo minuscolo saggio, Schröder afferma come la sua autentica vocazione fosse quella per l'algebra astratta, riconoscendo però di aver pubblicato quasi niente sull'argomento (a parte il testo che qui esamineremo):

> (...) in connessione a queste opere [di matematica pura] si trovano le ricerche contenute nel primo volume del suo importante manuale ([9]), in relazione al ben noto progetto di Schröder di rivisitare l'algebra e l'aritmetica (...). Questi testi costituiscono una fondazione generale per quella disciplina conducente all'*algebra assoluta*; cioè, ad una teoria maggiormente unificata delle connessioni che prescinda dall'associtività ([10]). In questo ambito di ricerca, il favorito ([11]) da parte di Schröder, è stato finora poco pubblicato, se si esclude *Sugli elementi formali di un'algebra assoluta*, un saggio intitolato *Algoritmi e calcolo* [Sch87], ed un altro incluso nei *Reports of the British Association* ([12]).

Che Schröder si considerasse un algebrista e che avesse riguardato la logica da un punto di vista algebrico è ben noto. Però, Schröder pubblicò in vari ambiti, dalla geometria, all'analisi complessa, all'analisi funzionale, alla logica, alla teoria degli insiemi. L'opera per il quale è famoso sono i tre volumi delle *Lezioni sull'algebra della logica* ([13]) il cui terzo volume sulla teoria delle relazioni binarie rimase incompiuto. Molto si è scritto su questa incompiutezza. Di fatto il terzo volume delle *Lezioni* risale al 1895. Non si può affermare che la morte impedì a Schröder di proseguire le sue ricerche. La questione è differente. Nel terzo volume delle *Lezioni*, spinto dagli esempi di de Morgan e Peirce, inizia a sviluppare un calcolo dei relativi binari a partire da alcune assunzioni basiche (una sorta di assiomi).

Il culmine di questo lavoro è dato dalla traduzione della teoria delle catene di Dedekind ([14]) nel calcolo dei relativi. In questo modo, Schröder generalizza il concetto di catena rendendolo indipendente dal concetto di *insieme* e di quello di *funzione simile* ([15]). Per molti, qui Schröder fonderebbe la matematica sul calcolo dei relativi ([16]), progetto che sarebbe stato perseguito successivamente anche da Löwenheim ([17]) e da Tarski e Givant ([18]). È ben vero che Schröder afferma:

> Lo scopo *ultimo* di questo lavoro [cioè, la traduzione della teoria delle catene nel calcolo dei relativi] con-

---

([8]) [Bar01]. Di questo testo con lo stesso nome, stesso anno e stesso stampatore esistono vari esemplari tutti differenti tra loro. Il testo a cui rimando è quello posseduto dall'università di Erlangen, di cui posseggo una copia. Questo volume è una raccolta di fotografie di alta qualità per le quali era noto lo stampatore Eckstein di Berlino. Talvolta, insieme alle immagini compare o la firma della persona rappresentata o un breve testo. Nel caso di Schröder si tratta di un breve profilo biografico di cui non sono affatto certo che sia stato scritto dal matematico tedesco. Questa indecisione deve portare a rivalutare la portata di questo testo, che non può, a mio parere, essere considerato come rivelazione degli autentici interessi di Schröder. Questi volumi stampati da Eckstein venivano commissionati dalle persone rappresentate, anche per farsi pubblicità. Così non stupisce di vedere la divina Duse o Ibsen in un testo dedicato a personaggi tedeschi. Essi funzionavano, per così dire, da traino per invogliare il lettore all'acquisto. Nel volume posseduto dall'università di Erlangen si trovano i profili di numerosi matematici che lavoravano nel sud-ovest della Germania, cioè nei luoghi schröderiani. Nasce, quindi, il sospetto che questi matematici con Schröder abbiano creato una cordata per pubblicare un libro che li rendesse più noti. Tali matematici non sono presenti nell'edizione posseduta dall'università di Bonn o di Lubecca. Ad aggravare la situazione, nel corso degli anni gli antiquari strapparano dai testi le foto per venderle separatamente. Personalmente, io ho acquistato da un antiquario tedesco i due fogli riguardanti Schröder: foto e scritto. Infine, sottolineo che questi libri non presentano né indice, né paginazione.

([9]) Si tratta del *Manuale di aritmetica e algebra* [Sch73]. Questo doveva essere il primo di sette volumi. Sfortunatamente, venne pubblicato solo il primo. Si veda a questo proposito il mio [Bon11b]. L'anno seguente Schröder ne fece un breve sunto [Sch74a] che purtroppo viene indicato nelle librerie di tutto il mondo allo stesso modo di [Sch73]. In realtà si tratta di due testi ben distinti. Si noti che Schröder in questo estratto è passato a parlare in terza persona.

([10]) In *Sugli elementi formali di un'algebra assoluta*, l'algoritmo $\mathcal{A}_1$ rappresentante tale algebra presenta un'operazione di composizione squisitamente associativa. Si veda [Sch74b, p. 24]: $a(bc) = (ab)c$.

([11]) L'espressione usata è *ureigenest*. Il prefisso *ur*-rinforza l'aggettivo *eigen* [proprio] al superlativo.

([12]) [Bar01, secondo foglio]. Ho tradotto dalla mia versione del testo.

([13]) [Sch90], [Sch91] e [Sch95].

([14]) Si veda [Ded88].

([15]) Si veda [Bon07, pp. 31–51].

([16]) Si veda almeno [Bra00, p. 158].

([17]) [Löw40].

([18]) [TG87].

siste nel giungere ad una rigorosa [streng] e logica *definizione* del concetto *relazionale* di *numero di-*, da cui tutti gli enunciati pertinenti a tale concetto sono da dedursi in maniera puramente deduttiva ([19]).

Non voglio certo andare contro ad una tale perentoria affermazione, ma modularla. Se l'intento principale di Schröder fino alla traduzione della teoria delle catene era stato quello di dar vita ad un calcolo dei relativi per poi fondarci sopra la matematica, ora gli interessi di Schröder si spostano. Il calcolo dei relativi diventa il linguaggio ideale per esprimere la matematica. Infatti, nel resto del libro Schröder si occupa di teoria degli insiemi. Anche i due importanti articoli pubblicati dopo le *Lezioni* ([20]) trattano di teoria degli insiemi, così come è dedicato al buon ordinamento uno degli ultimi lavori pubblicati da Schröder ([21]).

Schizzato un breve profilo della figura di Ernst Schröder, mi sembra giusto anche relegare al folklore almeno due dei tre motivi per cui si nomina Schröder; come si mostrerà nel seguito del presente articolo, infatti, la dimostrazione che non ogni reticolo è necessariamente distributivo pur trovandosi in un testo schröderiano è di Jakob Lüroth, mentre la dimostrazione del teorema di Cantor-Schröder-Bernstein da parte di Schröder è falsa; quindi, solo uno dei motivi per cui è celebre Schröder è giustificato, ovvero l'introduzione della legge di dualità.

1.1 – *Reticoli e distributività*

Le affermazioni precedenti possono sembrare inaudite, in quanto ancora oggi prestigiosi algebristi vedono in Schröder colui che dimostrò il fatto che non ogni reticolo è per sua natura distributivo. Come possono essersi ingannati? Molto semplicemente, tale dimostrazione si trova nel primo libro delle *Lezioni sull'algebra della logica* a firma di Schröder. Egli non menziona nessuno. Quindi, appare logico attribuire la dimostrazione a lui. Eppure, è sbagliato. La dimostrazione fu del suo amico Jakob Lüroth con cui aveva collaborato più volte e che avrebbe scritto il suo necrologio. Come mai lo Schröder sempre attento ad attribuire il giusto merito ad altri autori, in questo caso taccia il nome di Lüroth, francamente non sono in grado di comprenderlo?

Eppure che la dimostrazione sia di Lüroth lo prova il necrologio firmato da Brill e Noether nel 1911. Gli autori, innanzitutto, scrivono:

> Gli interessi logico-astratti di Lüroth trovarono un'eco stimolante nello scambio di idee, durato una vita, con il connazionale, amico e collega Ernst Schröder. Le poche pubblicazioni di Lüroth in questo campo (16), (45), (55) e (61) sono tutte connesse con Schröder o Graßmann ([22]).

Incidentalmente, si noti anche come,

> Per Lüroth l'intera matematica, non solo nella sua struttura, ma anche nei suoi oggetti, era nient'altro che un unico sistema logico, così come egli stesso ebbe a notare espressamente in un'occasione (...) ([23]).

I rimandi di Brill e Noether sono ai seguenti contributi di Lüroth:

(1) (16) [Dimostrazione dell'univocità del processo di contare; in] [Sch73, pp. 18-20] ([24]).
(2) (45) [Dimostrazione, che dalle premesse di Schröder la seconda parte del principio di distribuitività non segue; contenuta nel primo volume delle *Lezioni sull'algebra della logica*] [Lür91], in particolare pp. 165-166 ([25]).
(3) (55) [Lür98].
(4) (61) [Lür04].

Come detto in precedenza, a differenza che nel *Manuale* del 1873, nel 1891 Schröder non menziona

([19]) [Sch95, pp. 349–350].
([20]) [Sch98b] e [Sch98a].
([21]) Si tratta di [Sch01a]. Ma si veda anche [Lov01, p. 177]. Rimando al mio [Bon15] per un approfondimento di tale questione; ovvero, si può parlare in Schröder di fondazionalismo?
([22]) [BN11, p. 277].
([23]) [BN11, pp. 277–278].
([24]) Si noti che a p. 18 del *Manuale di aritmetica e algebra* Schröder espressamente citi e ringrazi Lüroth per la sua dimostrazione.
([25]) Si tratta di una recensione al primo volume delle *Lezioni* schröderiane.

Lüroth. Da qui, è sorta la tradizione che vedeva in Schröder colui che per primo aveva capito che non ogni reticolo era distributivo.

1.2 – *Teorema di Schröder-Cantor-Bernstein*

La dimostrazione di questo teorema da parte di Schröder si trova in [Sch98b] e su di esso tornerà in uno dei suoi ultimi scritti:

> Due insiemi sono equipotenti se e solo se uno (o nessuno) può essere mappato in maniera biunivoca in una parte propria dell'altro (26).

Purtroppo, Korselt nel 1911 rivelò che la dimostrazione di Schröder era fallace:

> La dimostrazione di Schröder contiene un errore fino ad ora passato innosservato ai matematici (27).

Quindi, anche il secondo motivo per cui si ricorda Schröder si rivela falso. Non resta che passare all'ultimo dei motivi, quello più *logico*.

1.3 – *Legge di dualità*

Schröder introdusse la legge di dualità per la prima volta nell'*Operationskreis*:

> Teorema. La negazione di un prodotto è la somma delle negazioni dei suoi fattori: $(ab)_1 = a_1 + b_1$ (28).

Analogamente,

> Teorema. La negazione di una somma è il prodotto delle negazioni dei suoi addendi: $(a + b)_1 = a_1 b_1$ (29).

Domanda: nel 1877 Schröder conosceva de Morgan? Probabilmente, no, in quanto non compare nella scarna bibliografia dell'*Operationskreis*. Invece, il testo di de Morgan (30) si trova nella bibliografia del primo volume delle *Lezioni* (31). Quindi, almeno uno dei motivi che resero noto Schröder finora rimane in piedi. Cadono gli altri due. Stranamente, fin'ora non è stato notato che la dimostrazione che non ogni reticolo è distributivo è di Lüroth e non di Schröder.

2. – Sugli elementi formali di un'algebra assoluta

Nel 1874 Schröder pubblica un piccolo pamphlet dedicato a quella che lui definisce nel testo *Algebra assoluta* (32). Come ho già avuto modo altrove di sottolineare (33), in questo testo Schröder introduce degli insiemi su cui impone una struttura per poi confrontarli tra loro in base alle conseguenze che ne possono essere tratte. Si tratta di un'indagine *meta*-matematica, in quanto tali oggetti non vengono *usati*, ma confrontati. Se questi insiemi strutturati si trovano ad un livello oggetto, l'indagine schröderiana si trova ad un livello meta-oggettuale e quindi, squisitamente meta-matematico.

Come avremo occasione di vedere in seguito, questi insiemi strutturati risultano essere dei *loops*, dei *gruppoidi* o dei *gruppi*. Verrebbe da affermare che in un certo senso, molto intuitivo e informale, Schröder anticipa la teoria dei gruppi (34). Fu Galois nella sua celebre prima memoria ad introdurre il concetto di *gruppo* (35), per dimostrare la non risolubilità di un'equazione di quinto grado con i radicali. In altre parole, Galois *usa* il concetto di gruppo per arrivare ad uno scopo (36). In effetti, gli insiemi introdotti da Schröder nel testo del 1874

(26) [Sch01b, p. 82].
(27) [Kor11, p. 294].
(28) [Sch77, p. 17]. Il numero 1 in pedice indica la negazione dell'enunciato. a_1 è da leggersi come *non-a*.
(29) Ivi.

(30) Ora incluso in [dM66].
(31) Si veda [Sch90, pp. 702–703].
(32) Noi oggi parleremmo piuttosto di *algebra astratta* o di *algebra universale*.
(33) [Sch12, ix e segg.].
(34) Al riguardo, si vedano [Sch12, pp. ix–xxvi], [Bon14b] e [Bon14a].
(35) Si veda la sua *Mémoire sur les conditions de résolubilité des équations par radicaux* (1831) a pagina 3b. Ora in [Neu11, p. 116].
(36) Ignoriamo in questa sede, la differenza tra *gruppo di sostituzioni* e *gruppo tout-court*.

sono molto *group*-like. Disgraziatamente, il matematico tedesco li chiama tutti con lo stesso nome di *algoritmi*. Nominare una struttura *algoritmo* è una scelta infelice, ma ha anche un senso se si pensa all'approccio combinatorio e computazionale di Schröder.

Ovviamente nel 1874 Schröder non poteva conoscere le opere di Galois, anche perché non era ancora entrato nel circuito universitario. Ci entrerà a breve. Al momento è solo un insegnante di ginnasio. Il fatto che Schröder adotti un aproccio strutturale e metamatematico ai suoi insiemi strutturati deriva pertanto da una sua propria ed originale filosofia di fondo che vedeva il significato di un oggetto matematico dipendente dal contesto teorico in cui era immerso ([37]). Questo approccio strutturale da parte di Schröder è comune a tutti i suoi lavori.

3. – Definizioni

Ma partiamo con ordine. Il testo di Schröder in oggetto porta il nome di *Sugli elementi formali di un'algebra assoluta*. Già qui ci potremmo fermare a riflettere sul titolo. A colpire il lettore sono due aggettivi: *formali* ed *assoluta*. Infatti, l'algebra a cui perviene lo Schröder è una teoria puramente sintattica, priva di un'interpretazione definita o addirittura di un'interpretazione *canonica*. Gli elementi sono formali, in quanto possono denotare qualsiasi cosa:

> Si assuma una molteplicità illimitata di oggetti (di qualunque specie), i quali sono tra loro concettualmente distinti da un segno caratteristico o da un limite [Grenze] ([38]).

E, più sotto:

> Come esempi di oggetti costituenti tale molteplicità (...) potrei addurre: nomi propri, concetti, giudizi, algoritmi, numeri, simboli di operazioni o di grandezze, punti ed insiemi di punti, figure geometriche, sostanze, ecc. ([39]).

In altre parole, gli oggetti di questa molteplicità ([40]) possono essere qualsiasi cosa. Nessuna denotazione particolare viene assunta di principio. Non hanno nessuna componente semantica. Così, l'algebra construita su questa molteplicità non può che essere *ab*-soluta, cioè, sciolta da qualsiasi interpretazione data, o canonica come in Frege.

Qui, è evidente l'influsso di Boole che considerava i simboli del calcolo come oggetti puramente sintattici che potevano essere interpretati in vari modi:

> Fino ad un certo punto, questi elementi [i.e. i simboli usati nel calcolo] sono *arbitrari*. La loro interpretazione è puramente *convenzionale*: possiamo usarli nel senso che più ci piace. Ma questa possibilità è vincolata a due indispensabili condizioni, – primo, che non ci discostiamo mai nello stesso processo argomentativo dal senso convenzionale [dei simboli] stabilito all'inizio; secondo, che le leggi che governano il processo [argomentativo] si fondino esclusivamente sul senso o significato, fissati in precedenza, dei simboli impiegati ([41]).

Questa citazione ci ricorda anche che, una volta stabilito il significato (convenzionale) degli elementi dell'algebra assoluta, non possiamo poi cambiarlo durante il calcolo. Se per esempio, abbiamo stabilito di indicare con gli elementi dell'algebra i numeri naturali, non possiamo durante il calcolo, cambiare questa interpretazione e usare questi elementi come se rappresentassero i razionali. Il significato degli elementi è arbitrario, nel senso che non esiste nessuna legge che vincola il logico ad attribuire ad un simbolo un dato significato al posto di un altro, ma una volta che si è stabilito di denotare con un simbolo un dato significato, questo significato non può essere cambiato.

Per esempio, per Schröder $\aleph_0$ è semplicemente una macchia d'inchiostro sulla carta. Non sta scritto

---

([37]) Sulla filosofia schröderiana della matematica mi sono soffermato a lungo in [Bon11a] e [Bon12], analizzando i vari lavori di Schröder, da quelli giovanili fino alla vecchiezza.

([38]) [Sch74b, p. 4].

([39]) Ivi.

([40]) Qui, forse, è opportuno ricordare come per Schröder, *molteplicità* indichi una qualungue quantità non ben definita di oggetti. In quanto tale, essa può essere sinonimo di *insieme*, *collezione* o *gruppo*. Quest'ultimo inteso nel senso colloquiale del termine. È anche vero che nel presente contesto *molteplicità* equivale al booleano *universo di discorso* dal quale vengono estratti insiemi particolari. Come in Boole, in Schröder non è possibile uscire dalla molteplicità data. Tutto avviene in essa.

([41]) [Boo58, p. 6]. I corsivi e la traduzione sono miei.

da nessuna parte che $\aleph_0$ denoti un particolare insieme. Ma, una volta stabilito che $\aleph_0$ denota l'oggetto *Giulio Cesare*, $\aleph_0$ dovrà nel calcolo in cui viene usato con quest'interpretazione sempre significare *solo* 'Giulio Cesare'.

Schröder chiama questa molteplicità anche con il nome di *ambito numerico* [Zahlengebiet] ([42]) – *nel senso piò più esteso del termine* [Ivi]. Gli oggetti componenti tali molteplicità vengono indicate con le lettere dell'alfabeto minuscole, $a, b, c, \dots$ Schröder introduce una sola operazione connettente tali lettere, che indica con il punto o con la semplice giustapposizione delle lettere:

$$c = a.b = ab \tag{1}$$ ([43]).

Ci si guardi dal considerare quest'operazione come una moltiplicazione. Si tratta di una operazione astratta che connette due oggetti della molteplicità (a, b) per ottenere come risultato ancora un elemento della molteplicità (c).

4. – Commutatività

Ora, come giustamente Schröder afferma, *tale operazione, generalmente, non è commutativa* [Ivi]. Infatti, solo in casi per così dire, fortunati, abbiamo che $a.b = b.a$. Si prenda, per esempio, l'operazione di composizione matriciale. Come è noto, il risultato di tale operazione dipende nella maggior parte dei casi, dall'ordine in cui vengono composte le matrici.

Infatti, supponiamo di avere due matrici 2×2 A e B così fatte:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}. \tag{2}$$

Dove le entrate delle matrici sono tutte diverse. In questo caso, avremo che $A \otimes B \neq B \otimes A$. Infatti, nel primo caso abbiamo:

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{bmatrix}. \tag{3}$$

Mentre nel secondo caso abbiamo:

$$B \otimes A = \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ea+fc & eb+fd \\ ga+hc & gb+hd \end{bmatrix} \tag{4}$$ ([44]).

Per questo motivo Schröder, è costretto ad ammettere che l'operazione connettente gli oggetti della molteplicità è una sorta di *due operazioni in una*, o, che qui abbiamo a che fare con due operazioni diverse indicate da uno stesso simbolo ([45]). Infatti, dato $a.b$, diremo che a è un fattore *sinistro* e b un fattore *destro*. Ad una moltiplicazione-*sinistra* e -*destra* corrispondono le due operazioni inverse di divisione-*sinistra* e -*destra* ([46]). Nota bene: l'operazione introdotta da Schröder viene chiamata nel testo in oggetto come *moltiplicazione*. Ripeto che si tratta di un'operazione astratta. Invece, di moltiplicazione-sinistra e -destra a cui corrispondono una divisione-sinistra e -destra, avremmo potuto parlare benissimo (e Schröder lo farà) di addizione-sinistra e -destra, a cui corrispondono le inverse di sottrazione-sinistra e -destra, rispettivamente.

Qualcuno potrebbe attendersi che ad un certo punto di *Sugli elementi formali* compaia un'operazione che distribuisca un'operazione sulla sua duale. Purtroppo, ciò non avviene. Schröder apprezzerà il valore di tale distribuzione solo tre anni più tardi nel suo *Sulla sfera operazionale del calcolo logico*, pubblicato a Lipsia da Teubner [Sch77].

Ad ogni modo, Schröder simbolizza la divisione-sinistra con $a : b$ e la divisione-destra con $\dfrac{a}{b}$.

([42]) Un altro nome sfortunato. Ricordo che Schröder non è consistente nell'usare l'espressione 'Gebiet'. In taluni casi, egli sembra indicare una *zona* in senso topologico, in altri un *intorno* e in altri casi ancora un *insieme* nel senso cantoriano del termine. La questione è delicata in quanto, Schröder oscilla spesso tra una concezione *mereologica* di totalità, intesa come *collezione*, come un *tutto composto da parti* e una concezione insiemistica di totalità come un *aggregato* composto da elementi uguali.

([43]) Ivi.

([44]) Mi rendo conto che l'esempio è banale. Serviva solamente a ricordare che non necessariamente un'operazione binaria è commutativa. Che $2 + 3 = 3 + 2$ è solo un caso fortunato che dipende dalle proprietà di $+$ e dal fatto che si tratta di numeri naturali.

([45]) Schröder nel testo userà dei simboli diversi per indicare le due differenti operazioni di connessione, eliminando ogni sorta di ambiguità.

([46]) Nella letteratura si parla anche di *cancellazione* al posto di *divisione*.

5. – Equazioni funzionali

Il Nostro si limita, fra tutte le equazioni costruibili mediante le operazioni da noi sopra indicate al caso in cui si abbia una funzione (o la sua inversa) a due argomenti. In questo caso si parla di *equazioni funzionali*. In altre parole, le equazioni funzionali sono costruite a partire dall'operazione di composizione [47] e dalle sue due inverse:

$$A = A_{.} + A_{:} + A_{/} \quad e \quad E = E_{.} + E_{:} + E_{/} \tag{5}$$ [48].

Schröder si affretta ad osservare che tali operazioni sono sempre *eseguibili* ed *univoche* [49]. Ma la cosa veramente importante viene poco dopo:

> Io darò per scontato che il risultato di queste operazioni fondamentali sia sempre un oggetto definito e non-ambiguo [unzweifelhaft], **appartenente sempre all'insieme numerico costituente la molteplicità stessa** [50].

Ovvero, la molteplicità assunta in partenza è chiusa rispetto alle operazioni di moltiplicazione e di divisione-sinistra e -destra.

5.1 – *Moduli*

A questo punto, Schröder introduce l'elemento neutro di tali operazioni, da lui indicato con la lettera μ, iniziale di *modulo*, seguendo Hankel [51]. Avremo così le seguenti tre equazioni:

$$\frac{\mu}{a} = a = \mu : a, \tag{6}$$

$$a\mu = a = \frac{a}{\mu}, \tag{7}$$

$$a : \mu = a = \mu a. \quad \text{[Sch74b, p. 7]} \tag{8}$$

6. – Equazioni fondamentali

Riassumendo, abbiamo a disposizione le seguenti sei operazioni:

$$ab, \quad ba, \quad a : b, \quad b : a, \quad \frac{a}{b}, \quad \frac{b}{a} \tag{9}$$ [52].

Si aggiungano due cose: tutte queste sei operazioni hanno un elemento neutro [Modul] e la molteplicità di partenza è chiusa rispetto ad esse.

A questo punto, iniziamo a far conoscenza con lo Schröder combinatorio che suggerisce di mettere insieme queste operazioni dando alla luce quattro insiemi strutturati [Algorithmen]. Perché insisto con l'espressione *insieme strutturato*? Perché in tutti e quattro questi casi, abbiamo a che fare con una molteplicità che possiamo anche chiamare *insieme* [53] su cui viene imposta della struttura mediante delle operazioni. Questi algoritmi sono i seguenti:

$$ab = ba, \quad a : b = \frac{a}{b}, \qquad (C_1) \tag{10}$$

$$a : b = b : a, \quad \frac{b}{a} = ba, \qquad (C_2) \tag{11}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{a}, \quad ab = b : a, \qquad (C_3) \tag{12}$$

$$ab = a : b, \quad a : b = \frac{b}{a}, \quad \frac{b}{a} = ab. \qquad (C_0) \tag{13}$$

Analizziamo le precedenti equazioni. La prima ci dice che la moltiplicazione è commutativa e che la divisione-sinistra coincide con quella destra. Tenen-

[47] Ricordo che per Schröder si ha una sola operazione di moltiplicazione che fonde in un solo simbolo le due operazioni di moltiplicazione-sinistra e -destra.

[48] [Sch74b, p. 5].

[49] Ovvero, se $a.b = c$ e $a.b = d$, allora $c = d$.

[50] [Sch74b, p. 6. Il grassetto è mio.

[51] È certamente vero che Hankel in [Han67, pp. 30–31] parla di *modulo*, ma lo indica con il numero 1. È mia convizione che Schröder abbia preso a prestito la notazione μ per il modulo da Robert Grassmann, il quale afferma: *Il segno che non muta il valore di una quantità, all'interno di una connessione, è μ, da leggersi "my"* [Gra95, p. 25]. Incidentalmente, in tedesco il composto "my" si legge come "mü" (*my:* nel linguaggio fonetico internazionale [uRK15, p. 570]).

[52] [Sch74b, p. 8]. A costo di essere pedante, vorrei notare come in tutto il libretto Schröder parli di moltiplicazione al singolare, mentre qui introduce chiaramente due tipi di moltiplicazione: quella destra e quella sinistra.

[53] Purché non si confonda tale insieme con quello cantoriano.

do conto che la molteplicità è chiusa rispetto alla moltiplicazione (vedi sopra) e che ha un elemento neutro, noi oggi chiaremmo C_1 un *loop*. Nel secondo caso, ad essere commutativa è l'operazione di divisione sinistra. Anche in questo caso abbiamo a che fare con un loop, dato che la molteplicità è chiusa anche rispetto alla divisione sinistra e che tale divisione ha un elemento neutro. La seconda parte di C_2 ci dice che la divisione destra coincide con la moltiplicazione destra. Nel terzo caso, ad essere commutativa è la divisione destra. Così anche C_3 è un loop essendo la molteplicità chiusa rispetto alla divisione destra ed avendo anche questa un elemento neutro. Per il resto, C_3 ci dice che che la moltiplicazione sinistra coincide con la divisione sinistra i cui elementi sono scambiati di posto.

Caso differente è il quarto, in cui si afferma che,

(1) la moltiplicazione sinistra coincide con la divisione sinistra,
(2) la divisione sinistra coincide con la divisione destra con divisore e dividendo invertiti,
(3) la divisione destra coincide con la moltiplicazione sinistra con a e b invertiti,
(4) per transitività dai due items precedenti si conclude che la divisione sinistra coincide con la moltiplicazione sinistra.

Da ciò si desume che nessuna delle operazioni coinvolte in C_3 è commutativa. Esso si distingue dai precedenti algoritmi per non essere un loop, ma un gruppoide.

7. – Conseguenze degli algoritmi

Come scritto in precedenza, il nome *algoritmo* dato ai quattro insiemi strutturati C_0, C_1, C_2, e C_3 pur essendo per certi versi fuorviante ha comunque un senso all'interno del lavoro schröderiano. Infatti, Schröder è interessato non solamente al confronto di questi algoritmi, ma anche alla loro capacità di produrre conseguenze, cioè enunciati deducibili mediante le regole dei vari insiemi. Per indicare la quantità delle *equazioni fondamentali* deducibili da un certo algoritmo, Schröder usa l'espressione *Tragweite* che potremmo tradurre con *portata*, *ampiezza*, ma anche, con una certa libertà di linguaggio, *misura*. Ovvero, la misura di un algoritmo è il numero di *equazioni fondamentali* che esso ha come conseguenze.

Qui, ci discostiamo da Schröder, introducendo una simbologia più moderna, in modo da rendere più compatta e comprensibile la presentazione di questa parte de *Sugli elementi formali di un'algebra assoluta*. Denoteremo con $\mathcal{M}(C_0)$, la misura di C_0, definendola come segue:

(14) $\mathcal{M}(C_j) = |I^{\models}_{Cj}|, \quad per\, j = 0, 1, 2, 3;$

dove $I^{\models}_{Cj} = \{x = y |\, x = y$ è un'equazione fondamentale e $C_j \models \ (x = y)\}$.

Dalla definizione precedente si evince che la misura di un algoritmo è la cardinalità delle equazioni fondamentali che esso ha come conseguenza.

Quindi, avremo che $\mathcal{M}(C_0) = |I^{\models}_{C0}| = 72$, ossia l'algoritmo C_0 ha 72 equazioni fondamentali che sono sua conseguenza; $\mathcal{M}(C_1) = |I^{\models}_{C1}| = 30$. Schröder non indica la cardinalità delle equazioni fondamentali che sono conseguenze di C_2 e C_3, ma si limita ad osservare che la misura dell'unione di due qualsiasi algoritmi è identica a quella dell'unione di tutti e quattro gli algoritmi e che equivale a 324 equazioni fondamentali; i.e.:

(15) $$\begin{aligned}\mathcal{M}(C_0 \cup C_1) &= \mathcal{M}(C_2 \cup C_3)\\ &= \mathcal{M}(C_0 \cup C_1 \cup C_2 \cup C_3)\\ &= |I^{\models}_{(C0 \cup C1 \cup C2 \cup C3)}| = 324.\end{aligned}$$ [Sch74b, p. 22]

Schröder indica anche come trasformare uno degli algoritmi in un altro dei tre, mediante una serie di permutazioni.

8. – Algebra assoluta

Finalmente siamo arrivati al primo esempio di *algebra assoluta* che viene definita in prima battuta informalmente:

> Come *primo calcolo per un'algebra assoluta* (...) può essere preso in considerazione il sistema formale A_1 che esprime le proprietà usuali della moltiplicazione e della divisione dell'algebra ordinaria ([54]).

([54]) [Sch74b, p. 23].

Tale calcolo risulta essere un *gruppoide associativo e commutativo*, ovvero un *gruppo*. Dato che A_1, indipendentemente dal fatto che rappresenti o meno l'algebra ordinaria, non è altro che un algoritmo come C_0, C_1, C_2 e C_3, viene spontanea la domanda: *che misura ha* A_1*?* La risposta è:

$$\mathcal{M}(A_1) = |I^{\models}_{A1}| = 150 \ (^{55}). \tag{16}$$

In virtù delle permutazioni a cui si è accennato alla fine della sezione precedente, da A_1 si ottengono facilmente A_2 e A_3 ([56]). Questi sono gli unici esempi addotti da Schröder nel testo come esempi di algoritmi per una possibile algebra assoluta. A_2 ha come misura 131 e A_3 150 ([57]), dall'unione di questi tre algoritmi otteniamo una misura di 296:

$$\mathcal{M}(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = |I^{\models}_{A1 \cup A2 \cup A3}| = 296 \ (^{58}). \tag{17}$$

9. – Teoria dei modelli

Come detto più volte, stiamo parlando di strutture o di algoritmi astratti, cioè puramente sintattici. Non risulta fuori luogo, pertanto, enunciare delle possibile semantiche almeno per il più importante degli algoritmi trovati, cioè, A_1:

> Come particolari esempi di quelle operazioni che sono soggette a A_1, si conoscono fino ad ora, tra gli altri:
>
> (1) l'*addizione logica* di *concetti* (o anche di individui) ([59])
> (2) l'*addizione logica* di *giudizi* (o anche di algoritmi) ([60])
> (3) l'*addizione numerica* di *generici numeri complessi*, e come suo pendant
> (4) l'*addizione geometrica* con i *punti del piano numerico*
> (5) l'*addizione* con i *dadi* di von Staudt ([61])

È precisamente a questo passaggio che alludevo, quando all'inizio del presente lavoro, osservavo che l'operazione di connessione tra elementi, benché chiamata *moltiplicazione* poteva essere interpretata anche come addizione.

Questa citazione è stata addotta da vari studiosi come la prova che Schröder avesse ben distinta la parte semantica da quella sintattica nel calcolo, pur mancando della cognizione di sistema assiomatico. Nessuno degli algoritmi presentati può essere considerato, neppure in senso lato, un sistema assiomatico. Dopo aver parlato tanto di sintassi, qui Schröder avrebbe presentato delle *interpretazioni* del calcolo, dei *modelli*:

> (...) le idee base della Teoria dei Modelli, in particolare riguardo ai suoi aspetti strutturali e semantici, furono anticipati da Ernst Schröder (1841-1902) ([62]).

E più in basso:

> L'algebra assoluta è, perciò, un'algebra formale che include tutti i suoi possibili modelli (...) ([63]).

Infine,

> Dovrebbe essere ormai divenuto chiaro come l'algebra assoluta schröderiana e la sua algebra della logica anticipino le idee base della teoria dei modelli. (...) Questo metodo [di operare] è certamente contro gli standard fregeani riguardo alla non ambiguità dei simboli ([64]), ma aprì la strada alla teoria dei modelli ([65]).

Non posso negare che le possibili interpretazioni di A_1 addotte dal matematico tedesco abbiano un certo fascino. Ciò malgrado, qualche dubbio coglie la mente. I primi due esempi riguardano il calcolo predicativo e proposizionale che hanno come struttura quella di un'*algebra di Boole*, ovvero quella di un *reticolo ortocomplementato e distributivo*. Nel testo, Schröder non parla mai di distributività di un'operazione sulla sua duale. Inoltre, i complessi hanno come struttura algebrica quella di un *campo*, in cui non si parla di sup o di inf, essenziali per un'algebra booleana.

([55]) [Sch74b, p. 24].
([56]) Ivi.
([57]) [Sch74b, p. 25].
([58]) Ivi.
([59]) Ovvero, il calcolo predicativo.
([60]) Ossia, il calcolo proposizionale.
([61]) [Sch74b, p. 25].

([62]) [Pec12, p. 419].
([63]) [Pec12, p. 422].
([64]) Sarebbe meglio parlare di *sintatticità* dei simboli e mancanza di un'interpretazione canonica nel caso di Schröder.
([65]) [Pec12, p. 429].

Ergo, come possiamo considerare sullo stesso piano il calcolo proposizionale e i complessi? Se vogliamo parlare di teoria dei modelli, saremmo costretti a farlo, ma andremmo incontro ad incongruenze. Qualcuno potrebbe osservare che Schröder non vuole interpretare l'intera algebra assoluta, bensì solo l'operazione connettente. Domanda, possiamo slegare un'intepretazione di quest'operazione dalla struttura in cui si trova? Possiamo mettere sullo stesso piano, la disgiunzione e la somma tra numeri complessi, per esempio? Io credo di no.

La mia personale opinione è che in questo testo Schröder si sia limitato a *schizzare* la distinzione fra sintassi e semantica, con l'idea di tornarci su in un altro momento. Questo è, del resto, un atteggiamento tipico di Schröder che lasciò spesso alcuni lavori incompiuti o li mise da parte per dedicarsi a qualcosa che in quel momento attirava maggiormente la sua attenzione. Sicuramente, fu questo uno dei difetti del matematico tedesco: l'essersi occupato di troppe cose senza sempre andare a fondo del loro più intimo significato.

Il fatto che abbia lasciato *Sugli elementi formali di un'algebra assoluta* ad uno stadio non definitivo non deve stupire il lettore. Forse che Schröder non lasciò incompiuto il progetto del suo manuale di algebra [Sch73]? Dei sette volumi in progetto, solo il primo venne completato. E che dire del calcolo dei relativi? In un primo momento, l'idea è quella di fondare su di esso la matematica, ma poi l'interesse verso la *Mengenlehre* cantoriana distoglie l'autore da questo proposito e la teoria delle relazioni finisce per essere solo un linguaggio pasigrafico.

Ricordo ancora come nel supposto profilo autobiografico in [Bar01, secondo foglio], Schröder osservi che, malgrado l'algebra assoluta rappresentasse il suo vero interesse, *in questo ambito di ricerca (...) è stato finora poco pubblicato*. Da qui il tono da un lato *epifanico*, rivelatorio, e dall'altro, per certi versi non definitivo, in-conclusivo, aperto.

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

[Art98] Emil Artin, *Galois Theory*, Dover Publications Inc., Mineola, New York, 1998.

[Bar01] Karl Barton (ed.), *Geistiges Deutschland. Deutsche Zeitgenosse auf dem Gebiete der Literatur, Wissenschaften und Musik*, Adolf Eckstein Verlag, Berlin–Charlottenburg, 1901, versione di Erlangen.

[Bir40] Garrett Birkhoff, *Lattice Theory*, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1940.

[BN11] A. Brill and M. Noether, *Jakob lüroth*, Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung **20** (1911), no. 1, 279–298.

[Bon07] Davide Bondoni, *La teoria delle relazioni nell'algebra della logica schröderiana*, Led Edizioni, Milano, 2007.

[Bon11a] _____, *Structural Features in Ernst Schröder's Work*, Logic and Logical Philosophy **20** (2011), no. 4, 327–359, Part 1.

[Bon11b] _____, *Un capitolo nella storia della Logica matematica: Ernst Schröder*, Lettera Matematica Pristem **78** (2011), 48–53.

[Bon12] _____, *Structural Features in Ernst Schröder's Work*, Logic and Logical Philosophy **21** (2012), no. 3, 271–315, Part 2.

[Bon14a] _____, *Schröder and Group Theory*, Lettera Matematica International Edition **2** (2014), no. 3, 129–132, translated by Kim Williams.

[Bon14b] _____, *Schröder e la teoria dei gruppi*, Lettera Matematica Pristem (2014), no. 90, 31–34.

[Bon15] _____, *To Found or not to Found? That is the Question!*, Logic and Logical Philosophy **24** (2015), no. 2, 217–240.

[Boo58] George Boole, *An Investigation of the Laws of the Thought, on which are founded the Mathematical Theories of Logic and Probabilities*, Dover Publications Inc., New York, 1958, ristampa della prima edizione del 1854.

[Bra00] Geraldine Brady, *From Peirce to Skolem. A Neglected Chapter in the History of Logic*, Elsevier, Amsterdam, 2000.

[Cas06] Ettore Casari, *La matematica della verità*, Bollati Boringhieri, Torino, 2006.

[Ded88] Richard Dedekind, *Was sind und was sollen die Zahlen?*, Friedr. Vieweg & Sohn, 1888.

[Dip91] R.R. Dipert, *The Life and Work of Ernst Schröder*, Modern Logic **1** (1990–1991), no. 2/3, 119–139.

[dM66] Augustus de Morgan, *On the Syllogism and Other Logical Writings*, Routledge & Kegan Paul, London, 1966, edited with an introduction by Peter Heath.

[Gra95] Robert Grassmann, *Gebäude des Wissens. Dreiundzwanzigster Band. Die Formenlehre oder Ma-thematik, in strenger Formelentwicklung*, Druck und Verlag von Robert Grassmann, Stettin, 1895.

[Han67] Hermann Hankel, *Vorlesungen über die complexe Zahlen und ihre Funktionen*, Leopold Voss, Leipzig, 1867, I. Theil. Theorie der complexen Zahlensysteme.

[How06] John M. Howie, *Fields and Galois Theory*, Springer Verlag, London, 2006.

[Kor11] Alwin R. Korselt, *Über einen Beweis des Äquivalenzsatzes*, Mathematische Annalen **70** (1911), no. 2, 294–296.

[KY01] A.N. Kolmogorov and A.P. Yushkevich, *Mathematics of the 19th Century: Mathematical Logic, Algebra, Number Theory, Probability Theory*, Birkhäuser, Basel-Boston-Berlin, 2001, translated from the Russian by A. Shenitzer, H. Grant and O.B. Sheinin.

[Lov01] E.O. Lovett, *Mathematics at the International Congress of Philosophy, Paris, 1900*, Bulletin of the American Mathematica Society **7** (1901), no. 4, 157–183.

[Löw40] Leopold Löwenheim, *Einkleidung der Mathematik in Schröderschen Relativkalkul*, Journal of Symbolic Logic **5** (1940), 1–15.

[Lür91] Jakob Lüroth, *Dr. Ernst Schröder, Vorlesungen über die Algebra der Logik (Exacte Logik). Erster Band. Leipzig, Teubner, 1890*, Zeitschrift für Mathematik und Physik **36** (1891), 161–169.

[Lür98] _____, *Die Bewegung eines starren Körpes. (Eine Übung in der Ausdehnungslehre.)*, Zeitschrift für Mathematik und Physik **43** (1898), 243–268.

[Lür02] _____, *Ernst Schröder*, Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung **12** (1902), 249–265.

[Lür04] _____, *Aus der Algebra der Relative. (Nach dem dritten Bande von E. Schröders Vorlesungen über die Algebra der Logik.)*, Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung **13** (1904), 73–111.

[Neu11] Peter M. Neumann, *The mathematical writings of Évariste Galois*, European Mathematical Society, Zürich, 2011.

[Pec12] Volker Peckhaus, *The Beginning of Model Theory in the Algebra of Logic*, Probabilities, Laws and Structures (Dordrecht) (Dennis Dieck et al., ed.), Springer Verlag, 2012, pp. 419–429.

[Sch73] Ernst Schröder, *Lehrbuch der Arithmetik und Algebra für Lehrer und Studierende*, Teubner, Leipzig, 1873, Band I: *die sieben algebraischen Operationen.*

[Sch74a] _____, *Abriss der Arithmetik und Algebra für Schüler an Gymnasien und Realschulen*, Teubner, Leipzig, 1874, erster Heft: *die sieben algebraischen Operationen.*

[Sch74b] _____, *Über die formalen Elemente der absoluten Algebra, zugleich als Beilage zu dem Programm des Pro- und Real-Gymnasium in Baden-Baden für 1873/1874*, E. Schweizerbart'sche Buchdruckerei (E. Koch), Stuttgart, 1874.

[Sch77] _____, *Der Operationskreis des Logikkalküls*, Druck und Verlag von B.G. Teubner, Leipzig, 1877.

[Sch87] _____, *Ueber Algorithmen und Calculn*, Archiv der Mathematik und Physik (1887), 225–278.

[Sch88] _____, *Veredelung von Pflanzen*, Verhandlungen des naturwissenschaftlichen Vereins in Karlsruhe **10** (1888), 19–20.

[Sch90] _____, *Vorlesungen 14ber die Algebra der Logik*, Teubner, Leipzig, 1890, Band I.

[Sch91] _____, *Vorlesungen 14ber die Algebra der Logik*, Teubner, Leipzig, 1891, Band II.

[Sch95] _____, *Vorlesungen 14ber die Algebra der Logik*, Teubner, Leipzig, 1895, Band III.

[Sch98a] _____, *Die selbständige Definition der Mächtigkeiten 0, 1, 2, 3 und die explizite Gleichzahligkeitsbe-dingung*, Nova Acta Academiae Caesareae Leopoldino-Carolinae Germanicae Naturae Curiosorum **71** (1898), 363–376.

[Sch98b] _____, *Ueber zwei Definitionen der Endlichkeit und G. Cantor'sche Sätze*, Nova Acta Academiae Caesareae Leopoldino-Carolinae Germanicae Naturae Curiosorum **71** (1898), 301–362.

[Sch01a] _____, *Sur une extension de l'idée d'ordre*, Bibliothèque du congrès international de philosophie, III – Logique et Histoire des Sciences (1901), 235–240.

[Sch01b] _____, *Über G. Cantorsche Sätze*, Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung **5** (1901), 81–82.

[Sch12] _____, *On the Formal Elements of the Absolute Algebra*, Led Edizioni, Milano, 2012, with German parallel text, edited by Davide Bondoni.

[Smi07] Jonathan D.H. Smith, *An Introduction to Quasigroups and Their Representations*, Chapman & Hall, Boca Raton, 2007.

[Sol03] Ronald Solomon, *Abstract Algebra*, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 2003.

[Stj80] N.I. Stjažkin, *Storia della logica. la formazione delle idee della logica matematica*, Editori Riuniti, 1980, edizione italiana a cura di Roberto Cordeschi.

[TG87] A. Tarski and S. Givant, *A Formalization of Set Theory without Variables*, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1987.

[uRK15] S. Kleiner und R. Knöbl, *Duden: das Aussprachewörterbuch*, Duden Verlag, Berlin, 2015, 7., komplett überarbeitete und aktualisierte Auflage.

[var] Autori vari, *Diener 10053*, manoscritto di 42 fogli; proprietà dell'autore.

[VY18] O. Veblen and J. Young, *Projective Geometry*, Ginn and Company, Boston, 1910–1918, volume 1.

[War90] Seth Warner, *Modern Algebra*, Dover Publications, Inc., New York, 1990.

Davide Bondoni

Si è laureato in filosofia e storia all'Università degli Studi di Milano per poi conseguire il dottorato di ricerca in Logica ed Epistemologia all'Università 'La Sapienza' di Roma. I suoi interessi si dirigono verso la storia della logica e verso la figura di Ernst Schröder in particolare. Su Schröder ha pubblicato vari articoli presso il Logic and Logical Philosophy *e la* Lettera Pristem Matematica *e tre libri presso la LED di Milano. Attualmente collabora con la società europea di matematica ed è referee di* Foundations of Physics.