Atti Accademia Nazionale Lincei Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti Lincei
Matematica e Applicazioni

Paolo Podio-Guidugli

La scelta delle interazioni inerziali nei continui con microstruttura

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti Lincei. Matematica e Applicazioni, Serie 9, Vol. **14** (2003), n.4, p. 319–326.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLIN_2003_9_14_4_319_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti Lincei. Matematica e Applicazioni, Accademia Nazionale dei Lincei, 2003.

Rend. Mat. Acc. Lincei
s. 9, v. 14:319-326 (2003)

Meccanica dei continui. — *La scelta delle interazioni inerziali nei continui con microstruttura.* Nota di PAOLO PODIO-GUIDUGLI, presentata (*) dal Socio S. Rionero.

ABSTRACT. — *On the choice of inertial interactions in microstructured continua.* With special attention to the relevant example of Ericksen's liquid crystals [6], an axiomatic framework is presented, within which coherent representations for the inertial interactions and the kinetic energy in microstructured continua can be deduced.

KEY WORDS: Structured continua; Inertial interactions; Kinetic energy.

RIASSUNTO. — Dedicando speciale attenzione all'esempio significativo dei cristalli liquidi di Ericksen [6], viene presentato un apparato assiomatico che consente di dedurre rappresentazioni coerenti delle interazioni d'inerzia e dell'energia cinetica per continui con microstruttura.

1. INTRODUZIONE

Tra gli ultimi degli anni '70 e i primi anni '80 del secolo scorso, un tema di ricerca frequentato da molti, oggetto di una mia lunga e intensa collaborazione con G. Capriz, era la costruzione di un apparato formale per i continui con microstruttura, un apparato che fosse sufficientemente «robusto» per ricomprendere le molte e diverse applicazioni, chiarendone gli aspetti comuni e le differenze. Di questa costruzione, alla cui esposizione Capriz doveva poi dedicare una breve e tersa monografia [1], una parte ci affaticava particolarmente, perché avremmo voluto trovare ragioni di fondamento che giustificassero in modo soddisfacente l'assetto formalmente impeccabile che avevamo dato alla questione in [2]: una descrizione generale dell'inerzia di continui con microstruttura. Quale fosse la descrizione più conveniente era allora materia di qualche controversia [3], poi sopita anche se irrisolta. Qui di seguito mi propongo di esemplificare un approccio alla questione d'inerzia che ho proposto più di recente [4, 5], adattandolo con qualche generalizzazione ad un tipo paradigmatico di continui con microstruttura, i cristalli liquidi di Ericksen [6].

2. COME UNA LEGGE DI BILANCIO DIVIENE UN'EQUAZIONE DI EVOLUZIONE

Per cogliere lo sviluppo del processo che dà il titolo a questa sezione conviene ripensarlo nel caso di un *punto materiale*, una coppia $\mathsf{m} = (\mu, p)$ dove μ è la massa e p la posizione nello spazio assoluto tipico della meccanica di Newton, lo spazio di Dio [7].

Un punto materiale è soggetto esclusivamente ad azioni ad esso esterne; la *legge di bilancio* prescrive che la forza totale agente su m sia nulla:

$$f = 0. \tag{2.1}$$

(*) Nella seduta dell'11 aprile 2003.

Il primo passo per conferire a (2.1) natura evolutiva consiste in un'operazione di «chirurgia mentale» che ci consenta di distinguere dal proprio complemento $\mathcal{W}^e$ il *mondo* $\mathcal{W}$, cioè, la collezione degli oggetti le cui interazioni con m pensiamo abbiano principale importanza nel deciderne il moto, tanto da descriverle individualmente: ad esempio, mirando allo studio della dinamica terrestre alla maniera di Keplero, identifichiamo m con la Terra, $\mathcal{W}$ con l'insieme costituito dalla Terra, dal Sole e dalla Luna, e $\mathcal{W}^e$ con l'insieme di tutti gli altri corpi celesti. Consegue dal distinguere $\mathcal{W}$ da $\mathcal{W}^e$ che, indicando con f^{in} e f^{ni} le interazioni di m con, rispettivamente, $\mathcal{W}^e$ e $\mathcal{W}$, si ponga

$$f = f^{in} + f^{ni}. \tag{2.2}$$

Il secondo passo consiste nel compiere la scelta costitutiva di una rappresentazione per l'interazione di $\mathcal{W}^e$ con m, la *forza d'inerzia*:

$$f^{in} = -\dot{q}\,, \qquad q = \mu v\,, \qquad \mu > 0\,, \qquad v = \dot{p}\,, \tag{2.3}$$

dove q è la quantità di moto di m; il terzo, nello scegliere una rappresentazione costitutiva per l'interazione di $\mathcal{W}$ con m (la forza non inerziale f^{ni}), ad esempio,

$$f^{ni} = \widehat{f}(p, v, t)\,. \tag{2.4}$$

Si noti che, mentre si dànno molte scelte diverse di $\widehat{f}$, la scelta della forma di f^{in} resta nella meccanica newtoniana sempre la stessa, sì che forse molti neppure ne percepiscono la natura costitutiva; ciò perché si presume che f^{in} dia conto dell'azione su m delle remote *stelle fisse* ovvero, in altre parole, dell'interazione a distanza del punto materiale in esame con l'universo deprivato di $\mathcal{W}$, interazione che resta sostanzialmente immutata qualunque siano gli elementi che si decide di includere in $\mathcal{W}$.

Finalmente, combinando la legge di bilancio (2.1) con le relazioni costitutive (2.2)-(2.4), si ottiene l'*equazione di evoluzione*

$$-(\mu\dot{p})^{\cdot} + \widehat{f}(p, \dot{p}, t) = 0\,. \tag{2.5}$$

È importante osservare che il tipo di questa equazione, e quindi la fenomenologia matematica che essa può dispiegare, dipende crucialmente da tutte le specificazioni costitutive, ad illustrazione, se ce ne fosse bisogno, dell'importanza di queste in una teoria meccanica.

L'interazione di un punto materiale con il complemento del mondo cui appartiene non si esaurisce nella forza che ne subisce, ma consta anche dell'*energia cinetica* che gliene viene. È naturale richiedere che le rappresentazioni costitutive delle due manifestazioni dell'interazione tra m e $\mathcal{W}^e$, quella dinamica e quella energetica, siano tra loro coerenti. Ora, la scelta newtoniana per l'energia cinetica di m,

$$\kappa = \frac{1}{2}\mu v \cdot v\,, \tag{2.6}$$

è coerente con la scelta (2.3) per la forza d'inerzia nel senso che la variazione temporale dell'energia cinetica $\dot{\kappa}$ e la potenza inerziale $\pi^{in} = f^{in} \cdot v$ si compensano in ogni moto di m:

$$\dot{\kappa} + \pi^{in} = 0\,. \tag{2.7}$$

Ebbene, si trova che la medesima relazione deve intercorrere tra energia cinetica e forza d'inerzia per i classici continui di Cauchy, se si vuole che il bilancio dell'energia sia scrivibile tanto nella forma

$$(\textit{energia totale})^{\cdot} = \textit{calore} + \textit{potenza non inerziale} \tag{2.8}$$

che nella forma alternativa

$$(\textit{energia interna})^{\cdot} = \textit{calore} + \textit{potenza totale}\,. \tag{2.9}$$

Sempre per i continui di Cauchy ho mostrato in [4] come si possa argomentare tanto la decomposizione additiva dell'energia totale in energia interna ed energia cinetica che la deduzione simultanea di rappresentazioni costitutive per quest'ultima e per la forza d'inerzia, rappresentazioni che risultano appena più generali di quelle solite e tuttavia conformi con la regola di coerenza (2.7). L'uso ragionato di questa regola ha permesso di risolvere il problema di scelta delle azioni inerziali che intervengono nell'evoluzione di una superficie di separazione tra fasi [8] o dell'apice di una frattura [9], nonché di giustificare la classificazione come azione inerziale che non involge spesa di potenza di un termine insolito che appare nell'equazione di evoluzione dei materiali magnetostrittivi [10, 11]. Nelle prossime due sezioni ricalcherò gli sviluppi di [4] per ottenere la rappresentazione costitutiva delle azioni inerziali sui cristalli liquidi, quali Ericksen li ha descritti nel 1961. Questi risultati, con quelli di [8-11] e [12], esemplificano la natura «robusta» delle argomentazioni esposte in [4].

3. Notazioni e nozioni preliminari

Sia $p(X, t)$ il campo che assegna la posizione corrente del punto tipico X di un cristallo liquido all'istante generico t del suo moto e sia $d(X, t)$ il campo del *direttore*, il parametro microstrutturale che specifica l'orientazione locale (ai fini presenti d può essere trattato come un campo vettoriale di modulo unitario, anche se, come quasi tutti sanno, d va inteso più propriamente come un campo a valori nello spazio proiettivo). Scelta un'origine o, pongo

$$\boldsymbol{p} = (p - o,\, d) \tag{3.1}$$

per il campo del vettore posizione generalizzata e coerentemente costruisco i campi di velocità e accelerazione generalizzate:

$$\boldsymbol{v} = (v, \dot{d})\,, \qquad \boldsymbol{a} = (a, \ddot{d})\,, \tag{3.2}$$

dove $v = \dot{p}$ e $a = \dot{v}$, e il campo di gradiente generalizzato:

$$\boldsymbol{F} = (F, G)\,, \tag{3.3}$$

dove $F = \nabla p$ è il gradiente di deformazione e $G = \nabla d$ è il gradiente di direttore.

In vista della specifica applicazione che ho in mente, scelgo $(\boldsymbol{F}, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{v})$ come lista delle variabili, dalle quali suppongo che dipendano, a meno che altri requisiti non lo vietino, tutte le quantità oggetto di specificazione costitutiva. Queste ultime sono:

$$\mathbf{b}^{in} = (b^{in}, c^{in}) \tag{3.4}$$

dove $b^{in}(\mathbf{F}, \mathbf{a}, \mathbf{v})$ e $c^{in}(\mathbf{F}, \mathbf{a}, \mathbf{v})$ sono, rispettivamente, la forza e la *microcoppia* d'inerzia, le quali determinano la *potenza inerziale* spesa in un moto nella forma

$$\pi^{in}(\mathbf{F}, \mathbf{a}, \mathbf{v}) = \mathbf{b}^{in}(\mathbf{F}, \mathbf{a}, \mathbf{v})\cdot\mathbf{v} = b^{in}\cdot v + c^{in}\cdot\dot{d}\ ; \tag{3.5}$$

e l'*energia totale* $\tau(\mathbf{F}, \mathbf{a}, \mathbf{v})$ (non presuppongo qui alcuna partizione dell'energia in energia interna e cinetica: questa partizione sarà un risultato dell'analisi a seguire). Potenza inerziale ed energia totale intervengono nella definizione della *potenza interna*

$$\alpha(\mathbf{F}, \mathbf{a}, \mathbf{v}, \dot{\mathbf{F}}, \dot{\mathbf{a}}) = \dot{\tau}(\mathbf{F}, \mathbf{a}, \mathbf{v}) + \pi^{in}(\mathbf{F}, \mathbf{a}, \mathbf{v})\,. \tag{3.6}$$

Per *cambiamento di osservatore* intendo una trasformazione isometrica

$$p^{+} = p_0(t) + Q_0(t)(p - 0) \tag{3.7}$$

dello spazio ambiente corrente, che coincida con l'identità almeno ad un istante t_0 (quindi $Q_0(t)$ è una rotazione per ogni t, mentre $p_0(t_0) = o$ e $Q_0(t_0) = 1$); e chiamo un cambiamento di osservatore *galileiano* se $\dot{p}_0(t) \equiv w$, un vettore costante, e $\dot{Q}_0(t) \equiv 0$; *leibniziano* se $\dot{p}_0(t) \equiv 0$ e $\dot{Q}_0(t)\, Q_0^T(t) \equiv W$, un tensore antisimmetrico costante. Posto $\theta = (\mathbf{F}, \mathbf{a})$ e $\zeta = (\theta, \dot{d})$, e scelto $t = t_0$, si vede facilmente che

(*i*) in un cambiamento di osservatore galileiano,

$$\zeta \mapsto \zeta\,, \qquad v \mapsto v^{+} = v + w\,, \qquad \dot{\theta} \mapsto \dot{\theta}\,; \tag{3.8}$$

(*ii*) in un cambiamento leibniziano,

$$\mathbf{F} \mapsto \mathbf{F}\,, \qquad \mathbf{a} \mapsto \mathbf{a}^{+} = \mathbf{a} + 2W\mathbf{v} + W^2\mathbf{p}\,, \qquad \mathbf{v} \mapsto \mathbf{v}^{+} = \mathbf{v} + W\mathbf{p}\,, \tag{3.9}$$

$$\dot{\mathbf{F}} \mapsto \dot{\mathbf{F}}^{+} = \dot{\mathbf{F}} + W\mathbf{F}\,, \qquad \dot{\mathbf{a}} \mapsto \dot{\mathbf{a}}^{+} = \dot{\mathbf{a}} + 3W\mathbf{a} + 3W^2\mathbf{v} + W^3\mathbf{p}\,. \tag{3.10}$$

4. Il Teorema di rappresentazione

Comincio introducendo e commentando due assiomi. Il primo tra questi è tecnicamente indispensabile, anche se spesso se ne dimentica la menzione, quando si cercano restrizioni generali sulle relazioni costitutive che definiscono l'una o l'altra classe di materiali; la sua funzione è garantire la disponibilità di una classe di processi sufficientemente ricca attraverso una dichiarazione sulla struttura geometrica locale dello spazio degli stati; la sua formulazione dipende dal contesto e qui, per semplicità, suppongo che lo *spazio degli stati* – cioè, delle coppie $\theta = (\mathbf{F}, \mathbf{a})$ – si possa identificare puntualmente con $\mathbb{R}^k$.

A1 (*Libera continuazione locale*). Dati θ_0 e $\dot{\theta}_0$ in $\mathbb{R}^k$ ($k = 24$), si possono trovare un processo $t \mapsto \theta(t)$ ed un istante t_0 tali che riesca $\theta(t_0) = \theta_0$ e $\dot{\theta}(t_0) = \dot{\theta}_0$.

Il secondo assioma caratterizza la forza d'inerzia tramite una dichiarazione sulla potenza che essa spende in un moto.

A2 (*Linearità della potenza inerziale*). Per ogni scelta di θ in $\mathbb{R}^k$, si può trovare $\boldsymbol{b}_D^{in}(\theta)$ in $\mathbb{R}^l$ $(l=6)$ tale che

$$\boldsymbol{b}^{in}(\theta, \boldsymbol{v})\cdot\boldsymbol{v} = \boldsymbol{b}_D^{in}(\theta)\cdot\boldsymbol{v}, \quad \forall \boldsymbol{v} . \tag{4.1}$$

È facile vedere che questo assioma equivale a rappresentare la forza d'inerzia in accordo con una proposta di Serrin [13]:

$$\boldsymbol{b}^{in}(\theta, \boldsymbol{v}) = \boldsymbol{b}_D^{in}(\theta) + \boldsymbol{B}_C(\theta, \boldsymbol{v})\, \boldsymbol{v}\,, \qquad \boldsymbol{B}_C\boldsymbol{v} = (Bv, \dot{C}d)\,, \qquad B=-B^T, \qquad C=-C^T, \tag{4.2}$$

(i suffissi in $\boldsymbol{b}_D^{in}$ e $\boldsymbol{B}_C$ richiamano i nomi di D'Alembert e Coriolis; sono appunto interazioni inerziali *à la* Coriolis, cioè senza spesa di potenza in un moto, ad intervenire nelle equazioni di evoluzione dei continui solidi capaci di magnetostrizione [10, 11]).

Passo quindi ad enunciare il risultato principale di questa *Nota*, il teorema che mostra come, accettati gli assiomi di libera continuazione locale dei processi e di linearità della potenza inerziale, basti una formalizzazione accorta del pregiudizio che la valutazione (cioè, l'osservazione) della potenza interna sia indipendente da un cambiamento di osservatore per ottenere rappresentazioni coerenti dei termini inerziali di forza, microcoppia ed energia nella teoria dei cristalli liquidi.

Teorema (Parte I). Valgano **A1** e **A2**. Si supponga la potenza interna galileianamente invariante:

A3 (*G-invarianza della potenza interna*). Per ogni scelta di θ e $\dot{\theta}$ in $\mathbb{R}^k$ e di $\boldsymbol{v} = (v, \dot{d})$ in $\mathbb{R}^l$, si ha che

$$\alpha(\theta, v^+, \dot{d}, \dot{\theta}) = \alpha(\theta, v, \dot{d}, \dot{\theta})\,, \tag{4.3}$$

per ogni cambiamento galileiano di osservatore (cf. (3.8)).

Allora, l'energia totale si suddivide in due parti:

$$\tau(\theta, \boldsymbol{v}) = \tilde{\varepsilon}(\theta, \dot{d}) + \tilde{\kappa}(\boldsymbol{v})\,, \tag{4.4}$$

la seconda delle quali ammette la rappresentazione

$$\tilde{\kappa}(\boldsymbol{v}) = \frac{1}{2}Mv\cdot v + k(\dot{d})\cdot v + \psi(\dot{d})\,, \tag{4.5}$$

dove il *tensore d'inerzia* M è simmetrico e costante; questa rappresentazione è coerente con quella della parte dalambertiana della forza d'inerzia:

$$\tilde{b}_D^{in}(\theta) = -(Mv)^{\cdot} - (k(\dot{d}))^{\cdot}. \tag{4.6}$$

Osservazioni.

1. La dimostrazione di queste affermazioni, come di quelle oggetto della successiva Parte II, si compie adattando un poco le argomentazioni che consentono la prova, alle pagine 116 e 117 di [4], dell'*Energy Splitting Theorem.*

2. L'indipendenza dal tempo di M va riguardata come l'appropriata generalizzazione della classica *equazione di continuità*:

$$\varrho_c(p(X,t))\, det\, F(X,t) = \varrho(X)\,,$$

dove ϱ_c e ϱ sono le densità di massa nel piazzamento corrente e in quello di riferimento. Qui, M_c, il tensore d'inerzia nel piazzamento corrente, resta definito dalla relazione

$$M_c(p(X,t))\, det\, F(X,t) = M(X)\,;$$

naturalmente, nulla vieta che si introduca l'ipotesi costitutiva ulteriore che $M=\varrho 1$.

3. Con le semplificazioni ovvie, si può qui leggere il risultato corrispondente per i continui di Cauchy [4]: libera continuazione locale dei processi, linearità della potenza inerziale e invarianza galileiana della potenza interna implicano che

(*i*) l'energia totale si suddivide nelle parti interna e cinetica:

$$\tau(\theta, v) = \varepsilon(\theta) + \kappa(v)\,;$$

(*ii*) l'energia cinetica e la forza d'inerzia ammettono le rappresentazioni coerenti:

$$\kappa(v) = \frac{1}{2} Mv\cdot v\,, \qquad M = M^T = \text{cost}\,,$$

$$b^{in}(\theta, v) = -(Mv)^{\cdot} + B(\theta, v)\, v\,, \qquad B(\theta, v) = -B^T(\theta, v)\,.$$

Se, in aggiunta, si supponesse l'energia totale positiva (non negativa), ne seguirebbe che l'energia interna e il tensore d'inerzia risulterebbero del pari positivi (non negativi).

Si ricordi infine che adesso $\theta = (\sigma, a)$, dove σ è una lista di variabili di stato (il gradiente di deformazione F, la sua storia, la temperatura, il gradiente di temperatura ecc.) che si richiede risultino G-invarianti assieme alla corrispondente lista $\dot{\sigma}$. Se dispiacesse una possibile dipendenza dell'energia interna dall'accelerazione, e tuttavia dispiacesse altresì di escluderla brutalmente per ipotesi, si potrebbe escludere tale dipendenza come conseguenza del requisito seguente, cui si può dare il senso di *principio di dissipazione* minimale in una teoria puramente meccanica:

$$\dot{\tau}(\theta, v) \leqslant 0$$

in ogni moto non forzato. Questo requisito si può riguardare come una riformulazione del principio d'inerzia per un punto materiale isolato in meccanica newtoniana; l'indipendenza dell'energia interna dall'accelerazione ne segue se si può contare su processi isolati che ad un istante fissato esibiscano arbitrari «sussulti» (*jerks*) $\ddot{v}$, ciò che l'arbitrarietà di scelta delle condizioni iniziali di posizione e velocità dovrebbe essere sufficiente a garantire.

Teorema (Parte II). Si supponga, in aggiunta, che la potenza interna sia leibnizianamente invariante:

A4 (*L-invarianza della potenza interna*). Per ogni scelta di θ e $\dot{\theta}$ in $\mathbb{R}^k$ e di $\boldsymbol{v}$ in $\mathbb{R}^l$, si ha che

$$\alpha(\boldsymbol{F}, \boldsymbol{a}^+, \boldsymbol{v}^+, \dot{\boldsymbol{F}}^+, \dot{\boldsymbol{a}}^+) = \alpha(\boldsymbol{F}, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{v}, \dot{\boldsymbol{F}}, \dot{\boldsymbol{a}}), \tag{4.7}$$

per tutti i cambiamenti di osservatore leibniziani (cf. (3.9) e (3.10)).

Allora,

(*i*) l'energia totale si suddivide nelle parti interna e cinetica:

$$\tau(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{v}) = \varepsilon(\boldsymbol{F}) + \kappa(\boldsymbol{v}); \tag{4.8}$$

(*ii*) l'energia cinetica, la forza d'inerzia e la microcoppia d'inerzia ammettono le rappresentazioni coerenti:

$$\kappa(\boldsymbol{v}) = \frac{1}{2} Mv \cdot v + \frac{1}{2} I\dot{d} \cdot \dot{d}, \tag{4.9}$$

$$b_D^{in}(\boldsymbol{\theta}) = -(Mv)^{\cdot}, \qquad c_D^{in}(\boldsymbol{\theta}) = -(I\dot{d})^{\cdot}, \tag{4.10}$$

nelle quali al tensore d'inerzia M si affianca un altro tensore simmetrico e costante, il *tensore di microinerzia* I;

(*iii*) la potenza interna risulta pari alla derivata temporale dell'energia interna:

$$\alpha(\boldsymbol{F}, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{v}, \dot{\boldsymbol{F}}, \dot{\boldsymbol{a}}) = \dot{\varepsilon}(\boldsymbol{F}); \tag{4.11}$$

(*iv*) il costrutto $\dot{\kappa} + \pi^{in}$ risulta tanto G- che L-invariante, e soddisfa (2.7).

OSSERVAZIONI.

4. Gli assiomi **A3** e **A4** integrano l'usuale richiesta di invarianza della (derivata temporale della) energia interna.

5. Ericksen [6] sceglie tanto M che I multipli dell'identità tramite la densità di massa ϱ, sicché, in particolare, $c_D^{in} = -(\varrho\dot{d})^{\cdot}$. Le scelte di Ericksen permettono di verificare immediatamente la regola di consistenza (2.7), che d'altra parte vale anche per le scelte più complesse proposte in [3].

RINGRAZIAMENTI

I contenuti di questo scritto furono per la prima volta esposti in pubblico nella conferenza che tenni a Pisa il 16 ottobre 1995, giorno del settantesimo compleanno di Gianfranco Capriz, in occasione del convegno in suo onore. La relativa ricerca era stata svolta nell'ambito del Progetto Nazionale «Termomeccanica dei Continui Classici e dei Materiali Nuovi», finanziato dal Ministero per l'Università e la Ricerca Scientifica e Tecnologica. Desidero ringraziare un anonimo recensore per alcuni suoi pertinenti commenti.

BIBLIOGRAFIA

[1] G. CAPRIZ, *Continua with Microstructure*. Springer Tracts in Natural Philosophy, vol. 35, 1989.

[2] G. CAPRIZ - P. PODIO-GUIDUGLI, *Structured continua from a Lagrangian point of view*. Ann. Mat. Pura Appl., 135, 1983, 1-25.

[3] G. CAPRIZ - P. PODIO-GUIDUGLI - W.O. WILLIAMS, *On balance equations for materials with affine structure*. Meccanica, 17, 1982, 80-84.

[4] P. PODIO-GUIDUGLI, *Inertia and Invariance*. Ann. Mat. Pura Appl., 122 (4), 1997, 103-124.

[5] P. PODIO-GUIDUGLI, *Old and new invariance methods in continuum mechanics*. In: N.H. IBRAGIMOV - F.M. MAHOMED (eds.), *Modern Group Analysis VI: Developments in Theory, Computation and Application*. Proc. Int. Conf. in the New South Africa (Johannesburg 15-20 January 1996). New Age International Publishers, New Delhi 1997, 41-52.

[6] J.L. ERICKSEN, *Conservation laws for liquid crystals*. Trans. Soc. Rheol., 5, 1961, 23-34.

[7] J. SERRIN, *Space, Time, and Energy*. *Lectio Doctoralis* tenuta nell'Università di Ferrara il 28 ottobre 1992.

[8] M.E. GURTIN - P. PODIO-GUIDUGLI, *On configurational inertial forces at a phase interface*. J. Elasticity, 44, 1996, 255-269.

[9] M.E. GURTIN - P. PODIO-GUIDUGLI, *Configurational forces and the basic laws for crack propagation*. J. Mech. Phys. Solids, 44, 1996, 905-927.

[10] A. DESIMONE - P. PODIO-GUIDUGLI, *Inertial and self interactions in structured continua: liquid crystals and magnetostrictive solids*. Meccanica, 30, 1995, 629-640.

[11] A. DESIMONE - P. PODIO-GUIDUGLI, *On the continuum theory of deformable ferromagnetic solids*. Arch. Rational Mech. Anal., 136, 1996, 201-233.

[12] P. PODIO-GUIDUGLI, *Peeling tapes*. Conferenza su invito tenuta al Convegno in onore di W. Altman, Rio de Janeiro, agosto 1996.

[13] J. SERRIN, *The equations of continuum mechanics as a consequence of group-invariance*. In: G. FERRARESE (ed.), *Advances in Modern Continuum Dynamics*. Pitagora Editrice, Bologna 1993.

Pervenuta il 4 gennaio 2003,
in forma definitiva il 17 marzo 2003.

Dipartimento di Ingegneria Civile
Università degli Studi di Roma «Tor Vergata»
Via del Politecnico, 1 - 00133 ROMA
ppg@uniroma2.it