
Matematica, Cultura e Società

RIVISTA DELL'UNIONE MATEMATICA ITALIANA

PAOLO BUSSOTTI

La concezione dell'infinito in Federico Enriques

Matematica, Cultura e Società. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. 1
(2016), n.1, p. 65–86.

Unione Matematica Italiana

[<http://www.bdim.eu/item?id=RUMI_2016_1_1_1_65_0>](http://www.bdim.eu/item?id=RUMI_2016_1_1_1_65_0)

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)*

SIMAI & UMI

<http://www.bdim.eu/>

La concezione dell'infinito in Federico Enriques

PAOLO BUSSOTTI

Università di Udine

E-mail: paolobussotti66@gmail.com

Sommario: *In questo contributo viene preso in esame il modo in cui Federico Enriques considerò l'infinito e l'infinitesimo in matematica. Se, quanto all'infinito e all'infinitesimo nella forma potenziale, le considerazioni di Enriques rivestono un notevole interesse, è però soprattutto riguardo all'infinito e infinitesimo attuale che le concezioni del matematico livornese risultano particolarmente originali. Può sembrare infatti strano che Enriques accetti entità come gli ordinali transfiniti di Cantor, le cardinalità come quella del numerabile e del continuo, i numeri infiniti e infinitesimi di Veronese, ma rifiuti legittimità a concetti come quello cantoriano di $\aleph_1$, o a proposizioni come l'assioma di scelta di Zermelo. Cercherò di mostrare come il rifiuto di un certo uso dell'infinito attuale sia una delle chiavi di volta per comprendere la concezione che della matematica aveva Enriques. Non solo: ripercorrendo le tappe di questo tipo di argomentazione enriquesiana è anche possibile entrare nei meandri del suo pensiero, giungendo a comprendere in quale senso matematica, gnoseologia, storia della filosofia e della scienza fossero connesse nella sua mente. Il tema dell'infinito e infinitesimo attuale è quindi una buona lente prospettica per affrontare molti topoi della speculazione di Enriques. Quasi tutto questo articolo sarà dunque dedicato a tale problema. Nella parte conclusiva ho aggiunto anche una sezione sull'infinito e l'infinitesimo potenziale perché si può con ciò offrire una spiegazione di come Enriques interpretò la nascita della geometria e della stessa filosofia.*

Abstract: *In this paper, I deal with Enriques' concept of mathematical infinity and infinitesimal. As to infinity and infinitesimal in their potential form, Enriques' considerations are remarkable. Nevertheless, his conceptions are particularly original as far as the actual infinity and infinitesimal are concerned. Enriques accepts entities as Cantor's transfinite ordinal numbers, cardinalities as those of the denumerable and the continuum, Veronese's infinite and infinitesimal numbers, but refuses concepts as Cantor's $\aleph_1$, or propositions as Zermelo's axiom of choice. This might appear strange, but, in fact, I will try to show the refusal of a certain use of actual infinity is one of the keys to fully understand Enriques' conception of mathematics. Not only: the steps of this argumentation by Enriques will enable us to enter his thought, till reaching a full comprehension of the reason why mathematics, gnoseology, history of philosophy and science were strictly interconnected in his way of thinking. Thence, the theme of the actual infinity and infinitesimal is a good perspective lens to face several topoi of Enriques' speculation. Almost the whole paper is, thus, dedicated to this problem. However, in the conclusive part, I have added a section on potential infinity and infinitesimal because an explanation of how Enriques interpreted the birth of geometry and of philosophy itself can be offered by addressing these concepts.*

1. – Introduzione: la figura di Federico Enriques

È complesso inquadrare la figura di Federico Enriques (1871-1946) così come lo è fornire una valutazione generale della sua attività culturale non identificabile con i contributi alla matematica avanzata. Che infatti Enriques sia stato uno dei più

grandi matematici della sua epoca è opinione condivisa. Come noto, le sue ricerche di geometria algebrica rappresentarono alcune tra le acquisizioni più significative in questo settore tra '800 e '900. Tuttavia, in una valutazione più ampia del lavoro enriquesiano e delle sue concezioni nonché dei suoi contributi alla cultura italiana ed europea, non è in alcun modo possibile limitarsi ai suoi risultati nella ricerca matematica:

1) Enriques cominciò a interessarsi della psico-genesi dei postulati della geometria già a partire

Accettato: il 15 marzo 2016.

dall'inizio del XX secolo, da qui poi ampliò i suoi interessi filosofico-gnoseologici fino a spostare l'indagine sull'origine stessa della filosofia, la natura della conoscenza umana e il valore della scienza – in questo fondamentale settore di ricerca, giunse a formulazioni originali, allontanandosi tanto da un concezione platonico-realistica, quanto da Kant, dal positivismo, dal convenzionalismo, dal pragmatismo e dall'empiriocriticismo. Opere come *Problemi della scienza* (1906), *Per la storia della logica* (1922), *La teoria della conoscenza da Kant ai giorni nostri* (1937) – solo per citare i lavori più importanti – sono autentici classici. Ma spunti e idee altrettanto interessanti sono presenti nei numerosissimi articoli che Enriques scrisse su riviste di taglio diverso quali la *Revue de Métaphysique et de Morale*, *Rivista di Scienza – Scientia*, il *Periodico di matematiche* e così via. Alcune sue idee sono da leggere anche all'interno di filoni di ricerca connessi, per alcuni aspetti, con la psicologia sperimentale e l'evoluzione di quelle che potremmo, con termine moderno, chiamare “neuroscienze”, per altri aspetti con le particolari interpretazioni che Zeuthen e Tannery offrirono di certi temi della filosofia preplatonica. Sono, ovviamente anche presenti e molto influenti, le concezioni derivanti dallo sviluppo della scienza moderna. Nel corso dell'articolo esamineremo alcuni dei *topoi* enriquesiani⁽¹⁾.

⁽¹⁾ Per una biografia scientifica di Enriques, si veda: Israel, 1993; Bottazzini, 2001; Nastasi, 2010. Un lavoro molto informativo sugli anni che Enriques trascorse a Bologna è Ciliberto C.-Gario, 2012. Molte informazioni su Enriques possono essere trovate al sito della Edizione Nazionale per la Pubblicazione delle Opere di Federigo Enriques: <http://enriques.mat.uniroma2.it/>. In questo sito c'è anche una sezione in cui sono riportati, ordinati per anno, i titoli di tutte le opere di Enriques, così come una sezione contenente i titoli di numerosi lavori dedicati al matematico livornese.

Quanto alla gnoseologia e filosofia enriquesiana, senza alcuna pretesa di esaustività, menziono la seguente letteratura: Badaloni, 1982; Bussotti, 2004; Bussotti, 2006; Bussotti-Pisano, 2015; Castellana, 1982; Castellana, 2004a; Castellana, 2004b; Cenci, 1984; Ciliberto M., 1982; Geymonat, 1989; Israel, 1998; Lolli, 1998; Parrini, 1999; Polizzi, 1982; Pompeo Faracovi, 1982; Pompeo Faracovi, 1983; Pompeo Faracovi, 1998; Sava, 2004; Simili, 1987; Stöltzner, 1998; Toscano, 2007; Toth, 2004; Witkowski, 1986.

Su Enriques come storico della scienza, si veda: Bettica-Giovannini, 1989; D'Agostino, 1988; Freguglia, 1998; Galuzzi,

2) Fin dal 1898 Enriques si interessò di didattica della matematica⁽²⁾. Risale a quell'anno la pubblicazione della prima edizione delle sue *Lezioni di geometria proiettiva*. La didattica della matematica in Enriques ha però una valenza parecchio diversa da quella attribuita oggi a questa espressione: essa era sempre collegata a questioni fondazionali e storico-matematiche. Enriques fu responsabile delle voci matematiche dell'*Enciclopedia Italiana*⁽³⁾. Bene, in molte voci, riferendosi ai fondamenti della geometria, egli cita i propri *Elementi di geometria*, scritti per i licei, insieme a Ugo Amaldi, nel 1903 (Enriques-Amaldi, 1903). Quindi, per alcuni aspetti, un'opera che andava sui banchi scolastici di ragazzi dai 15 ai 18 anni affrontava un ordine di problemi ritenuti come fondazionali da un matematico quale Enriques. Né egli si limitò a citare i suoi *Elementi*, anche gli omonimi lavori di De Paolis, Veronese-Gazzaniga e Faifofer sono menzionati come opere fondazionali⁽⁴⁾. Riguardo al collegamento tra storia e didattica della matematica le monumentali *Questioni riguardanti la geometria elementare* (Enri-

1984; Galuzzi, 1998; Metzger, 1935, 2004; A Rossi, 2004; P. Rossi, 1989; Sava, 2004. Un volume dedicato specificamente alla storia della scienza in Enriques è Castellana-Rossi A. (curatori), (vedi Enriques, 1936, 2004). Riguardo a questo testo, ricordiamo che *Il significato della storia del pensiero scientifico* di Enriques fu inizialmente pubblicato in francese 1934.

⁽²⁾ Per quanto riguarda la letteratura su Enriques e la didattica della matematica, anche in collegamento a più generali problemi di educazione matematica a cavallo tra XIX e XX secolo, menziono: Bolondi, 2005; Borgato, 2006; Bussotti, 2012a; Bussotti 2012b; Bussotti, 2013; Giacardi, 2006a; Giacardi, 2006b; Giacardi, 2010; Giacardi, 2012; Morretti, 2003; Pepe, 2006; Tomasi, 1982. Cospicue indicazioni bibliografiche su questo temi sono reperibili in Bussotti, 2013; Giacardi 2006a; Giacardi, 2012.

⁽³⁾ Su Enriques e le voci matematiche dell'*Enciclopedia Italiana*, si veda Bolondi, 1998.

⁽⁴⁾ In Enriques 1907, 1911, 1966, III (*Principes de la géométrie*), importante lavoro storico-fondazionale, solo per menzionare risultati fondazionali esposti nei manuali di geometria per le scuole superiori, ricordo al lettore che Enriques cita: gli *Elementi di geometria* di Veronese-Gazzaniga alle pp. 7, 19, 25, 27; gli *Elementi di geometria* di Enriques-Amaldi alle pp. 24, 25, 53; gli *Elementi di geometria* di Faifofer alla p. 51; gli *Elementi di geometria* di De Paolis alla p. 52 e gli *Elementi di geometria proiettiva ad uso degli istituti tecnici* di Luigi Cremona alla p. 86.

ques, 1900) – e le due successive edizioni intitolate *Questioni riguardanti le matematiche elementari* (rispettivamente Enriques 1912-14 e Enriques 1924-27, 1983) –, opera collettanea di cui Enriques fu il curatore, sono una evidente cartina di tornasole – e non sono l'unica – del rapporto che egli vedeva tra storia della matematica ed educazione matematica. Dal momento che l'analisi dei fondamenti della matematica è un aspetto della disciplina che riguarda la ricerca avanzata, si comprende bene l'affermazione di Enriques – espressa chiaramente, tra le altre opere, in *Insegnamento dinamico* (Enriques 1921, 2003) – secondo cui la separazione tra ricerca avanzata, questioni fondazionali, storia della disciplina e didattica sia, in qualche modo, artificiosa, anche se non assurda.

In questa rapidissima e inevitabilmente lacunosa esposizione delle tematiche enriquesiane, ho tralasciato la personalità di Enriques, i suoi impegni culturali e istituzionali che complicherebbero forse inutilmente il già complesso quadro concernente il tema dell'infinito. Le difficoltà di una interpretazione soddisfacente del pensiero enriquesiano derivano anzitutto dalle competenze richieste all'interprete. Dal momento che in Enriques le varie “regioni” del suo pensiero sono collegate in maniera stretta, è necessario: a) essere almeno in grado di capire l'impostazione che egli dette alla ricerca avanzata in geometria algebrica; b) conoscere la geometria proiettiva e le questioni attinenti ai fondamenti della matematica – quelle maggiormente legate alla teoria degli insiemi e allo sviluppo della logica matematica così come quelle derivanti dall'assiomatica astratta –, c) essere al corrente del dibattito filosofico di fine Ottocento-inizio Novecento connesso al problema della conoscenza, d) conoscere almeno gli aspetti fondamentali delle teorie fisiche moderne e contemporanee (meccanica di Newton, elettromagnetismo, relatività e meccanica quantistica) di cui spesso Enriques si occupa; e) avere buone nozioni di storia della matematica; f) conoscere la filosofia greca e la critica tardo-ottocentesca sull'argomento. Questo il ventaglio di conoscenze necessarie o, almeno, auspicabili. Se a ciò aggiungiamo il particolare stile con cui Enriques espone le proprie idee non strettamente matematiche, il quadro si complica ulteriormente. Se infatti si leggono lavori – solo per fare un esempio – quali *Scienza e razionalismo*

o *Per la storia della logica* oppure *La teoria della conoscenza da Kant ai giorni nostri* si può avere, a una prima impressione, l'idea di leggere testi il cui valore è di poco superiore a quello di un ordinario buon manuale di filosofia. Si può, quindi, restare molto delusi. È solo leggendo questi testi più di una volta che se ne può apprezzare il loro grandissimo valore filosofico, si condivide o meno quel che Enriques sostiene. Dunque grandi difficoltà interpretative, tanto che è difficile pensare che un solo specialista possa offrire un quadro completo del pensiero enriquesiano: sarebbe necessario un lavoro organico, che vada bel al di là di una raccolta di articoli, ma scritto almeno da due o tre specialisti.

Da alcuni anni ho avviato una ricerca su Enriques i cui frutti sono stati varie pubblicazioni attinenti soprattutto al ruolo della geometria all'interno della gnoseologia enriquesiana, al concetto di metodo e di rigore in Enriques, al rapporto tra intuizione e rigore e tra intuizione e logica, alle relazioni tra didattica della matematica e storia della matematica, a temi specifici di didattica della matematica⁽⁵⁾. Sulla concezione dell'infinito in Enriques c'è pochissimo materiale disponibile nella letteratura, invece è un tema importante. Il matematico livornese – come vedremo – intreccia infatti molte volte le sue vedute relative allo sviluppo della matematica, e soprattutto dell'analisi infinitesimale, con il modo in cui l'infinito è stato considerato dai matematici. Qui siamo comunque, ancora nel campo dell'infinito potenziale. L'aspetto veramente interessante è che getta una luce intensa su tutto il modo di pensare di Enriques è la maniera in cui egli considera l'uso dell'infinito e dell'infinitesimo attuale. Teoria degli insiemi, numeri e geometrie non archimedee, soprattutto, ma anche altre branche della matematica. La legittimità di un certo uso dell'infinito attuale e l'illegittimità di un altro tipo di uso rappresentano gli aspetti più significativi ed innovativi di come Enriques si pone di fronte alla questione dell'infinito. È quindi da questi che partiremo, per poi toccare tutti gli altri.

⁽⁵⁾ I miei lavori su Enriques sono menzionati alla note 1 e 2, suddivisi secondo gli argomenti di cui in quelle note si fornisce la bibliografia. Qui aggiungo Bussotti, 2008, ove faccio un confronto tra la concezione della matematica di Enriques e quella di Hilbert.

Vedremo la stretta relazione che c'è in Enriques tra un problema ampio, ma specifico, come quello dell'infinito matematico e le sue concezioni generali sul modo di fare matematica e sulla natura della conoscenza umana.

Questo articolo, oltre al presente quadro generale, è diviso in altre tre sezioni, nella prima (numero 2) delle quali viene considerata la concezione che Enriques aveva dell'infinito attuale e le ragioni che lo indussero a formulare le proprie idee. Nella sezione 3 parlerò del problema dell'infinitesimo; nella sezione 4 verrà analizzato il ruolo attribuito da Enriques all'infinito nella sua forma potenziale entro la storia della matematica. Le sezioni 2 e 4 presentano sottosezioni. Seguiranno le conclusioni.

2. – Enriques e l'infinito attuale

Il tema dell'infinito attuale in Enriques è soprattutto legato all'interpretazione che il matematico livornese dette della teoria degli insiemi – quindi dei numeri ordinali e cardinali transfiniti di Cantor –, dei suoi paradossi e dell'assioma di scelta di Zermelo. Questa interpretazione non riguarda solo lo specifico tema dell'infinito, ma si collega a tutta la concezione che Enriques ebbe del rapporto tra intuizione, assiomatizzazione, logica matematica e matematica. La posta in gioco era alta: comprendere quali operazioni fosse legittimo ammettere nella costruzione di nuovi enti matematici. Si tratta di un tema di vecchia data, già presente agli inizi dell'analisi infinitesimale, ma che giunse a toccare, tra fine XIX-inizio XX secolo, il modo stesso di impostare l'intera ricerca matematica. A questo riguardo, è noto che ci furono una pluralità di concezioni, le cui due estreme sono il formalismo di Hilbert e l'intuizionismo di Brouwer. Enriques declinò la tematica in maniera assai originale.

2.1 – L'infinito attuale “illegittimo”

Occorre distinguere tra enti attualmente infiniti illegittimi e operazioni infinitarie illegittime. Riguardo al primo aspetto Enriques menziona le classi proprie che hanno dato luogo ai paradossi della teoria degli insiemi (insieme di tutti gli insiemi e

insieme associato al più grande numero ordinale transfinito – cosiddetto paradosso di Burali Forti) e il paradosso di Russell. Fin qui nessuna novità: si tratta di *classici paradossi della teoria degli insiemi* derivanti dall'accettare il principio di comprensione senza limitazioni. Caso mai possono essere interessanti le ragioni che Enriques adduce riguardo alla nascita di questi paradossi. La questione diventa però decisamente più intrigante quando egli scrive che neppure l' $\aleph_1$ *cantoriano* è un ente legittimo e, passando dagli enti alle operazioni, afferma che l'*assioma di scelta di Zermelo* non è accettabile. Sono argomenti che ricorrono spesso nel pensiero enriquesiano. Leggiamo infatti:

Il tentativo di superare il campo delle matematiche così determinato in rapporto alla possibilità effettiva della costruzione mentale [le matematiche in cui si ricorre al solo infinito potenziale] ha condotto *Giorgio Cantor* a porre come dati alcuni concetti che gli spiriti critici non possono ritenere in alcun modo definiti; tale per esempio il numero *alef-uno* che corrisponde al concetto della *totalità delle serie numerabili*. La debolezza della posizione di quei pochi matematici [...] che considerano legittimamente dati siffatti concetti, si rivela nei cosiddetti *paradossi della teoria degli insiemi* [...]. Questi paradossi sono sufficienti a rifiutare l'ammissione dell'esistenza logica basata sulla definizione verbale di una totalità, in cui non può essere costruito nel pensiero il termine generale⁽⁶⁾.

Nella stessa opera Enriques, dopo aver sottolineato i limiti di una concezione empirista della matematica, scrive:

[...] ma per contro il modo di vedere degli “idealisti” lascia posto a processi di definizione trascendenti e quindi conduce a inestricabili oscurità e contraddizioni (come sono i paradossi di *Russell* e di *Burali-Forti*) e a pseudo-dimostrazioni, come quella di *Zermelo* [*sic!* Chiaramente Zermelo] sulla possibilità di ben ordinare il continuo (*Ivi*, pp. 113-114, corsivi nel testo).

Già in *Problemi della scienza* Enriques aveva sottolineato come la considerazione di certe totalità di infiniti enti (qui riferisce il paradosso di Russell) possa portare a contraddizioni se il processo di definizione è trascendente (Enriques 1906, 1909, 1926, 1985, p. 15).

⁽⁶⁾ Enriques 1912, 1990, pp. 75-76. Corsivi nel testo.

Tuttavia, il lavoro in cui Enriques espone più chiaramente le proprie concezioni, specialmente in riferimento all'assioma di Zermelo, è il lungo contributo *I numeri reali*. Quest'opera, originariamente pubblicata nel 1911 con il titolo *I numeri e l'infinito* fu riproposta, in una forma molto ampliata nel 1912 col titolo *I numeri reali nelle Questioni riguardanti le matematiche elementari*. Nell'edizione 1924-27 delle *Questioni*, troviamo la sua versione definitiva, a cui ci riferiremo. Enriques parla dell'assioma di scelta in due paragrafi, il 13, intitolato *Classi finite e infinite*, e il 17, dal titolo *Il principio d'induzione matematica e i numeri transfiniti*. Nel paragrafo 13, quando si tratta in sostanza, di provare che ogni insieme infinito ha un sottoinsieme numerabile, Enriques scrive riguardo alla dimostrazione, eseguita tramite l'assioma di scelta:

Tuttavia questa deduzione contiene un *punto delicato*: infatti essa suppone la possibilità di compiere entro C , non solo un numero grande di scelte, ma anche un *numero infinito di scelte arbitrarie*. Questa possibilità trascende le facoltà del pensiero umano, a meno che non si possa fissare una *regola che determini a priori le scelte successive, dipendentemente da un numero finito di operazioni*. [...] È chiaro che per le classi soddisfacenti al postulato di Zermelo la possibilità di stabilire una corrispondenza biunivoca tra una classe ed una sua parte propria appartiene a tutte le classi infinite, e costituisce quindi un carattere distintivo tra le classi infinite e le classi finite. Ma non bisogna farsi illusione sul valore del postulato di Zermelo e sulle conseguenze che si ha il diritto di trarne! Un postulato esprime sempre e soltanto una condizione eventualmente restrittiva per la definizione degli enti che vi si sottopongono: perciò non si ha il diritto di applicare *a priori* il postulato di Zermelo a classi che siano state indipendentemente definite, per es. alla classe costituita dai punti di un segmento (Enriques 1924-27b, 1983, parte prima, tomo primo, pp. 256-257. Corsivi nel testo).

Nel paragrafo 17, Enriques parla di uno dei classici problemi della teoria degli insiemi: la possibilità di dimostrare che il continuo è ben ordinabile. Menziona la prova fornita da Zermelo tramite l'assioma di scelta e scrive in proposito:

Or dunque nello stato attuale della questione [...] rimane il dubbio se il continuo possa essere ben ordinato. Perché tale buon ordinamento avesse un senso positivo bisognerebbe farlo dipendere da un criterio determinato, o determinabile a partire da una realtà

data mediante un numero finito di atti arbitrari del pensiero; ed un siffatto criterio non sembra potersi assegnare (*Ivi*, pp. 271-2. Corsivi nel testo).

Ancor più interessante e del tutto coerente con quanto esposto nel paragrafo 13 è quanto Enriques afferma nella densa nota (1) di pagina 271, ove, dopo aver fornito una bibliografia di massima sull'argomento, conferma l'idea che la regola di Zermelo non è un postulato nel senso ordinario dell'espressione poiché non fornisce alcuna condizione restrittiva sul continuo. All'ipotesi che l'assioma esprima una legge operativa della nostra mente, il matematico livornese risponde, non senza ironia:

Ebbene, il meno che si possa osservare è che questa legge non è legge per tutte le menti. Onde accade in fatto che le dimostrazioni con cui si dovrebbe rispondere al dubbio "se il continuo possa essere ben ordinato" non hanno forza di convincere nessuno di quelli che veramente ne dubitano (*Ivi*, p. 271).

Un contributo significativo per comprendere la concezione di Enriques è l'articolo *Sur quelques Questions soulevées par l'infini mathématique* pubblicato sulla *Revue de Métaphysique et de Morale* nel 1914. Qui Enriques analizza i tre paradossi già menzionati della teoria degli insiemi. Si sofferma su quello di Burali-Forti e critica l'idea che si possano considerare come enti matematici totalità infinite per le quali non sia stata fornita una prova di non contraddittorietà logica. Cita, in proposito i lavori di Dingler sui paradossi della teoria degli insiemi. Aggiunge, tuttavia, un criterio più forte:

Una dimostrazione di questo genere [cioè di esistenza di totalità infinite] non potrà essere fornita, in generale, solo da argomenti logici, ma dovrà fare appello a postulati improntati a una razionalizzazione dell'esperienza. Così dunque le costruzioni dei realisti non saranno lecite a meno che esse non contemplino enti che l'intuizione sperimentale ci ha già fatto conoscere o ci può far conoscere⁽⁷⁾.

(⁷) Enriques 1914, p. 163. Testo francese originale: "[...] une démonstration de ce genre ne saurait être fournie généralement par des arguments logiques, mais devra faire appel à des postulats empruntés à une rationalisation de l'expérience. Ainsi donc les constructions des réalistes ne seront autorisées qu'autant qu'elles restent dans le domaine des êtres que l'intuition expérimentale nous a déjà fait connaître ou peut nous faire connaître".

Tra gli enti da rifiutare – conclude Enriques – il massimo ordinale di Cantor e tra gli assiomi, il principio di scelta di Zermelo (*Ivi*, p. 163).

In *Per la storia della logica*, pagine interessanti sono dedicate al problema dell'infinito (Enriques 1922, 1987, par. 25: “L’analisi dell’infinito e gli assiomi della disuguaglianza”, pp. 151-160), ma riguardo ai temi specifici che qui affronto, Enriques rimanda a quanto aveva già affermato nell’articolo apparso sulla *Revue de Métaphysique et de Morale* (*Ivi*, p. 160).

Per cercare di comprendere la posizione di Enriques, conviene partire dall’affermazione che, a suo modo di vedere, entità come l’insieme di tutti gli insiemi U o di tutti i numeri ordinali V sono altrettanto illegittime di un ente matematico quale $\aleph_1$. Si tratta di una idea che può risultare strana: è ben noto che enti come U e come V sono all’origine dei paradossi della teoria degli insiemi e che già Cantor nelle lettere a Dedekind li aveva rilevati e ne aveva poi dato una spiegazione quasi-teologica⁽⁸⁾. Comunque U e V sono concetti limite della teoria, anche nella forma ingenua cantoriana, non entrano attivamente nella formulazione di teoremi o in dimostrazioni, indicano piuttosto i limiti linguistici e concettuali oltre cui la teoria non può spingersi. Concernono problemi puramente logici, affrontati e codificati nelle successive teorie assiomatizzate degli insiemi. Lo statuto logico e matematico di $\aleph_1$ è completamente diverso: è un concetto introdotto da Cantor fin dalle *Grundlagen*⁽⁹⁾ e rappresenta la cardinalità della seconda classe numerica (data, come sottolinea Enriques, dalla totalità dei numeri ordinali transfiniti che esprimono gli ordinamenti di insiemi numerabili). Benché Cantor nelle *Grundlagen* non usi la $\aleph$ -notazione, introduce già l’ipotesi del continuo, che il matematico tedesco giudicava forse l’asserzione più matura ed importante del proprio lavoro. Sebbe-

ne, come noto, l’ipotesi del continuo non possa essere né dimostrata né refutata con i mezzi matematici di cui si serviva Cantor, il concetto di $\aleph_1$, di per sé, non è affatto contraddittorio, né si riferisce a totalità assolute, come U o V , certo si riferisce a totalità infinite, ma non assolute. Perché allora Enriques lo giudicava illegittimo? Il problema non è legato all’oggetto in sé, quanto alla costruzione mentale che lo ha prodotto. È fuor di dubbio che Enriques si opponga a una concezione platonico-realistica della matematica, ci sono così tante evidenze di questo, che non è necessario soffermarsi sulla questione. Piuttosto, è profondamente interessato al modo in cui la mente costruisce gli enti matematici e, in particolare, alle operazioni mentali. Proprio in *Scienza e razionalismo*, nel contesto di cui stiamo discutendo, egli scrive:

Resta quindi da analizzare più profondamente la costruzione concettuale rilevando che essa importa sempre un *numero finito di operazioni mentali*. Processi di definizione (trascendenti) che implicino essenzialmente infinite operazioni, sono viziosi e conducono a qualsiasi contraddizione⁽¹⁰⁾.

Si tratta di un richiamo alla controllabilità delle operazioni che hanno condotto alla costruzione di certi enti matematici, nella convinzione che la nostra mente può produrre solo un numero finito di operazioni e non un numero infinito. Se un ente matematico è prodotto, sul piano genetico, da infinite operazioni, allora occorre dimostrare la sua coerenza logica, altrimenti questo ente non è accettabile: può essere autocontraddittorio o in contraddizione con verità già accettate. Né questo sembra sufficiente per Enriques perché, come abbiamo letto nella citazione tratta da *Sur quelques Questions soulevées par l’infini mathématique*, la dimostrazione logica deve essere inserita in un contesto i cui assiomi sono ricavati da una razionalizzazione dell’esperienza. Ma che significa “razionalizzazione dell’esperienza”? Enriques non lo esplicita, ma è assai plausibile che egli si riferisca al fatto che gli assiomi non devono contenere, a loro volta, proposizioni basate su infinite operazioni mentali. Ora, la posizione di Enriques può suscitare dei dubbi sotto tre aspetti: 1) è

⁽⁸⁾ Le lettere di Cantor a Dedekind su questo tema sono consultabili in Cantor, 1932, pp. 443-451. Riguardo al valore teologico di certi concetti cantoriani, mi permetto di rimandare a Bussotti-Tapp, 2009, anche per le indicazioni bibliografiche, e a Tapp, 2005.

⁽⁹⁾ Cantor 1883, 1932, pp. 165-197. Per una traduzione italiana, si veda Cantor 1992, pp. 77-134, in particolare i paragrafi 12 e 13, pp. 118-122. In bibliografia menzionerò solo la traduzione italiana con Cantor 1883, 1992.

⁽¹⁰⁾ Enriques 1912, 1990, p. 113. Corsivi nel testo.

molto difficile stabilire, anzitutto da quale operazione mentale sia esattamente derivato un oggetto matematico. Inoltre, ammesso che ciò sia possibile, determinare se tale operazione sia trascendente o meno, 2) Enriques, a differenza di quanto cercarono di fare altri matematici che – come Brouwer – si opposero, sia pur in maniera completamente diversa da lui, a una concezione formalista-realista della matematica, non tracciò un confine netto, basato su una definizione o insieme di definizioni, che separasse ciò che è legittimo fare in matematica da ciò che non lo è, 3) le posizioni di Enriques, formulate dopo il 1910 e confermate in anni ben posteriori, possono sembrare anacronistiche perché, in effetti, gli assiomi della teoria degli insiemi cercarono proprio di fornire una impalcatura logica in cui fossero evitate le contraddizioni. Ma, appunto tale impalcatura è solo logica e non è basata su una razionalizzazione dell'esperienza. Esempio è, a tal proposito, proprio l'assioma di scelta.

Credo però che in effetti Enriques non volesse fornire una definizione o una serie di precise definizioni per distinguere gli enti matematicamente accettabili da quelli che non lo sono. Di certo la mera coerenza logica non era, per lui, sufficiente, perché occorreva comprendere su quali tipi di assiomi-operazioni mentali tale coerenza era basata. Mi sembra che egli voglia esprimere una concezione generale che, in ultima analisi, pare un richiamo a quello che, secondo lui, è il buon senso e ai limiti costruttivi della ragione umana: non si tratta di essere contro l'infinito attuale in matematica. Vedremo nel prossimo paragrafo che, anzi, Enriques accetterà quasi tutti gli enti infiniti (e infinitesimi) che erano stati costruiti tra fine Ottocento e inizio Novecento e userà senza nessun problema dimostrazioni esistenziali basate su un'applicazione del principio del terzo escluso che, certo, gli intuizionisti avrebbero rifiutato. La mia interpretazione è però che, quando si introducono certi concetti o postulati, a opinione di Enriques, non si faccia più matematica, ma metafisica travestita da matematica. Enriques non sembra in grado di dire a priori: "questo concetto o procedura è affetto da operazioni trascendenti, questo non lo è", ma a posteriori ciò che intende è chiaro: se si può accettare il numero ordinale ω e tutti gli altri numeri ordinali della

seconda classe e se – come vedremo – si può parlare del numero cardinale di tutti i numeri interi $\aleph_0$, a Enriques appare illegittima la considerazione di tutti i numeri della seconda classe come insieme. La critica, mi sembra, cioè rivolta all'ordine di idee espresso da Cantor nel § 12 delle *Grundlagen* (*Fondamenti*, Cantor 1883, 1992, pp. 118-120), ove egli prova che la classe numerica (II) ha cardinalità maggiore del numerabile ed introduce il principio di limitazione o restrizione, come terzo principio produttivo, tramite cui si possono costruire classi numeriche di cardinalità sempre maggiori. Il principio di limitazione o restrizione sembra, evidentemente, a Enriques sottendere un'operazione arbitraria su un insieme numerico, quello dei numeri della classe (II) e poi di tutte le classi numeriche successive (III), (IV), ecc., di Cantor, rispetto alle quali non abbiamo elementi per giudicare se possano essere coerentemente considerate come totalità. In particolare, l'asserzione enriquesiana secondo cui tali classi numeriche sono non ben definite sembra riferirsi anche alla possibilità stessa di considerare, per ogni classe, un ordinale maggiore di tutti gli ordinali della classe e che ne rappresenti l'ordinamento. Se questo è legittimo per la classe degli interi positivi, la cui natura e proprietà ben conosciamo, non è detto che lo sia per le classi dei numeri ordinali transfiniti. Quanto all'assioma di scelta, le critiche di Enriques vanno nella stessa direzione, ma sono ancor più circostanziate e puntuali, nonché molto più ricorrenti nel corso dell'opera enriquesiana. Ci sono due problemi connessi in merito a questo assioma: 1) l'idea stessa che, data una collezione infinita di insiemi infiniti, si possa selezionare un elemento da ogni insieme senza fornire la legge precisa di selezione, è arbitraria e inaccettabile per Enriques perché implica un procedimento palesemente trascendente; 2) il cosiddetto assioma di scelta non rispetta i canoni che caratterizzano gli assiomi, cioè porre delle limitazioni sugli enti a cui essi sono riferiti, in modo da fornire caratterizzazioni sul comportamento di tali enti. Per fare un esempio: il postulato delle parallele limita le possibilità dello spazio euclideo perché dice che per un punto esterno a una retta passa una e una sola parallela; con ciò stesso viene fornita una proprietà del piano euclideo. L'assioma di scelta

non ha affatto questo carattere limitativo e non dice nulla sulla natura degli oggetti a cui viene applicato (in particolare il riferimento è al continuo). Quindi, per queste ragioni, non è accettabile.

È necessario sottolineare che un richiamo ai limiti di ciò che è legittimo chiedere alla matematica caratterizza diversi aspetti del pensiero enriquesiano, non solo la sua posizione sul problema dell'infinito: Enriques è uno degli animatori del dibattito sui fondamenti della geometria, sulla natura degli assiomi geometrici e della stessa conoscenza geometrica. Dell'affascinante periodo che va – parlando a grandi linee – dai lavori di Poncelet alle *Grundlagen* di Hilbert, in cui si collegano questioni come la nascita della geometria proiettiva quale scienza autonoma, la distinzione tra un approccio puramente grafico e uno metrico alla geometria proiettiva, la riduzione delle proprietà metriche a quelle grafiche nella varie geometrie tramite il concetto di “assoluto”, la nascita e la diffusione delle geometrie non-euclidee con le loro proprietà proiettive e i loro modelli euclidei, lo sviluppo, se non la nascita, con Gauss della moderna geometria differenziale, gli sviluppi della geometria algebrica e delle geometrie astratte con le leggi di dualità specifiche di ciascuna, l'assiomatica astratta e il ruolo degli assiomi nel caratterizzare le proprietà dei vari spazi geometrici, fino a giungere all'imporsi della topologia, Enriques fu, si sentì e fu considerato uno dei protagonisti. È lui, per esempio, che ritiene di aver dato veste logica definitiva ai postulati della geometria proiettiva, nelle sue *Lezioni di geometria proiettiva* (Enriques 1898, 1904, 1996), questione sulla quale matematici del livello di Guido Castelnuovo e Corrado Segre concordano con Enriques; è a lui che nel 1907 la celebre *Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluß ihrer Anwendungen* affida la stesura del lunghissimo articolo sui fondamenti della geometria⁽¹¹⁾. Egli fu quindi al centro del dibattito sulla logica della geometria e, se il suo modo di fare matematica fu sempre ritenuto come basato su una grande intuizione, certo le necessità

logiche del ragionamento deduttivo erano al centro dei suoi interessi. A questo riguardo si interessò molto anche della coerenza della geometria e condense i lavori di Hilbert finché il matematico tedesco mostrò come la coerenza delle geometrie non-euclidee dipendeva da quella della geometria euclidea, quest'ultima da quella dell'analisi ed essa, a sua volta, dalla coerenza dall'aritmetica. Quando però Hilbert comincia il lungo e tormentato percorso per provare la coerenza dell'aritmetica, Enriques ne prende le distanze. Già in *Problemi della scienza*, leggiamo in una nota:

La questione dei postulati dell'Aritmetica è stata messa all'ordine del giorno dalle comunicazioni di D. Hilbert ai recenti congressi di matematiche (Parigi, 1900; Heidelberg, 1904). Hilbert ricerca una dimostrazione logica: ma noi non comprendiamo bene in qual senso sia da intendere la veduta dell'illustre geometra (Enriques 1906, 1909, 1926, 1985, p. 117).

Molto significativamente, a quasi trent'anni di distanza dalla prima edizione di *Problemi della scienza*, nella voce “Postulato” delle *Enciclopedia Italiana* pubblicata nel 1935, scrive Enriques:

I neo-realisti, come D. Hilbert, vogliono avvalorare il campo più largo delle matematiche, esteso anche a una metamatematica; essi ritengono che a questo campo corrisponda un sistema di enti, la cui *esistenza* (indipendente da costruzioni mentali) dovrebbe essere dimostrata per via logica, fornendo la prova formale della non contraddizione delle ipotesi. Ma bisogna dire che i tentativi fatti dallo stesso Hilbert per fornire una dimostrazione logica di questo genere (sebbene ripetuti e proseguiti per oltre trent'anni) non sembrano condurre a un risultato soddisfacente⁽¹²⁾.

Significativamente Enriques formula il proprio giudizio indipendentemente dai risultati di Gödel. Quel che egli critica nella metamatematica di Hilbert è simile a quello che critica nell' $\aleph_1$ di Cantor e nell'assioma di scelta di Zermelo: il passaggio della matematica a una sorta di nuova metafisica che, nel caso specifico attinente al tentativo di dimostrare la coerenza dell'aritmetica, prende forma nel voler spingere l'indagine a cercare un ulteriore fonda-

⁽¹¹⁾ Si tratta di Enriques 1907, 1911, 1966, III. L'articolo fu scritto originariamente in tedesco e tradotto in francese quattro anni dopo. Io mi riferirò alla tradizione francese, presente in Enriques 1966, III.

⁽¹²⁾ In bibliografia menzionerò tutte le voci dell'*Enciclopedia Italiana* citate nel testo. Come riferimento, le citazioni sono tratte dalla versione on-line.

mento a un ente – la serie dei numeri naturali – la cui esistenza e coerenza deve essere data per scontata. Enriques è come se dicesse che i numeri naturali rappresentano un limite – in cui sono coinvolti non solo postulati logici, ma un principio che, per lui è tipicamente sintetico-produttivo, come quello di induzione completa⁽¹³⁾ – oltre il quale la logica non può spingersi. Le proprietà strutturali dei numeri naturali (di cui un aspetto fondamentale è, appunto, l'induzione completa) non possono essere ridotte in termini puramente logici. Se volessimo usare un'immagine poco precisa, ma, credo, icastica in riferimento al modo di pensare di Enriques, potremmo dire: “con certi enti infiniti e postulati infinitari, la matematica rischia di sconfinare nella metafisica verso l'alto, mentre con la ricerca della coerenza logica dell'aritmetica tende a sconfinare nella metafisica verso il basso, verso il fondamento”. Per Enriques, due sconfinamenti illegittimi. Strettamente connesse a questo ordine di idee sono anche le indagini enriquesiane sulla psicogenesi della matematica, su che cosa si debba intendere per logica – il che è collegato con le numerose e spesso aspre polemiche con i logici, specialmente con Peano e la sua scuola – e sul ruolo della storia, dell'intuizione e dell'esperienza nella costruzione della ragione umana. L'indagine di questi problemi porterebbe però a scrivere un'intera monografia su Enriques, andando quindi oltre gli scopi di questo articolo. Riprenderò brevemente alcuni di questi problemi nelle Conclusioni.

⁽¹³⁾ Per Enriques i numeri naturali hanno una loro logica che, però, non è in alcun modo riducibile a una serie di tautologie espresse dagli assiomi della logica formale. L'elemento fondamentale della logica interna dei numeri è l'induzione completa (Enriques 1924-27b, 1983, parte prima, tomo primo, pp. 266-272). Essa però è un principio sintetico costruttivo. Leggiamo, infatti, in *Per la storia della logica*: “Si può costruire una siffatta serie [dei numeri naturali] in base alla semplice esperienza interna della ripetibilità degli atti del pensiero, quale si esprime nel *principio d'induzione matematica*. In questo senso possiamo accettare le vedute di Poincaré, che il principio d'induzione porga un giudizio sintetico d'esistenza, a cui si riconducono tutte le altre dottrine matematiche: mentre i tentativi fatti per dimostrare codesto principio, deducendolo dagli assiomi logici (che esprimono le leggi d'associazione del pensiero), si sono rivelati vani” (Enriques 1922, 1987, p. 208).

2.2 – L'infinito attuale “legittimo”

Dopo aver analizzato quanto ha scritto Enriques riguardo a $\aleph_1$ e ai paradossi della teoria degli insiemi, potrebbe stupire leggere le seguenti parole in merito alla dimostrazione di Cantor che il continuo unidimensionale è equipotente a quelli pluridimensionali:

Si potrebbe credere che il numero di dimensioni di una varietà fosse un carattere della varietà in se stessa affatto indipendente dalla generazione della varietà, cioè si potrebbe credere che non si possa porre una corrispondenza biunivoca tra gli elementi (punti) di due varietà aventi un numero diverso di dimensioni. A questo proposito illuminano le belle ricerche di G. Cantor nella teoria degli insiemi: esse pongono in chiaro come “si può porre una corrispondenza biunivoca tra i punti d'una varietà elementare v_1 e i punti di una varietà elementare ad n dimensioni v_n (dove n è qualunque)”: così per esempio tra i punti d'un quadrato o d'un cubo e quelli d'un segmento⁽¹⁴⁾.

L'importanza di questo risultato di Cantor viene confermata anche in scritti successivi. Per esempio nei *Principes de la Géométrie*, parlando della nozione di linea, Enriques riferisce il risultato di Cantor sull'equipotenza dei diversi continui come un'acquisizione fondamentale della teoria del continuo (Enriques 1907, 1911, 1966, III, p. 66). Nella voce *Dimensioni* (1931) dell'*Enciclopedia Italiana*, Enriques espone l'idea che le ricerche generali di Cantor sul concetto di dimensione per gli insiemi finiti ed infiniti hanno posto, per la prima volta in modo esplicito, il problema di definire esattamente cosa sia una varietà a n dimensioni. Ricorda che l'idea secondo cui due insiemi sono equivalenti se i loro elementi possono esser messi in corrispondenza biunivoca ha portato Cantor a comprendere che nell'infinito l'assioma “il tutto è maggiore della parte” non vale più. Enriques menziona anche le più recenti ricerche di teoria degli insiemi concernenti gli spazi separabili metrici, anche se, pur ricordando gli autori, non entra nei dettagli.

In *Per la Storia della logica* sono citati Bolzano, Dubois-Reymond e Cantor (stranamente non Dede-

⁽¹⁴⁾ (Enriques 1894-95, p. 39. Corsivo nel testo). Si veda anche Enriques, 1924-27b, 1983, parte prima, tomo primo, pp. 363-364.

kind, in questa circostanza) come gli autori che hanno dato un contributo fondamentale a una critica, anche di tipo filosofico, rivolta all'analisi dell'infinito. Questi matematici, scrive Enriques, hanno messo in luce la vera natura degli assiomi della disuguaglianza. Si riferisce chiaramente al fatto che i criteri di eguaglianza e disuguaglianza validi per il finito, non possono essere trasportati acriticamente nell'infinito (Enriques 1922, 1987, p. 130). Ancor più esplicito è Enriques alcune pagine dopo nello stesso testo. Scrive, infatti:

Giorgio Cantor, camminando sulla via aperta da Bolzano, muove appunto dall'idea che le proprietà paradossali dell'infinito non dipendano affatto da una contraddizione intrinseca, ma soltanto dalla differenza tra infinito e finito: e così – scrutando senza prevenzioni le proprietà delle corrispondenze che si possono porre tra insiemi infiniti – giunge ad altre proprietà meravigliose, e nondimeno coerenti, in guisa che ogni apparenza di contraddizione, per dirla con Bolzano, è ormai veramente chiarita come apparenza (*Ivi*, p. 155).

Enriques cita in particolare, oltre al contributo in cui Cantor dimostra l'equipotenza tra i continui di dimensioni diverse (Cantor 1878, 1992), i *Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre* (Cantor 1895-97, 1932), ove il matematico tedesco espone i frutti più maturi delle proprie ricerche e all'inizio dei quali mostra che la cardinalità del continuo è $2^{\aleph_0}$.

Anche i lavori di Cantor sulle cardinalità di sottoinsiemi di numeri reali sono accolti da Enriques come risultati fondamentali. Ad esempio, nella voce "Cerchio" dell'*Enciclopedia Italiana* (1931), menziona la prova cantoriana che l'insieme dei numeri trascendenti ha cardinalità maggiore di quello dei numeri algebrici.

In diverse occasioni Enriques espone la teoria degli ordinali transfiniti di Cantor, almeno nelle linee essenziali (si veda, per esempio, Enriques, 1924-27b, 1983, parte prima, tomo primo, pp. 269-273 e poi più nel dettaglio, pp. 367-373). In *Per la storia della logica* parla della teoria degli ordinali transfiniti come di una "bella teoria" (Enriques 1922, 1987, p. 159).

Allora, come mai Enriques accetta tutti questi risultati concernenti l'infinito attuale e invece respinge oggetti come gli $\aleph_n$ e l'assioma zermeliano? Alla seconda parte della domanda si è già risposto,

vediamo ora perché egli accetti tutte le entità di cui si è discusso in questo paragrafo. Come c'è da attendersi la risposta a questa domanda è strettamente connessa a quella relativa al precedente quesito e viene offerta da due passaggi assai significativi, uno tratto da *Problemi della scienza* e l'altro da *I numeri reali*. Nel testo del 1906, Enriques, parlando dei problemi logici della matematica, sostiene che, per certi concetti e sistemi di concetti, si deve ammettere l'esistenza di infiniti elementi. Qui la questione è molto generale e riguarda tutta la matematica classica, non un suo settore particolare e relativamente recente, come la teoria degli insiemi. Enriques parla infatti dei punti di una retta o di un piano o di rette di un piano, ecc., insomma dei più intuitivi ed elementari concetti geometrici. Come si può pensare la loro infinità? Enriques è chiaro: se si pretende di pensare in atto un'infinità di oggetti, l'operazione non è possibile. Tuttavia:

La cosa si presenta in un aspetto diverso quando, accanto agli oggetti *pensati*, si considerino gli oggetti *pensabili*, non più riconosciuti come *dati*, ma *supposti* (Enriques 1906, 1926, 1985, p. 111).

La distinzione tra *pensato* e *pensabile* potrebbe sembrare un escamotage pseudo-filosofico di basso profilo e soggetto ad ogni tipo di critica da parte di chiunque abbia riflettuto su certe questioni. In realtà non è così ed Enriques precisa il proprio pensiero: la riunione in una serie o in una classe di più oggetti è operazione lecita quando la serie o la classe divengono un modo di determinare a priori enti la cui pensabilità è indubbiamente legittima. Enriques propone l'esempio di tre punti *A*, *B*, *C* su una retta orientata, allora resta un modo di ordinarli in serie che ci fa scegliere una delle sei permutazioni possibili (*Ivi*, p. 111). Fin qui Enriques. La conclusione del ragionamento sembra però consequenziale: abbiamo una regola, potremmo chiamarla un nesso funzionale, tra enti di un certo tipo *A* che appartengono a un altro ente *B* (nell'esempio punti-retta). Il nesso funzionale è perfettamente definito; ha allora senso chiedersi quanti sono gli oggetti *A* che appartengono a *B*. In questo caso l'infinità delle operazioni mentali che sarebbero necessarie per cercare di enumerare gli *A* è sostituita da una relazione definita in maniera precisa e, si potrebbe dire, "finitaria".

Questa interpretazione è pienamente confermata da quanto leggiamo in *I numeri reali* a proposito degli ordinali della prima classe cantoriana:

Quando la serie dei numeri transfiniti è comunque prolungata mediante una costruzione mentale, *dipendente da un numero finito di convenzioni*, immaginando un successivo ω^ω dopo $\omega, \omega^2, \omega^3, \dots$ e quindi un successivo dopo $\omega^\omega, \omega^{2\omega}, \omega^{3\omega}, \dots$ si cade sempre in *classi numerabili* (Enriques, 1924-27b, 1983, parte prima, tomo primo, p. 270. Corsivi nel testo).

Le convenzioni sono in numero finito. Si tratta cioè di immaginare un passaggio al limite, esattamente omologo a quello con cui si è giunti al primo ordinale transfinito. Cioè: non si richiede di formare nuove totalità mediante operazioni non ben definite. Quando invece, come fa Cantor, si pretende di parlare di limite dell'intera classe (II) e di considerare tale classe come totalità, si usa la parola limite solo come analogia con operazioni ben note, ma, in effetti, sembra dire Enriques, non è ben definito cosa si intenda con questa operazione e, quindi, con il concetto di totalità dei numeri appartenente alla classe (II). Si è perso la controllabilità del nesso funzionale e un sinonimo non è certo sufficiente per indicare un'identità operativo-concettuale. Un altro elemento a cui spesso Enriques si riferisce per confermare la validità di un concetto o di una operazione è il ricorso alla esistenza di un modello. Questo è oggi un metodo canonico per dimostrare le non contraddittorietà di un insieme di asserti e, all'epoca di Enriques, il problema dei modelli era al centro dell'indagine matematica e, soprattutto geometrica, di cui Enriques fu uno dei protagonisti. Basti pensare – ma è solo un esempio – al problema di offrire modelli euclidei delle geometrie non-euclidee così che è coerente la geometria non euclidea se e solo se lo sono quelle non-euclidee modellizzate. Enriques scrisse molto su questo problema, anche se non dette, su ciò, contributi matematicamente originali. A proposito della connessione con i transfiniti di Cantor, leggiamo:

Per dimostrare la possibilità logica di un concetto astratto basta far vedere ch'esso può ricevere un'*interpretazione concreta*; in questo senso p. es. si fa vedere che i numeri transfiniti di Cantor sono logicamente possibili ricorrendo alle serie di punti considerati nel § 17 [varie serie di punti sulla retta]. (*Ivi*, p. 290).

Dunque, per converso viene confermato quanto visto nel paragrafo precedente: un ente matematico è ammissibile se non è autocontraddittorio o in contrasto con verità assodate (criteri che avrebbero condiviso anche Cantor e Hilbert), ma, inoltre, se è ottenuto tramite un numero finito di operazioni mentali o tramite nessi funzionali ben definiti e precisati che possano sostituire tali operazioni, oppure ancora, se di un certo concetto o costruito si può fornire un modello che faccia parte della matematica già accettata⁽¹⁵⁾. Quest'ultimo aspetto aprirebbe un ulteriore interessante capitolo su Enriques: il ruolo che ha la storia (in questo caso la storia della matematica) nella costruzione della ragione umana e quale garante della validità e correttezza di certi risultati⁽¹⁶⁾. Si comprende dunque come, per Enriques, non fossero affatto problematici gli infiniti che comparivano negli studi di geometria e, in particolare di geometria algebrica, ma come anzi facessero parte della sua esperienza quotidiana quale matematico attivamente impegnato nella ricerca. Presento alcuni esempi per chiarire cosa intendo:

1) nei *Principes de la Géométrie*, Enriques parla di Riemann come di colui che ha posto per primo il fondamentale concetto di varietà n -dimensionale, offrendone una definizione genetica. Riemann ha infatti considerato una varietà a n dimensioni come una giustapposizione di elementi che possono essere in una *infinità* di varietà a $n-1$ dimensioni, l'insieme delle quali forma una varietà unidimensionale in modo che ciascun elemento della varietà n -dimensionale appartenga a una delle varietà $n-1$ -dimensionali (Enriques 1907, 1911, 1966, III, p. 70). Questa infinità è chiaramente un infinito attuale.

2) Nella stessa opera, riferendo contributi di Minkowski e Hilbert i quali, basandosi sull'espressione della distanza finita (non, quindi, infinitesima) tra due punti di una varietà, sono condotti ad ana-

⁽¹⁵⁾ Del tutto in linea con quanto detto sulla legittimità degli enti infiniti è l'interessante par. 8 di Enriques, 1914, pp. 159-161. Tuttavia, dal momento che non vi sono elementi sostanzialmente nuovi rispetto a quanto scritto nel testo, rimando il lettore a una diretta consultazione di tale paragrafo.

⁽¹⁶⁾ Non avendo spazio per affrontare questo tema, rimando alla bibliografia presentata nella nota 2.

lizzare sistemi geometrici molto generali in cui le metriche euclidea e non euclidea rientrano come casi particolari. Enriques fornisce poi la definizione di distanza di Minkowski, compatibile con la geometria proiettiva, nel senso che le rette sono linee di lunghezza minima, e in cui si hanno ∞^3 movimenti che non sono altro che le traslazioni dello spazio. Questa geometria comprende come caso particolare la geometria euclidea (*Ivi*, p. 124). Di nuovo siamo di fronte a una infinità attuale.

3) Un esempio molto interessante a tal proposito è offerto dal capitolo III del primo libro delle *Lezioni sulla teoria geometrica delle equazioni e delle funzioni algebriche* (Enriques-Chisini, I, 1915, 1985, pp. 127-153). Potremmo dire che l'infinito è il tema che lega il capitolo perché Enriques tratta nelle stesse pagine la teoria degli insiemi di Cantor e teoremi e principi fondamentali della geometria algebrica, come il principio di Plücker-Clebsch, legati dal comune tema dell'infinito. Enriques comincia la trattazione elogiando la chiara distinzione che ha posto Cantor nel concetto di potenza tra insiemi finiti e infiniti e riporta quelli che secondo lui sono i principali risultati della teoria degli insiemi: a) numerabilità dei razionali; b) equipotenza tra la retta e un segmento; c) non numerabilità dei numeri reali; d) equipotenza dei continui pluridimensionali con il continuo unidimensionale. Tutti quei risultati che Enriques riteneva più vicini e molto utili alla matematica, per lo sviluppo storico che essa aveva avuto negli ultimi decenni del XIX secolo. Evidentemente, invece, come si è visto, Enriques era poco convinto di quell'aspetto dell'opera cantoriana (e degli sviluppi che vi erano stati con l'assiomatizzazione della teoria degli insiemi) relativo a questioni interne alla stessa teoria degli insiemi – come l'ipotesi del continuo –, sostanzialmente estranee, a sua opinione, alla matematica “viva” e attiva. Menziona poi il teorema di Netto secondo cui, se le due varietà continue che si pongono in corrispondenza hanno dimensione diversa, la corrispondenza non è continua. Le dimensioni hanno quindi a che fare con la disposizione degli elementi di una varietà, con l'ordine, non la cardinalità. Nel paragrafo immediatamente successivo Enriques collega subito il concetto di insieme con quello di varietà algebrica perché, introducendo la nozione di dimensione e di elemento generico di una varietà algebrica, parla di un insieme di enti geometrici, che

siano curve, corrispondenze o superfici, algebricamente definite. Il concetto cantoriano di insieme è, cioè, usato in quanto facilita la possibilità di considerare come elementi di una varietà non solo i classici oggetti geometrici (curve, per esempio), ma le corrispondenze stesse. Favorisce dunque (anche se non ne è la causa) un linguaggio generale e utile in geometria algebrica. A conferma di ciò Enriques introduce, subito dopo, un concetto fondamentale della geometria algebrica, quello di varietà riducibile o irriducibile, scrivendo:

Nello spazio S_{n+1} dove si assumono come coordinate non omogenee $x_1, \dots, x_n, x_{n+1}$ (ovvero coordinate omogenee $x_0, x_1, \dots, x_{n+1}$), l'equazione algebrica

$$f(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) = 0$$

rappresenta una *varietà algebrica ad n dimensioni* o ∞^n (ipersuperficie di S_{n+1}); questa varietà si dice *riducibile* se f si spezza nel prodotto di due polinomi f_1 ed f_2 , *irriducibile* nel caso opposto (*Ivi*, pp. 134-135. Corsivi nel testo).

Successivamente Enriques espone e dimostra il principio di Plücker-Clebsch da cui consegue il fondamentale teorema:

Se tra due varietà algebriche irriducibili V_n e V_m , ad n, m dimensioni, intercede una corrispondenza tra cui ad un punto generico di V_n corrispondono ∞^r punti di V_m ($r \geq 0$), e se, reciprocamente – i punti di V_m che nascono da punti generici di V_n corrispondono a ∞^s punti di questa varietà, dove

$$0 \leq s \leq n + r - m$$

Si deduce che i punti generici di V_m nascono effettivamente da

$$\infty^{n+r-m}$$

*punti (non eccezionali) di V_n (*Ivi*, p. 152. Corsivi nel testo).*

Ancora una volta il simbolo ∞ indica una quantità attualmente infinita di punti distribuiti in tante dimensioni quante sono gli esponenti. Gli esempi in cui Enriques usa il simbolo di infinito in questo modo sono, naturalmente, innumerevoli, ed è ovvio: senza quest'uso non avrebbe neppure potuto cominciare a fare geometria algebrica. Si tratta di un uso dell'infinito attuale assai più debole di quello connotante la teoria degli insiemi perché non si parla né di numeri transfiniti né, tantomeno, di cardinalità di insiemi infiniti e neppure, in senso proprio, di un'algebra dell'infinito (come succede nella teoria degli insie-

mi): il simbolo con l'esponente è utilizzato, appunto, in realtà, per indicare le dimensioni di un continuo. Nondimeno, Enriques ritiene che, per un inquadramento concettuale della problematica dei continui, sviluppata poi anche dalla geometria algebrica, le ricerche di Cantor siano una introduzione necessaria. È per questo che le ha riunite, insieme a questi risultati classici e fondamentali di geometria algebrica, in un capitolo separato delle sue celebri *Lezioni* scritte con Chisini. Le ricerche di Cantor forniscono una nuova visione unitaria su una serie di indagini che, sul piano della mera "pratica" matematica, si sarebbero sviluppate anche senza la teoria degli insiemi, ma a cui questa teoria fornisce una unitarietà fondazionale-concettuale. Dunque, nella misura in cui i risultati sull'infinito attuale si inseriscono in un decorso storico di lungo periodo della matematica e si basano su operazioni mentali controllabili (cioè enumerazioni finite o nessi funzionali ben precisabili) sono un ricchezza per la matematica, altrimenti sconfinano nella metafisica e richiedono un approccio alla matematica che Enriques rifiuta.

3. – Enriques e l'infinitesimo attuale

Il modo in cui il matematico livornese affronta il tema dell'infinitesimo attuale getta una luce significativa su alcuni aspetti del suo modo di concepire la storia del pensiero scientifico-filosofico e la matematica, tuttavia l'argomento presenta meno difficoltà interpretative rispetto alla posizione di Enriques nei confronti dell'infinito attuale. I due temi più interessanti riguardo all'infinitesimo sono: 1) la concezione che, secondo Enriques, avevano i pitagorici. Questo lo porterà a sviluppare una particolare teoria dell'origine della filosofia stessa; 2) i numeri e le geometrie non-archimedee sviluppate alla fine dell'Ottocento grazie, prima di tutto all'opera di Giuseppe Veronese⁽¹⁷⁾.

⁽¹⁷⁾ L'opera fondamentale di Veronese per l'introduzione di segmenti e numeri non-archimedee sono i *Fondamenti di geometria* (Veronese, 1991), a cui seguirono una serie di altri lavori molto più brevi, gran parte dei quali sono risposte alle critiche rivolte ai *Fondamenti*. Come letteratura su Veronese, menziono: Bussotti 1997; Cantù 1999; Fisher 1994; Freguglia 1998.

Quanto alla prima questione, Enriques, seguendo e sviluppando interpretazioni di Tannery e Milhaud⁽¹⁸⁾, ritiene che il punto della geometria pitagorica non sia il punto senza dimensioni della geometria euclidea, ma una monade dimensionata avente una determinata posizione nello spazio. I punti sarebbero centri monadici intorno ai quali Pitagora (forse rifacendosi alle idee di Anassimandro) faceva condensare un elemento primitivo infinito, in modo che i punti fossero delimitati da un vuoto o un mezzo etereo circostante (Enriques 1924-27a, 1983, parte prima, tomo primo, pp. 13-14). In questo modo la composizione della materia e del continuo geometrico avrebbero un'origine affine: il continuo e lo spazio geometrico sarebbero visti come materia assai fine, ma pur sempre originata da centri monadici attorno a cui vi è un processo di condensazione. I punti sarebbero cioè enti che compongono in atto il continuo, non solo suoi elementi di divisione. Queste idee erano state ampiamente esposte da Enriques nel suo importante contributo *La polemica eleatica per il concetto razionale della geometria* (Enriques 1923) e sono riprese, tra l'altro, all'inizio della voce "Curve" (1931) e della voce "Geometria" (1933) della *Enciclopedia Italiana*. Cosa sarebbe in effetti questo punto dei pitagorici? Enriques risponde interpretando il pensiero di Parmenide e i paradossi di Zenone quali risposta alla concezione che della geometria avevano i pitagorici: il loro punto è un "bastardo infinitesimo attuale" (Enriques 1924-27a, 1983, parte prima, tomo primo, p. 16). Per "bastardo" Enriques intende dire che non è propriamente un atomo, con una dimensione finita per quanto piccola, né un elemento di un eventuale continuo iperdenso, come saranno gli infinitesimi delle geometrie non archimedee, ma ha uno statuto fluttuante tra quello di un ente matematico e di un ente propriamente materiale. Le concezioni di un oggetto astratto come il punto senza dimensioni, la linea senza larghezza e la superficie senza profondità non erano ancora state acquisite dai pitagorici. Enriques non nega affatto che il "bastardo infinitesimo

⁽¹⁸⁾ Enriques 1924-27a, 1983, parte prima, tomo primo, p. 13, nota (3) menziona Tannery e fa esplicito riferimento a Milhaud, 1900; Brunschvicg, 1912; Milhaud, 1918. Non menzionerò questi lavori nella bibliografia, rimandando all'opera di Enriques.

attuale” dei pitagorici sia stata una concettualizzazione importante e audace per i tempi, così significativa da dar luogo – anche a seguito della scoperta dell’incommensurabile – alla critica degli Eleati e di conseguenza, ad opinione di Enriques, della stessa filosofia ed analisi infinitesimale⁽¹⁹⁾. Dunque l’infinitesimo attuale svolge un ruolo rilevante fin dall’inizio della speculazione filosofico-matematica.

Enriques non si dilunga molto sul fatto che nel XVII secolo alcuni matematici ritenevano l’infinitesimo dell’analisi matematica come un infinitesimo attuale. In riferimento a quel periodo – come vedremo nel prossimo paragrafo – egli preferisce analizzare il modo in cui il calcolo è stato ordinato specificando la natura potenziale degli infiniti ed infinitesimi usati. Invece suscitavano l’interesse di Enriques gli infinitesimi connessi con campi di numeri non archimedei.

In epoca moderna il primo autore che ha sviluppato in maniera sistematica una matematica basata su un continuo iperdenso, non archimedeo con infinitesimi attuali è stato Giuseppe Veronese nei monumentali *Fondamenti di geometria* (Veronese 1991). Lo scopo di Veronese era chiaro e le tappe concettuali dell’iter da lui seguito possono essere esposte molto sinteticamente come segue: a) costruire un sistema di segmenti di retta infinitesimi attuali non archimedei; b) mostrare che a questi segmenti possono essere associati diversi campi numerici, ciascuno caratterizzato da una unità. Se l’unità del campo A è infinitesima rispetto a quella del campo B , quest’ultima è infinita rispetto alla prima; c) sviluppare un sistema geometrico completo, ivi includendo anche la geometria proiettiva. Da dopo la pubblicazione dei *Fondamenti* Veronese cercò di diffondere la conoscenza del proprio sistema. Vi furono vivaci polemiche, a colpi di articoli e note, con matematici quali Cantor, Peano e

la sua scuola i quali, a titolo diverso, accusarono Veronese di aver commesso errori logici (in questo senso la critica di Cantor fu, probabilmente, la più severa) e aver fornito solo un abbozzo di teoria. Altri matematici, come Levi-Civita, Schoenflies e Hahn contribuirono a specificare, ampliare e migliorare l’opera di Veronese. Hilbert, rese merito a Veronese e costruì un sistema non archimedeo, ma non direttamente collegato a quello del matematico italiano. Enriques fu tra quelli che tributò grande merito a Veronese e al suo sistema non-archimedeo. Ne espone alcuni tratti in numerose circostanze:

a) in *Problemi della scienza*, nella nota (1) di p. 14, menziona i sistemi di numeri non archimedei introdotti da Veronese, Levi-Civita e Hilbert in cui l’infinito e l’infinitesimo sono presenti nella loro forma attuale. Enriques tiene però a precisare: “Ci sia concesso di lasciare da parte codeste costruzioni: e basti avvertire che esse non implicano l’uso di processi di definizione trascendenti”. Per questo sono accettabili in ambito matematico. In seguito, parlando della geometria, Enriques sviluppa alcune considerazioni di notevole spessore nell’ambito della filosofia della scienza: le geometrie non euclidee rappresentano un universo, uno spazio fisico-geometrico diverso dalla geometria euclidea. Enriques parla di ipotesi fisiche diverse. Prosegue:

Ma si possono costruire, e si sono costruite infatti in questi ultimi anni, altre Geometrie logicamente diverse, che tuttavia non rispondono ad ipotetiche differenze fisiche. Il più bell’esempio è offerto dalla *Geometria non-archimedeo*, costruita da G. Veronese (1891) e più recentemente sviluppata da D. Hilbert e dalla sua scuola [...] (*Ivi*, p. 172).

Enriques afferma poi che la negazione del postulato di Archimede (esistenza, quindi, di segmenti tali che un multiplo intero dell’uno non può superare l’altro) ha un senso matematico ben preciso come relazione tra concetti. Dunque, sul piano matematico, non implica alcuna operazione trascendente. Se invece si volesse dare una realtà fisica ai segmenti infinitesimi in atto, si cadrebbe in un non senso perché l’esperienza di segmenti del genere sfugge completamente ad ogni nostra possibile esperienza, non è esperibile da alcun organo di senso. Dunque la supposizione di un infinitesimo fisico attuale implicherebbe proprio una definizione trascendente rispetto ai nostri sensi. Fin qui Enriques. Come interpretare

⁽¹⁹⁾ All’idea enriquesiana che l’intera filosofia abbia origine geometrica è dedicato Bussotti-Pisano 2015. Riguardo all’origine geometrica dell’analisi infinitesimale, in parte il tema è affrontato nell’articolo menzionato in parte lo riprenderò parlando dell’infinito potenziale in Enriques, nel prossimo par. 4. Aggiungiamo che alla voce “Continuità” (1931) dell’*Enciclopedia Italiana* Enriques conferma l’idea che il punto dei Pitagorici sia un infinitesimo, anche se l’aggiunta enriquesiana “in qualche modo” è un sintomo che, a sua opinione, lo statuto ontologico del punto dei Pitagorici non è del tutto chiaro, anche se *fondamentalmente* lo è.

queste parole? Il trascendente in matematica si ha quando le definizioni e i supposti assiomi sfuggono al controllo operativo della nostra mente (lo si è visto nel paragrafo sull'infinito attuale); in fisica le condizioni sono più restrittive: il controllo non deve essere esercitato solo dalla mente, ma anche dagli organi di senso che mediano tra mente ed esperienza. Per cui: legittimità matematica, ma non fisica delle geometrie non archimedee⁽²⁰⁾.

b) La parte conclusiva dei *Principes de la Géométrie* (Enriques 1907, 1911, 1966, III, pp. 136-147) è dedicata alle geometrie non-archimedee. Si tratta di pagine piuttosto generali riguardo ai numeri archimedei e non archimedei: i numeri ordinali transfiniti di Cantor, benché abbiano alcune delle proprietà connotanti i numeri non-archimedei (per esempio un numero intero moltiplicato per un intero arbitrario sarà sempre minore di ω) non possono essere considerati un sistema numerico poiché tale concetto è associato alla possibilità di considerare i sistemi non archimedei, presi astrattamente, come una retta. Devono quindi valere le ordinarie operazioni associate ai segmenti di retta e le ordinarie regole di uguaglianza. Ciò non è vero per i transfiniti di Cantor perché, come noto numeri quali $\omega - 1$ non esistono e valgono, per esempio, le relazioni $\omega = 1 + \omega = 2 + \omega = \dots = n + \omega \neq \omega + 1$. Merito di Veronese è stato quello di aver costruito una geometria non-archimedeana, basata sulla definizione cantoriana di continuità, che è più debole di quella di Dedekind (in cui è compreso anche l'assioma di Archimede). Dunque Veronese:

[...] è giunto a costruire un sistema di numeri *non-archimedei*, per i quali sussistono le proprietà formali delle operazioni aritmetiche a cui soddisfa l'insieme dei numeri ordinari⁽²¹⁾.

⁽²⁰⁾ Questo potrebbe essere anche una chiave d'accesso al difficile problema concernente il rapporto che Enriques vedeva tra spazio geometrico e spazio fisico. Non è possibile affrontare tale questione nel presente contesto. Mi limito, quindi, a sottolineare che, nonostante diverse sezioni di alcuni dei contributi menzionati alle note 1 e 2 trattino del problema, non esiste ancora un lavoro organico e completo sull'argomento.

⁽²¹⁾ Enriques 1907, 1911, 1966, III, p. 138. Testo francese: "[...] il est parvenu à construire un système de nombres *non-archimédiens* pour lequel subsistent les propriétés formelles des opérations arithmétiques auxquelles satisfont l'ensemble des nombres ordinaires"

Seguono, appena accennate, le proprietà dei sistemi non archimedei di Levi-Civita e Hilbert.

Sul piano geometrico, mi sembra che l'osservazione più interessante concerna il fatto che nella geometria non-archimedeana, non valendo il postulato della continuità dedekindiana, ci sia il problema di dimostrare il teorema fondamentale della proiettività. Enriques ricorda che Hilbert ha provato tale teorema esser dimostrabile – nella sua forma “debole”, che risale a Poncelet⁽²²⁾ – senza ricorso alcuno alla continuità, ma basandosi solo sui postulati grafici della geometria piana, i postulati di congruenza e il postulato delle parallele (*Ivi*, p. 141).

Sul piano concettuale, si può così pensare che i segmenti e i numeri infinitesimi di Veronese siano inseriti, ad opinione di Enriques, all'interno di un filone di ricerche fondamentali per i matematici che operavano tra la fine del XIX secolo e l'inizio del XX: i rapporti tra le diverse geometrie, in relazione ai diversi sistemi di postulati ammessi. Non a caso Enriques, alla fine dei *Principes* parla delle geometrie non-desarguesiane, non-pitagoriche, ecc. Dunque Veronese ha portato nuova linfa in un dibattito vivissimo all'epoca. La fecondità del suo approccio, basato sui segmenti e i numeri infiniti e infinitesimi attuali, è tale che probabilmente, per Enriques, si può passare anche sopra alcune imperfezioni logiche dell'edificio di Veronese, sul che, ovviamente, uno come Peano non poteva esser d'accordo. Di nuovo, come per i risultati della teoria degli insiemi, i criteri di accettabilità sono due: 1) non trascendenza della serie di operazioni mentali che hanno portato a definire i nuovi enti. Ma a rinforzare e, in qualche modo anche a indirizzare l'opinione di Enriques nella scelta delle operazioni mentali da ritenere trascendenti o meno: 2) applicazioni dei nuovi enti in teorie che si inseriscono in un dibattito matematico già esistente e che lo fanno progredire aprendo nuove prospettive. Questo è un criterio non logico-matematico, ma matematico-storico.

⁽²²⁾ Sul senso generalizzato che von Staudt ha dato al teorema fondamentale della proiettività, in connessione con la sua definizione di proiettività e, invece, al senso “ristretto” (parola usata da Enriques) che gli aveva dato Poncelet, in connessione con una definizione diversa di proiettività, si veda Enriques, 1907, 1911, 1966, III, pp. 85-87.

c) alla voce “Infinito” (1933) dell'*Enciclopedia Italiana* (“L’infinito nella storia della fisica e della matematica”) Enriques parla nuovamente di Veronese e dei suoi segmenti e numeri infinitesimi attuali come di un momento significativo nella storia della matematica. Concetto confermato alla voce “Numero” (1935).

d) Tuttavia il lavoro in cui Enriques affronta più diffusamente il tema è il più volte menzionato articolo *I numeri reali*. La quarta parte (Enriques, 1924-27b, 1983, parte prima, tomo primo, pp. 364-389) dell’articolo si intitola “I numeri non archimedei e la generalizzazione del continuo numerico”. È divisa in tre sezioni, le prime due delle quali (pp. 364-383) sono interamente dedicate ai numeri non archimedei. Enriques spiega nel dettaglio quanto aveva già riferito nei *Principes de la Géométrie*: i transfiniti di Cantor soddisfano ai criteri delle serie ben ordinate e, per questo, non possono soddisfare alla commutatività della somma né garantire la possibilità che la sottrazione sia sempre eseguibile. Enriques dimostra poi il teorema secondo cui l’incompatibilità degli ordinali transfiniti di Cantor con le ordinarie proprietà operazionali degli interi finiti e, più in generale, dei numeri reali finiti è legata alla dipendenza logica dell’assioma di Archimede dalla continuità dedekindiana. Invece, detto a un intero finito, b un numero reale finito e ω il primo ordinale transfinito di Cantor, la serie

$$a\omega \pm b$$

è continua nel senso di Cantor se è continua rispetto a b , ma non lo è nel senso di Dedekind. È poi semplice determinare quando l’operazione $a\omega - b$ è o meno legittima (Ivi, p. 369). Enriques prova inoltre che numeri aventi le caratteristiche degli ordinali di Cantor non formano corpo rispetto al prodotto, affinché ciò accada occorre aggiungere una serie arbitraria (ma finita) di unità infinite e una serie infinita di unità infinitesime (Ivi, pp. 372-73). I numeri infiniti e infinitesimi di Veronese e i monosenii di Levi-Civita hanno queste caratteristiche. Sono poi presentati i numeri funzionali non archimedei di Hilbert. Enriques presenta anche altri insiemi di numeri non archimedei, tutti ritenuti costruiti legittimamente, cioè senza far intervenire operazioni trascen-

denti. Tra questi, mi sembrano particolarmente significativi i riferimenti a Dubois Reymond quanto agli ordini di infinito e di infinitesimo delle funzioni. Si tratta di un’idea molto bella a cui Enriques dedica tre pagine (ivi, pp. 377-379) perché Dubois Reymond, date due funzioni f e g della variabile t , entrambe infinite o infinitesime per t tendente a un certo valore (incluso t tendente all’infinito), studia il valore del rapporto f/g e, in base ad esso, giunge a definire l’ordine di infinito o infinitesimo di f e g . Nota poi che gli ordinari numeri reali non esauriscono tutto il possibile spettro di questi rapporti. Occorre quindi aggiungere numeri infiniti e infinitesimi attuali, per i quali Dubois Reymond fornisce le definizioni attinenti alla somma e al prodotto. Si genera in questo modo un insieme di numeri non archimedei con caratteristiche molto interessanti descritte da Enriques. Segue poi un’applicazione di numeri non archimedei a problemi di probabilità e all’angolo di due curve, partendo dal classico concetto di angolo di contingenza.

L’intera trattazione svolta da Enriques in queste dense pagine de *I numeri reali* è un’ulteriore chiara conferma che tutte le applicazioni descritte, in cui sono usati numeri non archimedei, sono legittimate storicamente col fatto che servono a risolvere problemi di matematica classica – si potrebbe forse meglio dire problemi che il matematico affronta nel proprio lavoro di ricerca quotidiano – oppure, viceversa, col fatto che i numeri non archimedei sono un’estensione di concetti tipici della matematica classica (come gli ordini di infinito e infinitesimo delle funzioni di Dubois Reymond che nascono da considerazioni sulla ordinaria analisi matematica). Non hanno cioè, per Enriques, quel carattere di artificiosità che egli riconosceva ad alcune ricerche di teoria degli insiemi (come abbiamo visto) e, in generale, alla deriva presa dalla logica matematica a partire dal primo decennio del ‘900, deriva che allontanava sempre più questa disciplina dalla viva opera dei matematici. Da sottolineare che, in questa sezione dedicata ai numeri non archimedei, non si tratta delle operazioni mentali che, eventualmente, li generano. Qui il criterio matematico-storico è almeno altrettanto importante, se non di più, rispetto a quello logico-genetico.

4. – Infinito potenziale e storia della matematica

L'argomento principale di questo lavoro è stato quello di esporre la concezione enriquesiana dell'infinito e dell'infinitesimo attuale; tuttavia anche alcune considerazioni di Enriques sull'infinito nella sua forma potenziale sono indicative per comprendere altri elementi della concezione enriquesiana. Senza scendere in un esame così dettagliato come quello dei paragrafi precedenti, mi concentrerò su due punti: 1) la speculazione eleatica e i concetti infinitesimali; 2) il metodo di esaustione e la moderna analisi matematica.

4.1 – Gli eleati e l'analisi dell'infinito

Il germe della moderna analisi infinitesimale si ritrova, secondo Enriques, nella speculazione dei filosofi eleati, in particolare nei paradossi di Zenone. Enriques ne *L'evoluzione delle idee geometriche nel pensiero greco* analizza due paradossi zenoniani: 1) il paradosso della dicotomia; 2) l'Achille. Come sono interpretati i paradossi? Enriques – anche basandosi, come riconosce egli stesso, sulle ricerche di Tannery e Zeuthen (Enriques 1924-27a, 1983, parte prima, tomo primo, p. 16 e 17) – considera i paradossi come la riduzione all'assurdo della concezione pitagorica secondo cui un segmento è sempre superiore a un minimo ϵ (cioè la distanza tra due punti contigui, che, come visto, Enriques interpretava come infinitesimi attuali ed elementi componenti il continuo). Dunque quanto alla dicotomia, oggi rispondiamo che, per percorrere il segmento AB lungo 1, si immagina di dover percorrere la serie di segmenti

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Il paradosso di Achille, opportunamente strutturato, porterebbe alla serie

$$1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \dots = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^n = 1 + \frac{1}{9}.$$

Se però ogni segmento è ritenuto maggiore di un minimo ϵ non si ottengono certo queste serie, ma una serie divergente, con l'assurdo a cui porterebbe il

paradosso. Ora, Enriques sostiene: 1) per certo Zenone aveva compreso che una somma infinita di segmenti finiti per quanto piccoli porta a superare ogni grandezza finita preassegnata; 2) aveva capito che i suoi argomenti erano riducibili alle serie viste in precedenza e che, quindi, implicavano l'insensatezza della teoria pitagorica perché in realtà tali serie, che dovevano essere necessariamente convergenti per evitare i paradossi, non potevano neppure essere scritte secondo i pitagorici perché da un certo punto in poi, il termine generico $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ o $\left(\frac{1}{10}\right)^n$ sarebbe risultato minore del minimo segmento assegnabile⁽²³⁾; 3) questo non implica che Zenone avesse anche calcolato la somma di tali serie, ma a un certo punto:

o qualche avversario di Zenone o magari Zenone stesso, debbono essersi posto il problema di sommare la progressione geometrica e il risultato era perfettamente raggiungibile da chi possedeva – nella teoria geometrica delle proporzioni – un equivalente delle nostre equazioni lineari, mercé cui si trova appunto l'incontro di Achille colla tartaruga. Perciò si deve ritenere (collo Zeuthen) che la scoperta della somma della progressione geometrica risalga appunto a quel periodo delle matematiche greche, in cui la critica eleatica s'imbatte, per la prima volta, colle difficoltà sollevate dall'infinito. [...] Zenone d'Elea o – con lui e, accanto a lui – chi ha trovato la somma della progressione geometrica ha scoperto il mondo dell'infinito [...] (*Ivi*, pp. 18-19. Corsivo nel testo).

Nella voce dell'*Enciclopedia Italiana* "Infinito" (1933), "L'infinito nella matematica e nella fisica. L'infinito matematico" Enriques è ancor più esplicito. Scrive infatti:

Sebbene si affaccino insieme le prime antinomie sull'infinito, che Zenone sviluppa sottilmente, pur fra contraddizioni inestricabili, nasce il convincimento che

⁽²³⁾ Sottolineo che, al di là di altre questioni, questa posizione di Enriques fa nascere un dubbio logico: tutto il ragionamento sulle serie torna se si suppone i segmenti dei pitagorici piccolissimi, ma finiti. Se invece fossero infinitesimi attuali, cosa succederebbe? Il termine generale delle due serie decresce al di là di ogni valore finito, ma, per dirla alla Veronese, è fuori del campo della scala di un segmento infinitesimo, cioè non diventa mai un infinitesimo attuale. Dunque la somma delle due serie considerate non dovrebbe cambiare in presenza di infinitesimi attuali. Non voglio in alcun modo risolvere il problema, solo parlo.

si possa discorrere dell'infinito come di qualche cosa e trarne qualche conseguenza significativa: sono gl'inizi dell'analisi infinitesimale.

Dunque, secondo Enriques, come la filosofia nasce dalla geometria (si veda Bussotti-Pisano, 2015) in ambito eleatico, in quanto Parmenide era giunto all'idea di punto adimensionato, linea senza larghezza e superficie senza spessore, così anche l'analisi matematica ha origine ad Elea. In entrambi i casi le critiche di Parmenide e Zenone ai pitagorici sono l'elemento essenziale. L'infinito e l'infinitesimo nella forma potenziale giocano un ruolo decisivo in questo contesto: punti, linee e superfici geometriche possono infatti essere interpretati come segmenti, superfici e solidi reali quando, rispettivamente, la lunghezza, la larghezza e lo spessore tendono a 0. Quanto alle somme delle progressioni geometriche, non è affatto necessario pensarle come somme di un numero attualmente infinito di addendi, è sufficiente, come fa la moderna analisi infinitesimale, provare che definitivamente differiscono dalla loro somma per meno di un arbitrario ε . E, ad opinione di Enriques, i greci avevano proprio trovato il modo di imbrigliare l'infinito in una procedura matematica finitaria: il metodo di esaustione.

4.2 – Metodo di esaustione e analisi matematica

Enriques sostiene che il metodo di esaustione giunge in un periodo maturo della matematica greca e che serve a codificare ricerche in cui sono implicitamente usati concetti infinitesimali, il che non è niente di originale, ma una interpretazione classica di questo metodo. Originale è però la genesi che tenta di ricostruire Enriques: egli aderisce all'idea di Altmann (Enriques 1924-27a, 1983, parte prima tomo primo, pp. 20-21) secondo cui approfondite ricerche di analisi infinitesimale nacquero presso Democrito e la sua scuola. In particolare, come fonte, Enriques cita l'*Adversus Stoicos* di Plutarco (ivi, p. 21), il quale ci racconta come Democrito, cercando forse di determinare il volume della sfera, si fosse trovato a considerare sezioni della sfera così vicine da potersi considerare piane. Allora si chiedeva Democrito: queste sezioni sono uguali o diseguali? Se fossero uguali, la sfera sarebbe in realtà un cilindro; se fossero diseguali, sarebbe dentata. È

un bel problema e un dubbio che viene a chiunque si avvicini a certe questioni senza il concetto di limite. Enriques ha, cioè perfettamente ragione nel dire che, se Democrito veramente aveva fatto queste considerazioni era alle prese con questioni infinitesimali legate al problema delle cubature. E le soluzioni proposte da Democrito appartenevano ancora a quello che Enriques definisce “periodo costruttivo dell'analisi infinitesimale” (ivi, p. 20) e non potevano certo essere rigorose come quella basate sull'esastione. Si può forse pensare che fossero qualcosa di simile a quanto Archimede ha esposto nel suo *Metodo*. Ad opinione di Enriques anche il moderno calcolo infinitesimale ha avuto una fase paragonabile a quella caratterizzante la speculazione greca prima dell'invenzione del procedimento di esaustione. Fase di dimostrazioni non rigorosa, ma produttiva e creativa. Si tratta del periodo del tardo Rinascimento (ivi, p. 21).

Il problema di trattare questioni per risolvere le quali occorre metodi infinitesimali ha, infine, condotto in ambito greco, con Eudosso, al metodo di esaustione di cui Archimede, pur non essendone l'inventore, è indubbiamente l'autentico maestro. Il metodo di esaustione fa già parte di una fase critica e fortemente formalizzata della matematica perché: 1) si basa su un'idea assai raffinata cioè che, se si vuole provare l'uguaglianza di due grandezze, si dimostra che l'una si avvicina all'altra per una differenza arbitrariamente piccola; 2) questo ragionamento è condotto tramite non una prova diretta, ma una riduzione all'assurdo. In questo senso l'esastione è ancor più formale del concetto di limite dell'analisi moderna e, ove l'infinito potenziale è esplicitamente usato in analisi, nel metodo di esaustione è celato in un schema pseudo-finitario ottenuto tramite la riduzione all'assurdo. Nel metodo di esaustione così come nel concetto di limite, i sistemi di diseuguaglianza rivestono un ruolo fondamentale. Quanto Enriques scrive nella voce “Assurdo” (1930) dell'*Enciclopedia Italiana* è molto chiaro:

L'argomento [il metodo di esaustione] dissimula chiaramente una divisione delle figure in infinite parti, quale si mette in opera nell'analisi infinitesimale (v. integrale). E convien dire che, se nel linguaggio moderno il ragionamento sembra assumere forma diretta, abbandonando la riduzione all'assurdo degli antichi, ciò accade perché l'idea negativa si è fatta

entrare nella definizione del *limite*, la cui esistenza viene ricondotta – una volta per tutte – ad un criterio di continuità.

Dunque i problemi connessi con un uso corretto dell'infinito potenziale sono al centro del computo delle aree e volumi nell'antica Grecia così come della nascita della analisi matematica.

L'infinito, nella sua forma attuale e potenziale può così essere interpretato come un tratto che collega gran parte della speculazione enriquesiana, riannodando i fili della sua concezione relativa alla ricerca matematica, alla storia della matematica, ai problemi fondazionali e alle questioni connesse con la psicogenesi dei concetti matematici. Altre visioni prospettiche possono essere scelte, data la grande fecondità e polivalenza del pensiero di Federigo Enriques.

5. – Conclusioni

La posizione assunta da Enriques nei confronti dell'infinito attuale rientra nel quadro più generale del suo approccio alla matematica e alla scienza: le costruzioni matematiche possono essere accettate se derivano da processi mentali controllabili – non trascendenti, per dirla alla Enriques. La controllabilità può derivare o da un numero finito di operazioni mentali o da operazioni mentali in numero infinito, ma riconducibili ad una legge chiara: che sia una funzione ben definita o un'iterazione di tipo induttivo. Il concetto di operazione mentale (o almeno il risultato dell'operazione) non è, in Enriques, un concetto psicogenetico assoluto; a tale componente occorre aggiungere la componente storica. Ciò vuol dire che col progredire della conoscenza è possibile che si arrivi ad esprimere con precisione il risultato di una certa operazione mentale che in uno stadio conoscitivo precedente o non era esprimibile o lo era solo in modo trascendente e, quindi, appariva un'operazione mentale il cui risultato non poteva essere sfruttato nella matematica o nella scienza. Come si è visto, proposizioni quali l'assioma di scelta non rientrano in un tale schema gnoseologico. Collegata con questa concezione vi è quella sui limiti della ricerca fondazionale: la ricerca dei fondamenti, con i collegati problemi sulla assiomatizzazione e sui nessi di reciproca consistenza tra diverse "regioni" della

matematica (per esempio, le diverse geometrie non-euclidee, la geometria euclidea, l'analisi e l'aritmetica) è parte centrale della matematica stessa, ma non può essere spinta oltre un certo limite che, per Enriques, è rappresentato dall'aritmetica. Cercare un fondamento dell'aritmetica significherebbe una discesa nel trascendente, come ammettere un certo tipo di infinito attuale è un'ascesa nel trascendente: entrambe da evitare. Legato a ciò è anche il fatto che Enriques riteneva che l'aspetto logico della matematica fosse sì importante, ma non fosse il più importante: la palma spetta all'aspetto creativo, sempre legato a un'attività costruttiva della mente e mai riducibile a quello logico. Questo spiega anche la sostanziale estraneità e, a volte, aperta opposizione di Enriques agli sviluppi più astratti della logica matematica che, per lui, sono disancorati dal quotidiano lavoro dei matematici e dalle questioni di ricerca che questi affrontano giorno per giorno. Dopo la fase della teoria "ingenua" degli insiemi e delle ricerche sui fondamenti della geometria, che rientrano a pieno titolo nella "grande matematica", Enriques nota una scollatura tra logica matematica e matematica. Da qui le polemiche con i logici e l'idea che la logica debba essere studio delle operazioni mentali che hanno prodotto il sapere matematico. Questi, in estrema sintesi, i nessi che legano diversi aspetti del pensiero enriquesiano.

Le critiche sono fin troppo semplici e scontate:

1) come si stabilisce la differenza tra un'operazione mentale trascendente e una che non lo è? Enriques non fornisce un chiaro criterio di demarcazione;

2) Enriques non conosceva così bene nei dettagli la logica matematica, anche se ne conosceva indubbiamente i risultati principali, da poter formulare un giudizio sui rapporti tra matematica e logica matematica. Le sue considerazioni potrebbero esprimere un punto di vista legittimo fino alla fine del primo decennio del ventesimo secolo, dopo non più.

La risposta alla prima eventuale critica è che Enriques non voleva e non poteva fornire una definizione precisa di cosa significhi il termine "trascendente" in riferimento a un'operazione mentale. Forse per lui era scontato, almeno caso per caso, quale operazione fosse trascendente e quale non lo fosse e, caso per caso, avrebbe anche saputo indicare le ragioni della sua posizione. Tuttavia il concetto

generale è chiaro: ammettendo come legittimi i risultati di certe operazioni si rischia di fare della matematica una nuova metafisica in cui, al di là dell'apparente perspicuità data dall'uso del simbolismo, si cadrebbe in una sorta di "notte nera in cui tutte le vacche sono grigie".

È vero che Enriques, probabilmente, non conosceva nei dettagli gli sviluppi della logica matematica che vadano al di là del periodo in cui Zermelo formulò l'assioma di scelta e in cui Hilbert cominciò a cercare di ridurre l'aritmetica alla sua parte finitista. Ma, sul piano concettuale, il problema non è questo, bensì è una questione assai profonda: quali sono effettivamente i rapporti tra matematica (includendo i settori più astratti di questa disciplina) e logica matematica? Enriques riteneva che, in sostanza, la logica matematica si fosse allontanata dalla matematica, pur cercando di mantenere alcuni legami che, però, erano sempre più forzati ed estrinseci. Ciascuno, riflettendo, giudicherà se la posizione di Enriques esprima il vero o, almeno, una parte del vero.

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

1. Lavori di Enriques citati

- ENRIQUES, F. (1894-95). *Conferenze di geometria: fondamenti di una geometria iperspaziale*, Bologna, Pongetti. L'originale è litografato. Oggi esiste una versione pdf.
- ENRIQUES, F. (1898, 1904, 1996). *Lezioni di geometria proiettiva*, Bologna, Zanichelli.
- ENRIQUES, F. (Ed) (1900). *Questioni riguardanti la geometria elementare*, Bologna, Zanichelli.
- ENRIQUES, F., & AMALDI, U. (1903). *Elementi di geometria*, Bologna, Zanichelli.
- ENRIQUES, F. (1906, 1925, 1985). *Problemi della scienza*, Bologna, Zanichelli.
- ENRIQUES, F. (1907, 1911, 1966). *Principes de la Géométrie*, in F. Enriques, *Memorie scelte di geometria*, vol. III, 1-147, Bologna, Zanichelli, 1966.
- ENRIQUES, F. (1912, 1990). *Scienza e razionalismo*, Bologna, Zanichelli.
- ENRIQUES, F. (Ed) (1912-14, 1924-27, 1983). *Questioni riguardanti le matematiche elementari*, Bologna, Zanichelli.
- ENRIQUES, F.-CHISINI, O. (1915-1985). *Lezioni sulla teoria geometrica delle equazioni e delle funzioni algebriche*, vol. I, Bologna, Zanichelli.
- ENRIQUES, F. (1917). *Sur quelques questions soulevées par l'infini mathématique*, *Revue de Métaphysique et de Morale*, XXIV, 149-164.
- ENRIQUES, F. (1921, 2003). *Insegnamento dinamico*, in Enriques, *Insegnamento dinamico*. La Spezia, Agorà, 1-14.

- ENRIQUES, F. (1922, 1987). *Per la storia della logica*, Bologna, Zanichelli.
- ENRIQUES, F. (1923). *La polemica eleatica per il concetto razionale della geometria*. *Periodico di matematiche*, IV, III, 73-88.
- ENRIQUES, F. (1924-27a). *I numeri reali*. In Enriques (Ed.) (1912-14, 1924-27, 1983), parte prima, tomo primo 231-389.
- ENRIQUES, F. (1924-27b). *L'evoluzione delle idee geometriche nel pensiero greco*. In Enriques (Ed.) (1924-27, 1983), parte prima, tomo primo, 1-40.
- ENRIQUES, F. (1936, 2004). *Il significato della storia del pensiero scientifico*, curato da M. Castellana e A. Rossi. Manduria: Barbieri.
- ENRIQUES, F. (1938, 1983). *La teoria della conoscenza da Kant ai giorni nostri*, Bologna, Zanichelli.

2. Voci dell'Enciclopedia Italiana scritte da Enriques e menzionate nel testo

- Assurdo (1930)
- Cerchio (1931)
- Continuità (1931)
- Curve (1931)
- Dimensioni (1931)
- Geometria (1933)
- Infinito. L'infinito nella storia della matematica e della fisica (1933)
- Numero (1935)
- Postulato (1935).

3. Opere di altri autori menzionate nel testo

- BADALONI, N. (1982). *Logica e filosofia della scienza in Federico Enriques*. In Pompeo Faracovi (Ed.), 71-106.
- BETTICA-GIOVANNINI, R. (1989). *La storia della scienza nel pensiero di Federico Enriques e di Augusto Murri*. *Annali dell'Ospedale Maria Vittoria di Torino*, 90, 149-159.
- BOLONDI, G. (1998). *Federigo Enriques e la sezione di Matematica dell'Enciclopedia Italiana*. In Pompeo Faracovi (Ed.) *Filosofia e Storia del Pensiero Scientifico in Federico Enriques*, 117-159.
- BOLONDI, G. (2005). *Geometria proiettiva, geometria descrittiva e geometria dello spazio nella scuola italiana*. In Franciosi (Ed.), 145-176.
- BORGATO M.T. (2006). *Il fusionismo e i fondamenti della geometria*. In Giacardi (Ed), 125-157.
- BOTTAZZINI, U. (2001). *Appunti per una biografia scientifica di Federico Enriques*. In Bottazzini-De Benedetti-Fornaciari-Pompeo Faracovi, *Le città di mare e lo spirito scientifico. Per Federico Enriques*. La Spezia, Agorà, 7-18.
- BUSSOTTI, P. (1997). *Giuseppe Veronese e i fondamenti della matematica*, Pisa, ETS.
- BUSSOTTI, P. (2004). *Matematica e filosofia: il caso delle geometria proiettiva*. In O. Pompeo Faracovi (Ed.), *Enriques e Severi. Matematici a confronto nella cultura del Novecento*. Sarzana, Agorà, 181-212.
- BUSSOTTI, P. (2006). *"Un mediocre lettore". Le letture e le idee di Federico Enriques*. Lugano. Agorà-Lumières Internationales.

- BUSSOTTI, P. (Ed) (2008a). *Federigo Enriques e la cultura europea*. Lugano, Agorà-Lumières Internationales.
- BUSSOTTI, P. (2008b). *Enriques e Hilbert. Fondamenti della matematica e questioni conoscitive*. In Bussotti (Ed), 69-100.
- BUSSOTTI, P.-TAPP, C. (2009). *The influence of Spinoza's concept of infinity on Cantor's set theory*. Studies in History and Philosophy of Science, Part A, 40, 1, 25-35.
- BUSSOTTI, P. (2012a). *Federigo Enriques e la didattica della matematica*. Euclide. Giornale di matematica per i giovani. Risorsa elettronica. Prima parte febbraio 2012, seconda parte aprile 2012. Indirizzo web: <http://www.euclide-scuola.org/>.
- BUSSOTTI, P. (2012b). *History and didactics of mathematics: a problematic relation. Some considerations based on Federigo Enriques's ideas*. Problems of Education in the 21th Century, 48, 5-9.
- BUSSOTTI, P. (2013). *L'insegnamento della matematica nella scuola secondaria superiore dall'unificazione alla riforma Gentile*. Annali di storia dell'educazione, 20, 241-264.
- BUSSOTTI, P.-PISANO, R. (2015). *The Geometrical Foundation of Federigo Enriques' Gnoseology and Epistemology*. In *Advances in Historical Studies*, 4, 118-145. Liberamente scaricabile a <http://dx.doi.org/10.4236/ahs.2015.42012>.
- CANTOR, G. (1932). *Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts*, edited by E. Zermelo. Berlin: Springer.
- CANTOR, G. (1878, 1992). *Contributo alla teoria delle molteplicità*. In G. Cantor: *La formazione della teoria degli insiemi* (a cura di G. Rigamonti), 23-43, Firenze, Sansoni.
- CANTOR, G. (1883, 1992). *Fondamenti di una teoria generale delle molteplicità*. In G. Cantor: *La formazione della teoria degli insiemi* (a cura di G. Rigamonti), 77-134, Firenze, Sansoni.
- CANTOR, G. (1895-1897, 1932). *Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre*, 282-356.
- CANTÙ, P. (1999). *Giuseppe Veronese e i fondamenti della geometria*, Milano, Unicopli.
- CASTELLANA, M. (2004a). *Razionalismi senza dogmi*. Soveria Mannelli, Rubbettino.
- CASTELLANA, M. (2004b). *Federigo Enriques e il metodo storico in filosofia della scienza*. In Enriques (1936, 2004), 91-132.
- CASTELLANA, M. (2008). *La dimensione europea della 'nuova epistemologia' di Federigo Enriques*. In Bussotti (Ed), 163-206.
- CENCI, B. (1984). *In difesa della filosofia: Enriques e Poincaré*. Giornale critico della filosofia italiana, 4/4 (3), 420-443.
- CILIBERTO, C.-GARIO, P. (2012). *Federigo Enriques. The First Years in Bologna*. In S. Coen (Ed.), *Mathematicians in Bologna (1861-1960)*. Basel, Springer, 105-142.
- CILIBERTO, M. (1982). *Scienza, filosofia e politica: Federigo Enriques e il neoidealismo italiano*. Pompeo Faracovi (Ed.), 131-166.
- D'AGOSTINO, S. (1988). *Federigo Enriques (1871-1946) and history of science in Italy in the pre-war years*. Organon: International Review, 22-23, 17-2.
- FISHER G., (1994). *Veronese's non-archimedean linear continuum*. In Ehrlich (Ed.), *Real numbers, generalizations of the reals, and theories of continua*, Dordrecht, Springer, 107-145.
- FRANCIOSI, M. (Ed) (2005). *Prospettiva e geometria dello spazio*. Sarzana, Agorà.
- FREGUGLIA, P. (1998). *I fondamenti della geometria a più dimensioni secondo Giuseppe Veronese*. In S. Coen (Ed.), *Seminari di Geometria 1996-1997*. (vol. 11), 253-277, Bologna, Tecnoprint.
- FREGUGLIA, P. (1998). *Enriques storico della matematica*. In Pompeo Faracovi, Speranza (Eds), 211-222.
- GALUZZI, P. (1984). *Federigo Enriques e la storia della matematica*. In Atto del Convegno "La Storia delle Matematiche in Italia". Cagliari, 29-30 settembre e 1 ottobre 1982. Bologna: Monograf, 511-519.
- GALUZZI, M. (1998). *Matematica e storia delle matematiche: un'identità nel pensiero di Federigo Enriques*. In Pompeo Faracovi, Speranza (Eds), 89-115.
- GEYMONAT, L. (1989). *La cultura italiana di fronte alla scienza e il contributo di Giovanni Vailati e Federigo Enriques*. In M. Quaranta (Ed.) *Giovanni Vailati nella cultura del '900*. Sala Bolognese, Forni, 13-22.
- GIACARDI, L. (Ed) (2006a). *Da Casati a Gentile. Momenti di storia dell'insegnamento secondario della matematica in Italia*. Lugano, Agorà publishing, Lumières Internationales.
- GIACARDI, L. (2006b). *L'insegnamento della matematica in Italia dall'Unità all'avvento del Fascismo*. In Giacardi (Ed.), 1-63.
- GIACARDI, L. (2010). *Il contributo della Scuola italiana di geometria algebrica alla formazione degli insegnanti nella prima metà del Novecento*. <http://ricerca.mat.uniroma3.it/users/gasca/LGiacardiFormazioneIns.pdf>.
- GIACARDI, L. (2012). *Federigo Enriques (1871-1946) and the Training of Mathematics Teachers in Italy*. In Coen S. (Ed), *Mathematicians in Bologna (1861-1960)*. Basel, Springer, 209-276.
- ISRAEL, G. (1993). *Federigo Enriques*. Voce del Dizionario biografico degli italiani, XLII. Ora consultabile a <http://enriques.mat.uniroma2.it/italiano/documenti.html>
- ISRAEL, G. (1998). *Il positivismo critico di Federigo Enriques nella filosofia scientifica del Novecento*. In Pompeo Faracovi & Speranza (Eds), 19-43.
- LOLLI, G. (1998). *La fondazione psicologica della logica*. In Pompeo Faracovi & Speranza (Eds), 73-87.
- METZGER, H. (1935, 2004). *Il metodo in storia delle scienze in Federigo Enriques*. In Enriques (1936, 2004), 55-59.
- MORETTI, M. (2003). *"Insegnamento dinamico". Appunti sull'opera scolastica di Federigo Enriques (1900-1923)*. In Enriques (1921, 2003), 15-91.
- NASTASI, T. (2010). *Federigo Enriques e la civetta di Atena*. Pisa, Plus.
- PARRINI, P. (1999). *Sulle vedute epistemologiche di Enriques (e di Croce)*. Rivista di storia della filosofia, 54, 1, 93-108.
- PEPE, L. (2006). *Insegnamenti matematici e libri elementari nella prima metà dell'Ottocento. Modelli francesi e esperienze italiane*. In Giacardi (2006a), 65-98.
- POLIZZI, G. (1982). *Enriques e l'epistemologia francese fra Ottocento e Novecento*. In Pompeo Faracovi. (Ed.), 107-122.
- POMPEO FARACOVI, O. (Ed.) (1982). *Federigo Enriques. Approssimazione e verità*. Livorno, Belforte.
- POMPEO FARACOVI, O. (1982). *Ragione e progresso nell'opera di Enriques*. In Pompeo Faracovi (Ed.), 167-200.
- POMPEO FARACOVI, O. (1983). *Saggio introduttivo. Enriques (1938, 1983)*, 1-44.
- POMPEO FARACOVI, O.-SPERANZA, F. (Eds) (1998). *Federigo Enriques. Filosofia e storia del pensiero scientifico*. Livorno, Belforte.

- POMPEO FARACOVÌ, O. (1998). *Sul neokantismo di Enriques*. In Pompeo Faracovi & Speranza (Eds.), 45-72.
- ROSSI, A. (2004). *La storia del pensiero scientifico: dal significato al metodo*. In Enriques (1936, 2004), 213-224.
- ROSSI, P. (1989). *Federigo Enriques e la sua immagine della scienza*. In Barbieri, F, Catellani Degani, F. (Eds) *Pietro Riccardi (1828-1898) e la storiografia delle matematiche in Italia: atti del convegno. Modena 16-18 marzo 1987*. Modena, Università degli Studi di Modena, 9-22.
- SAVA, G. (2004). *Federigo Enriques: "sintesi scientifica" e storia della scienza*. In Enriques (1936, 2004), 225-246.
- SIMILI, R. (1987). *Introduzione*. In Enriques (1922, 1987), V-XXII.
- STÖLTZNER, M. (1998). *Federigo Enriques e l'Enciclopedia neurathiana*. *Rivista di storia della filosofia*. 53, 3, 463-494.
- TAPP, C. (2005). *Kardinalität und Kardinäle*, Stuttgart, Franz Steiner.
- TOMASI, T. (1982). *La questione educativa nell'opera di Enriques*. In Pompeo Faracovi, a cura di), 223-250.
- TOSCANO, M. (2007). *An "Abstruse" Doctrine: The Historical-Philosophical Meaning of Einstein's Relativity in Federigo Enriques*. *Nuncius* 22, 69-95.
- TOTH, I. (2004). *Scienza e filosofia in Federigo Enriques*. In L.M. Scarantino (Ed.), *Intorno a Enriques. Cinque conferenze*. Sarzana, Agorà, 63-76.
- VERONESE, G. (1891). *Fondamenti di geometria a più dimensioni e a più specie di unità rettilinee, esposti in forma elementare. Lezioni per la scuola di magistero in matematica*, Padova, Tipografia del Seminario.
- WITKOWSKI, L. (1986). *Il caso Federigo Enriques: alle radici del neorealismo e della strategia genetica nell'epistemologia europea del'900*. *Annali della Facoltà di lettere e filosofia dell'Università di Perugia*, 23, 11, 99-126.



Paolo Bussotti

Docente di Storia della Scienza all'Università degli Studi di Udine. Ha ricoperto numerose posizioni in prestigiose istituzioni straniere. Svolge la sua ricerca nell'ambito della storia e della didattica della matematica, della logica e della filosofia della matematica, nonché della storia e della filosofia della scienza in età moderna.