

# RENDICONTI LINCEI MATEMATICA E APPLICAZIONI

---

LARBI BELKHCHICHA, JEAN-PIERRE VIGUÉ

## **Itérées d'une famille analytique d'applications holomorphes et points fixes sur un produit**

*Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti Lincei. Matematica e Applicazioni, Serie 9, Vol. 14 (2003), n.1, p. 23–31.*

Accademia Nazionale dei Lincei

<[http://www.bdim.eu/item?id=RLIN\\_2003\\_9\\_14\\_1\\_23\\_0](http://www.bdim.eu/item?id=RLIN_2003_9_14_1_23_0)>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti Lincei. Matematica e Applicazioni, Accademia Nazionale dei Lincei, 2003.

**Analisi matematica.** — *Itérées d'une famille analytique d'applications holomorphes et points fixes sur un produit.* Nota (\*) di LARBI BELKHCHICHA e JEAN-PIERRE VIGUÉ, presentata dal Socio E. Vesentini.

ABSTRACT. — *Iterates of an analytic family of holomorphic mapping and fixed points on a product.* In this paper, we consider an analytic family of holomorphic mappings  $f : M \times X \rightarrow X$  and the sequence  $f^n$  of iterates of  $f$ . If the sequence is not compactly divergent, there exists a unique retraction  $\varrho(m, \cdot)$  adherent to the sequence  $f^n(m, \cdot)$ . If  $X$  is a strictly convex taut domain in  $\mathbb{C}^n$  and if the image  $\mathcal{A}(\varrho(m, \cdot))$  of  $\varrho(m, \cdot)$  is of dimension  $\geq 1$ , we prove that  $\mathcal{A}(\varrho(m, \cdot))$  does not depend from  $m \in M$ . We apply this result to the existence of fixed points of holomorphic mappings on the product of two bounded strictly convex domains.

KEY WORDS: Iterates of holomorphic mappings; Holomorphic retractions; Fixed points on a product.

RIASSUNTO. — *Iterate di una famiglia analitica di applicazioni ologorfe e punti fissi su un prodotto.* In questo lavoro, consideriamo una famiglia analitica di applicazioni ologorfe  $f : M \times X \rightarrow X$  e la successione  $f^n$  delle iterate di  $f$ . Se la successione non è compattamente divergente, esiste un'unica retrazione  $\varrho(m, \cdot)$  aderente alla successione  $f^n(m, \cdot)$ . Se  $X$  è un dominio taut strettamente convesso di  $\mathbb{C}^n$  e se l'immagine  $\mathcal{A}(\varrho(m, \cdot))$  di  $\varrho(m, \cdot)$  è di dimensione  $\geq 1$ , mostriamo che  $\mathcal{A}(\varrho(m, \cdot))$  non dipende da  $m \in M$ . Appliciamo questo risultato all'esistenza di punti fissi di applicazioni ologorfe sul prodotto di due domini limitati strettamente convessi.

## 1. INTRODUCTION

Dans un certain nombre d'articles (voir [1-5, 14]), on a considéré une variété analytique complexe  $X$ , une application holomorphe  $f : X \rightarrow X$  et la suite des itérées  $f^n = f \circ \dots \circ f$  ( $n$  fois) de  $f$ . Par exemple, si  $X$  est taut (au sens de Wu [15]), Abate [2] montre que, s'il existe  $z_0 \in X$  tel que la suite  $f^n(z_0)$  soit contenue dans un compact  $K$  de  $X$ , alors la suite  $f^n$  n'est pas compactement divergente et n'admet pas de sous-suite compactement divergente. Sous cette hypothèse, on peut alors montrer qu'il existe une rétraction holomorphe unique  $\varrho : X \rightarrow X$  adhérente à la suite  $f^n$ . Son image  $\mathcal{A}(f)$  est, d'après [6], une sous-variété analytique complexe fermée de  $X$ , appelée la variété-limite de  $f$ , et  $f|_{\mathcal{A}(f)}$  est un automorphisme analytique de  $\mathcal{A}(f)$ . Dans le cas où  $X$  est un domaine convexe borné, ceci permet de montrer que, si la suite  $f^n$  n'est pas compactement divergente, l'ensemble  $\text{Fix } f$  des points fixes de  $f$  n'est pas vide.

Dans la première partie de ce travail, nous allons étudier le cas d'une application analytique

$$f : M \times X \rightarrow X$$

définie sur le produit  $M \times X$  de deux variétés analytiques complexes  $M$  et  $X$  à valeurs dans  $X$ . On définit alors par récurrence la suite des itérées  $f^n(m, z)$  en posant  $f^0(m, z) = z$ ,  $f^n(m, z) = f(m, f^{n-1}(m, z))$ .

Dans le cas où  $X$  est une variété complexe taut, on montre alors (voir [3] ou [14])

(\*) Pervenuta in forma definitiva all'Accademia il 30 luglio 2002.

que, s'il existe  $m_0 \in M$  tel que la suite des itérées de  $f(m_0, \cdot)$  ne soit pas compactement divergente, il en est de même pour tout  $m \in M$ , et les variétés-limites  $\mathcal{A}(f(m, \cdot))$  sont deux à deux isomorphes. On peut alors se demander si la variété-limite  $\mathcal{A}(f(m, \cdot))$  dépend réellement de  $m \in M$ . En général, la réponse est positive, comme l'a remarqué Abate [3]. Cependant, si on suppose que  $X$  est un domaine borné strictement convexe de  $\mathbb{C}^n$  (ou plus généralement, un domaine borné à frontière simple), un phénomène nouveau et curieux se présente: si la dimension de la variété-limite  $\mathcal{A}(f(m, \cdot))$  est supérieure ou égale à 1, alors  $\mathcal{A}(f(m, \cdot))$  est indépendant de  $m \in M$ . En revanche, dans le cas de la dimension 0,  $\mathcal{A}(f(m, \cdot))$  peut dépendre effectivement de  $m \in M$ . La différence provient sans doute du fait que, si la dimension de  $\mathcal{A}(f(m, \cdot))$  est nulle, alors  $\mathcal{A}(f(m, \cdot))$  est compacte et toutes les fonctions holomorphes bornées sur  $\mathcal{A}(f(m, \cdot))$  sont constantes. Dans cet article, nous allons d'abord montrer le théorème suivant.

**THÉORÈME 1.1.** *Supposons que  $X$  soit un domaine borné de  $\mathbb{C}^n$ , à frontière simple. Soit  $M$  une variété complexe connexe et soit  $f : M \times X \rightarrow X$  une application holomorphe. Supposons que, pour un certain  $m_0 \in M$ , la suite des itérées  $f^n(m_0, \cdot)$  ne soit pas compactement divergente. Alors, si la variété-limite  $\mathcal{A}(f(m_0, \cdot))$  est de dimension  $\geq 1$ , la variété-limite  $\mathcal{A}(f(m, \cdot))$  ne dépend pas de  $m \in M$  et  $f(m, \cdot)|_{\mathcal{A}(f(m, \cdot))}$  est un automorphisme analytique de  $\mathcal{A}(f(m, \cdot))$  indépendant de  $m$ .*

Cependant, comme nous le montrerons sur un exemple, la rétraction holomorphe  $\rho(m, \cdot)$  de  $X$  sur  $\mathcal{A}(f(m, \cdot))$  dépend en général de  $m \in M$ .

Ensuite, nous allons appliquer ce résultat aux points fixes d'applications holomorphes définis sur un produit  $X = X_1 \times X_2$  de deux domaines convexes bornés. Si  $f = (f_1, f_2) : X_1 \times X_2 \rightarrow X_1 \times X_2$  est une application holomorphe, on peut se demander si l'existence de points fixes pour chacune des applications partielles  $f_1(\cdot, z_2)$  et  $f_2(z_1, \cdot)$  entraîne que  $f = (f_1, f_2)$  admet des points fixes. C'est inexact en général, comme l'a constaté Hervé [8] (voir aussi [14]). Cependant, nous allons montrer ici le théorème suivant.

**THÉORÈME 1.2.** *Soient  $X_1$  et  $X_2$  deux domaines bornés convexes de  $\mathbb{C}^n$  et  $\mathbb{C}^m$  respectivement et soit  $f : X_1 \times X_2 \rightarrow X_1 \times X_2$  une application holomorphe. Supposons de plus que les points de la frontière  $\partial X_1$  de  $X_1$  et  $\partial X_2$  de  $X_2$  soient des points complexe-extrémaux de  $\overline{X_1}$  et de  $\overline{X_2}$ . Supposons que  $f_1^n(\cdot, z_2)$  et que  $f_2^n(z_1, \cdot)$  ne soient pas compactement divergentes. Alors, si l'une des deux variétés-limites  $\mathcal{A}(f_1(\cdot, z_2))$  ou  $\mathcal{A}(f_2(z_1, \cdot))$  est de dimension  $\geq 1$ ,  $f^n$  n'est pas compactement divergente et  $f$  admet au moins un point fixe dans  $X = X_1 \times X_2$ .*

Nous allons maintenant donner quelques définitions et rappels.

## 2. DÉFINITIONS, RAPPELS ET PREMIERS RÉSULTATS

Soient  $X$  et  $Y$  deux variétés analytiques complexes. Comme d'habitude, l'ensemble  $H(X, Y)$  des applications holomorphes de  $X$  dans  $Y$  est muni de la topologie compac-

te-ouverte. Soit  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite d'applications holomorphes de  $X$  dans  $Y$ . On dit que la suite  $f_n$  est compactement divergente si, pour tout compact  $K \subset X$  et tout compact  $L \subset Y$ , il existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tel que, pour tout  $n \geq n_0$ ,  $f_n(K) \cap L = \emptyset$ .

Soit  $\Delta$  le disque-unité ouvert dans  $\mathbb{C}$ .

DÉFINITION 2.1. On dit qu'une variété analytique complexe  $X$  est taut (au sens de Wu [15]) si, pour toute suite  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  d'applications holomorphes de  $\Delta$  dans  $X$ , on peut extraire de la suite  $f_n$  une sous-suite convergente dans  $H(\Delta, X)$  ou une sous-suite compactement divergente.

D'après des résultats classiques, si  $X$  est taut, le même résultat reste vrai pour l'ensemble  $H(Y, X)$  des applications holomorphes d'une variété connexe  $Y$  dans  $X$ .

Pour une variété complexe  $X$ , Abate [2] a montré le théorème suivant.

THÉORÈME 2.2. *Soit  $X$  une variété complexe connexe taut de dimension finie. Soit  $f : X \rightarrow X$  une application holomorphe. Alors les conditions suivantes sont équivalentes:*

- (i) *la suite des itérées  $(f^n)_{n \in \mathbb{N}}$  de  $f$  n'est pas compactement divergente;*
- (ii) *la suite des itérées  $(f^n)_{n \in \mathbb{N}}$  de  $f$  n'a pas de sous-suite compactement divergente;*
- (iii) *pour tout  $x \in X$ ,  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{f^n(x)\}$  est relativement compact dans  $X$ ;*
- (iv) *il existe  $x \in X$ , tel que  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{f^n(x)\}$  soit relativement compact dans  $X$ .*

*Si on suppose de plus que  $X$  est un domaine borné convexe de  $\mathbb{C}^n$ , ces conditions sont aussi équivalentes à la condition suivante:*

- (v)  *$f$  admet au moins un point fixe dans  $X$ .*

Nous aurons également besoin de la forme suivante du principe du maximum.

Soit  $X$  une variété analytique complexe connexe et soit  $H^\infty(X)$  l'espace vectoriel des fonctions holomorphes complexes bornées sur  $X$ . On considère alors le spectre  $S_c(H^\infty(X))$  muni de la topologie de Guelfand (c'est-à-dire, la topologie induite par la topologie  $*$ -faible sur le dual  $H^\infty(X)'$ ). Soit

$$i : X \rightarrow S_c(H^\infty(X))$$

définie par  $i(x) = \hat{x}$ , où  $\hat{x}(f) = f(x)$ . Soit  $\mathfrak{N}$  l'adhérence de  $i(X)$  dans  $S_c(H^\infty(X))$ . Bien sûr,  $\mathfrak{N}$  qui est fermé dans  $S_c(H^\infty(X))$  est compact, et soit  $\mathfrak{N}' = \mathfrak{N} \setminus i(X)$ . Pour tout  $f \in H^\infty(X)$ , on définit son prolongement  $\hat{f}$  à  $\mathfrak{N}$  en posant  $\hat{f}(m) = m(f)$ , et l'application  $m \mapsto \hat{f}(m)$  est continue.

Montrons maintenant le théorème suivant.

THÉORÈME 2.3. *Soit  $X$  une variété analytique complexe connexe telle que  $\mathfrak{N}' = \mathfrak{N} \setminus i(X)$  soit non vide. Pour tout  $f \in H^\infty(X)$ , pour tout  $x \in X$ , on a:  $|f(x)| \leq \|\hat{f}\|_{\mathfrak{N}'}$ , et s'il existe  $x \in X$  tel que  $|f(x)| = \|f\|_{\mathfrak{N}'}$ , alors  $f$  est constante.*

DÉMONSTRATION. Il est clair que, pour tout  $x \in X$ ,  $|f(x)| \leq \|\widehat{f}\|_{\mathcal{M}}$ , et s'il existe  $x \in X$  tel que  $|f(x)| = \|\widehat{f}\|_{\mathcal{M}}$ , le principe du maximum montre alors que  $f$  est constante au voisinage de  $x$ , et par suite constante. Si  $f$  est non constante, on a, pour tout  $x \in X$ ,  $|f(x)| < \|\widehat{f}\|_{\mathcal{M}}$ , et comme  $|\widehat{f}|$  atteint son maximum en un point de  $\mathcal{M}$ , ce point appartient à  $\mathcal{M}'$  et on a :  $\|\widehat{f}\|_{\mathcal{M}} = \|\widehat{f}\|_{\mathcal{M}'}$ . Ceci entraîne que, pour tout  $x \in X$ ,  $|f(x)| \leq \|\widehat{f}\|_{\mathcal{M}'}$ . Le reste s'en déduit facilement.

Remarquons que, pour que  $\mathcal{M}' = \mathcal{M} \setminus i(X)$  soit non vide, il faut et il suffit que  $H^\infty(X)$  contienne des fonctions holomorphes non constantes. En effet, si  $H^\infty(X) = \mathbb{C}$ , ceci entraîne que  $\mathcal{M}$  est réduit à un point, il est donc égal à  $i(X)$  et  $\mathcal{M}'$  est vide. Réciproquement, si  $f$  est une fonction holomorphe bornée non constante, alors  $\widehat{f}$  qui est continue sur  $\mathcal{M}$  compact atteint son maximum en un point  $x$  de  $\mathcal{M}$ . Comme  $f$  est non constante, le principe du maximum montre que ce point n'appartient pas à  $i(X)$  et le résultat est démontré.

Remarquons d'autre part que, si  $X$  est un domaine borné de  $\mathbb{C}^n$  ( $n \geq 1$ ), il existe sur  $X$  des fonctions holomorphes bornées non constantes, et nous pouvons appliquer le théorème précédent.

Nous utiliserons aussi le lemme suivant.

LEMME 2.4. *Soit  $X$  une variété analytique complexe connexe telle que  $\mathcal{M}'$  soit non vide. Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions holomorphes bornées sur  $X$ , et on suppose que, pour tout ultrafiltre  $\mathcal{U}$  sur  $X$ , sans point adhérent sur  $X$ ,  $\lim_{\mathcal{U}} f = \lim_{\mathcal{U}} g$ . Alors,  $f = g$ .*

DÉMONSTRATION. La fonction  $(f - g)$  vérifie, pour tout ultrafiltre  $\mathcal{U}$  sur  $X$ , sans point adhérent sur  $X$ ,  $\lim_{\mathcal{U}} (f - g) = 0$ . D'autre part, pour tout point  $m \in \mathcal{M}'$ , on peut trouver un ultrafiltre  $\mathcal{U}$  sur  $X$  convergeant vers  $m$ . On en déduit que  $(\widehat{f} - \widehat{g})(m) = 0$ . Le Théorème 2.3 montre que  $f - g = 0$ , et le lemme est démontré.

### 3. APPLICATIONS DÉPENDANT HOLOMORPHIQUEMENT D'UN PARAMÈTRE

Rappelons qu'une variété analytique complexe  $X$  est dite hyperbolique si la pseudo-distance de Kobayashi  $k_X$  est une distance sur  $X$  et que, si  $X$  est taut,  $X$  est hyperbolique. Dans [14], J.-P. Vigué a commencé l'étude des applications  $f : M \times X \rightarrow X$  dépendant holomorphiquement d'un paramètre complexe et a montré le théorème suivant.

THÉORÈME 3.1. *Soit  $M$  une variété analytique complexe connexe, soit  $X$  une variété taut, et soit  $f : M \times X \rightarrow X$  une application holomorphe. Pour tout  $m \in M$ , on définit la suite d'applications holomorphes  $f^n$  par*

$$f^0(m, z) = z, f^n(m, z) = f(m, f^{n-1}(m, z)).$$

*On suppose qu'il existe un point  $m_0 \in M$  tel que la suite  $f^n(m_0, \cdot)$  ne soit pas compactement divergente. Alors, pour tout  $m \in M$ , la suite  $f^n(m, \cdot)$  n'est pas compactement divergente. De plus, il existe une application holomorphe*

$$\varrho : M \times X \rightarrow X$$

telle que, pour tout  $m \in M$ ,  $\varrho(m, \cdot)$  soit une rétraction holomorphe de  $X$  sur la variété-limite  $\Lambda(f(m, \cdot))$  et soit adhérent à la suite  $f^n(m, \cdot)$ . De plus, pour tout  $m \in M$ , la restriction de  $\varrho(m_0, \cdot)$  à  $\Lambda(f(m, \cdot))$  est un isomorphisme analytique de  $\Lambda(f(m, \cdot))$  sur  $\Lambda(f(m_0, \cdot))$ .

IDÉE DE LA DÉMONSTRATION. La construction de  $\varrho$  se fait de la façon suivante: on considère  $f^n$ , puis une suite extraite  $f^{n_j}$  qui converge uniformément sur tout compact vers  $F : M \times X \rightarrow X$ . Ensuite, on montre, quitte à extraire encore des sous-suites, que  $f^{n_{j+1} - n_j}$  converge vers l'application holomorphe  $\varrho$  cherchée. Il est clair que, pour tout  $m \in M$ ,  $\varrho(m, \cdot)$  est une rétraction holomorphe sur  $\Lambda(f(m, \cdot))$ . Ceci suffit déjà à montrer que toutes les variétés-limites ont la même dimension. En effet, la dimension de la variété-limite est égale, par exemple, à la trace  $t(m, z)$  de l'application linéaire  $\partial\varrho/\partial z(m, z)$  en un point  $z$  de la variété-limite. Comme cette trace dépend analytiquement de  $m$  et  $z$ , ceci montre que cette dimension est localement constante et donc constante puisque  $M$  est connexe.

Soit  $m_0 \in M$  et considérons l'application

$$G : M \times \Lambda(f(m_0, \cdot)) \rightarrow \Lambda(f(m_0, \cdot))$$

définie par

$$G(m, x) = \varrho(m_0, \varrho(m, x)).$$

Il est clair que  $G$  est bien une application holomorphe de  $M \times \Lambda(f(m_0, \cdot))$  dans  $\Lambda(f(m_0, \cdot))$ . Par construction, pour tout  $x \in \Lambda(f(m_0, \cdot))$ ,

$$G(m_0, x) = \varrho(m_0, \varrho(m_0, x)) = \varrho(m_0, x) = x.$$

D'après Franzoni et Vesentini [7] (voir aussi [13]), toute famille holomorphe d'automorphismes analytiques d'une variété hyperbolique est une famille constante. Par suite, pour tout  $m \in M$ , pour tout  $x \in \Lambda(f(m_0, \cdot))$ ,  $G(m, x) = x$ . Ceci montre que  $\varrho(m, \cdot)$  est un isomorphisme analytique de  $\Lambda(f(m_0, \cdot))$  sur son image dans  $\Lambda(f(m, \cdot))$ . De même,  $\varrho(m_0, \cdot)$  est une application surjective de  $\Lambda(f(m, \cdot))$  sur  $\Lambda(f(m_0, \cdot))$ . Il suffit d'échanger les rôles de  $m$  et  $m_0$  pour montrer que  $\varrho(m_0, \cdot)$  est un isomorphisme analytique de  $\Lambda(f(m, \cdot))$  sur  $\Lambda(f(m_0, \cdot))$ , l'isomorphisme réciproque étant donné par  $\varrho(m, \cdot)$ .

Soit maintenant  $X$  un domaine borné de  $\mathbb{C}^n$ . On dit que  $X$  est à frontière simple si, pour toute application holomorphe  $\varphi$  du disque-unité  $\Delta$  dans  $\bar{X}$  telle que l'image  $\varphi(\Delta)$  de  $\Delta$  rencontre la frontière  $\partial X$  de  $X$  est constante. [Si  $X$  est à frontière simple, le même résultat est vrai pour les applications holomorphes de n'importe quelle variété connexe à valeurs dans  $\bar{X}$ ]. Comme exemples de domaines bornés à frontière simple, on peut citer:

- les domaines bornés strictement pseudoconvexes;
- les domaines bornés tels que tout point de la frontière admette une fonction pic locale;
- les domaines bornés convexes tels que les points de la frontière soient des points complexes-extrémaux de  $\bar{X}$  (voir [11] ou [8]).

**THÉORÈME 3.2.** *Soit  $X$  un domaine borné de  $\mathbb{C}^n$  à frontière simple. Soit  $M$  une variété complexe connexe et soit  $f : M \times X \rightarrow X$  une application holomorphe telle que la suite des itérées ne soit pas compactement divergente. Si la dimension de la variété-limite  $\mathcal{A}(f(m, \cdot))$  est supérieure ou égale à 1, alors  $\mathcal{A}(f(m, \cdot))$  ne dépend pas de  $m \in M$ , et  $f(m, \cdot)|_{\mathcal{A}(f(m, \cdot))}$  est un automorphisme analytique de  $\mathcal{A}(f(m, \cdot))$  indépendant de  $m$ .*

**DÉMONSTRATION.** Supposons que la dimension de la variété-limite est  $\geq 1$ , soit  $m_0 \in M$  et considérons  $f|_{M \times \mathcal{A}(f(m_0, \cdot))}$ . L'application

$$M \times \mathcal{A}(f(m_0, \cdot)) \rightarrow \mathbb{C}^n$$

définie par  $(m, z) \mapsto f(m, z)$  est holomorphe et bornée. Comme  $X$  est un domaine borné, l'ensemble  $H(M, X)$  des applications holomorphes de  $M$  dans  $X$  est relativement compact dans  $H(M, \mathbb{C}^n)$ . Soit  $\mathcal{U}$  un ultrafiltre sur  $\mathcal{A}(f(m_0, \cdot))$ , sans point adhérent sur  $X$ , et soit  $\varphi_{\mathcal{U}} = \lim_{\mathcal{U}} f(\cdot, z)$ . Alors  $\varphi_{\mathcal{U}}$  est une application holomorphe de  $M$  dans  $\bar{X}$ . Comme  $f(m_0, \cdot)$  est un automorphisme analytique de  $\mathcal{A}(f(m_0, \cdot))$ , il est clair que  $f|_{\mathcal{A}(f(m_0, \cdot))}$  est propre, et comme  $\mathcal{A}(f(m_0, \cdot))$  est une sous-variété complexe fermée de  $X$ ,  $\varphi_{\mathcal{U}}(m_0)$  appartient à la frontière  $\partial X$  de  $X$ . On déduit du fait que  $X$  est à frontière simple que  $\varphi_{\mathcal{U}}(m) = \varphi_{\mathcal{U}}(m_0)$ . D'après le Lemme 2.4, pour tout  $m \in M$ , pour tout  $z \in \mathcal{A}(f(m_0, \cdot))$ ,  $f(m, z)$  est indépendant de  $m$ . Par suite, la variété-limite  $\mathcal{A}(f(m, \cdot))$  contient  $\mathcal{A}(f(m_0, \cdot))$ , mais comme  $\varrho(m_0, \cdot)|_{\mathcal{A}(f(m, \cdot))}$  est un isomorphisme analytique de  $\mathcal{A}(f(m, \cdot))$  sur  $\mathcal{A}(f(m_0, \cdot))$ , égal à l'identité sur  $\mathcal{A}(f(m_0, \cdot))$ , ceci prouve que les deux variétés-limites sont égales. Alors,  $f(m, \cdot)$  est un automorphisme analytique de la variété-limite  $\mathcal{A}(f(m, \cdot))$ . D'après Franzoni et Vesentini [7],  $f(m, \cdot)$  ne dépend pas de  $m$ , et le théorème est démontré.

Bien sûr, le résultat devient faux si on ne suppose pas que  $\mathcal{A}(f(m, \cdot))$  est de dimension au moins 1. Ainsi, si on considère une application holomorphe  $\varphi : M \rightarrow X$  non constante, l'application  $f : M \times X \rightarrow X$  définie par

$$f(m, z) = \varphi(m)$$

est telle que, pour tout  $m \in M$ ,  $f(m, \cdot)$  est une rétraction holomorphe sur une sous-variété de dimension 0, et cette variété dépend effectivement de  $m$ . D'autre part, il faut remarquer que, même si l'image de  $\varrho(m, \cdot)$  ne dépend pas de  $m$ , la rétraction holomorphe  $\varrho(m, \cdot)$  peut dépendre de  $m \in M$ . Par exemple, si

$$B = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \mid |z_1|^2 + |z_2|^2 < 1\}$$

est la boule-unité de  $\mathbb{C}^2$  pour la norme hermitienne, et si  $M$  est l'ensemble des nombres complexes de module  $< 1/2$ , le lecteur vérifiera que l'application  $\varrho : M \times B \rightarrow B$  définie par

$$\varrho(m, z_1, z_2) = (z_1 + mz_2^2, 0)$$

est bien une rétraction holomorphe de  $B$  sur une sous-variété de dimension 1, et elle dépend effectivement de  $m$ .

Enfin, si  $X$  n'est pas à frontière simple, le résultat est faux (voir aussi [3]): soit  $X$  le bidisque  $\Delta \times \Delta$  et soit  $M = \Delta$ . L'application  $\varrho : \Delta \times X \rightarrow X$  définie par

$$\varrho(m, z_1, z_2) = (z_1, m)$$



est bien une rétraction holomorphe sur  $\Delta \times \{m\}$ , son image est de dimension 1 et elle dépend effectivement du paramètre  $m$ .

4. POINTS FIXES D'APPLICATIONS HOLOMORPHES SUR UN PRODUIT DE DEUX DOMAINES BORNÉS

Soit  $M$  une variété complexe connexe, soit  $X$  une variété complexe et soit  $f : M \times X \rightarrow X$  une application holomorphe. On déduit facilement des résultats précédents la proposition suivante.

PROPOSITION 4.1. *Supposons que  $X$  est taut et qu'il existe  $m_0 \in M$  tel que  $\text{Fix } f(m_0, \cdot)$  soit non vide, alors il en est de même pour tout  $m \in M$ , et les variétés  $\text{Fix } f(m, \cdot)$  sont deux à deux isomorphes.*

*Si on suppose de plus que  $X$  est un domaine borné de  $\mathbb{C}^n$  à frontière simple et que la dimension de la variété-limite  $\Lambda(f(m, \cdot))$  est supérieure ou égale à 1, alors l'ensemble  $\text{Fix } f(m, \cdot)$  qui est contenu dans  $\Lambda(f(m, \cdot))$  est indépendant de  $m \in M$ .*

Nous allons maintenant appliquer les résultats précédents aux applications holomorphes sur un produit de deux tels domaines. Soient donc  $X_1$  et  $X_2$  deux domaines bornés de  $\mathbb{C}^n$  et  $\mathbb{C}^m$  respectivement, et soit  $X = X_1 \times X_2$ . Soit  $f = (f_1, f_2) : X_1 \times X_2 \rightarrow X_1 \times X_2$  une application holomorphe. Supposons que pour tout  $z_1 \in X_1$ ,  $f_2(z_1, \cdot)$  admette au moins un point fixe dans  $X_2$  et que, de même, pour tout  $z_2 \in X_2$ ,  $f_1(\cdot, z_2)$  admette au moins un point fixe dans  $X_1$ . Le problème que nous allons étudier est celui de l'existence de points fixes pour  $f$ . Comme l'a remarqué Hervé [8] dans le cas du bidisque,  $f$  peut ne pas avoir de point fixe. Ainsi, si

$$f(z_1, z_2) = (\varphi_1(z_2), \varphi_2(z_1)),$$

il est clair que  $f_2(z_1, \cdot)$  et  $f_1(\cdot, z_2)$  ont des points fixes. Cependant,  $f$  a des points fixes si et seulement si la suite des itérées de  $\varphi_1 \circ \varphi_2$  n'est pas compactement divergente, et, dans le cas du bidisque, il est très facile de construire des contre-exemples (par exemple, on peut prendre  $\varphi_1(z_2) = z_2$ ,  $\varphi_2(z_1) = (z_1 + a)/(1 + \bar{a}z_1)$ , avec  $a \neq 0$ ).

Il faut remarquer que, dans le cas que nous venons d'étudier, les deux variétés-limites  $\Lambda(f_2(z_1, \cdot))$  et  $\Lambda(f_1(\cdot, z_2))$  sont toutes deux de dimension 0. Comme nous allons le voir, c'est, dans un certain sens, le seul cas dans lequel ceci peut se produire.

Nous dirons qu'un domaine borné taut  $X$  de  $\mathbb{C}^n$  vérifie la condition (H) si, pour toute application holomorphe  $f : X \rightarrow X$ , la suite des itérées n'est pas compactement divergente si et seulement si  $f$  a un point fixe. Cette condition (H) est vérifiée si  $X$  est un domaine convexe borné de  $\mathbb{C}^n$ . [Rappelons [12] que, dans ce cas, l'ensemble  $\text{Fix } f$  des points fixes de  $f$  est connexe]. D'après Huang [9], la propriété (H) est également vraie pour un domaine topologiquement contractible strictement pseudoconvexe à frontière de classe  $C^3$ .

Nous allons montrer que, pour le produit de deux domaines bornés à frontière simple vérifiant la condition (H),  $f$  a toujours des points fixes si  $f_2(z_1, \cdot)$  et  $f_1(\cdot, z_2)$

en ont et, si, au moins une des variétés-limites est de dimension supérieure ou égale à 1.

**THÉORÈME 4.2.** *Soit  $X = X_1 \times X_2$  le produit de deux domaines bornés  $X_1$  et  $X_2$  à frontière simple vérifiant la condition (H). Soit  $f = (f_1, f_2) : X_1 \times X_2 \rightarrow X_1 \times X_2$  une application holomorphe. Supposons que  $f_2(z_1, \cdot)$  et  $f_1(\cdot, z_2)$  admettent des variétés-limites  $\mathcal{A}(f_2(z_1, \cdot))$  et  $\mathcal{A}(f_1(\cdot, z_2))$  (ce qui est équivalent à supposer que  $f_2(z_1, \cdot)$  et  $f_1(\cdot, z_2)$  ont au moins un point fixe), et que l'une au moins de ces variétés-limites soit de dimension supérieure ou égale à 1. Alors, la suite des itérées  $f^n$  de  $f$  n'est pas compactement divergente. Par suite, l'ensemble  $\text{Fix } f$  des points fixes de  $f$  n'est pas vide.*

**DÉMONSTRATION.** Supposons par exemple que la variété-limite  $\mathcal{A}(f_1(\cdot, z_2))$  soit de dimension au moins 1. Alors, d'après le Théorème 3.2, la variété-limite  $\mathcal{A}(f_1(\cdot, z_2))$  ne dépend pas de  $z_2 \in X_2$ , et  $f_1(\cdot, z_2) |_{\mathcal{A}(f_1(\cdot, z_2))}$  est une application holomorphe qui ne dépend pas de  $z_2$ . D'après l'hypothèse, elle admet au moins un point fixe  $z_1^0$ . On a donc

$$f_1(z_1^0, z_2) = z_1^0, \text{ pour tout } z_2 \in X_2.$$

Il suffit alors de considérer l'application  $f_2(z_1^0, \cdot)$ . Cette application admet au moins un point fixe  $z_2^0$ , et on a  $f(z_1^0, z_2^0) = (z_1^0, z_2^0)$ . Ceci montre que  $f$  admet un point fixe. Le reste du théorème s'en déduit facilement.

Dans le cas où les deux variétés-limites sont de dimensions supérieures ou égales à 1, on vérifie sans peine que

$$\text{Fix } f = \text{Fix } f_1(\cdot, z_2) \times \text{Fix } f_2(z_1, \cdot).$$

Dans le cas où une de ces deux variétés est de dimension 0 (supposons par exemple que ce soit  $\mathcal{A}(f_2(z_1, \cdot))$ ), alors il existe une application holomorphe  $\theta : X_1 \rightarrow X_2$  telle que, pour tout  $z_1 \in X_1$ ,  $\theta(z_1)$  soit l'unique point fixe de  $f_2(z_1, \cdot)$ . On montre alors que  $\text{Fix } f$  apparaît comme un graphe:

$$\text{Fix } f = \{(z_1, z_2) \in X_1 \times X_2 \mid z_1 \in \text{Fix } f_1(\cdot, a), z_2 = \theta(z_1)\}.$$

Les auteurs remercient le referee de ses intéressantes remarques.

#### BIBLIOGRAPHIE

- [1] M. ABATE, *Iteration theory of holomorphic maps on taut manifolds*. Mediterranean Press, Rende, Cosenza 1990.
- [2] M. ABATE, *Iteration theory, compactly divergent sequences and commuting holomorphic maps*. Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci., (4), 18, 1991, 167-191.
- [3] M. ABATE, *Iterations of holomorphic families*. Rend. Istit. Mat. Univ. Trieste, 26, 1994, n. 1-2, 141-150.
- [4] E. BEDFORD, *On the automorphism group of a Stein manifold*. Math. Ann., 266, 1983, 215-227.
- [5] H. CARTAN, *Sur les fonctions de plusieurs variables complexes: l'itération des transformations intérieures d'un domaine borné*. Math. Z., 35, 1932, 760-773.
- [6] H. CARTAN, *Sur les rétractions d'une variété*. C. R. Acad. Sc. Paris Série I Math., 303, 1986, 715-716.

- [7] T. FRANZONI - E. VESENTINI, *Holomorphic maps and invariant distances*. Notas de Matemática [Mathematical Notes], 69, North-Holland Publishing Co., Amsterdam-New York 1980.
- [8] M. HERVÉ, *Itération des transformations analytiques dans le bicercle-unité*. Ann. scient. Ec. Norm. Sup., (3), 71, 1954, 1-28.
- [9] X. HUANG, *A non-degeneracy property of extremal mappings and iterates of holomorphic self-mappings*. Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa, 21, 1994, 399-419.
- [10] P. MAZET, *Principe du maximum et lemme de Schwarz à valeurs vectorielles*. Canad. Math. Bull., 40, 1997, 356-363.
- [11] E. THORP - R. WHITLEY, *The strong maximum modulus theorem for analytic functions into a Banach space*. Proc. Amer. Math. Soc., 18, 1967, 640-646.
- [12] J.-P. VIGUÉ, *Points fixes d'applications holomorphes dans un domaine borné convexe de  $\mathbb{C}^n$* . Trans. Amer. Math. Soc., 289, 1985, 345-353.
- [13] J.-P. VIGUÉ, *Sur les points fixes d'applications holomorphes*. C. R. Acad. Sc. Paris Série I Math., 303, 1986, 927-930.
- [14] J.-P. VIGUÉ, *Itérées et points fixes d'applications holomorphes*. In: *Complex Analysis and Geometry*. Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics Series, 173, Marcel Dekker, New York 1995, 509-518.
- [15] H. WU, *Normal families of holomorphic mappings*. Acta Math., 119, 1967, 194-233.

---

Pervenuta il 3 luglio 2002,  
in forma definitiva il 30 luglio 2002.

UMR CNRS 6086 Groupes de Lie et Géométrie  
Université de Poitiers  
SP2MI, Mathématiques  
BP 30179  
86962 FUTUROSCOPE CEDEX (Francia)  
belkhchi@mathlabo.univ-poitiers.fr  
vigue@mathlabo.univ-poitiers.fr