
Matematica, Cultura e Società

RIVISTA DELL'UNIONE MATEMATICA ITALIANA

VIERI BENCI, PAOLO FREGUGLIA

Alcune osservazioni sulla matematica non archimedeana

Matematica, Cultura e Società. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. 1
(2016), n.2, p. 105–121.

Unione Matematica Italiana

[<http://www.bdim.eu/item?id=RUMI_2016_1_1_2_105_0>](http://www.bdim.eu/item?id=RUMI_2016_1_1_2_105_0)

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)*

SIMAI & UMI

<http://www.bdim.eu/>

Alcune osservazioni sulla matematica non archimedeana

VIERI BENCI

Università di Pisa

E-mail: vieri.benci@unipi.it

PAOLO FREGUGLIA

Università di L'Aquila

E-mail: pfreguglia@gmail.com

Accettare il concetto di infinitamente piccolo è tutt'altro che facile. Tuttavia se si riesce a pensare in modo coraggioso e libero, l'iniziale diffidenza si tramuterà presto in una piacevole certezza

Paul Du Bois-Reymond

Sommario: *Questo articolo è una breve introduzione alla matematica non-archimedeana. Nella prima parte passiamo in rassegna alcuni aspetti storici relativi alla critica dell'assioma di Archimede. Nella seconda parte ci proponiamo di mostrare la maggiore adeguatezza del punto di vista non archimedeo nell'analizzare la nozione di continuo euclideo.*

Abstract: *This paper is short introduction to the non-Archimedean mathematics. In the first part we examine some historical aspects about the criticism of Archimedes axiom. In the second part we propose the importance of the non-Archimedean point of view in order to analyze the Euclidean continuum.*

1. – Introduzione

Questo articolo vuol presentare, facendo riferimento a documentazioni storiche, la consistenza culturale ed epistemologica dell'approccio non archimedeo. Inoltre, a partire dalla presentazione di un paradosso elementare, ci proponiamo di mostrare la maggiore adeguatezza del punto di vista non archimedeo nell'analizzare la nozione di continuo euclideo. L'utilizzo da noi fatto della documentazione storica è diacronico, nel senso che toccheremo esempi e proposte teoriche collocate temporalmente in epoche diverse. Il riferimento primario alle matematiche elementari è consono con gli obiettivi della rivista, anche se, come si sa, "elementare" tutto vuol dire fuorchè banale

o semplice. Il nostro intento peraltro è anche quello di prospettare possibilità di indagini future. Proprio in questo ordine di idee pensiamo, ad esempio, che valga la pena sia una rilettura critica del decimo libro degli *Elementi* di Euclide (che tratta dell'incommensurabilità, degli irrazionali), sia una maggiore attenzione sulle ricerche di Dedekind e di Cantor, nonché una rivisitazione dei modelli teorici che si basano in modo essenziale sull'uso di grandezze infinitesime.

Dunque, nella prima parte dell'articolo metteremo in evidenza punti che riteniamo storicamente salienti per la matematica non archimedeana, mentre nella seconda parte presenteremo una nostra proposta di continuo euclideo utilizzabile anche e.g. nei modelli *non-standard*.

Accettato: il 4 luglio 2016.

2. – Esame di alcuni aspetti storici

In questa sezione passiamo in rassegna alcuni aspetti storici relativi alla critica dell'assioma di Archimede.

2.1 – Le nozioni comuni e i postulati in Euclide

L'importanza dell'utilizzo in matematica di assiomi o postulati per basare ogni forma di teoria è un paradigma assodato che si fonda nell'epistemologia classica. Dice Proclo ([25], pp. 79-80):

“Anzitutto, dunque, come ho detto, bisognava distinguere i principi e le conseguenze dei principi, ciò che appunto fa Euclide, per così dire, in ciascun libro, facendo precedere a tutta la trattazione i principi comuni a questa scienza.

Poi divide gli stessi principi comuni in ipotesi, postulati e assiomi; perchè tutte queste cose differiscono tra loro, nè sono la stessa cosa l'assioma, il postulato e le ipotesi come spiega in un luogo il geniale Aristotele”.

Come pure, nella matematica classica, le nozioni primitive di *punto* e di *segmento* vengono chiaramente enunciate e “definite”. Così Euclide (vissuto intorno al 300 a.C.) propone nelle *Definizioni* (o *Termini*) del primo libro: punto è ciò che non ha parti, linea è lunghezza senza larghezza, estremi di una linea sono punti, linea retta (segmento rettilineo) è quella che giace ugualmente rispetto ai suoi punti, ecc. Altrettanto importante è la determinazione, anch'essa ben consolidata in ambito classico, della struttura algebrica e relazionale tra “grandezze”. Così Euclide stabilisce le ben note *nozioni comuni* ⁽¹⁾ nel I libro degli *Elementi*:

1. Gli uguali allo stesso, sono anche uguali tra loro
2. E qualora a uguali siano sommati uguali, i totali sono uguali
3. E qualora da uguali siano sottratti uguali, i resti sono uguali
4. E i sovrappoventesi tra loro sono uguali tra loro
5. E il totale [è] maggiore della parte.

⁽¹⁾ Si noti che in Aristotele, *Metafisica B*, 1 (*Dialettica*), le nozioni comuni sono intese come oggetti della dialettica. Esse sono identico e diverso, simile e dissimile, contrarietà, anteriore e posteriore ecc.

Nella seconda metà dell'Ottocento e nel primo Novecento fiorirono studi molto significativi (tanto per citare, Pasch, Peano, Veronese, Pieri, Hilbert, Huntington, Tarski) che affinarono la trattazione della geometria elementare (euclidea e non, e proiettiva) nonché aspetti logico fondazionali generali (ad esempio Dedekind, Frege, Cantor). In questo contesto l'assiomatica si perfeziona notevolmente, anche in relazione a questioni metateoriche (come la coerenza, l'indipendenza, la completezza, ecc.), e soprattutto, in continuità con la tradizione classica, se ne ravvisa la necessità e l'indispensabilità dello studio degli assiomi e postulati in questioni fondazionali.

2.2 – Il postulato di Eudosso-Archimede e la questione dei punti di una retta

Il Postulato detto di Eudosso-Archimede (cioè, quando grandezze possono, se moltiplicate, superarsi reciprocamente) ha avuto storicamente un ruolo molto significativo. Basti pensare al cruciale utilizzo che ne viene fatto nel libro V degli *Elementi* di Euclide. La definizione V, 4 (degli *Elementi* euclidei) stabilisce una delle condizioni affinché si possa stabilire un rapporto tra grandezze (omogenee).

Essa dice:

“Si dice che hanno fra loro rapporto le grandezze le quali possono, se moltiplicate, superarsi reciprocamente”.

Archimede (III secolo a.C.) introdurrà il postulato in questione nell'opera *Sulla sfera e sul cilindro*, che alcuni storici considerano come una sorta di continuazione degli *Elementi* euclidei. Nel primo libro dell'opera archimedeo vengono introdotti cinque postulati, il quinto dice appunto:

“Che inoltre per linee disuguali, per superfici disuguali e per solidi disuguali [cioè in generale per grandezze disuguali], il maggiore superi il minore di una grandezza tale che addizionata a se stessa possa superare qualunque grandezza data, tra quelle che si possono paragonare tra loro”.

Quest'ultimo passo richiama alla mente il fatto che si debbano considerare, come d'altronde in Euclide, grandezze omogenee.

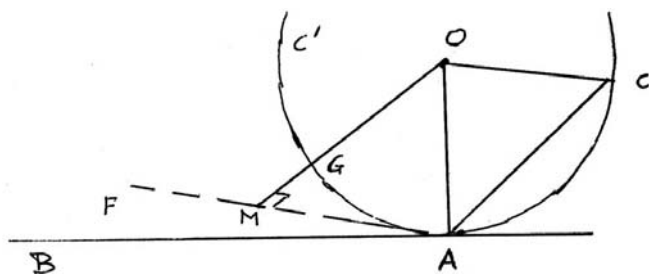


Figura 1. – Angolo di contingenza.

Tuttavia già in Euclide troviamo un importante esempio di grandezze non-archimedee: i cosiddetti angoli di contingenza. La III, 16 degli *Elementi* dice:

“Se innalziamo (vedi Fig. 1) una retta perpendicolare [al diametro] in un estremo del diametro di un cerchio, essa cade fuori del cerchio, e tra la retta e la circonferenza non si può inserire nessuna altra retta. Inoltre l'angolo del semicerchio è maggiore di qualunque angolo acuto rettilineo e l'altro è minore”⁽²⁾.

Vediamo ora come il postulato archimedeo sia legato al problema dei punti di una retta o meglio, a quegli assiomi che riguardano i punti su una retta. Ci sposteremo a considerare i contributi ottocenteschi.

Riportiamo, per comodità del lettore, i due classici postulati (quello di Dedekind e quello di Cantor)

⁽²⁾ La dimostrazione procede disegnando dapprima un cerchio di centro O e raggio OA. Supponiamo per assurdo che la perpendicolare a OA in A non cada fuori del cerchio, ma appunto all'interno come (nella Fig. 1) AC. Abbiamo quindi un triangolo isoscele ACO che dovrà avere angoli alla base uguali, cioè $\angle OAC = \angle OCA$. Ma $\angle OAC$ dovrebbe essere uguale a $\pi/2$ e dunque il triangolo ACO avrebbe, in quanto isoscele, due angoli retti e in tal senso andremo contro la I, 17 degli *Elementi* di Euclide (che è indipendente dal quinto postulato). In conclusione la perpendicolare in A al raggio OA cade dunque fuori dal cerchio allo stesso modo di AB. Ciò vuol dire che questa perpendicolare non ha altro punto in comune con la circonferenza, a parte A.

Dobbiamo ora far vedere che tra la retta AB e la circonferenza non si può inserire altra retta. Infatti se per assurdo fosse possibile, supponiamo sia AF. Si tracci quindi su AF la perpendicolare OM. Si determina così il triangolo rettangolo OMA la cui ipotenusa è AO e OM è uno dei cateti, pertanto dovrebbe essere $OM < AO$ e quindi $OM < OG$, essendo $AO = OG$. Da ciò l'assurdo. Di conseguenza l'angolo curvilineo C'AB (tra circonferenza e tangente) è minore di ogni angolo acuto rettilineo, infatti se non lo fosse si potrebbe inserire una retta AF di cui abbiamo constatato l'impossibilità.

presentati nel 1872⁽³⁾, che riguardano appunto il continuo su una retta.

Postulato di Dedekind, secondo la formulazione di Giuseppe Vitali (vedi [14], p. 195):

“Se un segmento di retta AB è diviso in due parti in modo tale che:

- Ogni punto x del segmento AB appartenga ad una delle due parti
- L'estremo A appartenga alla prima parte e B alla seconda
- Un punto qualunque della prima parte preceda un punto qualunque della seconda, nell'ordine stabilito in AB

Allora esiste un punto D del segmento AB (che può appartenere all'una o all'altra parte), tale che ogni punto di AB che precede D appartiene alla prima parte, ed ogni punto di AB che consegue a D appartiene alla seconda parte della divisione stabilita”.

Postulato di Cantor (sempre secondo la formulazione di Vitali):

“Se due classi di segmenti di retta sono tali che:

- Nessun segmento della prima classe sia maggiore di qualche segmento della seconda,
- Prefissato un segmento σ piccolo a piacere, esistano un segmento della prima ed uno della seconda classe la cui differenza sia minore di σ ;

Allora esiste un segmento che non è minore di alcun segmento della prima classe nè maggiore di alcuno della seconda”.

Va rammentato che Kurt Goedel in un lavoro del 1964, “What is Cantor's Continuum Problem?”, inizia così:

“Il problema del continuo in Cantor è semplicemente la questione: di quanti punti è formata una retta dello spazio euclideo? Una questione equivalente è: quanti sono gli insiemi di numeri interi?”

⁽³⁾ Richard Dedekind (1831-1916) formulò il suo postulato o assioma nel 1872, in *Stetigkeit und irrationale Zahlen* [Continuità e numeri irrazionali]. Talora questo assioma è detto di continuità oppure assioma di completezza e riguarda l'insieme dei numeri reali $\mathbb{R}$.

Georg Cantor (1845 – 1918) presenta il suo assioma in *Math. Ann.* V, 1872.

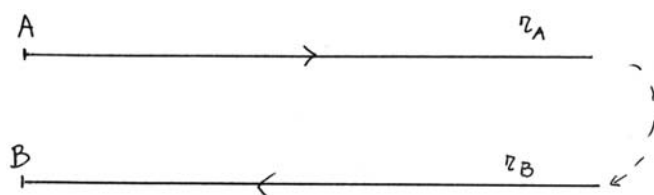


Figura 2. – Il segmento non archimedeo di Vitali.

Si può dimostrare che:

- il postulato di Cantor è una conseguenza del postulato di Dedekind,
- postulato di Cantor + postulato di Archimede $\Leftrightarrow$ postulato di Dedekind.

Facciamo ora vedere, tramite un semplice modello geometrico presentato da Vitali nel 1923 (ibid), la differenza tra il postulato di Cantor e quello di Dedekind. Tracciamo due semirette parallele r_A e r_B che hanno origine rispettivamente dal punto A e dal punto B . I punti della prima semiretta r_A siano ordinati in modo crescente (da A all'infinito) e quelli di r_B in modo decrescente (dall'infinito a B). Stabiliamo poi che ogni punto della prima semiretta preceda ogni punto della seconda. In questo modo tutti questi punti potranno costituire un segmento AB con ordinamento che va da A a B . Si vede così che in questo segmento vale il postulato di Cantor ma non quello di Dedekind.

Gino Fano (1950)⁽⁴⁾ osserva che partendo da questo modello si può a sua volta presentare un altro modello in cui valgono i postulati dell'ordine e della congruenza, ma non il postulato di Eudosso-Archimede. Dice Fano:

“Questo postulato si distingue dagli altri della geometria elementare per il fatto di richiedere un numero di operazioni non determinato a priori; la critica moderna tende perciò a considerarlo come un'affermazione d'indole più elevata e che esce dal campo strettamente elementare”

e quindi:

“[...] si chiamano geometrie non archimedee quelle nelle quali interviene un sistema di grandezze non soddisfacenti il postulato di Eudosso-Archimede”.

⁽⁴⁾ Vedi [16] pp. 499 e seg.

Ecco l'esempio di Fano, che a sua volta si ispira alle idee di Giuseppe Veronese (vedi oltre).

Consideriamo una successione finita (di almeno due rette) o infinita di rette parallele tra loro equidistanti (vedi Fig. 3). Su queste rette parallele si stabilisca un verso comune per tutte da sinistra verso destra.

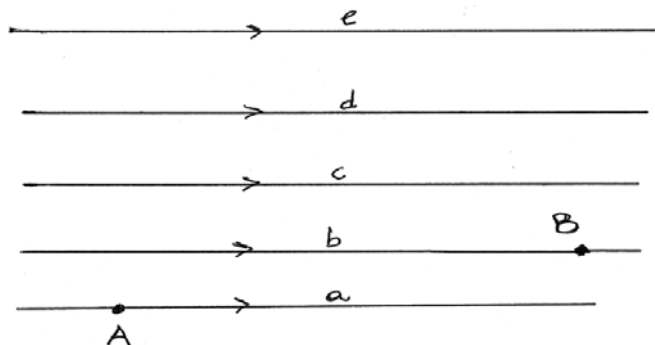


Figura 3. – La retta non archimedeo di Fano.

Ora si fissi un unico ordine così: a partire dalla prima retta dal basso, i punti di ogni singola retta si succedano da sinistra verso destra. Subito dopo vengano i punti della seconda retta e poi subito quelli della terza e così via. Relativamente a questo insieme di punti ordinati così costruito, si può dire quando si hanno segmenti congruenti. Infatti per traslare un segmento si traslano i suoi estremi (anche non in un'unica retta); si ha così una sovrapposizione per traslazione. Ma questo insieme non è archimedeo; infatti qualunque multiplo di un segmento che ha i due estremi sopra una stessa retta sarà minore di un qualunque segmento che ha gli estremi sopra due rette differenti.

2.3 – La nascita della moderna matematica non archimedeo: Paul Du Bois-Reymond

Come dicevamo nel precedente paragrafo, l'esemplificazione di Fano si riferiva alle idee di Giuseppe Veronese, di cui parleremo opportunamente fra poco. Ci sono altri sistemi che, talora riferendosi anche alla impostazione di Veronese, presentano situazioni non archimedee. In particolare i monosemii proposti da Tullio Levi Civita, di cui anche

parleremo oltre. Vanno citati però anche i numeri transfiniti di Cantor e i numeri funzionali di Hilbert. Non entreremo nel merito del calcolo leibniziano, con i raffinamenti di Euler e dei Bernoulli, rimanendo a [17]. Ci soffermeremo invece un po' su Paul Du Bois-Reymond, il quale sin dal 1880 si interessò, a proposito della teoria dell'integrazione, a insiemi densi che non possono essere adeguatamente rappresentati. Ovvero studiò quegli insiemi sulla retta che hanno la proprietà di essere ricoperti mediante un numero finito di intervalli tali che la loro somma sia più piccola di una data quantità arbitraria. Nel 1882 Du Bois-Reymond pubblicò *Die allgemeine Functionentheorie* [Teoria generale delle funzioni]. Stäckel giudicò quest'opera davvero molto rilevante, anche se la sua vera importanza non fu del tutto apprezzata al tempo in cui fu pubblicata. Fra l'altro vengono affrontati i concetti di numero reale, di continuo e di spazio.

Il concetto di spazio, staticamente e immutabilmente concepito, non può facilmente generare la definizione di linea uniforme costituita da una serie di punti comunque densi e punti privi di dimensione. E quindi non importa come una successione di punti possa essere densa: essa non può mai diventare un intervallo che debba essere sempre riguardato come somma di intervalli fra punti. Du Bois-Reymond riteneva che una completa comprensione del continuo andasse oltre le capacità dei matematici. Ciò nonostante egli sviluppò nel 1887 una teoria degli infinitesimi in *Über die Paradoxen des Infinitär-Calculs* (Sui paradossi del calcolo infinitario). Scrive fra l'altro che "l'infinitamente piccolo è una quantità matematica che ha le proprietà comuni alle quantità finite" e nonostante dubbi e perplessità "le quantità infinitamente piccole hanno lo stesso diritto di esistenza di quelle infinitamente grandi".

Molti ritengono che, anche se non fu considerato un matematico di prima grandezza, tuttavia i suoi contributi tra il 1870 e la prima parte del 1880 furono altamente significativi.

2.4 – Le idee di Giuseppe Veronese

Giuseppe Veronese (1854-1917) pubblica nel 1891 un'opera molto impegnativa e innovativa, *Fonda-*

menti di Geometria ⁽⁵⁾. Veronese era succeduto nel 1881 a Bellavitis, morto nel 1880, sulla cattedra di "Geometria analitica" dell'Università di Padova. Egli sosteneva la necessità dei metodi sintetici in geometria. Così scriveva nel 1884 ⁽⁶⁾:

"Il metodo [da me seguito] è principalmente sintetico e intuitivo, come nelle altre mie memorie sulla geometria a n dimensioni. Dico intuitivo perché per me il punto, la retta, il piano e lo spazio a tre dimensioni in quello a n dimensioni sono elementi di natura nota, cioè hanno sempre lo stesso significato, quello che posseggono nello spazio ordinario; e quindi i corpi a più di tre dimensioni generati con questi elementi sono essi stessi parzialmente intuitivi, perocché vengono rappresentati nella nostra mente non già mediante equazioni, ma mediante figure geometriche".

Per Veronese non basta che una geometria abbia il suo sistema di assiomi e debba essere coerente ecc., ma ci deve essere una conformità con la nostra "intuizione spaziale", cioè non deve essere in contrasto con le proprietà intuitive della nostra osservazione protofisica della realtà.

Da un punto di vista epistemologico e fondazionale, c'è un altro punto di vista essenziale per Veronese, che fra l'altro lo portò a polemizzare con i suoi contemporanei ed in particolare con Peano. Cioè Veronese considera la seguente metaipotesi:

(*) "Data una cosa A determinata, se non è stabilito che A è il gruppo di tutte le cose possibili che vogliamo considerare, possiamo pensarne un'altra non contenuta in A (vale a dire fuori di A) e indipendente da A ".

L'istanza (*) vuol dire in particolare che se A è una qualunque forma geometrica,

"[...] possiamo immaginare fuori di A un altro elemento, cioè un elemento che non appartenga ad A senza che ciò contraddica alle proprietà della forma A stessa, né conduca a contraddizioni".

Cosicché, data una forma geometrica, ad esempio la retta, che è autonomamente considerata uno spazio ad una dimensione, costituita di punti, pos-

⁽⁵⁾ Vedi [31].

⁽⁶⁾ Vedi [30].

siamo anche immaginare che esista un punto P fuori di essa. Ovvero, come ulteriormente Veronese spiega,

“[...] immaginiamo prima uno spazio S [ad esempio la retta] e poi un punto P e consideriamo come contrassegno di confronto tra il punto P e quelli di S , l'ordine temporale con cui li abbiamo pensati”.

Questa è ovviamente una giustificazione di natura psicologica, che tuttavia può aiutare a capire. Allora il piano, inteso come spazio bidimensionale S^2 , sarà generato da una retta (spazio ad una dimensione S^1) ed un punto P fuori di essa, nel modo seguente ⁽⁷⁾:

“(Def.) La figura [...] che si ottiene dal fascio di raggi, considerando come elemento [centro] il punto P , [che congiunge P con i punti della retta assegnata S^1], si chiama sistema a due dimensioni o superficie piana o più semplicemente *piano*”.

Vedremo in quel che segue come questo atteggiamento epistemologico sovrastiede anche alla impostazione non archimedeica proposta da Veronese. Seguendo sempre i *Fondamenti di geometria*, c'è appunto un capitoletto: “Principi fondamentali delle forme matematiche astratte” dove troviamo:

- *Ipotesi I*: “Vi è una forma che serve a determinare tutte le altre. Chiameremo questa forma, *forma fondamentale*.[...] In altre parole la forma fondamentale non può essere determinata da altre forme”.

Quello che Veronese chiama “forma fondamentale” vuol essere la *retta non archimedeica*. Le sue caratteristiche sono determinate da opportuni assiomi che qui non riportiamo.

- *Ipotesi II*: “La forma fondamentale è un sistema ad una dimensione identico nella posizione delle sue parti”.

Forse vuole solo dire che la forma fondamentale è un insieme linearmente ordinato invariante per traslazioni. Le ipotesi I e II in realtà tengono ben

presente, ovvero possono in modo nuovo rappresentare sia retta euclidea che non-euclidea.

I segmenti, denotati con (XY) , sono considerati come *segmenti orientati*. Veronese passa poi alle nozioni di multiplo e sottomultiplo. Nella forma fondamentale la somma consecutiva per n volte di uno stesso segmento (AB) conduce ad un segmento (AD) che si chiama “segmento multiplo del segmento dato (AB) secondo il numero n ” e “diremo che (AD) contiene n volte il segmento (AB) ”. A sua volta il segmento (AB) si chiama sottomultiplo di (AD) secondo il numero n . Rispettivamente scriveremo:

$$(AD) = n(AB) \text{ (caso del multiplo)}$$

$$(AB) = 1/n(AD) \text{ (caso del sottomultiplo)}$$

Definizione 1: “A cominciare da un elemento A nella forma fondamentale in un dato verso, si consideri una successione illimitata [...] di segmenti consecutivi eguali ad un segmento dato (AB) . [...] Questa successione si chiama *scala*, della quale (AB) si chiama *unità di misura* o *unità*, e l'elemento A *origine*.”

“[...] L'origine rappresenta il numero zero”.

Definizione 2: “Per *campo della scala* intendiamo il segmento illimitato della forma fondamentale determinata da tutti i segmenti consecutivi della scala nel verso di essa”.

Il campo di una scala è assimilabile all'insieme dei segmenti che sono *confrontabili* tra di loro; due segmenti (AB) e (CD) sono confrontabili tra loro se esiste un n tale che

$$(CD) \leq n(AB) \quad \text{o} \quad (AB) \leq n(CD).$$

Utilizzando il linguaggio moderno possiamo esprimere queste nozioni dicendo che i segmenti orientati sulla retta e aventi un estremo in O formano uno *spazio vettoriale* $\mathbb{V}$ su $\mathbb{Q}$, arricchito dalla nozione di scala, nel senso che elementi aventi scala diversa sono tra di loro linearmente indipendenti.

Veronese vuol arrivare a descrivere completamente, passo dopo passo, cioè ipotesi dopo ipotesi, la ricchezza dal punto di vista strutturale della nozione di forma fondamentale a partire da $\mathbb{V}$.

⁽⁷⁾ Vedi G. Veronese, *Fondamenti di geometria* [...] op. cit., pp. 281 e seg.

Nel Cap.VI Veronese affronta l'importante classificazione dei segmenti in segmenti *finiti*, *infiniti* e *infinitesimi* (attuali), introducendo la seguente ipotesi (essendo sempre (AB) l'unità della scala):

Ipotesi III: "In un verso della forma fondamentale esiste almeno un elemento fuori del campo della scala rispetto ad ogni segmento limitato come unità".

Inoltre: se $\forall n : n(AB) < (AX)$, ovvero $(AB) \ll (AX)$, potremmo dire che (AB) è un segmento di ordine minore di (AX) (ovvero (AX) è *infinito* rispetto ad (AB)). Diremo altresì che (AB) ed (AX) condividono lo stesso ordine se (AB) non è di ordine maggiore nè minore di (AX) . È facile dimostrare che la condivisione dello stesso ordine è una relazione di equivalenza.

In altre parole indipendentemente dalla scelta della scala e quindi della sua unità, esiste almeno un elemento fuori da essa. Ciò vuol dire che la forma fondamentale si dovrebbe estendere al di là di ogni campo di scala esistente in essa. L'elemento dato fuori, verrà denotato con ∞ o A_∞ . Si ottiene subito che un segmento con un estremo nel campo di scala (AA_1) , e l'altro estremo al di fuori di esso, cioè coincidente con A_∞ , sarà maggiore di ogni altro segmento con ambedue gli estremi nel campo di scala (AA_1) . Pertanto non ci può essere un n tale che $n(AA_j) > (AA_\infty)$ con A e A_j nel campo di scala (AA_1) .

Questa ipotesi III fornisce alla forma fondamentale l'attributo di non-archimedeo. Non solo, ma ogni segmento che genera il campo di scala (AA_1) sarà minore di qualunque segmento (AA_∞) . A questo punto si possono definire segmenti *finiti* quelli con ambedue gli estremi nel campo di scala (AA_1) , mentre diremo segmenti *infiniti attuali* o *infiniti* rispetto ad (AA_1) , quelli di tipo (AA_∞) . Il modello di Fano, presentato precedentemente [16], può aiutare a comprendere queste nozioni.

Nei confronti di (AA_∞) , l'unità (AB) o un segmento qualunque "finito" viene detto *infinitesimo attuale* o *infinitesimo*. Così, se un multiplo qualsiasi di una grandezza a non supera la grandezza b , si dirà che b è un *infinito attuale* rispetto ad a e a un *infinitesimo attuale* rispetto a b . Questa geometria

comprende dunque la trattazione di infiniti e infinitesimi attuali.

2.5 – I monosemii di Tullio Levi Civita

Tra le strutture non archimedee forse quella che oggi sembra avere la maggiore rilevanza è quella di campo. Il primo che ha introdotto in modo sistematico un campo non archimedeo è stato Tullio Levi Civita.

Prima di procedere, ricordiamo alcune nozioni basilari. Ovviamente un campo non archimedeo è un campo linearmente ordinato i cui "numeri" positivi (ovvero gli elementi di $\mathbb{F}$ maggiori di 0) non soddisfano il principio di Archimede. Non è difficile dimostrare il seguente fatto:

PROPOSIZIONE 1. – *Sia $\mathbb{F}$ un campo ordinato; allora $\mathbb{Q} \subset \mathbb{F}$; inoltre se $\mathbb{R} \subset \mathbb{F}$, $\mathbb{F}$ è non-archimedeo.*

Diremo che un numero ε è *infinitesimo* se per ogni numero razionale positivo q accade che:

$$-q < \varepsilon < q.$$

Se $\mathbb{R} \subset \mathbb{F}$, si vede subito che l'unico numero reale infinitesimo è lo zero. Intorno ad un numero reale r c'è una porzione di $\mathbb{F}$ costituita da numeri infinitamente vicini a r . Diremo che il numero a è *infinitamente vicino* al numero b se la differenza $a - b$ è infinitesima.

In sintesi, diremo:

- *infinitesimi*, i numeri infinitamente vicini allo zero,
- *finiti*, i numeri infinitamente vicini ad ogni numero reale,
- *infiniti*, i reciproci degli infinitesimi.

Tullio Levi-Civita ebbe ad interessarsi agli infiniti e infinitesimi attuali, riferendosi direttamente al lavoro del 1891 di Veronese. Lo fa in una memoria alquanto estesa (di circa cinquanta pagine) comparsa negli *Atti dell'Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti* del 1893. Levi-Civita si riferisce al fatto che su infiniti e infinitesimi attuali si erano sviluppati risultati ("in germe" dal punto di vista teorico) da un lato con Cavalieri (e Torricelli e Roberval sulla nozione di "indivisibili") e per gli infiniti con i paradossi di

Galilei, e dall'altro con Leibniz (infinitesimi). Esplicitamente poi si rifà appunto a Veronese, dicendo:

“Il chiar.mo Prof. Veronese, nella sua opera magistrale [...] (1891) come seppe abbattere gli ostacoli, che pregiudizi inveterati opponevano allo svolgimento dell'ipergeometria, quale scienza pura [...] così apportò a tale riguardo vedute nuove e feconde. Tra queste, per lo scopo nostro, ci limiteremo ad accennare la possibilità astratta di segmenti infiniti ed infinitesimi limitati e la conseguente ammissibilità di nuovi segmenti, pur essi infiniti od infinitesimi, che, di fronte ai primi, si comportino come quelli di fronte ai finiti (infiniti ed infinitesimi di vari ordini)”.

Ma mentre Veronese propone un'analisi ed un punto di vista, come abbiamo visto, puramente geometrico sintetico, Levi-Civita vuol proporre “lo stesso soggetto da un punto di vista assolutamente analitico”, introducendo la nozione basilare di *monosemio*. Nell'incipit del primo paragrafo (*Monosemii e numeri generali di 2^a specie, ellittici ed iperbolici*) troviamo un approccio epistemologico di chiara ispirazione veronesiana⁽⁸⁾, così scrive Levi-Civita:

“Fissato, nel campo dei numeri reali, un numero qualunque a , noi possiamo pensare insieme con a , o se si vuole successivamente ad a , un altro numero reale v e riguardare il risultato di questa operazione intellettuale diverso da quello, che si sarebbe ottenuto, pensando prima l' a e poi, fatta astrazione da esso, il v .”

Ecco allora che un *monosemio* è dato dalla scrittura:

$$a_v$$

dove a si chiama *caratteristica* e v *indice*.

“Tali nuovi enti saranno chiamati numeri monosemii del continuo numerico di seconda specie. Tra essi [...] sono compresi gli ordinari numeri reali, cui spetta l'indice 0”.

⁽⁸⁾ Basti vedere le metaipotesi che giustificano il fatto che si può pensare dapprima una cosa, ad esempio una retta, e poi si può pensare ad un'altra cosa che non è inclusa nella precedente e da essa indipendente, come un punto fuori dalla retta pensata. In questo caso la posizione di Levi-Civita è conforme a quella di Veronese, ma con qualche differenza. Vedi [22].

Dunque avremo:

$$a_v \in \mathbb{R} \text{ se } v = 0$$

come pure:

$$0_v = 0_\mu = 0 \text{ con } v \neq \mu.$$

Usando un punto di vista ed un linguaggio moderni, possiamo assumere l'esistenza di un numero infinito ω . Allora, il monosemio a_v può essere rappresentato da $a\omega^v$.

Dunque avremo che:

- (1) se $v = \mu$ allora $a_v \geq b_\mu$ laddove $a \leq b$
 se $v \leq \mu$ allora se $a, b > 0 \implies a_v \leq b_\mu$
 se $a < 0 < b \implies a_v < b_\mu$.

Quindi in ogni caso si potrà stabilire se un monosemio è maggiore, uguale o minore di un altro. In nota a p. 3 del suo lavoro Levi-Civita dice:

Possiamo riconoscere fin d'ora nei monosemii i contrassegni degli infiniti e degli infinitesimi. Infatti per le definizioni adottate, i monosemii d'indice $v > 0$ sono, in valore assoluto, maggiori di tutti i numeri finiti ordinari (monosemii d'indice 0 [cioè numeri reali]), e i monosemii d'indice minore di 0, pur non essendo nulli, sono minori d'ogni numero finito”.

Levi-Civita passa a definire i “numeri” rappresentabili come somme finite di monosemii:

$$(2) \quad \sum_{r=1}^n a_{v^{(r)}}^{(r)} = a_{v^{(1)}}^{(1)} + a_{v^{(2)}}^{(2)} + \dots + a_{v^{(n)}}^{(n)}.$$

Le regole di somma e prodotto con questi numeri possono essere facilmente dedotte rappresentandoli come somme di potenze ad esponente reale

$$\sum_{r=1}^n a^{(r)} \omega^{v^{(r)}}.$$

ed utilizzando la regola

$$a\omega^v \cdot b\omega^\mu = ab\omega^{v+\mu}.$$

Il passaggio successivo consiste nel definire somma e prodotto per somme con infiniti termini (oggi si direbbe per serie formali).

A questo scopo considera l'insiemi di numeri reali $\Gamma \equiv \{v^{(1)}, v^{(2)}, \dots, v^{(n)}, \dots\}$, soddisfacenti la seguente

proprietà: dato un qualunque numero reale A allora l'insieme:

$$(3) \quad \Gamma_A \equiv \left\{ v^{(r)} : v^{(r)} > A \right\}$$

è finito.

L'insieme Γ può contenere un numero finito o infinito di elementi. In ogni caso, in virtù della (3) è possibile definire somma e prodotto di “serie formali” del tipo

$$\sum_{r=1}^{\infty} a_{v^{(r)}}^{(r)}$$

ove gli $a_{v^{(r)}}^{(r)}$ sono gli elementi di Γ numerati in ordine decrescente; con notazione moderna, la serie precedente sarebbe scritta come serie di potenze formale nel seguente modo:

$$\sum_{r=1}^{\infty} a^{(r)} \omega^{v^{(r)}}$$

I “numeri” così ottenuti vengono chiamati da Levi-Civita *numeri generali di tipo ellittico*. La parola generali si riferisce al fatto che essi formano un continuo non archimedeo, mentre l'aggettivo ellittico si riferisce al fatto che Γ soddisfa la (3). In realtà, è possibile definire somma e prodotto anche per serie formali relative ad insiemi di indici G tali che, $\forall A \in \mathbb{R}$, l'insieme $G_A \equiv \{ v^{(r)} : v^{(r)} < A \}$ è finito. I numeri definiti in questo modo vengono chiamati *numeri generali di tipo iperbolico*⁽⁹⁾.

⁽⁹⁾ Cerchiamo di chiarire questo punto con un esempio e, usando una notazione più moderna, consideriamo i numeri definiti dalle seguenti serie:

$$a := \sum_{k \in G} a_k \omega^k \quad e \quad b := \sum_{h \in H} b_h \omega^h$$

ove G ed H sono insiemi di indici contenuti in $\mathbb{Z}$. Il prodotto ab formalmente è dato da

$$ab = \sum_{n \in L} c_n \omega^n$$

ove

$$(4) \quad c_n = \sum_{\substack{k+h=n \\ k \in G, h \in H}} a_k b_h$$

ed

$$L = \{ n \in \mathbb{Z} \mid c_n \neq 0 \}$$

Una condizione sufficiente affinché c_n sia ben definito è che la somma (4) sia finita, e questo capita se gli insiemi G ed

Vengono quindi esaminate le proprietà degli *numeri ellittici* e poi quelle degli *numeri iperbolici* e si riesce a dimostrare che essi formano un campo reale chiuso. In particolare i numeri ellittici, scegliendo opportunamente l'insieme degli indici, formano anche un campo completo secondo la definizione di Cantor (vedi paragrafo 2.2). Oggi per campo di Levi-Civita si intende il campo dei numeri generali di tipo ellittico con indici $v^{(r)}$ reali o razionali.

2.6 – Robinson e l'analisi non-standard

L'analisi non standard è una rifondazione dell'analisi matematica che si basa su un classe di campi non-archimedei detti *campi iperreali*. Il suo scopo è quello di recuperare l'impostazione originale del calcolo di Leibniz basata sul concetto di infinitesimo, inglobandolo calcolativamente. Fu introdotta nei primi anni '60 da Abraham Robinson [26], che in seguito pubblicò il fondamentale *Non-standard Analysis* (1966) [27]. Il lavoro di Robinson si basa sull'esistenza di modelli non-standard dell'aritmetica proposti già nel 1934 da Thoralf Skolem.

Un modello non standard M^* di una struttura M è un modello che soddisfa tutte le proprietà di M esprimibili con un linguaggio $\mathcal{L}$ del primo ordine (**Transfer principle** o **Principio di Leibniz**). Un campo che soddisfa il principio di transfer per i numeri reali si chiama **campo iperreale** ed è denotato da $\mathbb{R}^*$; esso estende propriamente $\mathbb{R}$ e dunque non è archimedeo.

Una notevole semplificazione dell'approccio originale di Robinson è stata fatta da Elias Zakon il quale ha sviluppato la teoria usando un approccio basato puramente sulla teoria degli insiemi. Zakon ha rimpiazzato la nozione di modello con la nozione di *sovrastruttura* $V(S)$ su un insieme S . In particolare, il principio di transfer, usando la mappa

$$* : V(\mathbb{R}) \rightarrow V(\mathbb{R}^*),$$

H sono ambedue limitati superiormente (numeri ellittici) o sono ambedue limitati inferiormente (numeri iperbolici). Se gli insiemi G ed H sono ambedue limitati superiormente (risp. inferiormente) allora anche L è limitato superiormente (risp. inferiormente) e dunque il prodotto di due numeri ellittici (risp. iperbolici) è ben definito ed è un numero ellittico (risp. iperbolico).

viene formulato come segue

$$P(a_1, \dots, a_n) \iff P(a_1^*, \dots, a_n^*)$$

ove P è una proposizione formulata in un opportuno linguaggio del primo ordine $\mathcal{L}$ e $a_1, \dots, a_n \in V(\mathbb{R})$ sono costanti.

Ciò significa che i numeri iperreali (e gli altri elementi “interni”⁽¹⁰⁾ di $V(\mathbb{R}^*)$) godono di tutte le proprietà dei reali esprimibili mediante $\mathcal{L}$. Dunque, i numeri iperreali costituiscono una classe di campi non archimedei che soddisfano il principio di transfer in base al quale si può operare con gli infinitesimi come con i numeri reali.

Il lettore interessato può trovare i dettagli di questa costruzione nell’ottimo libro di Keisler (1978 e 1982)[19].

Per concludere ricordiamo le seguenti parole di Robinson⁽¹¹⁾:

“Vediamo ora come in questo contesto sia possibile sviluppare un calcolo nel quale intervengono grandezze infinitesime (infinitamente piccole) e infinite (infinitamente grandi). Questo ci permetterà di riformulare molti risultati familiari della teoria classica delle funzioni in un linguaggio di infinitesimi come già venne vagamente prospettato da Leibniz. Il nostro metodo ci fornisce un’estensione propria dell’Analisi classica, sicché le proprietà standard di funzioni specifiche nel campo dei numeri reali (ad esempio la funzione esponenziale, le funzioni di Bessel ecc.) restano valide nell’analisi non-standard. Ma oltre a questo siamo ora in grado di arricchire il nostro vocabolario con l’impiego di nuovi concetti [...] che non trovano controparte nell’Analisi classica”.

2.7 – Conway e i numeri surreali

I numeri surreali costituiscono un campo non archimedeo che contiene in modo naturale i numeri ordinali. La definizione e la costruzione dei surreali sono dovute a John Horton Conway ([7], 1972), il quale li chiamò semplicemente *numeri* e li denotò col simbolo

No (che è una classe propria⁽¹²⁾). Il nome **numero surreale** fu introdotto da Donald Knuth nel 1974 [21]. Anche a Conway piacque questo nome ed in seguito lo adottò. Conway ha descritto i numeri surreali e li ha usati per analizzare i giochi nel suo celebre libro [8].

Qui daremo una rapida idea della loro costruzione mediante la loro “espansione in segni” (per i dettagli di questa costruzione rimandiamo a [18]). Secondo questa costruzione/definizione, un numero surreale consiste e si intende come una *fila* di “+” e di “–”. Per esempio, (+), (+ +), (+ + + – +), (– –), (– +) sono esempi di numeri surreali. In primo luogo esaminiamo la loro struttura d’ordine. Per confrontare due numeri surreali, li trasformiamo in due file della stessa lunghezza aggiungendo al più corto tanti zeri 0 quanti sono necessari, e successivamente li ordiniamo secondo l’ordine lessicografico, ordinando i singoli simboli nel seguente modo: $- < 0 < +$. Per esempio, i numeri definiti sopra vanno ordinati nel seguente modo:

$$(- -) < (- +) < (+) < (+ +) < (+ + + - +).$$

Naturalmente tra le file di numeri esistono anche la fila *nulla*, $\emptyset$, e soprattutto le file infinite. Per esempio una fila infinita può essere rappresentata nel seguente modo:

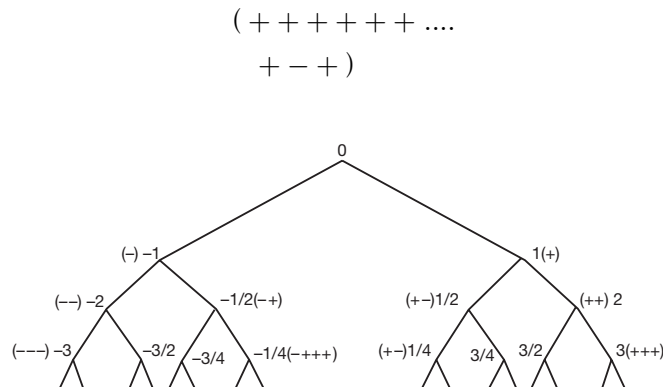


Figura 4. – Albero dei numeri surreali nati nei primi 4 giorni.

Questo numero consiste di una fila di ω “+” seguita da “+ - +” ovvero di $\omega + 3$ simboli. Dato un numero surreale x , la lunghezza della fila che lo rappresenta

⁽¹⁰⁾ Un elemento di $a \in V(\mathbb{R}^*)$ si dice *interno* se esiste $A \in V(\mathbb{R})$ tale che $a \in A^*$.

⁽¹¹⁾ Vedi [28] p. 291.

⁽¹²⁾ Nella teoria di Von Neumann-Bernays-Gödel, le classi sono gli oggetti fondamentali e gli insiemi vengono definiti come quelle classi che sono elementi di qualche altra classe.

è un numero ordinale che viene chiamato “data di nascita di x ” (in inglese *birthday*) ed è denotato dal simbolo $\beta(x)$.

Dunque, da un punto di vista tecnico, un numero surreale x è una funzione definita su un insieme ben ordinato di “lunghezza” $\beta(x)$ ed a valori in $\{+, -\}$.

Questi sono i numeri surreali. Ma come si rapportano alle altre classi note di numeri?

“ $\emptyset$ ” può certamente essere identificato con 0, “ $(+)$ ” con 1; “ $(++)$ ” con 2 ed una fila di n volte “ $+$ ” può essere identificata col numero n stesso. Dunque i numeri naturali possono essere identificati con un sottoinsieme di **No**. D’altro canto una fila di n volte “ $-$ ” rappresenterà il numero $-n$ e dunque tutti i numeri interi sono un sottoinsieme di **No**.

Dato un numero ordinale infinito α , cosa rappresenterà una fila di α volte “ $+$ ”? Ovviamente il numero α . Quindi possiamo dire che i numeri surreali contengono tutti gli ordinali e anche gli *ordinali negativi* (per esempio una fila omogenea di “ $-$ ”).

Fino a questo momento abbiamo analizzato le file omogenee di “ $+$ ” o “ $-$ ”. Cerchiamo adesso di capire quali numeri rappresentano le file non omogenee. Per esempio, il numero “ $+ -$ ” deve essere un numero maggiore di 0, ma minore di 1. L’intuizione ci suggerisce che questo numero debba essere “ $\frac{1}{2}$ ” ed infatti è la risposta giusta; più in generale, una successione di segni del tipo

$$(+ + + - +)$$

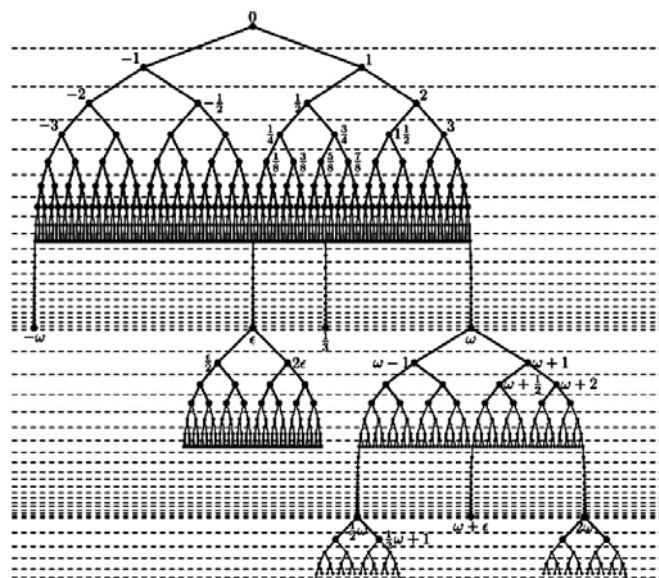


Figura 5. – Albero dei numeri surreali.

è identificata col numero

$$1 + 1 + 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{11}{4}.$$

Il lettore può facilmente intuire la regola generale e dimostrare che una successione finita di segni definisce un numero che ha una espansione binaria finita. Gli altri numeri reali sono definiti da una espansione in segni lunga ω . Ma non tutte le successioni lunghe ω definiscono un numero reale. Per esempio, il numero

$$\varepsilon := (+ - - - - - \dots)$$

non può essere identificato col numero

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{8} - \frac{1}{16} - \dots = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 0$$

in quanto, esso è maggiore di 0, ma essendo minore di qualunque numero reale è un infinitesimo e una più approfondita analisi mostra che $\varepsilon = 1/\omega$.

Per rendere rigorose queste affermazioni è necessario molto lavoro tecnico che esula dallo spirito di questo breve articolo. Ma è importante dire che tutto si basa su una proprietà fondamentale dei numeri surreali:

TEOREMA 2 (Conway's Simplicity Theorem). – Siano A e B due sottoinsiemi di **No** tali che

$$\forall a \in A \quad e \quad \forall b \in B, \quad a < b,$$

allora la classe

$$\Gamma(A, B) := \{x \mid \forall a \in A, \forall b \in B, \quad a < x < b\}$$

non è vuota e contiene un numero c tale che

$$\forall x \in \Gamma(A, B) \setminus \{c\}, \quad \beta(c) < \beta(x).$$

La “data di nascita” di un numero surreale può essere vista come una misura della sua *semplicità*. Dunque il teorema precedente può essere riformulato così “La classe $\Gamma(A, B)$ contiene un numero di massima semplicità” da cui deriva il nome del teorema.

Questo teorema permette di definire induttivamente le operazioni di campo e costruirvi sopra una teoria assai elegante.

3. – I numeri euclidei: una introduzione

In questa sezione, partendo dal paradosso della bisezione, introdurremo un campo non archimedeo che, a nostro avviso, rappresenta il continuo euclideo in modo più adeguato di quello che scaturisce dall'assioma di Dedekind. Questo campo è stato definito in [3], ove sono esposte e dimostrate le principali proprietà.

3.1 – Paradosso della bisezione del segmento

La Proposizione I, 1 degli *Elementi* di Euclide dice che dato un segmento AB , si può sempre costruire su di esso un triangolo equilatero (si applica il I e il III postulato).

Basandosi sulla precedente proposizione, si può risolvere il problema enunciato nella Proposizione I, 10 euclidea che dice “Dividere a metà un segmento dato”⁽¹³⁾. Sia allora D il punto di mezzo (graficamente, geometricamente costruito) del segmento AB . Asserendo, in base al postulato di Dedekind, che il punto D appartenga solo a una delle due parti, una di esse contiene insiemisticamente un punto in più dell'altra. Si potrebbe alternativamete asserire che il punto D non appartiene né alla prima né alla seconda parte ovvero che non appartiene a nessuna delle due classi di punti che esso separa (vedi in analogia circonferenza e poligoni regolari inscritti e circoscritti).

In questo modo la contraddizione verrebbe risolta, modificando però in qualche modo il postulato di Dedekind. Ma che punti sono quelli come D ? Sembrano essere punti “particolari”. Vediamo come risolvere questo paradosso. Cominciamo con introdurre la seguente:

DEFINIZIONE 3. – Chiameremo **atomo** di un segmento AB un punto $P \in AB$. Chiameremo **spa-**

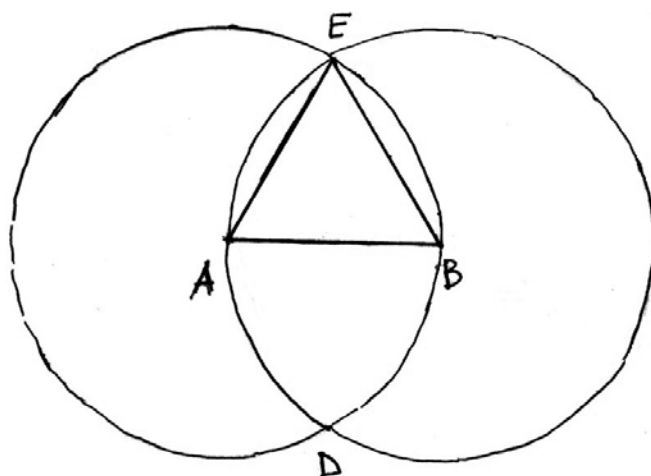


Figura 6. – Costruzione euclidea di un triangolo isoscele.

zio vuoto di AB un punto D tale che $AD \subset AB$, ma $D \notin AB$.

Dunque un segmento può essere descritto come un insieme di atomi, ma i suoi estremi sono spazi vuoti⁽¹⁴⁾. In base all'assioma di divisibilità, il punto D di bisezione (come i punti di trisezione ecc.) non appartiene ad AB . Pertanto, in questa impostazione, stabilita una opportuna assiomatica, un segmento è formato da infiniti atomi separati da infiniti spazi vuoti.

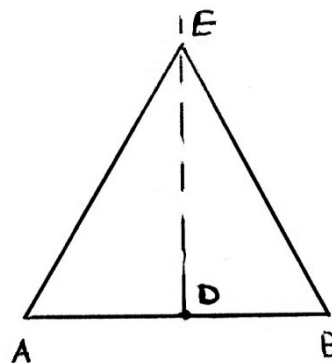


Figura 7. – Bisezione del segmento.

⁽¹³⁾ Sia AB , vedi Fig. 7, il segmento assegnato, in base alla precedente Prop. I,1 si costruisca sopra di esso un triangolo equilatero ABE . L'angolo $\angle AEB$ sarà diviso a metà dalla retta ED (grazie alla Prop. I, 9, relativa alla costruzione della bisettrice di un angolo assegnato). Diciamo allora che il punto D divide a metà il segmento AB . Infatti poiché $AE = BE$ per costruzione e (per la Prop. I, 9) abbiamo che $\angle EAD = \angle EBD$. Segue che i due triangoli EAD e EBD sono congruenti, per cui AD è congruente a DB .

Prima di studiare dove ci può portare questa nuovo punto di vista, dovremmo ripercorrere le tappe che hanno portato ai numeri reali come stru-

⁽¹⁴⁾ Come sarà chiaro nel seguito, i punti corrispondenti a numeri reali sono tutti spazi vuoti.

mento per la *misura* delle grandezze. Tra le conseguenze di questa impostazione si ha la necessità di introdurre la nozione fondamentale di *distanza*. Possiamo derivare questa nozione da quella di traslazione (sulla retta) che formalizza l'idea di movimento rigido della retta in se stessa. Ogni traslazione è caratterizzata da due punti X ed Y . Denoteremo con g_{XY} la traslazione che trasporta il punto X nel punto Y . Ciò detto, possiamo dare la seguente definizione:

DEFINIZIONE 4. – : *Due coppie di punti P, Q e A, B sono tra loro equidistanti se $g_{PQ} = g_{AB}$.*

In particolare se i punti A e B sono estremi di un segmento allora la distanza tra A e B coincide con la *lunghezza* del segmento. Ma esistono distanze che non si possono identificare con la lunghezza di alcun segmento come per esempio la distanza di un atomo dall'estremo del segmento che lo contiene. Pertanto, mentre le lunghezze formano un continuo alla Dedekind, non possiamo dire altrettanto delle distanze. Ogni lunghezza determina una distanza, ma non viceversa. Pertanto, se dotiamo anche le distanze ordinate, come già la lunghezze (orientate), di un'opportuna struttura naturale di campo ordinato, allora questo campo non può essere archimedeo.

3.2 – Alla ricerca del continuo euclideo

A questo punto si pone la questione seguente: poichè esistono infiniti campi ordinati contenenti $\mathbb{R}$, quali caratteristiche deve avere un tale campo per soddisfare le proprietà del continuo euclideo richieste sia dall'intuizione che dalle esigenze dello sviluppo della matematica? Se X è un insieme linearmente ordinato, quando possiamo dire che gli elementi di X formano un continuo? È possibile dare una definizione di continuo che da una parte eviti il “paradosso della bisezione” e dall'altra risulti più soddisfacente del continuo di Dedekind?

Cerchiamo di rispondere a queste domande. Nella nostra intuizione ingenua, si pensa ad un continuo come ad un insieme linearmente ordinato senza interruzioni, ovvero senza **fori** tra una parte e l'altra. Rendiamo questa definizione rigorosa. Contraria-

mente alla nostra intuizione, un insieme X che soddisfa la seguente proprietà

$$(5) \quad \forall a, b \in X, (a < b), \exists c \in X, a \leq c \leq b$$

non può essere considerato un continuo: questa nozione, soddisfatta ad esempio dall'insieme dei numeri razionali, non è un buon candidato per un continuo in quanto l'insieme dei razionali è pieno di **fori** rappresentati dai numeri irrazionali.

Comunque, da questo punto di vista anche il continuo di Dedekind non è (completamente) soddisfacente; infatti, seguendo la teoria sviluppata fino ad ora, abbiamo visto che le lunghezze formano un continuo alla Dedekind, ma ci sono distanze che non sono lunghezze. Così in un certo senso anche il continuo di Dedekind contiene **fori** rappresentati da tali distanze (ovvero dai punti in un segmento AB che contengono atomi). Inoltre, anche al di là dell'esempio delle distanze, esistono molte grandezze che non sono archimedee (gli angoli di congruenza, i germi di funzioni, la probabilità nei modelli in [14, 24, 5, 6], ecc.). Una buona teoria del continuo dovrebbe essere in grado di includere anche questi casi.

Pertanto siamo tentati di dare la seguente definizione che generalizza (5):

- un insieme linearmente ordinato X è un continuo se, dati due sottoinsiemi A e B tali che

$$\forall a \in A, \forall b \in B, a < b,$$

esiste $c \in X$ tale che

$$(6) \quad a < c < b.$$

Chiaramente questa definizione è incoerente in una teoria degli insiemi pura. Infatti, nessun insieme può soddisfarla: per esempio, si consideri una sezione di Dedekind (A, B) di X ; un punto $c \in X$ che soddisfa (6) non può esistere in quanto la disuguaglianza è stretta.

Una soluzione potrebbe essere quella di ricorrere alla teoria delle classi e imporre che il continuo euclideo, al pari dell'insieme dei numeri surreali, sia una classe. Ma questa soluzione risulta insoddisfacente perchè vorremmo che la retta euclidea fosse un insieme (di punti). Inoltre da un punto di vista tecnico risulta molto scomodo lavorare con le classi.

Possiamo risolvere questo problema arricchendo la teoria degli insiemi ZFC⁽¹⁵⁾ con l'assioma di inaccessibilità che descriveremo nel seguito.

DEFINIZIONE 5. – Un insieme E si dice **ordinario** se soddisfa **una** delle seguenti richieste:

- E è numerabile;
- $E = \mathcal{P}(F)$ ove F è un insieme ordinario;
- $E = \bigcup_{i \in I} F_i$ ove gli F_i , $i \in I$, e I sono insiemi ordinari;
- $E \subset F$ ove F è un insieme ordinario.

Come il lettore può facilmente intuire, gli insiemi usualmente utilizzati in matematica sono ordinari. Se un insieme non è ordinario si dice **inaccessibile**. Il nome deriva dal fatto che un tale insieme non può essere “raggiunto” mediante le usuali operazioni insiemistiche in ZFC partendo da insiemi numerabili.

L'esistenza di insiemi inaccessibili non può essere provata nè confutata all'interno di ZFC. Dunque è un assioma indipendente che si rivela indispensabile nella nostra costruzione del continuo Euclideo:

- **Assioma di inaccessibilità** - Esistono insiemi inaccessibili.

L'assioma di inaccessibilità è il più semplice esempio di “**assioma forte dell'infinito**” e, nelle moderne assiomatiche della teoria degli insiemi, viene comunemente aggiunto a ZFC.

Un **numero cardinale inaccessibile** è la cardinalità di un insieme inaccessibile. Denoteremo con Ω il più piccolo numero cardinale inaccessibile.

Adesso possiamo dare la definizione di continuo euclideo⁽¹⁶⁾.

DEFINIZIONE 6. – Un insieme linearmente ordinato X si dice Ω -saturato se soddisfa le se-

guenti richieste:

- per ogni coppia (A, B) di sottoinsiemi ordinari di X tali che

$$\forall a \in A, \forall b \in B, a < b,$$

esiste $c \in X$ tale che

$$\forall a \in A, \forall b \in B, a < c < b.$$

- la cardinalità di X è Ω .

Chiameremo “**continuo euclideo**” un insieme ordinato Ω -saturato. Infatti la nozione di insieme Ω -saturato si adatta assai bene alla nostra intuizione di retta euclidea: tra due insiemi (ordinari) di punti si trova sempre qualche altro punto. Per arrivare alla fine (ovvero non trovare più nulla) bisogna scavare moltissimo: ovvero un numero *inaccessibile* di volte. Dunque la retta stessa è un insieme che contiene un numero grandissimo (inaccessibile) di punti. Questa intuizione viene rafforzata e legittimata dal seguente risultato.

TEOREMA 7. – Esiste un unico campo reale chiuso che ha il tipo d'ordine del continuo euclideo.

Tale campo sarà chiamato campo dei **numeri euclidei** e sarà denotato con $\mathbb{E}$.

Prova. L'esistenza di un tale campo può essere provata facilmente usando il lemma di Zorn. L'unicità è molto più delicata; per una dimostrazione rimandiamo a [9] pag. 348. $\square$

Ricordiamo che un campo ordinato $\mathbb{F}$ si dice **reale chiuso** se la sua complessificazione $\mathbb{F} + i\mathbb{F}$ ($i = \sqrt{-1}$) è un campo algebricamente chiuso. La richiesta che $\mathbb{E}$ sia reale chiuso è naturale non solo dal punto di vista algebrico, ma anche dal punto di vista geometrico. Tale richiesta infatti implica che le operazioni con riga e compasso siano legittime non solo con le lunghezze (i numeri reali che formano un campo reale chiuso), ma anche con le distanze. In realtà affinché un campo sia reale chiuso si richiede molto di più, ovvero si richiede che un polinomio a coefficienti in $\mathbb{F}$ di grado dispari abbia almeno uno zero: richiesta più che legittima da un punto di vista geometrico.

⁽¹⁵⁾ Si indica con la sigla ZFC la teoria assiomatica degli insiemi di Zermelo-Fraenkel con l'aggiunta dell'assioma della scelta.

⁽¹⁶⁾ Nella letteratura della teoria degli insiemi il tipo d'ordine del continuo euclideo è denotato con η_Ω .

3.3 – Il campo dei numeri euclidei

Nel paragrafo precedente, abbiamo introdotto il campo $\mathbb{E}$ sostenendo che è un buon candidato per rappresentare la retta euclidea. In questo paragrafo esporremo alcune delle sue proprietà che rafforzano ulteriormente questo punto di vista.

È abbastanza naturale che una *distanza infinita* si possa ottenere addizionando infinite volte un segmento di una lunghezza fissa; parimenti si può pensare di ottenere una distanza infinitesima dimezzando infinite volte un dato segmento.

In realtà, i **numeri euclidei** possono essere definiti come somme **transfinite** di numeri reali che vengono indicizzati con un numero ordinale (vedi [3]), ovvero un numero euclideo ζ può essere rappresentato nel seguente modo:

$$\zeta = \sum_{k=0}^{\alpha} a_k$$

ove gli a_k , $k \leq \alpha$, sono numeri reali; gli indici k sono tutti i numeri ordinali strettamente minori di α ed α è un numero ordinale di cardinalità strettamente minore del primo inaccessibile Ω .

Se α è un ordinale infinito, allora addizionando α volte 1 si ottiene una lunghezza infinita che possiamo identificare con lo stesso numero ordinale α proprio come nella semiretta reale positiva si possono identificare i multipli di un segmento unitario con i numeri naturali. Dunque ricordando il modello di Fano, possiamo rappresentare alcuni numeri euclidei mediante la figura 8.

Come si vede sulla retta di Fano si possono rappresentare tutti gli ordinali, ma anche numeri interi che non sono ordinali quali ad esempio $\omega - 1$, $3\omega - 5$, $-\omega$, ecc. Però la retta di Fano de-

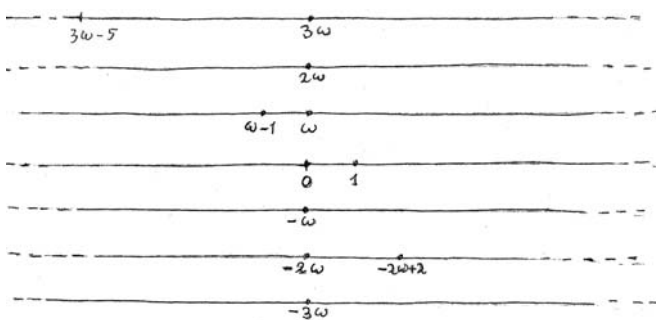


Figura 8. – Una rappresentazione dei numeri euclidei.

scrive assai impropriamente i numeri euclidei in quanto non vengono rappresentate le rette che contengono punti quali $\omega/2$, $\sqrt{\omega}$, ecc. che ovviamente sono comprese (insieme ad infinite altre) tra la retta contenente lo 0 e quella contenente ω .

Vediamo adesso come può essere rappresentato un numero infinitesimo: il numero

$$\varepsilon := 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \dots - \frac{1}{2^k} \dots = 1 - \sum_{k \in \mathbb{N}} a_k$$

è infinitesimo. Le somme transfinite di numeri euclidei sono governate da regole che permettono di eseguire alcuni calcoli come con i numeri reali. Per esempio il numero ε può essere scritto nel seguente modo

$$\varepsilon = \frac{1}{2^\omega}.$$

In realtà questo tipo di calcoli può essere fatto perchè i numeri euclidei formano un campo iper-reale, anzi essi sono isomorfi all'unico campo iper-reale saturato⁽¹⁷⁾ di cardinalità Ω (vedi Keisler [19], pag. 195).

Comunque, anche se i numeri euclidei, in quanto campo iperreale, possono essere identificati col campo di Keisler, essi si distinguono da quest'ultimo perchè hanno una struttura in più che permette di addizionare un qualunque numero transfinito di numeri euclidei. Questa struttura, che è alla base della loro definizione, arricchisce notevolmente questo campo: per esempio, come abbiamo visto, permette di identificare i numeri ordinali accessibili con un loro sottoinsieme.

4. – Conclusioni

L'approccio al continuo non-archimedeo sembra fornire un vero arricchimento teorico anche, ovviamente, in questioni di matematica elementare. Non è un caso che lo stesso Enriques ne parli

⁽¹⁷⁾ La definizione di saturazione va al di là dello scopo di questo articolo divulgativo. Il lettore interessato può trovare una chiara esposizione di questi concetti nel libro di Keisler [19].

nella parte conclusiva dei *Principes de la Géométrie* (1907) e nel III volume di *Questioni riguardanti le Matematiche Elementari*, [14], ed. 1923, da p. 364 a p. 389, dedicando la parte quarta del suo ampio articolo sui numeri al tema “I numeri non archimedei e la generalizzazione del continuo numerico”. Se vogliamo, potremmo dire che tutto nasce dall’incommensurabilità lato diagonale del quadrato di pitagorica memoria. Non si può altresì non rammentare l’interpretazione enriquesiana del “punto” dei Pitagorici come un “bastardo infinitesimo attuale”. Anche dal punto di vista della ricerca pura ed applicata sembra che la matematica non archimedeica presenti notevoli potenzialità (vedi ad es. [1, 2, 5, 6, 10, 4] ecc.). Nonostante ciò, la matematica non archimedeica è ignorata dai più e guardata con diffidenza. E spesso viene identificata con l’analisi non standard che, come si è visto in questo articolo, è solo una parte, seppur importante, dell’universo non archimedeo. Storicamente, tra fine Ottocento e primo Novecento, a partire dai lavori di Paul Du Bois-Reymond e di Giuseppe Veronese, si attivò un vivace dibattito che vide come oppositori ad esempio Peano e Russell e come fautori ad esempio Enriques. Si giunse in effetti alla “sconfitta” – se vogliamo dire – delle posizioni non-archimedeiche. Le motivazioni sono culturalmente complesse e ci sembra che Ehrlich abbia cominciato a metterle in luce (vedi [12]). Dopo gli anni sessanta ha suscitato un certo interesse l’analisi non standard di Robinson, che, come filosofia, assomiglia più al calcolo leibniziano che alle idee di Du Bois-Reymond, Veronese e Levi-Civita. Ma anche in questo caso viene coinvolta una nicchia molto ristretta di matematici. Tuttavia noi pensiamo che l’approccio non archimedeo in futuro possa avere più utilizzazioni di quanto comunemente si pensi, sia in sede fondazionale che applicativa.

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

- [1] ALBEVERIO S., FENSTAD J. E., HOEGH-KROHN R., LINDSTROM T., *Nonstandard Methods in Stochastic Analysis and Mathematical Physics*, Dover Books on Mathematics, (2006).
- [2] BENCI V., *Ultrafunctions and generalized solutions*, in: Adv. Nonlinear Stud. 13, (2013), 461–486, arXiv:1206.2257.

- [3] BENCI V., FORTI M., *The Euclidean numbers*, in preparazione.
- [4] BENCI V., LUPERI BAGLINI L., *Ultrafunctions and applications*, Discrete and Continuous Dynamical Systems, series S, Vol. 7, No. 4, (2014), arXiv:1405.4152.
- [5] BENCI V., HORSTEN H., WENMACKERS S., *Non-Archimedean probability*, Milan J. Math., (2012), arXiv:1106.1524.
- [6] BENCI V., HORSTEN H., WENMACKERS S., *Infinitesimal Probabilities*, Brit. J. Phil. Sci. (2016), to appear.
- [7] CONWAY J. H., *All numbers, great and small*. The Univ. of Calgary Math. Research Paper # 149, February, 1972.
- [8] CONWAY J. H., *On Numbers And Games*, 2nd ed., 2001, ISBN 1-56881-127-6.
- [9] CHANG C.C., KEISLER H. J., *Model Theory*, Dover Books on Mathematics.
- [10] CUTLAND N., *Nonstandard Measure Theory and its Applications*, Bulletin of the London Mathematical Society, 15, (1983), pp. 529–89.
- [11] DU BOIS-REYMOND P., *Über die Paradoxen des Infinitär-Calculs*, Math. Annalen 11, (1877), 150–167.
- [12] EHRLICH PH., *The Rise of non-Archimedean Mathematics and the Roots of a Misconception I: The Emergence of non-Archimedean Systems of Magnitudes*, Arch. Hist. Exact Sci. 60, (2006), 1–121.
- [13] EHRLICH PH., *The absolute arithmetic continuum and the unification of all numbers great and small*, The Bulletin of Symbolic Logic, Volume 18, Number 1, (2012).
- [14] ENRIQUES F. (a cura di), *Questioni riguardanti le Matematiche Elementari, raccolte e coordinate da Federico Enriques*, Parte prima, vol. I, terza edizione, Nicola Zanichelli editore, Bologna, 1923.
- [15] EUCLID, *The Elements*, T.L. Heath (translator), 2nd edition (reprint), Dover, New York, 1956.
- [16] FANO G., *Geometrie non euclidee e non archimedeiche*, in *Enc. delle Mat. Elem. e Compl.* (a cura di Berzolari L., Vivanti G., Gigli D.), vol. II, parte II, Editore U. Hoepli, Milano, 1950 (ristampa).
- [17] FREGUGLIA P., GIAQUINTA M., *The Early Period of the Calculus of Variations*, Springer, 2016.
- [18] HARRY GONSHOR, *An Introduction to the Theory of Surreal Numbers*, 1986, ISBN 0-521-31205-1.
- [19] KEISLER H. J., *Foundations of Infinitesimal Calculus*, Prindle, Weber & Schmidt, Boston, (1976). [This book is now freely downloadable at: <http://www.math.wisc.edu/~keisler/foundations.html>]
- [20] KEISLER H. J., *Elementi di Analisi Matematica* (trad. ital. e curatela di Ferro R., Dambin G., Colussi L., Facchini A., Le Donne A.), voll. 1 e 2, Piccin Editore, 1982.
- [21] KNUTH D. E., *Surreal Numbers: How Two Ex-Students Turned on to Pure Mathematics and Found Total Happiness*, 1974, ISBN 0-201-03812-9.
- [22] LEVI-CIVITA T., *Sugli infiniti ed infinitesimi attuali quali elementi analitici*, Atti del R. Istituto Veneto di Scienze Lettere ed Arti, Venezia (Serie 7), (1892–93), 1765–1815. ripubblicato in: Opere, v. 1, p. 1–39.
- [23] HILBERT D., *Grundlagen der Geometrie*, Festschrift zur Feier der Enthüllung des Gauss-Weber Denkmals in Göttingen, Teubner, Leipzig, (1899).
- [24] NELSON E., *Radically Elementary Probability Theory*, Princeton, NJ: Princeton University Press, (1987).
- [25] PROCLO L. D., *Commento al I libro degli Elementi di Euclide*, a cura di M. Timpanaro Cardini, Pisa 1978.

- [26] ROBINSON A., *Non-standard Analysis*, Proceedings of the Royal Academy of Sciences, Amsterdam (Series A) **64**, (1961), 432–440.
- [27] ROBINSON A., *Non-standard Analysis*, Princeton University Press, (1966), ISBN 0-691-04490-2.
- [28] ROBINSON A., *Introduzione alla teoria dei modelli e alla matematica dell'algebra* (trad.ital. di Bozzi S.) Editore Boringhieri, Torino, 1974.
- [29] VERONESE G., *Il continuo rettilineo e l'assioma V di Archimede*, Memorie della Reale Accademia dei Lincei, Atti della Classe di scienze naturali, fisiche e matematiche **4**, (1889), 603–624.
- [30] VERONESE G., *La superficie omaloide normale a due dimensioni e del quarto ordine dello spazio a cinque dimensioni e le sue proiezioni nel piano e nello spazio ordinario*, in Memorie R. Accad. Lincei, **19**, 1883–84.
- [31] VERONESE G., *Fondamenti di geometria, a più dimensioni e a più specie di unità rettilinee, esposti in forma elementare*. Lezioni per la Scuola di Magistero in Matematica, Tipografia del Seminario, Padova 1891.
- [32] VERONESE G., *Intorno ad alcune osservazioni sui segmenti infiniti o infinitesimi attuali*, Mathematische Annalen **47**, (1896), 423–432.



Vieri Benci

È docente di Analisi matematica all'Università di Pisa. Dopo essere stato direttore del Centro Interdipartimentale per lo Studio dei Sistemi Complessi dal 1998 al 2004 e del Dipartimento di Matematica applicata dell'Università di Pisa dal 2004 al 2007, ha ricevuto nel 2009 il Premio "Wanda e Luigi Amerio" da parte dell'Istituto Lombardo Accademia di Scienze e Lettere. Autore di più di 200 articoli su riviste nazionali e internazionali, i suoi più recenti interessi di ricerca riguardano l'Analisi non standard e lo studio della dinamiche delle onde solitarie.



Paolo Freguglia

Docente di Storia della matematica e Matematiche complementari all'Università di L'Aquila. Attualmente Presidente della Società Italiana di Storia della Matematica. I suoi studi e le sue ricerche riguardano la storia della matematica nel Cinquecento, nel Settecento e nell'Otto-Novecento e la modellistica matematica in biologia e nella fisica degli acceleratori. Ha all'attivo circa 150 pubblicazioni scientifiche (tra cui 11 volumi monografici editi da Bollati Boringhieri, Editori Riuniti, Feltrinelli, Springer, Birkhäuser).