Atti Accademia Nazionale Lincei Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti Lincei
Matematica e Applicazioni

Tristano Manacorda

Alcuni commenti su di un lavoro di Gaetano Fichera

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti Lincei. Matematica e Applicazioni, Serie 9, Vol. **12** (2001), n.3, p. 185–189.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLIN_2001_9_12_3_185_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti Lincei. Matematica e Applicazioni, Accademia Nazionale dei Lincei, 2001.

Rend. Mat. Acc. Lincei
s. 9, v. 12:185-189 (2001)

Meccanica dei continui. — *Alcuni commenti su di un lavoro di Gaetano Fichera.* Nota (*) del Socio Tristano Manacorda.

Abstract. — *Some comments on a Gaetano Fichera paper.* Based on a fundamental remark by G. Fichera and on a result obtained by W. A. Day, it is proved here that heath propagates apparently as a wave.

Key words: Heath Propagation; Fourier Theory; G. Fichera.

Riassunto. — Una idea di G. Fichera ed un risultato di W. A. Day vengono usati per provare che il calore, nella teoria di Fourier, simula una propagazione di tipo ondoso.

1. G. Fichera, in uno dei suoi ultimi lavori [1], ha riabilitato la teoria classica di Fourier della propagazione del calore per conduzione. Come è ben noto, tale teoria conduce al risultato sconcertante (e, come tale, ritenuto assurdo) che una perturbazione della temperatura localizzata in un punto di un corpo, anche infinitamente esteso, altera istantaneamente la temperatura in tutti gli altri punti del corpo, come se il calore generato dalla perturbazione si fosse propagato con velocità infinita. E ciò, appunto, è considerato fisicamente impossibile.

Dopo che tale paradosso della teoria di Fourier era stato osservato da Maxwell [2] e da Stefan [3], numerosissimi sono stati i tentativi di risolvere la questione, tutti puntati su una modifica della equazione costitutiva che lega il vettore di propagazione termica al gradiente della temperatura. C. Cattaneo nel 1948 [4], riprendendo la questione e facendo appello alla teoria cinetica, ne aveva dato una spiegazione proponendo una nuova equazione costitutiva, da allora chiamata di «Maxwell-Cattaneo», la quale contiene un termine aggiuntivo che muta l'equazione di Fourier in una equazione iperbolica, la cui soluzione si propaga con velocità finita. Dopo Cattaneo sono state proposte numerosissime modifiche dell'equazione costitutiva, ma tutte soggette a critiche [5]. In questo dibattito G. Fichera ha avuto il merito di sottolineare anzitutto una difficoltà sperimentale che si incontra nel descrivere il fenomeno della propagazione del calore, perché non si può parlare di variazione di temperatura in un punto se non quando la si riesca a misurare con gli strumenti a disposizione. E questi strumenti hanno essi stessi un'inerzia termica propria che si aggiunge a quella del mezzo che si vuole esaminare. Inoltre, ha richiamato l'attenzione degli studiosi su di una osservazione di Maxwell, secondo cui il calore si propaga con una velocità proporzionale al quadrato della distanza dal centro della perturbazione. Tale risultato è stato poi rigorosamente provato da Day [6-8]. Tuttavia la conclusione di Day si può giustificare in modo molto più semplice [9].

(*) Presentata nella seduta del 20 aprile 2001.

In questa *Nota*, si dà quindi per acquisita la proporzionalità della velocità con il quadrato della distanza e si osserva che ciò ha per conseguenza che la propagazione del calore è analoga ad un moto ondoso con la velocità $1/r$, dove r è la distanza dal centro della perturbazione, che tende a zero all'infinito.

2. È ben noto [10] che l'unica soluzione del problema ai dati iniziali (nella teoria di Fourier)

$$(2.1)\quad \frac{1}{D}\frac{\partial\theta}{\partial t}=\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\theta}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\theta}{\partial z^2}\qquad \theta=f(x,y,z)\ \text{per}\ t=0\,,\ \ (x,y,z)\in W,\ \ D>0\ ,$$

ove Ω è un dominio limitato e regolare di $\Re^3$, che si mantiene limitata in tutto lo spazio, è

$$(2.2)\qquad \theta(x,y,z,t)=\int_\Omega K(x-\xi\,,y-\eta\,,z-\zeta\,,t)f(\xi\,,\eta\,,\zeta)dV\ ,$$

dove $K(x-\xi\,,\ldots)$, funzione di Green dell'operatore (2.1), ha la forma

$$(2.3)\qquad K(x-\xi\,,y-\eta\,,z-\zeta\,,t)=\frac{1}{2\sqrt{\pi Dt}}\exp-\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}{4Dt}\ .$$

Come si vede, anche se $\theta=0$ in tutto lo spazio, privato di Ω nell'istante iniziale, in ogni istante successivo, anche vicinissimo a zero, è $\theta\neq 0$ in ogni punto dello spazio. Tutto avviene come se il calore, inizialmente concentrato in Ω, si fosse istantaneamente propagato in ogni punto dello spazio, con velocità, perciò, infinita.

Ciò ha fatto sorgere il sospetto di risultato inaccettabile o di paradosso della teoria di Fourier. Tale assurdità deriva dalla forma dell'equazione dell'energia e da quella dell'equazione costitutiva che lega il flusso di calore $\underline{q}$ al gradiente della temperatura. Nella teoria di Fourier l'equazione costitutiva è

$$(2.4)\qquad \underline{q}=K\,\mathrm{grad}\,\theta\ ,$$

dove K è una costante positiva. Anche le generalizzazioni, nelle quali K diviene un tensore simmetrico definito positivo, non possono evitare tale conseguenza contraria all'esperienza ed alla intuizione [11]. Per questa ragione, tutti i tentativi per evitare l'assurdo risultato della teoria di Fourier si sono concentrati in proposte di modifica dell'equazione costitutiva, e ciò dopo il fondamentale lavoro di C. Cattaneo [4], non avendosi il coraggio di modificare l'equazione dell'energia.

Molti anni fa fu però osservato che quest'ultima equazione poteva venire modificata tenendo conto del fatto che il computo dei contributi energetici poteva non essere stato completo per la mancanza di una forma di energia superficiale [12, 13]. Tale idea fu poi ripresa da Serrin e Dunn e ampiamente sviluppata fino a giungere al concetto di *interstitial work* [14], che però, a quanto consta, non ha avuto sviluppi ulteriori notevoli. Il lavoro citato di Fichera contiene, invece, l'osservazione fondamentale che il cosiddetto paradosso di Fourier è un paradosso di origine squisitamente matematica, mentre il fenomeno della propagazione del calore è fenomeno di natura genuinamente fisica. Non si può affermare che in un punto la temperatura è aumentata, se l'aumento non supera il limite di sensibilità dell'apparecchio che si usa per misurarla. Tale idea, che Fichera fa risalire a Maxwell, è stata poi sviluppata da Day [6-8] il quale ha dimostrato che il tempo τ necessario perché in un punto la temperatura, dovuta ad una perturbazione iniziale, diventi massima è proporzionale al quadrato della distanza del punto dal centro della perturbazione. Se si assume che tale massimo superi il limite di sensibilità del termometro, per il fisico la temperatura nel punto è variata solo dopo un certo tempo τ.

3. Cominciamo a considerare il caso in cui Ω si riduca ad una regione infinitesima attorno all'origine. In tal caso, la temperatura nel punto (x, y, z) all'istante t è data da

$$\theta(x, y, z, t) = \frac{\theta_0}{2\sqrt{\pi D t}} \exp\left[-\frac{x^2 + y^2 + z^2}{4Dt}\right] \tag{3.1}$$

ove θ_0 è la temperatura iniziale nell'origine. Una semplice derivazione rispetto al tempo mostra che in $\underline{x} \equiv (x, y, z)$ la temperatura diviene massima al tempo

$$\tau = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{2D}. \tag{3.2}$$

Il valore del massimo che si ottiene per sostituzione di τ al posto di t nella (3.1), è

$$\max \theta(x, y, z, t) = \theta(x, y, z, \tau) = \frac{\theta_0}{\sqrt{2\pi e}\, r}, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \tag{3.3}$$

se si vuole che tale massimo possa essere misurato, occorre che $\theta_{\max}$ sia superiore al grado di sensibilità dell'apparecchio, diciamo ε. Ma abbiamo

$$\theta_{\max} \geq \varepsilon$$

solo per $R \leq \frac{\theta_0}{\varepsilon\sqrt{2\pi e}}$.

Possiamo, dunque, riuscire a registrare una variazione di temperatura solo entro la sfera di raggio

$$R = \frac{\theta_0}{\varepsilon\sqrt{2\pi e}}.$$

Esternamente a tale sfera, la temperatura resta apparentemente nulla.

Consideriamo allora la sfera con centro nell'origine e raggio $r = \sqrt{2D\tau}$. I suoi punti raggiungono la soglia di apprezzamento termometrico solo all'istante

$$\tau = \frac{r^2}{2D}.$$

La sfera di centro nell'origine e raggio $\tau + d\tau$ sarà invece in questa condizione nell'istante

$$\tau + d\tau = \frac{(r + dr)^2}{2D} = \frac{r^2 + 2r\,dr}{2D},$$

per cui $d\tau = \frac{rdr}{D}$. Segue dunque che la sfera si è portata dal raggio r a quello $r + dr$ con la velocità

$$V = \frac{D}{r} \tag{3.4}$$

che tende a zero al crescere di r. Il calore è dunque equivalente ad una propagazione di tipo ondoso con la velocità V che decresce man mano che ci si allontana dall'origine.

4. Esaminiamo ora il caso di una distribuzione iniziale di temperatura situata sul piano x, y. Ciascun punto del piano x, y è centro di una sfera che si riscalda al tempo τ.

Fissata τ, si considerino, allora, tutte le sfere di centro nei punti del piano x, y e di raggio

$$r = \sqrt{2D\tau}\,.$$

Ciascuna di esse appare riscaldata nell'istante τ e lo stesso accade per l'inviluppo della famiglia di sfere, cioè per i piani

$$z = \pm\sqrt{2D\tau}\,.$$

Segue ancora che il calore si propaga per onde piane con la velocità V.

Un risultato analogo si ha quando la temperatura iniziale è assegnata simultaneamente su tutti i punti dell'asse z. In tal caso il calore si propaga con velocità decrescente secondo cilindri coassiali con l'asse z.

5. Prendiamo infine in esame il caso nel quale Ω è un dominio spaziale con frontiera regolare. Più precisamente, supponiamo che ogni punto sia dotato di una sola normale e che questa vari con continuità da punto a punto.

Ogni punto di Ω riscalda una sfera di raggio $r = \sqrt{2D\tau}$. Fissata τ, si considerino allora i punti P_Σ della frontiera di Ω. Al tempo τ essi riscaldano i punti delle superfici sferiche di raggio r e di centro P_Σ. Al tempo τ risulta perciò riscaldato anche l'inviluppo di tali sfere e perciò una superficie i cui punti si trovano alla distanza r dai punti di P_Σ sulle normali ai punti di Σ. Ancora una volta la propagazione del calore è di tipo ondoso.

Concludendo, mi sembra che l'osservazione di Fichera giustifichi in modo molto brillante la circostanza, di carattere fisico, che il riscaldamento di un corpo non è istantaneo, ma avviene come se il calore si propagasse per onde. Ciò rende giustizia alla teoria di Fourier, del resto universalmente adottata nelle applicazioni, e risolve l'apparente paradosso insito in essa almeno a livello macroscopico. Forse strumenti di misura ancor più sensibili di quelli attuali potranno confermare la congettura di Fichera.

Bibliografia

[1] G. Fichera, *Is the Fourier theory of heat propagation paradoxical* ? Rend. Circ. Mat. Palermo, 41, 1992, 1-28.
[2] J.C. Maxwell, *On the dynamic theory of gases*. Phil. Trans. Roy. Soc. London A, 157, 1867, 49-88.
[3] I. Stefan, *Über die Fortpflanzung der Wärme*. Sitz. Ar. Wiss. Wien, 47, 2, 1863, 326-344.
[4] C. Cattaneo, *Sulla conduzione del calore*. Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena, 3, 1948, 83-101.
[5] D.D. Joseph - L. Preziosi, *Heat Waves*. Rev. of Mod. Physics, 61, 1989, 41-73.
[6] W.A. Day, *On rates of propagation of heat according to Fourier's theory*. Q. Appl. Math., 55, 1997, 127-138.
[7] W.A. Day, *A note on the propagation of temperature disturbances*. Q. Appl. Math., 55, 1997, 565-572.
[8] W.A. Day - G. Saccomandi, *On rates of propagation of heat according to Fourier's theory*. Q. Appl. Math., 57, 1999, 87-91.
[9] T. Manacorda, *Una osservazione sulla propagazione del calore nella teoria di Fourier*. Quad. IMA, 1998.
[10] R. Courant - D. Hilbert, *Metoden der matematischen Physik*. Verlag, Berlin 1931.
[11] B.D. Coleman - M. Fabrizio - D.R. Owen, *On the Thermodynamics of Second Sound in Dieletric Crystals*. ARMA, 80, 1982, 135-158.
[12] T. Manacorda, *Teoria macroscopica della radiazione interna nei continui*. Riv. Mat. Univ. Parma, (4) 8, 1982, 483-494.
[13] T. Manacorda, *A note on Internal Radiation in Solids*. Boll. UMI, (6) 5A, 1986, 431-434.
[14] J.E. Dunn - J. Serrin, *On the Thermodynamics of Interstitial Working*. ARMA, 88, 1985, 95-133.

Pervenuta il 29 gennaio 2001,
in forma definitiva il 3 marzo 2001.

Dipartimento di Matematica Applicata «U. Dini»
Università degli Studi di Pisa
Via Bonanno, 25 B - 56126 Pisa