Matematica, Cultura e Società

Rivista dell'Unione Matematica Italiana

Giuseppe Toscani

Sulle code di potenza di Pareto

Matematica, Cultura e Società. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **1** (2016), n.1, p. 21–30.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=RUMI_2016_1_1_1_21_0>

Matematica, Cultura e Società. Rivista dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 2016.

Matematica, Cultura e Società – Rivista dell'Unione Matematica Italiana
Serie I, Vol. 1, N. 1, Aprile 2016, 21-30

Sulle code di potenza di Pareto

G. TOSCANI
Università di Pavia
E-mail: giuseppe.toscani@unipv.it

Qui, cioè, ho ricondotto alla stessa generatrice, mediante trasformatrici soddisfacenti alla stessa relazione differenziale, le equazioni proposte per la curva dei redditi da Pareto, March, Kapteyn, Vinci, Amoroso e Davis. La funzione generatrice, alla quale ho ricondotto le predette equazioni, ricorda nella forma l'equazione della distribuzione più probabile della statistica quantistica di Brillouin, che sintetizza e generalizza formalmente le statistiche quantistiche di Boltzmann, Bose–Einstein, Fermi–Dirac. Le equazioni proposte, per la curva dei redditi, pertanto, possono essere interpretate, mutatis mutandis, alla luce dello stesso schema probabilistico.

Raffaele D'Addario, *Giornale degli Economisti e Annali di Economia*, Febbraio 1949

Sommario: *In questo articolo vengono brevemente presentate le principali analogie tra il problema dell'andamento all'equilibrio delle molecole di un gas rarefatto e la formazione delle code di potenza nella distribuzione della ricchezza in una società di agenti. L'approccio della meccanica statistica al succitato problema di origine economica ha fornito infatti in questi ultimi anni una spiegazione particolarmente convincente sul fenomeno della formazione delle code di potenza di Pareto.*

Abstract: *This article briefly introduces the main similarities between the problem of the trend to equilibrium of the molecules of a rarefied gas and the formation of the power tails in the distribution of wealth in a multi-agent society. The approach of statistical mechanics to the above mentioned problem of economic nature in fact provided in recent years a particularly convincing explanation on the phenomenon of formation of Pareto tails.*

1. – Introduzione

Le frasi in epigrafe, estratte dall'introduzione di un lavoro dell'economista Raffaele D'Addario relativo allo studio della curva dei redditi [17], ci fanno capire che le forti analogie fra alcuni fenomeni fisici ed economici, nonché il ruolo della casualità insita nei modelli, erano evidenti già nella prima metà del secolo scorso.

Alcuni anni prima della pubblicazione del saggio di D'Addario, tali analogie erano state sottolineate da Ettore Majorana in un famoso articolo su *Scientia* [24]: "È importante, quindi, che i principi della meccanica quantistica abbiano portato a riconoscere (oltre ad una certa assenza di oggettività nella descrizione dei fenomeni) il carattere statistico delle leggi ultime dei processi elementari. Questa conclusione ha reso sostanziale l'analogia tra fisica e scien-

Accettato: il 23 marzo 2016.

ze sociali, tra le quali è risultata un'identità di valore e di metodo."

La curva dei redditi citata da D'Addario, caratterizzata da code di potenza, è nota ancora oggi come distribuzione di Pareto, dal nome dell'economista Vilfredo Pareto, il quale, analizzando la distribuzione del reddito della popolazione del Canton Ticino, aveva osservato che tale distribuzione (di probabilità) era caratterizzata da un decadimento polinomiale [30]. In formula, se il reddito w di una popolazione è distribuito con densità $f(w)$, la funzione di distribuzione $F(w)$ del reddito, per $w \gg 1$ soddisfa

$$1 - F(w) = \int_w^{+\infty} f(v)dv \cong w^{-p}, \qquad p > 1. \tag{1.1}$$

Il valore della costante positiva p è comunemente chiamato indice di Pareto.

Al di là del modo estremamente acuto con cui Pareto giunse alla sua conclusione, è importante sottolinearne le conseguenze.

Molti fenomeni casuali sono caratterizzati da una distribuzione *normale* (o Gaussiana), i cui momenti sono tutti finiti. Per tale distribuzione, fissato un certo valore L positivo, la probabilità di stare fuori dalla striscia $(-L, L)$ decade esponenzialmente con L. Se invece il fenomeno casuale è caratterizzato da una coda di potenza, cioè decade come in (1.1), solo i momenti fino all'ordine $\alpha < p$ risultano finiti, la probabilità di stare fuori dalla striscia $(-L, L)$ decade in modo polinomiale con L, e, a parità di valore, risulta avere una misura molto più grande rispetto al fenomeno descritto dalla distribuzione normale. Se riferita alla distribuzione del reddito, la conseguenza prima di questa proprietà è l'ineguale distribuzione della ricchezza, e l'esistenza di una classe (se pur piccola) di agenti estremamente ricchi.

Massicci studi sui dati reali delle economie occidentali hanno infatti permesso di rilevare come per i grossi patrimoni la curva del reddito segua la descrizione (1.1), e che l'indice p di Pareto varia fra $1,5$ e 3 (dati riferiti all'anno 2000: USA $\sim$ 1,6, Giappone $\sim$ 1,8 $-$ 2,2) [18]. La conseguenza principale è che tipicamente meno del 10% della popolazione in ogni paese possiede almeno il 40% della ricchezza totale di quel paese, e segue tale legge.

L'importanza dell'osservazione di Pareto fu subito chiara agli economisti dell'epoca, tanto che alcuni fra questi cercarono di assumerne, anche parzialmente, la paternità. Nell'anno in cui Pareto pubblica a Losanna il suo libro [30], l'economista Rodolfo Benini commenta [3]: "Il Prof. Pareto nel suo magistrale Corso di Economia Politica, al capitolo *La courbe des revenus* mette in evidenza la singolare somiglianza che passa tra le curve della distribuzione del reddito, descritte coi dati, certo non perfetti, delle statistiche finanziarie di vari paesi e di vari tempi ..." e aggiunge "Se m′ è lecito ricordare le mie impressioni, dirò che io ero andato anche più in là, affermando esistere analogia di distribuzione in un vasto ordine di fenomeni economici, i quali stanno in intimo rapporto colla distribuzione della ricchezza."

Lo studio della curva dei redditi proposta da Pareto è stata ripresa in varie occasioni. Nel 1925, il matematico ed economista Luigi Amoroso presentò uno studio analitico rigoroso di tale curva, nota anche con il nome di trottola sociale [1]. Nel 1932 D'Addario ritornò sul problema, facendo conoscere il lavoro di Amoroso agli economisti [16]. Questi ed altri lavori successivi [17], di buon contenuto matematico, non entrarono però nel merito della sua formazione.

Anche se storicamente è stato per la prima volta osservato in ambito economico da Pareto, il fenomeno delle code di potenza è comune a molti fenomeni fisici, e si ritrova ad esempio nella distribuzione delle velocità durante il raffreddamento di un gas costituito da molecole parzialmente anelastiche [21, 22]. Proprio questa analogia mi ha fatto conoscere il fenomeno economico delle code, e successivamente interessare allo studio delle possibile cause che le generano.

Come già descritto nella prefazione al mio libro *Interacting Multiagent Systems* [28], nei primi anni del duemila ero inserito in un progetto di matematica per le applicazioni, finanziato dalla Comunità Europea, avente come obbiettivo lo studio di equazioni cinetiche ed iperboliche. Uno dei problemi di cui mi stavo occupando era relativo al comportamento dei gas dissipativi, e allo studio della soluzione della corrispondente equazione cinetica di Boltzmann. Più nello specifico, stavo cercando di dare una risposta alla cosiddetta congettura di Max Ernst e Ricardo Brito [21, 22], che ipotizzava il formarsi di code di potenza nella soluzione autosimilare della suddetta equazione.

Effettuando una ricerca bibliografica con parole chiave *particelle* ed *anelastico*, sono venuto a conoscenza di un interessante lavoro del fisico Frantisek Slanina che associava le particelle anelastiche alla distribuzione della ricchezza in un'economia di mercato [31]. Era il 2004, e un'ulteriore ricerca basata sulla bibliografia del succitato lavoro mi chiarì che il problema della formazione delle code di Pareto era ritornato di attualità da alcuni anni, ed era uno dei problemi più studiati nell'ambito del settore di ricerca dell'*econofisica*.

L'*econofisica* è infatti un campo di studio nato con l'obiettivo di portare l'economia nell'ambito delle scienze naturali, o, più nello specifico, con l'intento di sviluppare una *fisica dell'economia*.

Questo neologismo, introdotto dal fisico H.E. Stanley a margine del congresso "Second Statphys-Kolkata", tenutosi a Kolkata (India) nel 1995 (vedi [32]), al pari di termini come biofisica, geofisica e astrofisica è il risultato della combinazione della parola *economia* con la parola *fisica*.

Per quanto riguarda il fenomeno delle code di potenza di Pareto, le analogie fra la fisica e l'economia passano dalla meccanica statistica, attraverso l'identificazione delle *particelle* di un gas con gli *agenti* di un sistema economico, dell'*energia* delle particelle con la *ricchezza* degli agenti, e con l'identificazione delle *collisioni* con le *transazioni finanziarie*.

Una volta accettate queste analogie, lo studio della distribuzione della ricchezza in un economia di mercato si giova di tutta la ricerca matematica e fisica in teoria cinetica dei gas, la cui origine risale alla seconda metà dell'ottocento.

In questa nota, cercherò di chiarire quanto questo nuovo punto di vista abbia contribuito a chiarire, almeno in parte, il perché della formazione delle code di potenza, mettendone in evidenza i contributi matematici essenziali. La trattazione sarà per forza di cose solo parziale, e terrà conto principalmente dei risultati ottenuti da me e dai miei collaboratori in questi anni.

Il lettore interessato ad approfondire gli argomenti troverà comunque una bibliografia aggiornata e sufficientemente completa.

2. – L'eredità di Boltzmann

La teoria cinetica ha fornito un approccio vincente per descrivere le proprietà macroscopiche rilevanti di un gas composto da un numero estremamente alto di molecole soggette alle leggi della meccanica classica.

In accordo alla teoria molecolare della materia, un volume di gas di un centimetro cubo è un sistema composto da circa 10^{20} molecole che si muovono in modo irregolare. Risultando impossibile descrivere un tale sistema tramite le equazioni di moto di ogni singola particella, la scelta della teoria cinetica è stata quella di considerare l'evoluzione non di un sistema, quanto di un insieme di sistemi identici i cui dati iniziali differiscono per quantità dell'ordine di un errore accettabile. In conseguenza di questa scelta, i risultati utili e significativi sono solo quelli che descrivono il comportamento di molti sistemi in forma di statistica, vale a dire quelli che contengono informazioni sulle distribuzioni (di probabilità). In questa descrizione, una data particella non ha una posizione e una velocità definite, ma solo certe probabilità di avere differenti posizioni e velocità.

Per meglio comprendere l'analogia formale fra lo studio di un sistema composto da molti agenti e quello di un sistema di particelle, è necessario fornire qualche dettaglio sul principale modello fisico-matematico utilizzato in teoria cinetica dei gas rarefatti, e sulle sue principali proprietà.

Si consideri un volume di gas composto da molecole perfettamente elastiche e di uguale massa, distribuite in modo omogeneo in un volume. In accordo alla meccanica statistica, l'evoluzione temporale della densità $f = f(v,t)$ delle velocità v delle molecole, con v vettore appartenente allo spazio fisico $\mathbb{R}^3$, è descritta dall'equazione integro-differenziale di Boltzmann (spazialmente omogenea) [5, 9, 10]

$$\frac{\partial}{\partial t} f(v,t) = Q(f,f)(v,t). \tag{2.2}$$

Poiché il membro di destra di questa equazione (termine di collisione), misura le variazioni della densità dovute agli effetti delle interazioni fra le molecole, l'equazione (2.2) ci dice sostanzialmente che la densità varia nel tempo solamente a causa delle interazioni.

Più in dettaglio, il termine di collisione Q quantifica la variazione della densità delle molecole di velocità v dovuta a tutte le collisioni binarie che sono cinematicamente possibili. Poichè le molecole sono perfettamente elastiche, e quindi la collisione binaria fra due molecole della stessa massa conserva sia il momento che l'energia, è facile verificare che se due molecole di velocità v e w entrano in collisione, le possibili velocità v^* e w^* delle stesse molecole dopo aver colliso sono tutte e sole quelle date dalle relazioni

$$
\begin{aligned}
v^* &= \frac{1}{2}(v + w + |v - w|n), \\
w^* &= \frac{1}{2}(v + w - |v - w|n),
\end{aligned}
\tag{2.3}
$$

dove n è un versore arbitrario di $\mathbb{R}^3$.

Come funzione delle velocità, Q dipende dal tipo di interazione binaria. Uno dei modelli di interazione più usati è quello delle molecole *Maxwelliane* [5, 6, 8]

$$
\begin{aligned}
&Q(f,g)(v) = \\
&\int_{\mathbb{R}^3 \times S^2} B((v-w)\cdot n)\big[f(v_*)g(w_*) - f(v)g(w)\big]dw\,dn,
\end{aligned}
\tag{2.4}
$$

Nella (2.4) S^2 è la sfera di raggio uno, v_* e w_* sono le velocità delle molecole che entrando in collisione generano le velocità v e w in accordo alla legge (2.3) e $B(\,\cdot\,)$ è la frequenza con cui la collisione avviene. Si noti che per la collisione di tipo Maxwelliano la frequenza è indipendente dal modulo della velocità relativa, il che permette notevoli semplificazioni nei calcoli [5].

Il significato fisico dell'operatore Q è chiaro. Se si assume che le sole interazioni significative sono le collisioni binarie, fissata una velocità v, le collisioni binarie aumentano la percentuale di molecole con velocità v tutte le volte che una coppia di molecole con velocità v_* e w_* collidendo in accordo alla (2.3) genera una velocità pari a v. Al contrario, le collisioni binarie diminuiscono la percentuale di molecole con velocità v tutte le volte che la molecola di velocità v ne incontra una con velocità w generando, in accordo alla (2.3), la coppia di molecole con velocità v^* e w^*, entrambe diverse dalla velocità v.

Dall'equazione cinetica di Boltzmann possiamo ricavare, tramite lo studio della variazione delle quantità osservabili, le proprietà fisiche del gas. Per quantità osservabile si intende la media, fatta rispetto alla densità del gas, di una qualunque funzione delle velocità $\varphi = \varphi(v)$. Moltiplicando ambo i membri dell'equazione di Boltzmann (2.2) per la funzione $\varphi(v)$ ed integrando sulle velocità, si ottiene la legge di variazione nel tempo dell'osservabile

$$
\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^3} \varphi(v) f(v,t)dv = \int_{\mathbb{R}^3} \varphi(v) Q(f,f)(v,t)dv. \tag{2.5}
$$

Tenuto conto del fatto che le collisioni (elastiche) conservano momento ed energia, il membro di destra della (2.5) è nullo, cosicché

$$
\int \varphi(v) Q(f,f)(v)dv = 0, \tag{2.6}
$$

almeno per $\varphi(v) = 1, v, v^2$ [5, 9]. Questo garantisce la conservazione nel tempo della massa ρ del gas, della sua velocità media U e temperatura T, definite come momenti della densità $f(v,t)$ delle molecole

$$
\rho = \int f dv,\ U = \frac{1}{\rho}\int f v dv,\ T = \frac{1}{3}\rho \int f(v-U)^2 dv. \tag{2.7}
$$

Inoltre, in conseguenza del celebrato teorema H di Boltzmann sulla crescita dell'entropia [7], la soluzione si porta nel tempo verso la soluzione di *equilibrio Maxwelliano*, funzione della massa ρ, della velocità media U e della temperatura T

$$
M(v) = \frac{\rho}{(2\pi T)^{3/2}} \exp\left\{ -\frac{|v-U|^2}{2T} \right\}, \tag{2.8}
$$

che si caratterizza come l'unica densità per la quale $Q(M,M) = 0$.

È opportuno ricordare che lo studio della convergenza verso la distribuzione di equilibrio Maxwelliano, ed in particolare della velocità con cui l'entropia della soluzione si porta sul valore all'equilibrio, è stato uno dei problemi più studiati della teoria cinetica dei gas, ed è anche grazie ai risultati ottenuti in questo ambito [34, 35], che il matematico francese Cédric Villani è stato insignito nel 2010 di una medaglia Fields.

Al di là delle difficoltà matematiche presenti nella risoluzione del problema, l'aver dimostrato che la soluzione dell'equazione cinetica (2.2) converge verso la soluzione di equilibrio molto rapidamente (in effetti esponenzialmente rispetto al tempo), fornisce anche una verifica sperimentale della correttezza delle scelte di Boltzmann nella formulazione della sua equazione.

Ciascuno di noi ha in effetti modo di verificare quanto velocemente un gas si riporti verso la configurazione di equilibrio, quando, dopo aver aperto una finestra provocando una corrente d'aria, la richiude ben sapendo che la corrente cesserà immediatamente.

Questo aspetto della teoria cinetica ha conseguenze importanti anche per le applicazioni ad ambiti differenti, inclusi quelli di cui andremo presto a parlare.

Dal momento che le proprietà principali del gas, nonché la configurazione di equilibrio, rimangono invariate rispetto al cambio della frequenza con cui le molecole collidono, si consideri il caso in cui la frequenza di collisione è costante, $B(v-w)\cdot n = \sigma/4\pi$, con $\sigma > 0$. In questo caso l'operatore di collisione si semplifica nella differenza fra un operatore bilineare ed un operatore lineare

$$Q(f,f)(v) = \sigma\left(\int_{\mathbb{R}^3\times S^2} f(v_*)g(w_*)dwdn - \rho f(v)\right), \tag{2.9}$$

e la soluzione di equilibrio $M(v)$, è individuata univocamente dalla identità

$$M(v) = \frac{1}{\rho}\int_{\mathbb{R}^3\times S^2} M(v_*)M(w_*)dwdn. \tag{2.10}$$

In altre parole, lo stato di equilibrio del gas è univocamente individuato, una volta fissate le quantità macroscopiche ρ, U e T, dalle regole di interazione (2.3) tramite il termine di guadagno dell'operatore di collisione. La struttura delle collisioni binarie (2.3) (livello microscopico) e i conseguenti invarianti di collisione (2.6) determinano univocamente la densità di equilibrio (livello macroscopico), data dalla (2.8).

3. – Modelli cinetici per la distribuzione della ricchezza

Si consideri un mercato composto da un numero elevato di agenti, ciascuno dotato di reddito, che interagiscono per mezzo di transazioni finanziarie. Volendo studiare come si evolve nel tempo la densità $f(w,t)$ degli agenti con reddito (o ricchezza) $w \geq 0$, sfruttando l'analogia con la teoria cinetica dei gas descritta nella sezione precedente, è sufficiente identificare gli agenti con le molecole, la ricchezza degli agenti con l'energia delle particelle e le transazioni finanziarie fra due agenti con le collisioni binarie [28].

Questa scelta ha chiaramente dei punti di debolezza. Intanto, la numerosità degli agenti operanti in un sistema economico, dell'ordine di 10^7, è molto inferiore a quella delle molecole del gas, per cui la bontà della scelta dell'approccio statistico non è garantita. Inoltre, mentre le regole di collisione binaria (2.3) fra molecole sono determinate in modo univoco dalle leggi della meccanica, qualunque regola di transazione finanziaria si proponga è largamente arbitraria, e in ogni caso manca delle caratteristiche di universalità che forzatamente le vengono assegnate.

Ciò nonostante, poiché le regole di transazione assegnate a livello microscopico sono in grado di determinare univocamente, tramite l'approccio cinetico, soluzioni macroscopiche di equilibrio, le caratteristiche di queste soluzioni confrontate con quelle disponibili a partire dai dati osservati nelle economie reali, permettono di stabilire a posteriori la bontà o meno delle regole fissate. In particolare, questo permette di individuare la tipologia e le caratteristiche delle transazioni che generano all'equilibrio code di potenza di Pareto, spiegando così in modo elementare sia la loro formazione che la loro persistenza.

I modelli per la distribuzione del reddito che andremo a descrivere sono stati e sono particolarmente interessanti da studiare matematicamente anche in ragione della varietà degli stati di equilibrio risultanti. A differenza della teoria cinetica dei gas, brevemente introdotta nella Sezione 2, per la quale l'equilibrio Maxwelliano (2.8) è la densità di equilibrio universale delle velocità delle molecole, le densità di equilibrio generate dalle transazioni finanziarie possono essere molto diverse a seconda delle regole di transazione, e in generale non è possibile determinarle in modo analitico. Di conseguenza, i risultati matematici ottenuti riescono a descrivere in modo preciso solo poche proprietà accessibili analiticamente (momenti, regolarità, ecc.) [26].

La costruzione di un modello cinetico di un mercato basato sulle interazioni tra agenti si basa su poche ipotesi largamente condivisibili. Per prima cosa, gli agenti sono considerati *indistinguibili*, di modo che il loro stato ad ogni istante di tempo $t \geq 0$ è completamente caratterizzato dalla loro ricchezza $w \geq 0$ in quell'istante. Secondo, la variazione nel tempo della ricchezza è sostanzialmente dovuta alle transazioni tra coppie di agenti. La *transazione* rappresenta una interazione binaria in cui la parte della ricchezza che ciascun agente mette in gioco viene modificata in base a un preciso meccanismo valido per tutti. Più in dettaglio, quando due agenti A e B effettuano una transazione, le loro ricchezze v e w si modificano e assumono i valori v^* e w^* in accordo a una regola di scambio lineare analoga alla (2.3), descritta in piena generalità dai quattro coefficienti di transazione p_1, p_2, q_1 e q_2

$$v^* = p_1 v + q_1 w, \qquad w^* = p_2 v + q_2 w. \tag{3.11}$$

Si noti che il coefficiente p_1 (rispettivamente p_2) rappresenta la percentuale della ricchezza v messa in gioco dall'agente A che ritorna all'agente A (rispettivamente passa all'agente B). Analogo significato per i coefficienti q_1 e q_2, legati all'agente B.

Per meglio descrivere l'aleatorietà spesso legata alle operazioni di tipo finanziario, nonché per evitare transazioni in cui gli agenti possano perdere più di quanto hanno impegnato, come coefficienti di transazione si fissano dei parametri aleatori non negativi.

Una volta assegnate le regole di transazione, le analogie fra la teoria cinetica dei gas e la teoria cinetica per il sistema di agenti si completano scrivendo la legge di evoluzione per la densità $f = f(w, t)$ della ricchezza w degli agenti. Fissando per semplicità massa $\rho = 1$, e una frequenza di collisione $\sigma = 1$, l'equazione di Boltzmann associata (l'analogo della (2.2)) si scrive [28]

$$\frac{\partial}{\partial t} f(w,t) = Q(f,f)(w,t) = Q_+(f,f)(w,t) - f(w,t). \tag{3.12}$$

Il termine di collisione Q_+ è operativamente descritto tramite la sua azione sulle quantità osservabili. Se v^* e w^* sono le ricchezze risultato della transazione (3.11), per ogni fissato osservabile $\varphi = \varphi(w)$

$$\int_0^{+\infty} \varphi(w) Q_+(f,f)(w)\,dw = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} \langle \varphi(v^*) + \varphi(w^*)\rangle f(v) f(w)\,dv\,dw. \tag{3.13}$$

Nella (3.13) e nel seguito, per ogni fissata quantità aleatoria θ, ne indicheremo con $\langle\theta\rangle$ il valor medio.

Come per l'equazione di Boltzmann (2.2), la variazione degli osservabili è data dall'equazione

$$\frac{d}{dt}\int_0^{+\infty} \varphi(w) f(w,t)\,dw = \int_0^{+\infty} \varphi(w)[Q_+(f,f) - f](w,t)\,dw. \tag{3.14}$$

Dal momento che, se $f(w)$ è una densità di probabilità

$$\int_0^{+\infty} \varphi(w) f(w)\,dw = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} (\varphi(v) + \varphi(w)) f(v) f(w)\,dv\,dw.$$

Inserendo questa identità nella (3.14), e utilizzando la (3.13), si arriva a concludere che, come nel caso cinetico, le quantità $\varphi(w)$ invarianti rispetto alla transazione sono quelle per le quali

$$\langle \varphi(v^*) + \varphi(w^*)\rangle = \varphi(v) + \varphi(w). \tag{3.15}$$

In aggiunta alla funzione $\varphi(w) = 1$, che chiaramente soddisfa la (3.15), e corrisponde alla conservazione della massa ($f(w,t)$ rimane una densità di probabilità al variare del tempo se lo è inizialmente), l'unico altro invariante di transazione significativo è relativo alla scelta $\varphi(v) = v$. Le transazioni per le quali

$$\langle v^* + w^*\rangle = v + w \tag{3.16}$$

caratterizzano un sistema di agenti con ricchezza media conservata (l'analogo di un gas ideale a molecole perfettamente elastiche per il quale si conserva l'energia). Detta $m(t)$ la ricchezza media al tempo $t \geq 0$

$$m(t) = \int_0^{+\infty} w f(w,t)\,dw = m(t=0) = m_0\,.$$

Al di là del fatto che un mercato a ricchezza media conservata non è realistico, poiché i sistemi economici sono caratterizzati da fasi di crescita (o di decrescita) della ricchezza media, dal punto di vista modellistico questa scelta permette di sfruttare fino in fondo le analogie con la teoria cinetica dei gas rarefatti, inclusa la parte che riguarda la convergenza verso l'equilibrio della densità $f(w,t)$ della ricchezza degli agenti, nonché la determinazione delle proprietà macroscopiche di tale equilibrio.

A questo proposito, tenendo in conto ancora una volta le analogie con la teoria cinetica dei gas, ed in particolare i risultati di Villani [35], possiamo ragionevolmente supporre che la velocità con cui la soluzione dell'equazione cinetica (3.12) si porta sulla soluzione di equilibrio sia molto maggiore della velocità con cui nel sistema economico eventualmente varia la ricchezza media. Questo garantisce che per la maggior parte del tempo il sistema economico si trova vicino ad una configurazione di equilibrio.

La relazione (3.16) è soddisfatta sostanzialmente in due casi che descrivono situazioni finanziarie molto diverse. Il primo caso corrisponde a transazioni *puntualmente conservative*, cioè transazioni (3.11) che verificano la condizione

$$v^* + w^* = v + w.$$

Nelle transazioni puntualmente conservative la quantità totale di denaro oggetto della transazione rimane invariata. Uno degli agenti guadagna, l'altro perde.

Il secondo caso corrisponde a transazioni *conservative in media*, cioè transazioni in cui, mentre in generale

$$v^* + w^* \neq v + w,$$

la (3.16) rimane verificata prendendone la media. In altre parole, dalla singola transazione entrambi gli agenti possono ricavare un guadagno (o una perdita). In questo caso ad essere conservata è solo la quantità di denaro dell'intero sistema. Risulta evidente che la possibilità per entrambi gli agenti di trarre guadagno dalla transazione, rende la stessa molto più realistica.

Dal punto di vista modellistico, le prime transazioni ad essere introdotte sono state di tipo puntualmente conservativo. In una serie di lavori dei primi anni duemila, a partire da [18], la scuola indiana facente capo a Bikas Chakrabarti [11, 12, 13, 14] ha considerato transazioni con coefficienti dati da

$$p_1 = 1 - \lambda(1-\varepsilon), \quad q_1 = \lambda\varepsilon,$$
$$p_2 = \lambda(1-\varepsilon), \quad q_2 = 1 - \lambda\varepsilon.$$

Tali coefficienti sono caratterizzati dalla presenza di un parametro $0 < \lambda < 1$, e da una variabile casuale ε, distribuita ad esempio in modo uniforme sull'intervallo $[0,1]$. Il parametro λ, che può essere sia costante che dipendente dalla ricchezza personale degli agenti, caratterizza il cosiddetto *indice di salvaguardia*, e nasce dalla considerazione che nessun agente rischierebbe tutta la sua ricchezza in un'unica transazione.

Il caso limite $\lambda = 1$ corrisponde infatti a un modello di gioco (d'azzardo) nel quale

$$v^* = \varepsilon(v+w), \quad w^* = (1-\varepsilon)(v+w). \tag{3.17}$$

In questa transazione, la posta in gioco $v + w$ viene ripartita sulla base di una percentuale aleatoria data dalla variabile ε. Come vedremo, per la sua relativa semplicità, il modello cinetico ottenuto dalla (3.17) può essere studiato in dettaglio, e le corrispondenti soluzioni di equilibrio in vari casi si ottengono in modo esplicito [2].

Nel 2005, alla fine di uno studio condotto in collaborazione con Lorenzo Pareschi e Stephane Cordier, il concetto di indice di salvaguardia è stato associato al concetto di rischio [15]. I coefficienti considerati in [15] sono del tipo

$$p_1 = 1 - \lambda + \eta, \quad q_1 = \lambda, \quad p_2 = \lambda, \quad q_2 = 1 - \lambda + \tilde{\eta}.$$

In aggiunta al parametro $0 < \lambda < 1$, i coefficienti di transazione vedono la presenza di due variabili aleatorie η e $\tilde{\eta}$, indipendenti ed equidistribuite, di media nulla e tali da garantire la positività di p_1 e q_2. Poiché in questo caso

$$v^* + w^* = v + w + \eta v + \tilde{\eta} w \neq v + w,$$

le transazioni sono conservative solo in media. La presenza del contributo ηv nel risultato della transazione per l'agente a ricchezza v (rispettivamente $\tilde{\eta} w$ per l'agente a ricchezza w), rappresenta la componente di rischio (aleatoria) presente nella transazione.

Lo stesso effetto può essere ottenuto nel gioco (3.17) sostituendo l'unica variabile aleatoria ε con due variabili aleatorie η e $\tilde{\eta}$ a valori positivi, indipendenti e con la stessa legge, di modo che

$$v^* = \eta(v+w), w^* = \tilde{\eta}(v+w), \tag{3.18}$$

con η e $\tilde{\eta}$ soggette alla condizione $\langle\eta\rangle = \langle\tilde{\eta}\rangle = 1/2$. Anche in questo caso, infatti

$$v^* + w^* = (\eta + \tilde{\eta})(v+w) \neq v + w,$$

e le transazioni sono conservative solo in media.

4. – Perché le code di Pareto?

La maggior parte delle ricerche citate nella sezione precedente, oltre alla parte modellistica contenente la descrizione del modello cinetico e delle sue proprietà, dedicava ampio spazio allo studio numerico della soluzione, cercando di estrarre dalle simulazioni numeriche indicazioni il più possibile precise sulla possibile formazione di code di potenza.

In generale, i metodi numerici più utilizzati per descrivere questi modelli cinetici sono i metodi di tipo Monte Carlo [28], particolarmente adatti a simulare interazioni binarie con coefficienti aleatori in un sistema con un numero elevato ma finito di agenti.

Verificare che la soluzione (numerica) dell'equazione cinetica tende a formare code polinomiali è oggettivamente un problema molto complesso. Infatti le code (di potenza) della distribuzione si formano in ragione della presenza di pochi agenti con ricchezze elevate, caratteristica che determina grosse oscillazioni della soluzione discreta dell'equazione cinetica nella parte della distribuzione lontana dallo zero.

In altre parole, il metodo numerico non è risolutivo esattamente nella zona in cui dovrebbe esserlo.

Una risposta precisa sul comportamento della soluzione per tempi lunghi poteva venire solo da uno studio matematico rigoroso del problema generale, o, in alternativa, dalla ricerca di soluzioni esplicite di equilibrio per modelli cinetici di tipo Boltzmann il più possibile semplificati.

Una prima risposta è stata ottenuta nel 2008 in collaborazione con Daniel Matthes [26] (vedi anche [19, 20, 28]). Se si assume come modello cinetico per l'evoluzione della ricchezza l'equazione di Boltzmann (3.12), le code di potenza di Pareto si possono formare solo in presenza di collisioni *conservative in media*. Le collisioni *puntualmente conservative* danno infatti luogo ad una distribuzione di equilibrio che ha tutti i momenti finiti (l'analogo della distribuzione Maxwelliana (2.8)).

Nel caso delle collisioni *conservative in media* introdotte in [15], la formazione delle code, e la determinazione del corrispondente indice di Pareto dipendono *esclusivamente* dalla legge di distribuzione delle variabili di rischio η e $\tilde{\eta}$. In altre parole, nel modello cinetico a transazioni binarie, la formazione delle code è conseguente al fatto che le transazioni presentano un certo grado di rischio. Eliminando il rischio si eliminano anche le code.

Il modello cinetico di puro gioco, ottenuto con transazioni del tipo (3.17), permette un'analisi dettagliata delle soluzioni di equilibrio, fornendo in molti casi soluzioni esplicite che confermano la differenza sostanziale fra transazioni puntualmente conservative e transazioni conservative in media [2].

Come descritto nella Sezione 2, le soluzioni di equilibrio del modello cinetico (3.12) sono le densità di probabilità soluzioni dell'equazione

$$f(w) = Q_+(f,f)(w). \tag{4.19}$$

La ricerca delle soluzioni della (4.19) passa attraverso la possibilità di utilizzare trasformate di Laplace, rendendo in questo modo il problema relativamente più semplice [2]. Senza entrare nei dettagli, si riconosce che la (4.19) è risolubile esplicitamente per opportune scelte delle variabili aleatorie ε in (3.17) (rispettivamente η e $\tilde{\eta}$ in (3.18)).

Rimandando a un qualunque testo classico di Calcolo delle Probabilità (o a Wikipedia) per ulteriori approfondimenti su alcune classiche densità di probabilità, ricordo che una variabile aleatoria è di tipo Beta con parametri $a, b > 0$ (in breve $Beta(a,b)$) se la sua densità è data da

$$\beta_{a,b}(x) = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}\, x^{a-1}\,(1-x)^{b-1}, \qquad 0 \le x \le 1.$$

Nel caso in cui le transazioni sono puntualmente conservative, e la variabile casuale ε in (3.17) è una variabile aleatoria simmetrica di tipo $Beta(a,a)$, lo stato di equilibrio dell'equazione (3.12) (la soluzione della (4.19)) risulta essere una distribuzione Gamma

$$f_\infty(w) = \frac{1}{\Gamma(a)}\, a^a w^{a-1} \exp\{-aw\}, \qquad w \ge 0.$$

Viceversa, nel caso in cui le transazioni sono conservative solo in media, e sia $(4\eta)^{-1}$ che $(4\tilde{\eta})^{-1}$ nella (3.18) sono variabili aleatorie $Beta(a+1/2, a-1/2)$, con $a > 1$, cosicchè $\langle \eta + \tilde{\eta} \rangle = 1$, la soluzione di equilibrio risulta essere una distribuzione Gamma inversa, cioè

$$f_\infty(w) = \frac{(a-1)^a}{\Gamma(a)} \frac{1}{w^{a+1}} \exp\{-(a-1)/w\}, \quad w \geq 0. \tag{4.20}$$

A differenza del primo caso, nella (4.20) sono perfettamente riconoscibili le code di potenza.

È interessante osservare che la funzione (4.20) ottenuta dallo studio di un modello cinetico elementare coincide con la funzione di equilibrio (la trottola sociale) originariamente studiata da Amoroso [1], e successivamente ripresa da D'Addario [16, 17]. Questa osservazione giustifica ancor di più l'interesse verso i modelli matematici, i quali, una volta rispettate le caratteristiche essenziali del fenomeno, pur essendo molto semplificati rispetto alla realtà, sono in grado di riprodurre la stessa con buona approssimazione.

Come evidenziato dalla realtà economica in cui viviamo, le code di Pareto sono un fenomeno stabile, che permane anche in presenza di tassazione. Una verifica di questa proprietà è stata ottenuta dal punto di vista modellistico considerando equazioni cinetiche del tipo Boltzmann in presenza di termini atti a simulare la tassazione, cioè il prelievo di una parte della ricchezza, con successiva redistribuzione al fine di mantenere la conservazione della ricchezza media [4, 23, 33].

5. – Qualche conclusione

A vent'anni dalla nascita ufficiale della ricerca nell'ambito dell'econofisica, possiamo dire con certezza che la modellistica fisico-matematica dei sistemi socio-economici è un utile strumento di verifica e previsione, duttile e relativamente facile da implementare al fine di ottenere soluzioni numeriche anche in presenza di molti parametri.

Gli strumenti matematici utilizzati, essenzialmente nascosti in questa breve esposizione, sono purtroppo solo in parte accessibili anche a studiosi di discipline non strettamente scientifiche. Per questa ragione, al momento il contributo che le motivazioni economiche hanno reso alla ricerca matematica e fisica sono prevalenti rispetto alle potenzialità che tale ricerca potrebbe avere nel campo dell'economia. In ogni caso, attingendo a problemi classici di economia, la teoria cinetica ha sviluppato in questi anni nuovi argomenti e nuove tecniche, che ne hanno evidenziato le sue solide basi.

Infatti, come ampiamente evidenziato in [27, 28], le applicazione della teoria cinetica vanno oggi dagli ambiti economici a quelli sociali e biologici, e sono complementari ad altri approcci di tipo fisico e matematico, quale quello rappresentato dalle equazioni di reazione-diffusione.

La ricerca sui temi della distribuzione della ricchezza è tuttora molto fervida, e mira ad introdurre aspetti più realistici che se da un lato rendono i modelli più complicati, dall'altro sono in grado di descrivere al meglio i principali fenomeni connessi con le economie di mercato.

Ad esempio, al fine di differenziare le transazioni finanziarie fra agenti da quelle delle molecole, si sono rese le stesse dipendenti da variabili legate ad aspetti più strettamente sociali [28]. Fra questi, l'opinione e la conoscenza personale degli agenti hanno sicuramente un ruolo attivo. Risultati interessanti in questa direzione sono stati ottenuti solo recentemente [25] tenendo in conto l'opinione degli agenti nelle transazioni. Infine, il ruolo della conoscenza nella (ineguale) distribuzione della ricchezza è stato analizzato in [29] considerando transazioni il cui esito è legato al grado personale di conoscenza degli agenti.

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

[1] L. AMOROSO, *Ricerche intorno alla curva dei redditi.* Ann. Mat. Pura Appl. Ser. 4 **21**, (1925), 123–159.

[2] F. BASSETTI, G. TOSCANI, *Explicit equilibria in a kinetic model of gambling.* Phys. Rev. E **81**, (2010), 066115.

[3] R. BENINI, *Di alcune curve descritte da fenomeni economici aventi relazione colla curva del reddito o con quella del patrimonio.* Giornale degli Economisti, Serie II **14**, (1897), 177–214.

[4] M. BISI, G. SPIGA, G. TOSCANI, *Kinetic models of conservative economies with wealth redistribution.* Commun. Math. Sci. **7**, (4) (2009), 901–916.

[5] A.V. BOBYLEV, *The theory of the nonlinear spatially uniform Boltzmann equation for Maxwellian molecules.* Sov. Sci. Rev. c **7**, (1988), 111–233.

[6] A.V. BOBYLEV, J.A. CARRILLO, I. GAMBA, *On some properties of kinetic and hydrodynamic equations for inelastic interactions*. J. Stat. Phys., **98**,(2001), 743–773; Erratum on: J. Stat. Phys., **103**, (2001), 1137–1138.

[7] L. BOLTZMANN, *Weitere Studien über das Wärmegleichgewicht unter Gasmolekülen*. Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften **66**, (1995), 275–370, in *Lectures on Gas Theory*. Berkeley: University of California Press (1964) Translated by S.G. Brush. Reprint of the 1896-1898 Edition. Reprinted by Dover Publ.

[8] J.A. CARRILLO, G. TOSCANI, *Contractive probability metrics and asymptotic behavior of dissipative kinetic equations*. Riv. Mat. Univ. Parma **6/7**, (2007), 75–198.

[9] C. CERCIGNANI , *The Boltzmann equation and its applications*. Springer Series in Applied Mathematical Sciences, Vol. **67**, Springer–Verlag, New York 1988.

[10] C. CERCIGNANI, R. ILLNER, M. PULVIRENTI, *The mathematical theory of dilute gases*. Springer Series in Applied Mathematical Sciences, Vol. **106**, Springer–Verlag, New York 1994.

[11] A. CHAKRABORTI, *Distributions of money in models of market economy*. Int. J. Modern Phys. C **13**, (2002), 1315–1321.

[12] A. CHAKRABORTI, B.K. CHAKRABARTI, *Statistical mechanics of money: effects of saving propensity*. Eur. Phys. J. B **17**, (2000), 167–170

[13] A. CHATTERJEE, B.K. CHAKRABARTI, S.S. MANNA, *Pareto law in a kinetic model of market with random saving propensity*. Physica A **335**, (2004), 155–163.

[14] A. CHATTERJEE, B.K. CHAKRABARTI, R.B. STINCHCOMBE, *Master equation for a kinetic model of trading market and its analytic solution*. Phys. Rev. E **72**, (2005), 026126.

[15] S. CORDIER, L. PARESCHI, G. TOSCANI, *On a kinetic model for a simple market economy*. J. Stat. Phys. **120**, (2005), 253–277.

[16] R. D'ADDARIO, *Intorno alla curva dei redditi di Amoroso*. Riv. Italiana Statist. Econ. Finanza **4**, (1) (1932), 723–729.

[17] R. D'ADDARIO, *Ricerche sulla curva dei redditi*. Giornale degli Economisti e Annali di Economia Nuova Serie, Anno 8, No. 1/2 (1949), 91–114.

[18] A. DRĂGULESCU, V.M. YAKOVENKO, *Statistical mechanics of money*. Eur. Phys. Jour. B **17**, (2000), 723–729.

[19] B. DÜRING, D. MATTHES, G. TOSCANI, *Kinetic equations modelling wealth redistribution: a comparison of approaches*. Phys. Rev. E **78**, (2008), 056103.

[20] B. DÜRING, D. MATTHES, G. TOSCANI, *A Boltzmann type approach to the formation of wealth distribution curves*. Riv. Mat. Univ. Parma **8**, (1) (2009), 199–261.

[21] M.H. ERNST, R. BRITO, *High energy tails for inelastic Maxwell models*. Europhys. Lett. **58**, (2002), 182–187.

[22] M.H. ERNST, R. BRITO, *Scaling solutions of inelastic Boltzmann equation with over-populated high energy tails*. J. Statist. Phys. **109**, (2002), 407–432.

[23] S. GUALA, *Taxes in a simple wealth distribution model by inelastically scattering particles*. Interdisciplinary description of complex systems **7**, (2009), 1–7.

[24] E. MAJORANA, *Il valore delle leggi statistiche nella fisica e nelle scienze sociali*. Scientia **36**, (1942), 58–66.

[25] D. MALDARELLA, L. PARESCHI, *Kinetic models for socio-economic dynamics of speculative markets*. Physica A **391**, (2012), 715–730.

[26] D. MATTHES, G. TOSCANI, *On steady distributions of kinetic models of conservative economies*. J. Stat. Phys. **130**, (2008), 1087–1117.

[27] G. NALDI, L. PARESCHI, G. TOSCANI eds., *Mathematical modelling of collective behavior in socio- economic and life sciences*. Birkhauser, Boston 2010.

[28] L. PARESCHI, G. TOSCANI, *Interacting multiagent systems: kinetic equations and Monte Carlo methods*. Oxford University Press, Oxford 2014.

[29] L. PARESCHI, G. TOSCANI, *Wealth distribution and collective knowledge. A Boltzmann approach*. Phil. Trans. R. Soc. A **372**, (2014), 20130396.

[30] V. PARETO, *Cours d'èconomie politique*. Rouge, Lausanne and Paris, 1897.

[31] F. SLANINA, *Inelastically scattering particles and wealth distribution in an open economy*. Phys. Rev. E **69**, (2004), 046102.

[32] H.E. STANLEY, V. AFANASYEV, L.A.N. AMARAL, S.V. BULDYREV, A.L. GOLDBERGER, S. HAVLIN, H. LESCHORN, P. MAASS, R.N. MANTEGNA, C.-K. PENG, P.A. PRINCE, M.A. SALINGER, M.H.R. STANLEY, G.M. VISWANATHAN, *Anomalous fluctuations in the dynamics of complex systems: from DNA and physiology to econophysics*. Physica A **224**, (1996), 302–321.

[33] G. TOSCANI, *Wealth redistribution in conservative linear kinetic models with taxation*. Europhysics Letters **88**, (1) (2009), 10007.

[34] G. TOSCANI, C. VILLANI, *Sharp entropy dissipation bounds and explicit rate of trend to equilibrium for the spatially homogeneous Boltzmann equation*. Commun. Math. Phys. **203** (1999), 667–706.

[35] C. VILLANI, *Cercignani's conjecture is sometimes true and always almost true*. Commun. Math. Phys. **234**, (2003), 455–490.

Giuseppe Toscani

Professore di Fisica Matematica presso l'Università di Pavia. I suoi principali interessi di ricerca riguardano la teoria cinetica dei gas, le equazioni a derivate parziali di tipo parabolico, e la modellazione matematica di sistemi socio-economici. Sull'ultimo argomento ha di recente scritto, in collaborazione con L. Pareschi, il libro "Interacting Multiagent Systems, Kinetic equations Monte Carlo Methods", edito dalla Oxford University Press.