Atti Accademia Nazionale Lincei Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti Lincei
Matematica e Applicazioni

Gaetano Fichera

L'analisi matematica in Italia fra le due guerre

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti Lincei. Matematica e Applicazioni, Serie 9, Vol. **10** (1999), n.4, p. 279–312.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLIN_1999_9_10_4_279_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti Lincei. Matematica e Applicazioni, Accademia Nazionale dei Lincei, 1999.

Rend. Mat. Acc. Lincei
s. 9, v. 10:279-312 (1999)

L'analisi matematica in Italia fra le due guerre

Memoria (*) di Gaetano Fichera

Abstract. — *Mathematical Analysis in Italy between the two world wars.* This *Memoir* analyses the scientific contributions of the Italian school of Mathematical Analysis during the first half of the 20th century.

Key words: History of Mathematics; Mathematical Analysis.

Riassunto. — Questo lavoro esamina i contributi scientifici portati dalla scuola italiana di Analisi matematica nella prima metà del 20° secolo.

1. La Matematica italiana dal 1861 al 1918

Nel 1861, dopo la proclamazione del Regno d'Italia, quando già l'unificazione del Paese era prossima a completarsi, molti furono i fermenti che agitarono la vita pubblica italiana, originati dalla coscienza che ormai esisteva la «Nazione» Italia. Una Nazione che non poteva non avere una sua «missione». Questa era variamente intesa e talune interpretazioni di essa non sempre corrispondevano ad ideali da tutti condivisibili.

Dopo che anche Roma era stata unita all'Italia, Teodoro Mommsen (1817-1903) avvertiva Quintino Sella (1827-1884) che «l'Italia non poteva stare a Roma senza perseguire propositi cosmopolitici». Significativa fu la risposta fornita dal Sella, secondo cui il proposito cosmopolitico, a Roma, dell'Italia era la «Scienza». Premessa, questa, alla rifondazione, da parte del Sella, dell'Accademia dei Lincei (Roma, 1875), secondo gli antichi, universali principî del primo fondatore di essa (Roma, 1603) Federico Cesi (1585-1630) e dei «primi Lincei». Fra i quali, sommo fra tutti, Galileo Galilei (1564-1642).

Non è questo il luogo per giudicare se tale proposito del Sella circa la missione cosmopolita ebbe piena attuazione in tutti i campi della Scienza. Ad essi, per iniziativa di Sella stesso, erano stati aggregati anche quelli pertinenti alle discipline letterarie e morali, con la creazione, presso la rifondata Accademia lincea, di una nuova Classe, accanto a quella di Scienze fisiche, matematiche e naturali e, cioè, quella di Scienze morali, storiche e filologiche. Ma è indubbio che la Matematica italiana, già agli albori del Regno, ancor prima della restaurazione lincea, aveva avuto un improvviso risveglio che, dallo stato di torpore nel quale sembrava esser rimasta dopo Lagrange (1736-1813), doveva sospingerla verso uno dei primissimi posti in campo internazionale. Artefici di questa

(*) Presentata nella seduta del 12 novembre 1999 da C. De Concini, Direttore del Comitato consultivo dei *Rendiconti Lincei: Matematica e Applicazioni*.

rinascita furono principalmente Enrico Betti (1823-1892), Francesco Brioschi (1824-1877), Luigi Cremona (1830-1903), Eugenio Beltrami (1835-1900), Felice Casorati (1835-1890) e, successivamente, Ulisse Dini (1845-1918), Ernesto Cesaro (1859-1906) e Vito Volterra (1860-1940).

È difficile individuare i motivi che originarono tale meraviglioso risveglio. Certo una delle cause determinanti furono le lunghe permanenze a Pisa del sommo Bernhard Riemann (1826-1866) che, desideroso di sottrarsi, per la cagionevole salute, alla rigidezza del clima germanico, amava soggiornare in quella città. Il grande genio tedesco ebbe così modo di attrarre nell'orbita delle sue elevatissime ricerche due matematici di grande talento, quali il Betti, che visse sempre a Pisa, ed il Beltrami, che insegnò in quella Università dal 1863 al 1866.

Notevole importanza, nel rompere l'isolamento nel quale, prima di allora, versava la Matematica italiana, fu un lungo viaggio che Betti, Brioschi e Casorati compirono nel 1858 in Francia ed in Germania. Quel viaggio permise, specie al Casorati, di far conoscere nel nostro Paese la Teoria delle funzioni analitiche di una variabile complessa, della quale Cauchy (1789-1857), Riemann e Weiestrass (1815-1895) avevano, da pochi decenni, posto i fondamenti. A quella teoria il Casorati contribuì personalmente, con un notevole teorema, poi incluso nel successivo «grande teorema» di Picard (1856-1941).

Motivo importante per l'avanzamento della Matematica in Italia fu anche il fatto che quasi tutti i matematici italiani che abbiamo sopra ricordato poterono sedere nell'aula del Senato del Regno. Il Senato, concepito allora quale «Camera alta», contemplava la possibilità di farne parte solo per nomina regia. Avveniva così che Uomini di altissima qualità culturale potessero servire il Paese anche nella veste di Senatori. Quei sommi matematici, che già dotati di grande, sostanziale prestigio scientifico, non avevano bisogno di inseguire quello, ben più effimero, che proviene dal potere politico, esercitarono la loro funzione di Senatori con il solo intento di servire il Paese favorendone l'elevazione culturale ed affermando in esso i valori supremi della Scienza, in generale, e della Matematica, in particolare. Se a Quintino Sella, accorto uomo politico, ma anche distinto mineralogo, si deve la restaurazione dell'Accademia dei Lincei che, dalla fine del secolo scorso fino all'avvento del fascismo, fu il centro propulsore dell'attività scientifica nazionale, ai matematici che abbiano prima ricordato si deve la fondazione di Scuole, Università, Politecnici, Società scientifiche, che permisero al nostro Paese di autorevolmente inserirsi nel contesto dell'alta cultura internazionale, specialmente per quanto riguardava la Matematica.

Alla fine del secolo scorso e nel primo ventennio dell'attuale, l'Italia si trovò ad occupare una posizione internazionale di assoluto primo piano nel campo della Geometria algebrica, in quello della Geometria differenziale ed in quel particolare, ma importante ramo della Fisica matematica che è la Teoria matematica dell'elasticità.

Nell'Analisi matematica l'Italia, in quel periodo, non raggiunse i livelli eccelsi delle grandi Scuole tedesche e francesi, dove avevano giganteggiato e giganteggiavano Uomini come Bernhard Riemann, Karl Weierstrass, David Hilbert (1862-1943), Henri Poincaré (1854-1912), Emile Picard, Henri Lebesgue (1875-1941). Ma matematici come i già citati Brioschi, Casorati, Dini, Volterra e, successivamente, Giuseppe Vitali (1875-

1932) ed Eugenio Elia Levi (1883-1917) assicurarono al nostro Paese una posizione di indubbio prestigio anche in questo settore della Matematica. Occorre poi anche dire che la Geometria differenziale, dove primeggiavano Eugenio Beltrami, Luigi Bianchi (1856-1928) e Tullio Levi-Civita (1873-1941), non era, all'epoca in cui questi eminenti Uomini operarono, nettamente distinta dall'Analisi matematica, tanto che spesso finiva con l'essere considerata quale un capitolo di questa. Né lo era la Teoria matematica dell'elasticità che, specie come intesa da molti dei suoi cultori in Italia, primi fra tutti Betti e Volterra, finiva con il ridursi allo studio di difficili, spesso del tutto nuovi, problemi di Analisi matematica. E bisogna infine anche osservare le strettissime connessioni fra la Geometria algebrica e la Teoria delle funzioni analitiche di variabili complesse, della quale la prima poteva riguardarsi come un particolare ancorché importante capitolo, perché attinente ad una basilare classe di funzioni analitiche: le funzioni algebriche. E se è pur vero che la Scuola italiana di Geometria algebrica di Luigi Cremona, Corrado Segre (1863-1924), Guido Castelnuovo (1865-1952), Federigo Enriques (1871-1946), etc. predilesse i «metodi sintetici» fondati su profonde intuizioni geometriche, con l'opera di quello che, forse, è stato il massimo rappresentante di quella Scuola, Francesco Severi (1879-1961), pervenne ad una mirabile sintesi fra i metodi geometrici e quelli analitici (o «trascendenti») ai quali avevano atteso i grandi analisti tedeschi e francesi quali, ad esempio, Riemann, Weierstrass, Poincaré, Picard. E Severi, oltre che sommo geometra, fu anche validissimo analista, come vedremo in seguito.

Nelle successive sezioni di questo scritto, allorché cercheremo di descrivere l'evoluzione dell'Analisi matematica in Italia fra le due guerre, cioè dal 1919 al 1940, non potremo non fare frequenti riferimenti agli sviluppi di questa disciplina e di quelle ad essa vicine, nel periodo che abbiamo ora tratteggiato (1861-1918), dato che non esiste una soluzione di continuità nell'evolversi (in senso algebrico) della Matematica italiana in questi due periodi, come invece accadde fra il periodo lagrangiano e la rinascita della Matematica in Italia dopo il 1861.

2. Vito Volterra ed il sorgere dell'Analisi funzionale

È difficile individuare il nascere di una nuova branca della Scienza: spesso accade che diversi concetti e risultati preesistano alla costituzione ufficiale di una teoria e solo «a posteriori» essi vengano riguardati come appartenenti alla teoria stessa. Ciò è particolarmente vero per l'Analisi funzionale. Un aspetto importante di essa, il Calcolo delle variazioni, già si era affacciato nella seconda metà del XVII secolo nell'opera di Isacco Newton (1642-1727) (problema del solido di rivoluzione di minima resistenza) e successivamente in quella di Giacomo (1654-1705) e di Giovanni (1667-1748) Bernoulli (problemi della brachistocrona e isoperimetrici) per acquistare, poi, più ampio respiro con gli immortali contributi di Leonardo Eulero (1701-1783), prima, e di Giuseppe Luigi Lagrange, dopo. Ma se si conviene di far coincidere il sorgere di una teoria con l'opera di chi ha manifestato di avere la piena coscienza che, con i suoi studi, sta aprendo un nuovo campo della Scienza, non vi è dubbio che Vito Volterra debba essere considerato come l'iniziatore dell'Analisi funzionale. Egli, in una Nota lincea del 1887, introduce *le funzioni che dipendono da altre funzioni*. Successivamente, considerando il grafico della funzione *variabile indipendente*, piuttosto che la funzione stessa, adopera la locuzione *funzioni di linea*. In seguito egli adotta, definitivamente, il termine *funzionale* proposto da Jacques Hadamard (1865-1963).

Molti furono i problemi provenienti sia dalla Matematica pura che da quella applicata, i quali condussero Volterra ad introdurre questo nuovo concetto nell'Analisi. Ma fra essi, quelli che maggiormente giustificarono l'avvento di questa idea, più come «scoperta» che come «invenzione», furono i problemi della *eredità* elastica o elettromagnetica, come da lui poi esposti nella sua Monografia del 1913 *Fonctions de lignes* [25], originata da un corso di lezioni tenuto alla Sorbona nel 1912.

È noto che, se Ω è un solido elastico tridimensionale, considerato nella sua configurazione naturale, per ogni sua deformazione originata da forze di massa, che agiscono sul corpo, e/o da forze superficiali (forze applicate o reazioni vincolari), sussiste, nell'accezione classica della Teoria dell'elasticità, la cosiddetta *legge di Hooke*, che stabilisce l'interdipendenza fra il *tensore degli sforzi* $\sigma \equiv \{\sigma_{ij}\}$ $(\sigma_{ij} = \sigma_{ji};\ i, j = 1, 2, 3)$ e quello di *deformazione* $\varepsilon \equiv \{\varepsilon_{ij}\}$ $(\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji})$, entrambi riferiti ad una stessa terna trirettangola levogira

$$\sigma_{ij} = a_{ijhk}\varepsilon_{hk}\,; \tag{2.1}$$

a_{ijhk} è il *tensore elastico* del solido. Esso gode delle proprietà di simmetria: $a_{ijhk} = a_{hkij} = a_{jihk}$. Tale tensore, se il corpo è omogeneo, è costante in ogni punto di Ω. Si suppone altresì che la forma quadratica nelle sei componenti di deformazione $a_{ijhk}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{hk}$ sia definita positiva.

La (2.1) fa dipendere lo sforzo attuale dalla deformazione attuale. Ma Volterra, seguendo Boltzmann (1844-1906), notò che, in molti corpi elastici, nella relazione sforzo-deformazione interviene, in modo non trascurabile, tutta la precedente «*storia*» del corpo, talché lo sforzo attuale non può solo esprimersi mediante la deformazione attuale come nella (2.1), ma deve anche dipendere da *tutte* le deformazioni cui il corpo fu sottoposto negli istanti passati. La (2.1) va allora modificata al modo seguente:

$$\sigma_{ij}(t) = a_{ijhk}\varepsilon_{hk}(t) + F_{ij}[\varepsilon_{\gamma}^{t}(\tau)] \tag{2.2}$$

ove, detto γ l'istante nel quale si comincia a considerare il fenomeno, t quello attuale, F_{ij} è un *funzionale* che dipende da tutti i valori che il tensore di deformazione ha assunto negli istanti τ che vanno da γ a t. Circa la rappresentazione analitica di tale funzionale, Volterra, restando nell'ambito di una teoria lineare, propone la forma seguente

$$F_{ij}[\varepsilon_{\gamma}^{t}(\tau)] = \int_{\gamma}^{t} \psi_{ijhk}(t, \tau)\varepsilon_{hk}(\tau)d\tau \tag{2.3}$$

ove $\psi_{ijhk}(t, \tau)\varepsilon_{hk}(\tau)$ è la *memoria* che il solido conserva, all'istante t, della deformazione $\varepsilon(\tau)$ cui fu sottoposto nell'istante passato τ. I *coefficienti di memoria* o *ereditari* ψ_{ijhk} sono assoggettati alle seguenti condizioni: $\psi_{ijhk} \equiv \psi_{jihk} \equiv \psi_{ijkh}$, oltre ad ulteriori proprietà qualitative dipendenti anche dalla circostanza che sia $\gamma = -\infty$ oppure $\gamma > -\infty$, caso questo che Volterra, quasi esclusivamente, considera. Mentre nel caso classico (2.1) il problema consistente nel rappresentare ε mediante σ è un elementare problema algebrico, nel caso *ereditario* (2.2), (2.3), per avere $\varepsilon(t)$ in termini di $\sigma(t)$ bisogna risolvere un sistema di equazioni integrali, che oggi vengono chiamate del *tipo di Volterra*. Si vede facilmente che (2.2), (2.3) possono scriversi sotto la forma seguente

$$f(t) = u(t) + \int_{\gamma}^{t} K(t, \tau)u(\tau)d\tau \tag{2.4}$$

dove f è il vettore *termine noto* ad n componenti (nel caso (2.2), (2.3) $f(t) = \sigma(t)$ ed $n = 6$), u il vettore incognito e $K(t, \tau)$ una matrice $n \times n$. La (2.4) è l'*equazione integrale di Volterra di seconda specie*, per la quale Volterra, in ipotesi abbastanza generali per $f(t)$ e $K(t, \tau)$ e supponendo $\gamma > -\infty$, dimostrò l'esistenza e l'unicità della soluzione $u(t)$.

Più complicati sono i problemi relativi alla statica ed alla dinamica del solido Ω. Nel caso classico (2.1), imponendo a σ di soddisfare alle equazioni dell'equilibrio o a quelle del moto, e rappresentando ε_{hk} come $2^{-1}(\partial u_h/\partial x_k + \partial u_k/\partial x_h)$ [$u \equiv (u_1, u_2, u_3)$ è il *vettore spostamento*], si ottengono le classiche equazioni dell'equilibrio o del moto della Teoria dell'elasticità, nell'incognito vettore u. Lo stesso procedimento, applicato a (2.2), (2.3), conduce ad *equazioni integro-differenziali* che, all'epoca di Volterra, erano di un tipo del tutto nuovo e delle quali, ancora oggi, nel caso $\gamma = -\infty$, non si conosce una teoria completa.

Volterra concepì i funzionali come funzioni dipendenti da un'infinità di variabili: tutti i valori della funzione $u(t)$ *variabile indipendente*. Il metodo che egli adoperò per affrontare i problemi relativi ai funzionali o, più in generale, per gettare le fondamenta di un *Calcolo funzionale*, che estendesse ai funzionali i concetti ed i risultati relativi alle comuni funzioni, oggetto del *Calcolo infinitesimale*, fu quello da lui chiamato *il passaggio dal finito all'infinito*. Tale metodo può esser visto come una sorta di *passaggio al limite* da un insieme finito di variabili ad un insieme infinito, ma, nella sostanza, esso consiste non tanto in un processo di passaggio al limite, quanto in un *principio di analogia*, che, mediante opportune trasposizioni, trasferisce operazioni e simboli dello schema finito a quello infinito. Volterra non diede mai una definizione di cosa fosse il *passaggio dal finito all'infinito*, ma si servì di esso come di un procedimento euristico per trasportare concetti e risultati del Calcolo infinitesimale a quello funzionale [26].

Vogliamo qui dare un'idea di questo metodo di Volterra, considerando un esempio particolare, ma assai significativo: il problema della esistenza di un *funzionale potenziale*.

Se A è un campo (aperto connesso) di $\mathbb{R}^n$, uno dei problemi fondamentali del Calcolo infinitesimale classico è quello consistente nell'assegnare le condizioni necessarie e sufficienti perché una forma differenziale lineare $\varphi_1(u_1, \ldots, u_n)du_1 + \ldots + \varphi_n(u_1, \ldots, u_n)du_n$ sia il differenziale totale di una funzione scalare $f(u_1, \ldots, u_n)$ ed, inoltre, nel costruire tale f. Tutti sanno che, supposte le $\varphi_\alpha(u)$ [$u \equiv (u_1, \ldots, u_n)$; $\alpha = 1, \ldots, n$] continue in A, esiste la f predetta se e solo se per ogni curva regolare chiusa Γ contenuta in A di equazione $u_\alpha = u_\alpha(s)$, $0 \le s \le L$, $u_\alpha(0) = u_\alpha(L)$, si ha

$$\int_\Gamma \sum_\alpha \varphi_\alpha[u(s)]\frac{du_\alpha}{ds}\,ds = 0\,. \tag{2.5}$$

La *regolarità* di Γ significa che le funzioni $u_\alpha(s)$ sono continue in $[0, L]$ con le loro derivate prime e che $\sum_\alpha [u'_\alpha(s)]^2 > 0$ per ogni s.

Soddisfatta la (2.5), ogni soluzione del problema posto, fissato arbitrariamente u^0 in A, è data da

$$f(u) = f(u^0) + \int_{\Lambda(u^0, u)} \sum_\alpha \varphi_\alpha[v(s)]\frac{dv_\alpha}{ds}\,ds\,, \tag{2.6}$$

essendo $\Lambda(u^0, u)$ una qualsiasi curva regolare che unisce u^0 ad u. La costante $f(u^0)$ è scelta ad arbitrio.

Dire che $f(u)$ è la soluzione del problema equivale ad affermare che per ogni $u \in A$ e per ogni η, tale che $u + \eta \in A$, si ha

$$f(u+\eta) - f(u) = \sum_{\alpha=1}^{n} \varphi_\alpha(u)\eta_\alpha + 0(\delta) \tag{2.7}$$

ove è $\delta = \max_\alpha |\eta_\alpha|$.

Con il suo passaggio dal finito all'infinito, Volterra considera α come un punto di un insieme continuo C (limitato) di uno spazio cartesiano $\mathbb{R}^m$ e sostituisce a $\varphi_\alpha(u)$ il *funzionale misto* $\varphi[u; \alpha]$. Con ciò s'intende che, per ogni α di C, φ è un funzionale di u definito in un campo $\mathcal{A}$ dello spazio delle funzioni $u(x)$ continue in C. Egli si propone di trovare sotto quali condizioni esiste un *funzionale potenziale* $f(u)$ di $\varphi[u; \alpha]$, cioè un funzionale $f(u)$ definito in $\mathcal{A}$ di cui $\varphi[u;\alpha]$ sia la *derivata nel senso di Volterra*. Con ciò intendendo che per ogni $u(x) \in \mathcal{A}$ e per ogni $\eta(x)$ tale che $u(x) + \eta(x) \in \mathcal{A}$, si abbia

$$f(u+\eta) - f(u) = \int_C \varphi[u;\alpha]\eta(\alpha)d\alpha + 0(\delta) \tag{2.8}$$

ove è $\delta = \max_{\alpha \in C} |\eta(\alpha)|$.

Naturalmente si suppone che $\varphi[u;\alpha]$ sia per ogni u funzione continua di α in C, talché ha senso l'integrale al secondo membro di (2.8).

È ovvio come la (2.8) sia ottenuta per *passaggio dal finito all'infinito* dalla (2.7).

La soluzione del problema posto si ottiene con un'ovvia trasposizione dello schema *finito* classico sopra richiamato allo schema *infinito* funzionale. Si considera, infatti, una curva regolare chiusa Γ del campo funzionale $\mathcal{A}$ di equazione $u = u(x, s)$. Ciò significa che $u(\alpha, s)$ per ogni $s \in [0, L]$ appartiene ad $\mathcal{A}$, riesce $u(\alpha, 0) \equiv u(\alpha, L)$ e $u(\alpha, s)$ è funzione continua di s in $[0, L]$ assieme a $\frac{\partial u(\alpha, s)}{\partial s}$. Inoltre $\int_C |\frac{\partial u(\alpha, s)}{\partial s}|^2 d\alpha > 0$ per ogni $s \in [0, L]$. Orbene, la condizione perché sussista la (2.8) è che per ogni Γ sia

$$\int_\Gamma ds \int_C \varphi[u(x, s);\alpha] \frac{\partial u(\alpha, s)}{\partial s} d\alpha = 0 \tag{2.9}$$

la quale si ottiene dalla (2.5) sostituendo l'operazione «finita» $\sum_\alpha$ con quella «infinita» $\int_C \ldots d\alpha$. Inoltre, soddisfatta la (2.9), ogni soluzione del problema si ottiene assumendo

$$f(u) = f(u^0) + \int_{\Lambda(u^0, u)} ds \int_C \varphi[v(x, s);\alpha] \frac{\partial v(\alpha, s)}{\partial s} d\alpha \tag{2.10}$$

con ovvio significato da attribuire ai simboli impiegati (cfr. la (2.6)).

La (2.9) e la (2.10), oltre al loro valore concettuale, hanno anche notevole importanza in molti problemi della Fisica matematica.

Il metodo di Volterra, per quanto suggestivo e ricco di notevoli risultati, ha però confini ben precisi, che ne limitano il raggio d'azione e gli impediscono di entrare nel vivo dei più importanti problemi dell'Analisi funzionale. Infatti, ottenere i risultati dell'Analisi funzionale da quelli dell'Analisi infinitesimale classica con il passaggio dal finito all'infinito, tacitamente presuppone il sussistere del seguente principio: *Nulla può accadere negli spazi di dimensione infinita che già non accada in quelli di dimensione finita*.

Tale affermazione è ben lontana dalla realtà! In effetti, i più significativi e profondi concetti e risultati, relativi agli spazi di dimensione infinita, quali, in genere, sono gli spazi funzionali, non hanno un significativo riscontro in quelli di dimensione finita, dato che gli uni e gli altri si appiattiscono su concetti e risultati che, passando dalla dimensione finita a quella infinita, ammettono almeno due possibilità di generalizzazione; di esse il metodo di Volterra porta a considerare la più ovvia e, spesso, la meno importante. Si pensi ai concetti, fondamentali nell'Analisi funzionale, di *compattezza*, di *totale continuità*, di *convergenza debole*, etc. che nella dimensione finita coincidono con quelli di limitatezza e di chiusura, di continuità, di convergenza ordinaria, etc.

Non è inutile mostrare come il metodo di Volterra risulti inadeguato per poter studiare a fondo taluni problemi fondamentali dell'Analisi. Ci riferiremo, come esempio, alla *equazione integrale a limiti fissi di seconda specie*

$$u(s) + \lambda \int_0^1 K(s, t)u(t)dy = f(s) \quad (0 \le s \le 1) \tag{2.11}$$

per la quale supponiamo che $K(s, t)$ sia una funzione dello spazio $L^2[(0, 1) \times (0, 1)]$, sia $f(s) \in L^2(0, 1)$ e l'incognita $u(s)$ sia ricercata in $L^2(0, 1)$. Supporremo a valori complessi tutte le funzioni considerate; λ è un parametro complesso. Porremo, brevemente,

$$Ku = \int_0^1 K(s, t)u(t)dy, \quad \langle u, v\rangle = \int_0^1 u(s)v(s)ds. \tag{2.12}$$

L'equazione (2.11) può considerarsi ottenuta, per passaggio dal finito all'infinito, dal sistema algebrico

$$u_s + \lambda \sum_{t=0}^{m} K_{st} u_t = f_s \quad (s = 0, 1, \dots, m); \tag{2.13}$$

$u \equiv (u_0, \dots, u_m)$ ed $f \equiv (f_0, \dots, f_m)$ sono ora $(m+1)$-vettori complessi e $\{K_{st}\}$ una matrice complessa $(m+1) \times (m+1)$. Anche in questo caso poniamo

$$Ku = \sum_{s=0}^{m} K_{st} u_t, \quad \langle u, v\rangle = \sum_{s=0}^{m} u_s v_s. \tag{2.14}$$

L'equazione

$$u + \lambda K u = f, \tag{2.15}$$

sia che interpreti la (2.11) oppure la (2.13), ha come soluzione formale quella ottenuta con il classico metodo delle approssimazioni successive

$$u = f - \lambda K f + \lambda^2 K^2 f + \dots + (-1)^n \lambda^n K^n f + \dots \tag{2.16}$$

La (2.16) fornisce un'effettiva soluzione di (2.15) se riesce $|\lambda| < \rho$, dove $\rho = \lim_{n\to\infty} \|K^n\|^{-\frac{1}{n}}$ ed è

$$\|K^n\| = \sup\{\langle K^n u, \overline{K^n u}\rangle\}^{\frac{1}{2}} \text{ per } \langle u, \overline{u}\rangle = 1$$

(con $\overline{a}$ si indica il coniugato del numero complesso a).

Se riesce $\rho = +\infty$, se cioè $\lim_{n\to\infty} \|K^n\|^{\frac{1}{n}} = 0$, la (2.16) è in grado di fornire l'unica soluzione della (2.15), qualunque sia λ. Ciò si verifica allorché si ha, per la (2.11), $K(s, t) \equiv 0$ per $s \leq t$ e contestualmente, per la (2.13), $K_{st} = 0$ per $s \leq t$. La (2.11) può scriversi in tal caso al modo seguente

$$u(s) + \lambda \int_0^s K(s, t)u(t)dt = f(t).$$

Ed è questa la classica *equazione integrale di Volterra di seconda specie*, già da noi prima considerata. Fino a questo punto vi è perfetta analogia fra la (2.13) e la (2.11) e funziona il principio del passaggio dal finito all'infinito.

La situazione è più complicata se la (2.11) non si riduce ad un'equazione di Volterra e se è $|\lambda| \geq \rho$. In tal caso, per quanto concerne la (2.13), bisogna distinguere le due possibilità: 1) λ non è autovalore del sistema omogeneo associato a (2.13); 2) λ lo è. Sia V_λ il codominio della trasformazione $I + \lambda K$, cioè la varietà lineare descritta da $u + \lambda K u$ quando u descrive lo spazio complesso $\mathbb{C}^{m+1}$. Nel caso 1) si ha $V_\lambda = \mathbb{C}^{m+1}$ e quindi il sistema (2.13) ha una ed una sola soluzione, qualunque sia f. Nel caso 2) la varietà V_λ è caratterizzata da un certo numero p di condizioni del tipo: $\langle v, w_h\rangle = 0$, $v \in V_\lambda$, $h = 1, \dots, p$. È subito visto che $w_1, \dots, w_p$ costituiscono un sistema completo di autovettori dell'equazione omogenea

$$w + \lambda K^* w = 0,$$

ove K^* è la matrice trasposta di K. Pertanto nel caso 2) l'equazione (2.13) ammette soluzione se e solo se f verifica le p condizioni: $\langle f, w_h\rangle = 0$.

L'estensione di questi risultati all'equazione (2.11) non può farsi con il metodo di Volterra del passaggio dal finito all'infinito. In effetti, interpretando $K^* w$ al modo seguente

$$K^* w = \int_0^1 K(t, s)w(t)dt,$$

sarebbe possibile acquisire i risultati, relativi ai due casi 1) e 2), considerati nel caso finito, se si sapesse che il codominio V_λ di $I + \lambda K$, ove K è ora definito da (2.12), è una varietà *chiusa* di $L^2(0, 1)$ (tale, cioè, che se una successione di funzioni di V_λ converge con la metrica di $L^2(0\,,1)$, il suo limite appartiene a V_λ) e se si sapesse inoltre che la *codimensione* di V_λ (cioè la dimensione della varietà lineare di tutte le funzioni w di $L^2(0\,,1)$ tali che $\langle v\,, w\rangle = 0$ per ogni $v \in V_\lambda$) è finita.

Il metodo del passaggio dal finito all'infinito non è in grado di fornire alcuna indicazione circa queste proprietà di V_λ. Ogni varietà lineare di $\mathbb{C}^{m+1}$ è chiusa ed ha codimensione finita! Vani furono gli sforzi di Volterra per conseguire una teoria completa della (2.11). In seguito, le ricerche di Fredric Riesz (1880-1956) e di Stefan Banach (1892-1945) mostrarono che le proprietà suddette, relative a V_λ, sussistono. Tuttavia, per conseguirle, essi sfruttarono una proprietà della trasformazione lineare K, che il metodo di Volterra è lungi dal suggerire, cioè la *totale continuità* (o *compattezza*) della trasformazione K. Con ciò intendendo che se $\{u_n\}$ è una successione *convergente debolmente* in $L^2(0\,,1)$, cioè è tale che esiste u per il quale $\lim_{n\to\infty}\langle u_n\,, w\rangle = \langle u\,, w\rangle$, qualunque sia $w \in L^2(0\,,1)$, allora Ku_n converge verso Ku con la metrica di $L^2(0\,,1)$.

Si noti che in $\mathbb{C}^{m+1}$ la convergenza debole di una successione è equivalente a quella ordinaria. Ciò non è più vero in $L^2(0\,,1)$, talché la totale continuità di una trasformazione K non segue dalla sua continuità.

Ancor prima di F. Riesz e di Banach, il matematico svedese Ivar Fredholm (1866-1927) era riuscito, nel 1903, a conseguire, in modo veramente geniale, una teoria completa della (2.11), senza servirsi dei concetti generali dell'Analisi funzionale (totale continuità, convergenza debole, etc.), ma seguendo una via puramente algoritmica. Egli si avvalse del fatto che per $|\lambda|$ abbastanza piccolo ($|\lambda| < \rho$) la soluzione della (2.11) data da (2.16) può mettersi nella forma seguente

$$u(s) = f(s) + \int_0^1 R(s\,, t; \lambda) f(t)\, dt\ ,$$

ove $R(s\,, t; \lambda)$ è funzione di $(s\,, t)$ appartenente ad $L^2[(0\,,1) \times (0\,,1)]$. Inoltre $R(s\,, t; \lambda)$ è funzione di λ olomorfa nell'intorno di $\lambda = 0$. Orbene, Fredholm riesce a dimostrare che $R(s\,, t; \lambda)$ si prolunga in una funzione meromorfa di λ e, con incredibile abilità analitica, riesce a costruire le due trascendenti intere in λ delle quali $R(s\,, t; \lambda)$ si esprime come quoziente. Da tale rappresentazione analitica di R egli deduce tutti i risultati relativi alla risoluzione della (2.11). Volterra, dopo la scoperta di Fredholm, si valse egli stesso della possibilità di rappresentare la soluzione di (2.11) come una funzione meromorfa di λ, la quale si riduce ad una funzione razionale nel *caso finito* (2.13). Riuscì così a recuperare, in qualche modo, la validità del suo metodo. Ma era ormai tardi. D'altronde, dove il metodo di Volterra si dimostra addirittura *misleading* è nello studio dell'equazione integrale di prima specie

$$Ku = f\ . \tag{2.17}$$

Se la (2.17) si considera nel caso finito, cioè K data da (2.14), il codominio della trasformazione K è sempre, ovviamente, una varietà lineare chiusa di $\mathbb{C}^{m+1}$. Invece, nel caso (2.12) tale codominio *non* è, in generale, una varietà lineare chiusa di $L^2(0\,,1)$. Tale fatto, che il metodo del passaggio dal finito all'infinito è incapace di prevedere, fa sì, per motivi tecnici che non possiamo qui esporre, che il problema (2.17) diventi, nel caso infinito, ed a differenza di quanto avviene in quello finito, un problema *mal posto*; tale, cioè, che la soluzione (quando esiste!), ancorché possa essere unica, *non dipende con continuità dal dato* f.

La grande, peraltro meritatissima, influenza che Volterra aveva sui matematici italiani fece sì che gli indirizzi coltivati all'estero da matematici come Davide Hilbert, Maurice Fréchet (1878-1973), dai citati F. Riesz e Banach e da altri, non fossero coltivati in Italia (tranne che per un'eccezione, di cui diremo fra breve), talché l'ingresso nella via maestra dell'Analisi funzionale da parte degli analitici italiani venne ritardato di almeno vent'anni. Né giovò l'opera di Salvatore Pincherle (1853-1936), autore di un Trattato sulle Trasformazioni lineari che, tenuto su un piano essenzialmente formale, incontrò la severa, ma purtroppo giusta, critica di eminenti analisti stranieri, primo fra tutti Edmund Landau (1877-1938).

Ma a parte le limitazioni, cui l'approccio di Volterra nell'Analisi funzionale soggiace, la sua opera pionieristica rimane grande, specie per la filosofia cui essa era ispirata: attaccare con idee e metodi profondamente nuovi i grandi problemi delle applicazioni.

Le sue indagini sui fenomeni ereditari e la sua teoria delle *distorsioni elastiche*, sviluppata fra il 1905 ed il 1907, sono pietre miliari nella Fisica matematica classica. Ed anche nella Matematica pura alcune sue pionieristiche idee si rivelarono in seguito feconde. L'intento di estendere ai funzionali, dipendenti da una linea o, più in generale, da una varietà, l'ordinario concetto di *funzione armonica*, portò Volterra a definire i *funzionali armonici* che, ripresi poi da William Hodge (1903-1975), dovevano condurre a quello che può considerarsi uno dei maggiori risultati matematici di questo secolo: *il teorema di esistenza di Hodge degli integrali armonici su una varietà di Riemann di dimensione n*; teorema splendido in sé e gravido di importanti conseguenze per la Geometria algebrica e la Teoria dei gruppi continui.

Nel periodo fra le due guerre Volterra si occupò principalmente delle applicazioni dell'Analisi matematica a problemi della Biologia. A queste ricerche egli fu attratto dal valoroso biologo Umberto D'Ancona (1896-1964), che era anche suo genero e che intensamente collaborò con lui. Volterra studiò in particolare i problemi che sorgono dalla convivenza di specie animali diverse, fra le quali *prede* e *predatori*, pervenendo a formulare una teoria matematica della *lotta per la vita*. L'Analisi matematica impiegata è, in genere, non particolarmente complicata e richiede lo studio di sistemi di equazioni differenziali o, al più, integro-differenziali del tipo di Volterra. Ma assai suggestiva è l'interpretazione biologica dei risultati analitici conseguiti, qualcuno dei più semplici già in precedenza ottenuti da altri autori. È questo il caso delle oggi celebri «equazioni di Lotka-Volterra», che lo studioso americano Alfred James Lotka (1880-1949) aveva scoperto, sia pure in un caso particolare, qualche anno prima di Volterra.

Appare assai affascinante il tentativo di Volterra di trattare la *dinamica delle popolazioni* alla stregua dei *sistemi dinamici* della Meccanica analitica classica. A tal fine egli introduce nei problemi relativi alle *associazioni biologiche* principî variazionali analoghi a quelli di Hamilton (1805-1869) e di Maupertuis (1698-1759) (*minima azione*) della Dinamica classica, sviluppando una teoria biologica a questa parallela. Fino a che punto questo modello matematico possa riprodurre la realtà biologica, è questione ancora oggi indecisa e, forse, indecidibile, data la relativa semplicità del primo rispetto all'enorme complessità della seconda.

3. Giuseppe Vitali e Pia Nalli

Due figure singolari di matematici, che operarono, rispettivamente, nel periodo immediatamente precedente al primo conflitto mondiale ed in quello immediatamente successivo, furono Giuseppe Vitali (1875-1932) e Pia Nalli (1888-1964). La ragione per la quale ricordiamo assieme questi due matematici è dovuta al fatto che essi ebbero in comune due caratteristiche: l'esser stati fra i primissimi a lavorare in Italia in quella che, all'epoca, veniva chiamata la *moderna teoria delle funzioni di variabili reali* (della quale Vitali fu, addirittura, uno dei «padri») e l'aver ricevuto inadeguato riconoscimento alla loro opera matematica. Assai tardivo quello tributato a Vitali. Inesistente (ancora oggi!) quello dovuto a Pia Nalli.

Vitali, nella teoria del cosiddetto *integrale di Lebesgue*, va considerato sullo stesso piano di Henri Lebesgue e di Emile Borel (1871-1956) che di quella teoria sono riguardati come i fondatori. Di essa egli affrontò e risolse problemi centrali quali il passaggio al limite sotto il segno di integrale, il problema dell'esistenza di funzioni non misurabili, la derivazione delle funzioni additive d'insieme e la loro rappresentabilità mediante integrali (i cui risultati sono fondati sul suo celebre *teorema di ricoprimento*), l'identificazione delle *funzioni misurabili* con le *funzioni quasi-continue*, etc. Ma anche fuori della teoria dell'integrale alcuni suoi contributi rimangono nella letteratura, come il criterio di chiusura per una successione di funzioni dello spazio L^2 ed il teorema di convergenza per le successioni limitate di funzioni olomorfe. L'attività principale di Vitali si svolse, come dicemmo, nel periodo precedente la prima guerra mondiale e, pertanto, su di essa non ci intratterremo in quest'articolo. Nel periodo fra le due guerre, Vitali dedicò la sua attenzione all'Analisi funzionale, con l'intento di trasferire ad uno spazio di Hilbert i concetti ed i metodi del Calcolo differenziale assoluto.

La sua opera sulle variabili reali, che era di vera avanguardia, stentò ad affermarsi in Italia, dove il valore di Vitali venne riconosciuto solo dopo che il suo nome si era già imposto all'estero. Giunse alla cattedra universitaria quasi cinquantenne e fu eletto Socio corrispondente linceo solo nel 1930, due anni prima della sua prematura morte.

Anche Pia Nalli fu analista di grande valore, che seppe affrontare questioni difficili e d'avanguardia. Si era formata, a Palermo, alla Scuola di Giuseppe Bagnera (1865-1927), matematico eclettico ed intelligentissimo, che lasciò una produzione non di grande mole, ma di alto valore, nella quale emerge la Memoria, in collaborazione con Michele de Franchis (1875-1946), sulla classificazione delle superficie iperellittiche, insignita, nel 1909, del prestigioso Premio Bordin dell'Accademia di Francia.

La Nalli ebbe uno «stile matematico» assai diverso da quello del Maestro. Portato questo alla visione *in grande* dei problemi, tipica degli algebristi e dei geometri; fine analista, capace di compiere minuziosissime indagini la Pia Nalli.

Nel 1914 la Nalli aveva pubblicato un saggio sulla teoria dell'integrale nel quale mette a confronto, con grande acutezza, le diverse definizioni, allora note, per l'integrale definito di una variabile reale. Partendo da Cauchy e passando attraverso Riemann, Lebesgue, Borel ed altri, perviene a considerare l'integrale di Arnaud Denjoy (1884-1974) (che questo autore aveva introdotto solo due anni prima) esponendone con profondità e senso critico la teoria. Questa Monografia di Pia Nalli, ancora oggi da considerarsi attuale, svela la straordinaria capacità di orientamento e penetrazione dell'autrice, allora soltanto ventiseienne. Successivamente, ella dà prova di essersi impadronita delle tecniche di Denjoy, affrontando e risolvendo taluni difficili problemi relativi alle serie di Fourier per funzioni integrabili secondo Denjoy [14].

Nel 1905 Henri Lebesgue aveva risoluto il problema della sommazione $(C, 1)$ delle serie di Fourier di una funzione $f(x)$ integrabile secondo la sua definizione. Egli aveva dimostrato che una siffatta serie, sommata con il procedimento $(C, 1)$ di Cesaro, converge quasi ovunque a $f(x)$ in $(0\ , 2\pi)$ e, precisamente, nei punti x di $(0\,,\,2\pi)$ nei quali

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{1}{\alpha}\int_0^{\alpha}|f(x+2\alpha)+f(x-2\alpha)-2f(x)|\,d\alpha=0\,.$$

La Nalli, nel 1915, dimostra che se si suppone $f(x)$ soltanto integrabile secondo Denjoy, si ha la convergenza quasi ovunque della serie di Fourier di $f(x)$, sommata con il procedimento $(C, 2)$, verso la $f(x)$; precisamente, si ha tale convergenza nei punti x di $(0\,,\,2\pi)$ nei quali

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{1}{\alpha}\int_0^{\alpha}[f(x+2\alpha)+f(x-2\alpha)-2f(x)]\,d\alpha=0\,.$$

La ricerca è resa difficile dalla circostanza che nelle ipotesi ora assunte $|f(x)|$ non è in generale integrabile.

Del teorema della Nalli dette una nuova dimostrazione I.I. Privalov nel 1916 (Rend. Circ. Matem. Palermo, 1916).

Un gruppo di lavori di Pia Nalli che vanno dal 1919 al 1926 riguarda la Teoria delle equazioni integrali lineari ed in modo più particolare l'*equazione integrale di Fredholm di terza specie* a nucleo simmetrico che, per le difficoltà da essa presentate, era rimasta fuori delle ricerche che Volterra, Fredholm, Picard ed altri avevano dedicato a quelle di seconda e di prima specie. La Nalli, dopo aver tentato vari approcci, dimostratisi, poi, sostanzialmente inadeguati, si accorge che per pervenire ad una teoria per quella equazione ha bisogno di una *risoluzione spettrale* dell'operatore lineare simmetrico connesso all'equazione. Con la stessa facilità e rapidità, con le quali si era orientata nella teoria dell'integrale, ella si impadronisce delle tecniche con le quali, a partire dal 1909, Hilbert ed Hellinger (1883-1950) avevano affrontato e risoluto il problema della riduzione a forma canonica di una forma quadratica limitata in infinite variabili. Ciò equivale ad ottenere la ricercata risoluzione spettrale per l'operatore lineare simmetrico associato alla forma quadratica.

Avevamo, nella sezione precedente, affermato che l'influenza di Volterra, avente l'effetto di ancorare unicamente ai suoi metodi l'Analisi funzionale in Italia, ebbe fra i matematici di allora una sola eccezione. Orbene, questa fu costituita da Pia Nalli che, servendosi delle teorie di Hilbert e di Hellinger, da altri, all'epoca, ignorate in Italia, pervenne a risolvere il problema che si era posto (Nalli, 1918-19) [15].

L'*operatore integrale di terza specie* ha la forma seguente

$$Su=k(s)u(s)+\int_0^1 K(s\,,\,t)u(t)\,dt\,.$$

Esso si riduce a quello di *prima specie* se $k(s)\equiv 0$ ed a quello di *seconda specie* se $k(s)\equiv 1$. Si suppone che $k(s)$ sia una funzione misurabile e limitata e $K(s\,,\,t)\in L^2[(0\,,\,1)\times(0\,,\,1)]$. Inoltre si considera $u(s)\in L^2(0\,,\,1)$ e si assume l'ipotesi di simmetria $K(s\,,\,t)=K(t\,,\,s)$.

Applicando la teoria di Hellinger, Pia Nalli perviene alla seguente *risoluzione spettrale*

$$\begin{aligned} Su &= \sum_h \mu_h\varphi_h(s)\int_0^1 u(t)\varphi_h(t)\,dt\,+ \\ &+\sum_k\int_m^M \frac{df_k(s\,,\,\lambda)\,d\int_0^1 u(t)f_k(t\,,\,\lambda)\,dt}{d\rho_k(\lambda)}\,. \end{aligned} \tag{3.1}$$

In essa μ_h e φ_h sono gli autovalori e le autofunzioni dell'operatore S; m e M l'estremo inferiore e quello superiore dello spettro di S (necessariamente reale); le $\{f_k(s, \lambda)\}$ un opportuno sistema di *autosoluzioni differenziali* dell'operatore S, cioè di funzioni tali che

$$Sf_k(s, \lambda) = \int_0^{\lambda} \mu \, df_k(s, \mu) .$$

Le $\rho_k(\lambda)$ sono ben determinate funzioni non decrescenti di λ. Gli integrali sotto $\sum_k$ sono integrali nel senso di Hellinger. Le sommatorie $\sum_h$ e $\sum_k$ contengono, ciascuna, un numero finito o un'infinità numerabile di termini.

Tale decomposizione spettrale di S è diversa da quella ottenibile usando la *funzione spettrale* E_λ di S

$$S = \int_m^M \lambda \, dE_\lambda \tag{3.2}$$

di impiego assai più comune. È comunque possibile mettere in relazione la (3.1) con la (3.2) (Smirnov, 1964) [20, pp. 443-460].

Questa, come le successive ricerche di Pia Nalli su questo argomento, rimase pressoché ignorata in Italia, dove i metodi dell'Analisi funzionale, sviluppati all'estero, cominciarono ad essere conosciuti ed impiegati solo molto dopo, con l'opera di Renato Caccioppoli (1904-1959), prima, e con i corsi di lezioni tenuti da Mauro Picone (1885-1977), poi.

4. La Geometria differenziale in Italia nel periodo fra le due guerre. Guido Fubini

Come già si è detto, alla fine del secolo scorso ed all'inizio del presente, la Geometria differenziale non era distinta dall'Analisi matematica ed i suoi maggiori cultori furono anche grandi analisti o, addirittura, come nel caso di Levi-Civita, eminenti scienziati nel campo della Meccanica e della Fisica matematica. Un'ulteriore riprova di questa affermazione è costituita dal fatto che in Italia il maggiore cultore di Geometria differenziale durante le due guerre fu un analista: Guido Fubini (1879-1943).

La Geometria differenziale aveva raggiunto in Italia vertici altissimi grazie ai risultati di Eugenio Beltrami, all'opera monumentale di Luigi Bianchi ed alla grande scoperta di Tullio Levi-Civita relativa al concetto di *trasporto per parallelismo*. Il Levi-Civita era allievo di Gregorio Ricci-Curbastro (1853-1925), inventore del *calcolo differenziale assoluto*, la cui importanza, sottovalutata al suo sorgere, doveva rivelarsi appieno allorché divenne lo strumento matematico insostituibile nella Teoria della relatività. Levi-Civita collaborò con il suo Maestro Ricci-Curbastro nello sviluppare questa nuova teoria, ma la sua acquisizione principale in questo campo doveva essere, appunto, l'introduzione del trasporto per parallelismo in una varietà riemanniana di dimensione n. Di tale scoperta così scrive Albert Einstein (1879-1955) nella relazione con la quale, nel 1929, propose Levi-Civita quale Socio dell'Accademia delle Scienze di Berlino: « ... (*Levi-Civita*) *con la concezione del trasporto per parallelismo ha creato uno strumento altamente significativo per approfondire la teoria del continuo n-dimensionale. Non soltanto questa concezione ha portato ad una meravigliosa semplificazione della teoria riemanniana della curvatura, ma, soprattutto, ha anche originato generalizzazioni della geometria, l'importanza teorica delle quali è stata riconosciuta e l'importanza fisica non può esserne ancora valutata. Gli sforzi di Weyl e di Eddington* *per una fusione della teoria dell'elettricità e della gravitazione sono basati direttamente sull'idea di Levi-Civita del trasporto per parallelismo e così lo sono i miei propri sforzi in quest'area ...* »

Ma un nuovo indirizzo doveva sorgere in Italia, a partire dal 1914, e svilupparsi nel periodo delle due guerre con il nascere della *Geometria differenziale proiettiva*. Felix Klein (1849-1925) aveva dato, nel 1872, con il suo luminoso «Programma di Erlangen» risposta alla domanda: «che cosa è una Geometria?». Una Geometria, secondo Klein, è il complesso di tutte le proprietà degli oggetti di una data classe le quali sono invarianti rispetto ad un assegnato gruppo di trasformazioni. In questo quadro la Geometria differenziale classica si inseriva quale studio di tutte le proprietà pertinenti all'intorno di un punto su una curva, su una superficie e, in generale, su una varietà a più dimensioni, le quali sono invarianti rispetto al gruppo euclideo. Si presentava allora il «programma» consistente nel ricercare le proprietà locali, su una varietà di assegnata dimensione, invarianti rispetto al gruppo proiettivo, il programma, cioè, consistente nel creare una *Geometria differenziale proiettiva* da riguardare come evoluzione della Geometria differenziale classica, così come la Geometria proiettiva lo è di quella euclidea. Ricerche in questo indirizzo erano state intraprese da G. Halphen (1844-1889) e da Wilczynski (1876-1922), ma si deve a Guido Fubini l'espletamento sistematico di quel programma. Il suo primo lavoro in questo indirizzo venne pubblicato nel 1914, ma le sue ricerche più cospicue appartengono al periodo post-bellico, fino al 1942. Tali ricerche dettero anche luogo a due Trattati, uno in italiano nel 1927 e l'altro in francese nel 1931, entrambi scritti con la collaborazione di E. Čech (1893-1960).

Nella Geometria differenziale classica una superficie è determinata, nel gruppo euclideo, dalle due ben note forme differenziali quadratiche di Gauss

$$E du^2 + 2F\, du\, dv + G\, dv^2 , \qquad D\, du^2 + 2D'\, du\, dv + D''\, dv^2 ,$$

che, pertanto, costituiscono gli *invarianti differenziali metrici* di una superficie, atti ad individuarla a meno di una congruenza. Fubini si propone di determinare forme differenziali atte a definire una superficie a meno di una proiettività. La ricerca di tali forme impegnò Fubini a lungo ed essa conobbe varie tappe fino a giungere alla determinazione di due forme differenziali, una quadratica e l'altra cubica, atte allo scopo che Fubini si era prefisso.

In questi studi egli mise a partito, oltre a notevole intuizione geometrica, anche, e soprattutto, le sue straordinarie qualità di analista, che gli permettevano di superare le difficoltà algoritmiche più ardue. Dalla sua scoperta egli trasse molteplici conseguenze ed aperse la via a nuove ricerche nell'ambito proiettivo differenziale. All'interpretazione geometrica di tanti invarianti differenziali proiettivi, da lui trovati, si dedicarono intensamente diversi matematici ed in particolare due eminenti geometri differenzialisti italiani, Alessandro Terracini (1889-1968) ed Enrico Bompiani (1889-1975). Specialmente l'opera di quest'ultimo testimonia dello sforzo cospicuo per dare un contenuto geometrico a formazioni analitiche astruse, spesso ottenute attraverso calcoli molto laboriosi.

Occorre dire che oggi la Geometria differenziale proiettiva, che ebbe diversi cultori in Italia, ma non molti all'estero, non occupa, nel contesto internazionale, un posto centrale negli studi geometrici. Talché torna naturale chiedersi quale sia l'effettivo valore teorico di tale ramo della Geometria. Per chiarire questo punto bisognerebbe poter dare risposta ai seguenti quesiti: una teoria matematica può sorgere ed affermarsi solo perché di essa esiste un «programma»? Nelle grandi teorie matematiche è mai avvenuto che il «programma» abbia preceduto l'avvento della teoria stessa?

Ma non è questa la sede per tentare di dar risposta a questi interrogativi. Vogliamo solo notare che i geometri differenzialisti italiani, che operarono fra le due guerre, finirono con il perdere i contatti con i grandiosi sviluppi che all'estero la Geometria differenziale andava ricevendo. Si verificò questo per gli importanti problemi connessi ai nuovi concetti di varietà differenziabile astratta, come i problemi di immersione di questa in altre varietà ed, in particolare, negli spazi euclidei, l'immersione essendo intesa in grande; problemi che hanno dato luogo a profonde ricerche, specie quando all'immersione si impone di essere analitica oppure isometrica. I problemi connessi alle relazioni che intercorrono fra le proprietà differenziali locali, quali quelle di curvatura, e le proprietà topologiche. I legami fra le proprietà topologiche delle varietà e lo studio variazionale delle funzioni definite su di esse. L'impiego dell'Algebra omologica nell'analisi dei problemi connessi alle varietà differenziabili. Sono, tutti questi, temi che prepotentemente si andavano sviluppando all'estero, dando luogo al sorgere della «Geometria differenziale in grande», ma che rimasero ignorati in Italia nel periodo fra le due guerre.

Incidentalmente, è da notare che analoga sorte toccò alla Geometria algebrica italiana che, prima del conflitto del '14-'18, aveva raggiunto vette altissime. Esauritesi le possibilità che i metodi escogitati dai grandi geometri algebrici italiani, primi fra tutti, Castelnuovo, Enriques e Severi, erano in grado di fornire, la Geometria algebrica in Italia non seppe rinnovarsi e rimase estranea, fra le due guerre, agli importanti sviluppi algebrico-topologici che essa, invece, riceveva all'estero.

Tornando a Fubini, deve dirsi che la Geometria differenziale fu soltanto uno, anche se forse il più cospicuo, dei suoi campi di ricerca. Dotato di cultura prodigiosamente vasta, ebbe interessi matematici amplissimi ed egli fu certamente uno degli ultimi «matematici universali» nella storia della Matematica. Lasciò contributi nella Teoria dei gruppi discontinui e delle funzioni automorfe, nel Calcolo delle variazioni, nella Teoria delle equazioni differenziali ed in quella delle equazioni integrali, nella Teoria dell'integrale e delle variabili reali, nella Teoria delle funzioni olomorfe di più variabili complesse, nella Fisica matematica, nella Teoria dell'elasticità e dell'elettromagnetismo, nella risoluzione dei problemi della Balistica.

Non possiamo qui ricordare i molti risultati da lui ottenuti in tanti campi diversi. Ma non possiamo far a meno di richiamare quello che, forse, è il risultato per il quale egli è maggiormente ricordato, costituito dal teorema il quale afferma che ogni integrale doppio di una funzione $f(x, y)$ integrabile in $\mathbb{R}^2$, nel senso di Lebesgue, può ottenersi mediante due successive integrazioni semplici: la prima eseguita, per quasi tutti gli x di $\mathbb{R}$, rispetto ad y ed estesa a $\mathbb{R}$ e la seconda (rispetto ad x ed estesa a $\mathbb{R}$) sull'integrale ottenuto:

$$\iint_{\mathbb{R}^2} f(x, y)\,dx\,dy = \int_{\mathbb{R}} dx \int_{\mathbb{R}} f(x, y)\,dy\,.$$

Le integrazioni semplici essendo sempre da intendersi nel senso di Lebesgue.

5. Il metodo diretto nel Calcolo delle variazioni. Leonida Tonelli

Le idee che Leonardo Eulero aveva sistematicamente impiegato nel Calcolo delle variazioni e che Giuseppe Lagrange, creando la Meccanica analitica, aveva ripreso, riconducevano la ricerca dei minimi e dei massimi dei classici funzionali del Calcolo delle variazioni alla soluzione della *equazione variazionale* (*equazione di Eulero*) relativa al funzionale. Si cercava poi di riconoscere se una soluzione di questa fornisse un minimo oppure un massimo del funzionale o fosse soltanto un *punto stazionario* per il funzionale stesso. Tale procedimento *indiretto* occupò i cultori di Calcolo delle variazioni nel XVIII e nel XIX secolo. L'analisi circa la natura della *estremale* (cioè della soluzione dell'equazione di Eulero) veniva condotta mediante l'indagine della *variazione seconda* del funzionale o di formazioni analitiche a questa analoghe, pervenendo a condizioni sufficienti perché l'estremale fosse una *estremante locale*.

Il *metodo diretto* del Calcolo delle variazioni consiste invece nel dimostrare l'esistenza del minimo assoluto o del massimo assoluto di un funzionale, in tutto un assegnato insieme U, direttamente, senza cioè passare attraverso l'equazione di Eulero. Anzi, si cerca di dedurre l'esistenza di una soluzione per questa, dall'esistenza della estremante del funzionale.

Questo metodo venne inaugurato da Riemann, il quale cercò di dimostrare l'esistenza di una funzione armonica v che sulla frontiera ∂A di un campo limitato A del piano coincide con un'assegnata funzione f, continua su ∂A. Riemann pretese di dedurre l'esistenza di v dall'esistenza del minimo del funzionale

$$D(u) = \iint_A (u_x^2 + u_y^2)\,dx\,dy$$

nella classe U delle funzioni u che su ∂A coincidono con f e per le quali $D(u) < +\infty$. Purtroppo, la sua deduzione è illusoria, dato che egli ammise implicitamente l'esistenza del minimo di $D(u)$ in U, esistenza che, invece, era tutt'altro che evidente, come in seguito Weierstrass fece osservare. F. Prym (1841-1915), prima, e Hadamard, dopo, dimostrarono addirittura che per una generica f continua su ∂A la classe U può anche essere vuota. Solo in tempi più recenti sono state date le condizioni su f perché U non sia vuota.

Il primo a dimostrare l'esistenza del minimo di $D(u)$ in U fu Hilbert nel 1900. Tentativi infruttuosi, ancorché di notevole interesse analitico, erano stati in precedenza compiuti da Cesare Arzelà (1847-1912). Successivamente i risultati di Hilbert vennero estesi a funzionali più generali, le cui euleriane sono equazioni a derivate parziali lineari di tipo ellittico di ordine $2m$, da Henri Lebesgue, da Beppo Levi (1875-1961) e da Guido Fubini. Queste ricerche, oltre all'interesse intrinseco, furono importanti per i contributi, contenuti in esse, relativi alla teoria delle funzioni di variabili reali. Ad esempio, nel lavoro di B. Levi venivano per la prima volta introdotti casi particolari, assai significativi, di quegli spazi funzionali che, chiamati in seguito *spazi di Sobolev*, così grande importanza rivestono nell'Analisi contemporanea.

Spetta a Leonida Tonelli (1885-1946) il merito di essere stato il primo ad iniziare lo studio sistematico dei funzionali del Calcolo delle variazioni con il metodo diretto. Il suo primo lavoro appare nel 1911 ed è relativo agli integrali semplici del Calcolo delle variazioni in *forma parametrica*. La sua opera ebbe, tuttavia, piena estensione nel periodo fra le due guerre. I due volumi del suo fondamentale Trattato di Calcolo delle variazioni apparvero, il primo nel 1921, il secondo nel 1923.

Lo studio degli integrali semplici in forma parametrica si presenta, in linea di principio, meno astruso di quello degli integrali *in forma ordinaria*, dato che, ricercandosi l'estremante anche fra curve non rappresentabili in forma ordinaria, si amplia la classe dove cercare l'estremo. Diverso è il discorso per gli integrali doppi, dato che, in questo caso, ammettendo anche le superficie date parametricamente, occorre, per garantire la *completezza* della classe in cui si cerca l'estremo, affrontare il formidabile problema consistente nel caratterizzare le superficie in forma parametrica che hanno area finita secondo Lebesgue.

Tonelli, dopo aver studiato gli integrali semplici in forma parametrica, intraprese lo studio di quelli in forma ordinaria e successivamente si occupò degli integrali doppi in forma ordinaria. Egli si accorse che, in generale, non può pervenirsi all'esistenza del minimo usando la *continuità* del funzionale. Questa è presente solo in un caso particolarissimo.

Si consideri, infatti, l'integrale in forma ordinaria

$$F(u) = \int_A f(x, u, u')dx , \tag{5.1}$$

dove con A si indica l'intervallo $[a, b]$ dell'asse reale. Sotto opportune, peraltro assai generali, ipotesi, è condizione necessaria e sufficiente per la continuità di esso rispetto alla convergenza uniforme delle funzioni ammissibili $u(x)$, la linearità di $f(x, u, u')$ rispetto ad u' : $f(x, u, u') \equiv P(x, u)u' + Q(x, u)$ (Tonelli, 1921) [21, pp. 382 e 389].

Tonelli, riprendendo un'idea di René Baire (1874-1932), relativa alle funzioni di n variabili reali, cercò di dimostrare la *semi-continuità inferiore* del funzionale. Mentre nel caso di funzioni di n variabili reali l'idea di Baire non è nulla di più che una curiosità, nel caso di funzionali quali (5.1), il concetto di semi-continuità si rivelò essenziale. Tonelli scoperse infatti che certe condizioni del Calcolo delle variazioni classico, necessarie per l'esistenza di un minimo locale, in una data classe funzionale U, opportunamente trasportate nel contesto analitico in cui egli si muoveva, e supposte valide per ogni funzione di U, erano necessarie ed anche sufficienti per la semi-continuità inferiore di un funzionale quale (5.1) (Tonelli, 1921) [21]. Il teorema di esistenza del minimo era così ricondotto a riconoscere la *compattezza* di una *successione minimizzante* (Tonelli, 1923) [21]. L'espletamento di tale compito presentava un diverso grado di difficoltà passando dagli integrali semplici a quelli doppi. Mentre, nel caso unidimensionale, le proprietà di crescenza di $f(x, u, u')$ rispetto ad u', finivano con l'assicurare la compattezza suddetta, non si verificava più tale fatto per gli integrali doppi. Da ciò il minore successo dell'approccio di Tonelli, passando da una a due dimensioni.

Riteniamo opportuno guardare più in dettaglio la teoria di Tonelli, per meglio comprenderne la portata ed i limiti. Consideriamo a tal fine un insieme astratto U nel quale sia stato dato senso al *concetto di convergenza di una successione di suoi punti* $\{u_n\}$ e definito il *limite* (unico) di $\{u_n\}$: $\lim_{n\to\infty} u_n = u$, con u elemento di U. Sia $F(u)$ una funzione reale definita e continua in U, cioè tale che per ogni $\{u_n\}$ convergente verso u sia $\lim_{n\to\infty} F(u_n) = F(u)$. Sia $\{u_n\}$ una *successione minimizzante* $F(u)$ *in* U, cioè tale che

$$\lim_{n\to\infty} F(u_n) = \inf_{u\in U} F(u) .$$

Supponiamo che $\{u_n\}$ contenga una sottosuccessione convergente $\{u_{n_k}\}$ e sia u_0 il punto di U limite di $\{u_{n_k}\}$. La $\{u_n\}$ sia, cioè, *compatta* rispetto alla convergenza delle successioni di U. Si ha allora

$$F(u_0) = \lim_{k\to\infty} F(u_{n_k}) = \lim_{n\to\infty} F(u_n) = \inf_{u\in U} F(u) ,$$

che dimostra l'esistenza del punto u_0 di U nel quale la $F(u)$ assume il suo valore minimo. È questo il classico ragionamento che aveva fatto Weierstrass per dimostrare l'esistenza del minimo di una funzione $F(u)$ continua in un insieme chiuso e limitato di $\mathbb{R}^n$.

Supponiamo che la $F(u)$ sia soltanto *semi-continua inferiormente* in U, con ciò intendendo che per ogni $\{u_n\}$ convergente ad un punto u di U sia

$$F(u) \leq \operatorname*{minlim}_{n\to\infty} F(u_n)\,.$$

Può allora ripetersi il ragionamento dianzi fatto, nell'ipotesi che esista una successione minimizzante $\{u_n\}$ la quale sia compatta, avendosi ora

$$F(u_0) \leq \operatorname*{minlim}_{k\to\infty} F(u_{n_k}) = \lim_{n\to\infty} F(u_n) = \inf_{u\in U} F(u)\,.$$

E questa, ancora, dimostra l'esistenza del punto di minimo u_0 di $F(u)$ in U (R. Baire).

Tonelli considera il funzionale $F(u)$ dato da (5.1) supponendo $f(x, u, u')$ definita per $(x, u) \in \Omega$ (Ω campo del piano) e per ogni valore reale di u'. Egli considera il funzionale (5.1) in classi U di funzioni $u = u(x)$ che sono assolutamente continue in $[a, b]$ e per le quali $f[x, u(x), u'(x)]$ è integrabile secondo Lebesgue in $[a, b]$. Introduce in U quale convergenza la convergenza uniforme di successioni di siffatte funzioni in $[a, b]$. Egli dimostra, in opportune ipotesi qualitative per $f(x, u, u')$, che per la semicontinuità inferiore su ogni $u(x) \in U$ è sufficiente e, fatte le opportune precisazioni, anche necessario che $f(x, u, u')$ sia, per ogni $(x, u) \in \Omega$, funzione convessa di u'. Soddisfatta la ipotesi di convessità predetta, Tonelli dimostra che si ha l'esistenza del minimo di $F(u)$ in U se la classe U è *completa* (con ovvio significato da attribuire a questo termine) e se per ogni $(x, u) \in \Omega$

$$\lim_{|u'|\to\infty} \left|\frac{f(x, u, u')}{u'}\right| = +\infty\,. \tag{5.2}$$

L'esistenza del minimo si acquisisce facendo vedere che la (5.2) implica la compattezza di ogni successione minimizzante $F(u)$ in U. La (5.2) è verificata se riesce

$$f(x, u, u') \geq c_0|u'|^{1+\alpha} + c_1 \qquad c_0 > 0\,, \quad \alpha > 0\,,$$

nel qual caso si vede subito che una successione minimizzante $\{u_n\}$ è tale che

$$\int_A |u_n'|^{1+\alpha}\, dx < L \tag{5.3}$$

con L indipendente da n. Ciò, per un classico teorema di Giulio Ascoli (1843-1896) e Cesare Arzelà, implica la compattezza di $\{u_n\}$, se la successione $\{u_n(x_0)\}$ è limitata ($x_0 \in [a, b]$).

Sia ora $x \equiv (x_1, x_2)$, u una funzione reale di x_1 e x_2 e $u' \equiv (u_{x_1}, u_{x_2})$. Sia A un campo di $\mathbb{R}^2$. Con tale nuovo significato dei simboli si riconsideri il funzionale (5.1), dove è ora $dx = dx_1 dx_2$ e l'integrale a secondo membro è un integrale doppio. Le funzioni ammissibili sono quelle *assolutamente continue rispetto alle due variabili* x_1 e x_2 in un senso che Tonelli stesso ha introdotto per le funzioni di più variabili. La teoria di Tonelli si estende facilmente fino alla dimostrazione della semicontinuità di $F(u)$. Ma purtroppo, condizioni quali la (5.3) non sono più in grado di assicurare la compattezza di una successione minimizzante. Esempio tipico, di particolare interesse, è quello del classico funzionale

$$D(u) = \int_A |u'|^2\, dx = \iint_A (u_{x_1}^2 + u_{x_2}^2)\, dx_1\, dx_2\,.$$

In tal caso è verificata la condizione (5.3), ma la (5.3) non è più in grado di assicurare la compattezza di una successione minimizzante. Tonelli cercò di aggirare questa grave difficoltà con ingegnosi artifici, ma il suo metodo, applicato agli integrali multipli, perdeva vigore ed efficacia.

La difficoltà venne superata in seguito da C.B. Morrey (1907-1984) che, al principio degli anni '40, introdusse nel Calcolo delle variazioni un concetto di convergenza più appropriato e precisamente la *convergenza debole negli spazi di Sobolev* $W^1_{1+\alpha}(A)$, relativamente alla quale il sussistere della (5.3) (assieme ad ipotesi, in genere verificate, atte ad assicurare la equilimitatezza di $\int_A |u_n|^{1+\alpha} dx$) è in grado di garantire la compattezza di $\{u_n\}$.

Pur con le limitazioni di cui si è detto, relative allo studio degli integrali multipli del Calcolo delle variazioni, Tonelli rimane il grande iniziatore dell'epoca moderna del Calcolo delle variazioni. Il suo nome è anche legato ad altri importanti risultati relativi alle funzioni di più variabili reali, alla teoria dell'approssimazione, alle equazioni differenziali, risultati dei quali non possiamo qui riferire.

6. L'Analisi numerica e l'opera di Mauro Picone

Coetaneo di Leonida Tonelli ed analista che dette alla Matematica italiana spinta altrettanto grande fu Mauro Picone (1885-1977). Formatosi alla Scuola di Ulisse Dini e di Luigi Bianchi, Picone sentì soprattutto l'influenza di Eugenio Elia Levi, suo condiscepolo alla Scuola Normale di Pisa e di lui più avanti negli studi solo di tre anni. Picone, però, considerò sempre E. E. Levi come uno dei suoi Maestri. I lavori giovanili di Picone riguardano la teoria delle equazioni differenziali, ordinarie ed alle derivate parziali, e la Geometria differenziale, che, tuttavia, egli presto abbandonò perché a lui non congeniale. Seppe, invece, cogliere importanti risultati nello studio di problemi relativi alle equazioni differenziali. Essi riguardano quelle alle derivate parziali di tipo iperbolico, quelle ordinarie e quelle alle derivate parziali lineari del secondo ordine con forma caratteristica non negativa (*equazioni ellittico-paraboliche*). Per queste ultime, estendendo precedenti ricerche di Sturm, relative alle equazioni differenziali ordinarie, gettò le basi per una *teoria della oscillazione*, che è stata ripresa, in tempi recenti, da vari autori i quali riconoscono i contributi pionieristici dati da Picone, fra il 1910 ed il 1914, alla teoria stessa (K. Kreith, 1973) [11].

Ma la personalità scientifica di Picone si sviluppò e si manifestò completamente dopo il primo conflitto mondiale. Artigliere durante la guerra del '15-'18, aveva avuto l'incarico, quale matematico, di cercare di risolvere, sulla linea del fronte, problemi balistici del tutto nuovi. Era stato, infatti, accertato, dal Comando dell'Artiglieria italiana, l'inadeguatezza delle vecchie tavole di tiro, delle quali il nostro Esercito, al principio di quella guerra, disponeva; queste non prevedevano l'impiego dei grossi calibri nei grandi dislivelli di una guerra combattuta sulle Alpi.

Picone, con uno sforzo formidabile, risolse, nel modo più brillante e completo, quei problemi in brevissimo tempo e le precise indicazioni da lui fornite «determinarono il successo della Artiglieria italiana nel primo conflitto mondiale», come si legge su una lapide, apposta a suo ricordo, nella Scuola di Artiglieria a Torino, un anno dopo la sua morte.

Questa esperienza bellica convinse Picone che l'Analisi matematica, quando esce dalla *turris eburnea* della Scienza pura e si rivolge alle applicazioni, riceve essa stessa stimoli ed idee che, grandemente, ne avvantaggiano lo sviluppo. Questo concetto, ovviamente, non era nuovo, ma Picone intendeva come «soluzione di un problema» la proposta di schemi esaurienti e rigorosi, atti a fornire il calcolo numerico delle quantità incognite con esplicita maggiorazione dell'errore di approssimazione. Si riattaccava così alle grandi idee di Archimede (287-212 a.C.) e di Gauss (1777-1855). Vagheggiò, pertanto, il sorgere, accanto all'Analisi matematica classica, di una disciplina nuova:

l'*Analisi numerica* o, come egli allora la chiamava, il *Calcolo numerico*. Questa nuova disciplina doveva, secondo Picone, avere insegnamenti suoi propri e specifici laboratori dove essere coltivata.

Con questo in mente, si adoperò tenacemente per fondare un Istituto per le applicazioni del Calcolo e per introdurre negli insegnamenti universitari di Matematica il Calcolo numerico. Appartengono quasi alla leggenda più che alla storia della Matematica italiana le battaglie da lui sostenute, contro l'indifferenza o, peggio, lo scetticismo dei matematici italiani dell'epoca, per portare avanti le sue idee. Nella migliore delle ipotesi molti, anche fra i grandi dell'epoca, ritenevano quanto meno bizzarre le idee di Picone e furono pochissimi quelli che non lo avversarono. Oggi noi sappiamo quale parte occupi nella Scienza l'Analisi numerica, la quale, a sua volta, con l'avvento dei grandi calcolatori elettronici, ha aperto la via alle Scienze informatiche. Possiamo, quindi, ben decidere se Picone vedesse giusto o no.

Egli, con incredibile tenacia, proseguì nel suo intento e riuscì, nel 1927, allorché era professore nella Università di Napoli, a fondare il tanto sospirato Istituto di Calcolo. Certamente il primo del genere nel mondo.

L'impresa si era resa possibile grazie ad un'iniziativa privata, sostenuta da una Banca. Solo nel 1932, quando Picone si trasferì nella Università di Roma, l'Istituto divenne un Istituto del C.N.R. ed ebbe nome *Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo*.

Nel contempo Picone era riuscito a far includere un insegnamento di Calcolo numerico nella Scuola di Scienze Statistiche e Attuariali. Tale insegnamento solo nel 1936 veniva accettato fra quelli opzionali della Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali. Ma si doveva attendere fino al 1962 perché detta Facoltà avesse una cattedra di ruolo per l'Analisi numerica. Una cattedra, peraltro, non statale, ma convenzionata con una casa produttrice di elaboratori elettronici che, per ovvi motivi, riteneva di dover potenziare lo sviluppo di questa disciplina. Al momento attuale le cattedre di ruolo di Analisi numerica nelle Università italiane sono numerosissime ed il loro numero è destinato a crescere.

La grande opera pionieristica di Picone è oggi universalmente riconosciuta. Già nel 1951 l'Unesco decideva che la sede più idonea in Europa per ospitare il Centro internazionale di Calcolo, che quella istituzione progettava di creare, fosse l'Italia. Il rapporto, redatto da una Commissione internazionale, che originò quella decisione, così recitava: « ... *I fisici e i matematici italiani sono certamente fra i migliori del mondo; l'attività del Centro internazionale sarà grandemente stimolata dalla loro vicinanza. Il nuovo Centro beneficerà grandemente della lunga esperienza dell'Istituto italiano di Calcolo, il quale è un rimarchevole laboratorio di matematica applicata, che, dalla sua creazione, datante da un quarto di secolo, funziona sotto la direzione del Prof. M. Picone* ... ».

Il detto Centro internazionale venne effettivamente creato e come sua sede fu scelta Roma. Purtroppo, per motivi che nulla avevano a che vedere con la Scienza, ma erano solo originati da spinte di deteriore politica universitaria e non universitaria, venne a crearsi una situazione tale da impedire che quel Centro potesse bene avviarsi e progredire. Talché esso non si sviluppò mai. Il nostro Paese perse così una grande occasione!

Picone concepiva l'Analisi numerica come una sublimazione dell'Analisi matematica e, sul piano teorico, i metodi di calcolo numerico che egli proponeva erano rigorosissimi procedimenti matematici. Naturalmente, nella pratica quotidiana dell'attività dell'Istituto del Calcolo, che egli diresse dal 1927 al 1960, dovendo, comunque, dare risposta ai quesiti posti da ingegneri, fisici, chimici, studiosi applicati in genere, accettava i compromessi imposti da quello che egli chiamava il *Calcolo numerico sperimentale*. Ma poneva a se stesso ed ai suoi allievi gli ardui problemi teorici, consistenti nel giustificare e rendere rigorosi i metodi empirici impiegati. Ciò attrasse a lui numerosissimi giovani studiosi, che sentivano, lavorando con lui, di occuparsi di una Matematica nuova ed elevata. Si aggiunga a questo la straordinaria personalità umana di Picone, calda ed entusiasta, che gli fece amare i molti suoi allievi come i figli che il destino non gli aveva concesso. Picone fu un grandissimo Maestro, fra i maggiori che la Matematica italiana abbia avuto dopo Galileo. Gli allievi diretti di Picone, gli allievi di questi e quelli delle successive generazioni hanno occupato ed occupano, con prestigio, gran parte delle cattedre di Analisi matematica e di Analisi numerica nelle Università italiane.

Picone, nei suoi scritti matematici, fu fautore del massimo rigore scientifico e della massima generalità. È quindi difficile riassumere brevemente i contenuti dei metodi da lui proposti per il calcolo delle soluzioni dei problemi al contorno per le equazioni differenziali (Picone, 1940; Fichera, 1950; Miranda, 1954, 1969) [17, 9, 13]. Tenteremo di farlo riferendoci ad un caso assai particolare, che, tuttavia, dovrebbe essere atto a far comprendere le idee di Picone ed il tipo di problemi teorici che scaturivano dai procedimenti da lui considerati.

Con Ω indicheremo un campo limitato di $\mathbb{R}^n$ la cui frontiera $\partial\Omega$ soddisfi opportune condizioni di regolarità. Il problema è quello classico di Dirichlet

(6.1) $\Delta_2 u = f$ in Ω; (6.2) $u = g$ su $\partial\Omega$

$$\left(\Delta_2 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}\right).$$

Le funzioni reali f e g debbono soddisfare ipotesi di regolarità tali da dare significato a quanto verremo a dire.

Un primo metodo proposto da Picone è quello delle *minime potenze*, che aveva classici precedenti nell'Analisi quantitativa e che, relativamente al problema (6.1), (6.2), era già stato considerato da M. Brillouin (1854-1948) in casi particolari per $p = 2$ (Brillouin, 1916) [5]. Esso consiste nel definire l'*approssimazione n-esima* $\sum_{k=1}^n c_k^{(n)} \varphi_k$ della soluzione u del problema (6.1), (6.2) al modo seguente. Si prefissi un sistema $\{\varphi_k\}$ di funzioni «approssimanti» linearmente indipendenti ed appartenenti a $C^2(\overline{\Omega})$ e, fissato $p \geq 1$, si scelgano le costanti (reali) $c_k^{(n)}$ in guisa tale che

$$\int_\Omega \left| \sum_{k=1}^n c_k^{(n)} \Delta_2 \varphi_k - f \right|^p dx + \int_{\partial\Omega} \left| \sum_{k=1}^n c_k^{(n)} \varphi_k - g \right|^p ds = \text{minimo}. \tag{6.3}$$

Ciò, per $p > 1$, determina univocamente le $c_k^{(n)}$ che per $p = 2$ si ottengono come soluzioni del seguente sistema lineare algebrico $n \times n$ non singolare

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^n c_k^{(n)} \left\{ \int_\Omega \Delta_2 \varphi_k \Delta_2 \varphi_i dx + \int_{\partial\Omega} \varphi_k \varphi_i d\sigma \right\} = \\ &= \int_\Omega f \Delta_2 \varphi_i dx + \int_{\partial\Omega} g\, \varphi_i\, d\sigma \qquad (i = 1, \ldots, n). \end{aligned} \tag{6.4}$$

Si tratta di dimostrare: 1) la convergenza del metodo; 2) la possibilità di maggiorare l'errore di approssimazione. Indicato con $\mu_n^{(p)}$ il minimo dato da (6.3), l'espletamento del punto 1) richiede, almeno in prima istanza, la dimostrazione del fatto che $\lim_{n\to\infty} \mu_n^{(p)} = 0$. Ciò porta a dovere dimostrare la completezza del sistema di vettori $(\Delta_2\varphi_k|_\Omega\,,\ \varphi_k|_{\partial\Omega})$ nello spazio $L^p(\Omega) \times L^p(\partial\Omega)$. Assunto $p > 1$, per un classico teorema di F. Riesz, occorre e basta far vedere che, se $\psi \in L^p(\Omega)$, $\gamma \in L^q(\Omega)$, $q = p/(p-1)$

$$\int_\Omega \psi\Delta_2\varphi_k\, dx + \int_{\partial\Omega} \gamma\,\varphi_k\, d\sigma = 0 \qquad \forall\ k\ ,$$

si ha allora $\psi \equiv 0$, $\gamma \equiv 0$.

Questo condusse Picone ad essere fra i primissimi ad, implicitamente, considerare le «soluzioni deboli» dei problemi al contorno. In effetti, si consideri la soluzione debole L^q delle equazioni $\Delta_2\psi = 0$ in Ω, $\psi = 0$ su $\partial\Omega$, $\partial\psi/\partial\nu = \gamma$ su $\partial\Omega$ (ν normale esterna a $\partial\Omega$) definita dall'equazione

$$\int_\Omega \psi\Delta_2\varphi\, dx + \int_{\partial\Omega} \gamma\varphi\, d\sigma = 0\,, \quad \forall\,\varphi \in C^2(\overline{\Omega})\,.$$

Non è difficile dimostrare che, impiegando come φ_k le funzioni generalmente usate nella teoria dell'approssimazione (ad esempio, assumendo come $\{\varphi_k\}$ il sistema di tutti i monomi nelle variabili $x_1\,, \ldots\,, x_n$ o il sistema impiegato nella teoria delle serie multiple trigonometriche), la detta completezza è perfettamente equivalente a dimostrare il teorema di unicità, nella classe delle predette soluzioni deboli L^q, per il problema di Dirichlet: $\Delta_2\psi = 0$ in Ω, $\psi = 0$ su $\partial\Omega$.

Per ancor meglio comprendere la portata del problema, si consideri il caso particolare $f \equiv 0$ e si assuma come $\{\varphi_k\}$ una successione $\{\omega_k\}$ costituita da polinomi armonici omogenei atti a generare, mediante combinazione lineare di un numero finito dei suoi termini, ogni polinomio armonico. Ad esempio, per $n = 2$, come $\{\omega_k\}$ può prendersi la successione costituita da tutti i polinomi in x_1, x_2 del tipo $\mathcal{R}(x_1 + ix_2)^h$, $\mathcal{I}(x_1 + ix_2)^h$ $(h = 0\,, 1\,, 2\,, \ldots)$. In tal caso, se Ω è il disco $|x| < 1$, il problema si riduce a quello, classico nella teoria delle serie trigonometriche, relativo alla completezza del *sistema trigonometrico* costituito da $\cos h\theta$, $\sin h\theta$ $(h = 0\,, 1\,, 2 \ldots)$ nello spazio $L^p(0\,, 2\pi)$. Si noti che per $p \neq 2$ le costanti $c_1^{(n)}\,, \ldots\,, c_n^{(n)}$ che forniscono $\mu_n^{(p)}$ non possono più calcolarsi risolvendo un sistema lineare algebrico. Addirittura per $p = 1$ manca l'unicità delle costanti $c_k^{(n)}$ di migliore approssimazione.

La condizione (6.2) può sostituirsi con quella di Neumann $\partial u/\partial\nu = h$ su $\partial\Omega$ o con quella «mista» $u = h_1$ su $\partial_1\Omega$, $\partial u/\partial\nu = h_2$ su $\partial_2\Omega$; $\partial\Omega = \partial_1\Omega \cup \partial_2\Omega$, $\partial_1\Omega \cap \partial_2\Omega = \emptyset$. Tali sostituzioni, specie la seconda, portano ad affrontare problemi ancora più difficili. È anche da notare, assumendo $p = 2$, che il metodo proposto incontra, in genere, l'inconveniente costituito dal progressivo «mal condizionamento» del sistema (6.4). A tale inconveniente si è posto, in parte, rimedio, in tempi posteriori a quelli di Picone, impiegando come φ_k quelle particolari funzioni che hanno dato luogo ai cosiddetti *metodi degli elementi finiti*.

La «convergenza» del metodo descritto si consegue facendo vedere la convergenza a zero dell'*errore di approssimazione*, errore che bisogna convenire di definire in qualche modo. Si definisca tale «errore» al modo seguente

$$\varepsilon_n^{(p)} = \int_\Omega \left| u - \sum_{k=1}^{n} c_k^{(n)}\varphi_k \right|^p dx\,.$$

Si tratta allora di dimostrare che esiste una costante $c^{(p)}$, dipendente solo da p (e da Ω), tale che $\varepsilon_n^{(p)} \leq c^{(p)}\mu_n^{(p)}$. Non è difficile provare l'esistenza di tale costante, ma tutt'altro che semplice è il suo calcolo esplicito, dato che esso consiste, se si ricerca la costante $c^{(p)}$ *ottimale*, nel calcolo del massimo del funzionale $\int_\Omega |u|^p dx$ nella classe delle funzioni che verificano la condizione

$$\int_\Omega |\Delta_2 u|^p dx + \int_{\partial\Omega} |u|^p d\sigma = 1\,.$$

Già nel caso più semplice $p = 2$, si dimostra che $c^{(2)}$ è l'inverso del più piccolo autovalore λ del problema di autovalori relativo al seguente sistema:

(6.5) $\quad \Delta_2\Delta_2 v - \lambda v = 0$ in $\Omega\,,$ $\qquad$ (6.6) $\quad \Delta_2 v - \lambda\frac{\partial v}{\partial\nu} = 0$ su $\partial\Omega\,.$

Data la natura eterodossa del problema di autovalori (6.5), (6.6), è tutt'altro che facile pervenire al calcolo rigoroso (che, ovviamente, deve essere condotto per difetto!) di λ. Nel caso $p \neq 2$, l'Analisi matematica è, ancora oggi, non in grado di indicare un metodo per il calcolo rigoroso (per eccesso!) di $c^{(p)}$. Riesce, tutt'al più, ad indicare valori di costanti che maggiorano $c^{(p)}$, ma che, in genere, sono assai discosti da $c^{(p)}$.

Nel caso $f \equiv 0$ Picone considerò, come alternativa al metodo di approssimazione dato da (6.3), per $p = 2$, il seguente altro

$$\int_\Omega \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} c_k^{(n)} \frac{\partial \omega_k}{\partial x_j} - \frac{\partial u}{\partial x_j} \right)^2 dx = \text{minimo} . \tag{6.7}$$

Le $c_k^{(n)}$ sono le soluzioni del sistema lineare algebrico non degenere

$$\sum_{k=1}^{n} c_k^{(n)} \int_\Omega \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \omega_k}{\partial x_j} \frac{\partial \omega_i}{\partial x_j} dx = \int_{\partial\Omega} g \frac{\partial \omega_i}{\partial \nu} d\sigma .$$

Il metodo, nello stesso lasso di tempo, veniva considerato da Stefan Bergman (1898-1977) e da altri da lui ispirati. Anche qui si pongono problemi di completezza, di convergenza e di maggiorazione dell'errore, considerati, in seguito, da Picone e dalla sua Scuola. Invece Bergman ed i suoi collaboratori, attraverso il metodo (6.7), svilupparono uno degli aspetti della teoria della *kernel function* (Bergman, 1950; Bergman-Schiffer, 1953) [3, 4].

Si riconosce che il metodo di Bergman-Picone è una sorta di «controparte» del celebre *metodo della proiezione* (H. Weyl, 1940) [27], dovuto a H. Weyl (1885-1955). Anche questo metodo era stato proposto verso la fine degli anni '30. Il metodo di H. Weyl riconduce la soluzione del problema (6.1), (6.2) con $g \equiv 0$ ad una proiezione, in uno spazio di Hilbert normato mediante l'integrale di Dirichlet, sulla varietà delle funzioni nulle su $\partial\Omega$. Invece il metodo di Bergman-Picone, riferito al problema (6.1), (6.2) con $f \equiv 0$, usa, nello stesso spazio, una proiezione sulla varietà delle funzioni armoniche, la quale è il «complemento ortogonale» di quella considerata da H. Weyl. Entrambi i metodi forniscono l'esistenza e l'unicità di particolari soluzioni deboli, che attraverso opportuni lemmi di «regolarizzazione», finiscono con il fornire soluzioni in senso classico.

Un ulteriore metodo fu proposto da Picone per il calcolo della soluzione di (6.1), (6.2); tale metodo è particolarmente utile in quei problemi, quali quelli della Teoria matematica dell'elasticità, nei quali, oltre che alla soluzione nell'interno di Ω, occorre calcolare le *reazioni vincolari* su $\partial\Omega$ (nel caso schematico (6.1), (6.2) la $\partial u/\partial\nu$). Sia $\varphi \in C^2(\overline{\Omega})$ e supponiamo che la soluzione u di (6.1), (6.2) sia tale che riesca $u \in C^0(\overline{\Omega})$, $\partial u/\partial\nu \in C^0(\partial\Omega)$ e che per essa possa scriversi la formula di Green

$$\int_\Omega (u\Delta_2\varphi - \varphi\Delta_2 u) dx + \int_{\partial\Omega} \left(\varphi \frac{\partial u}{\partial\nu} - u \frac{\partial\varphi}{\partial\nu} \right) d\sigma = 0 . \tag{6.8}$$

Si ha quindi, se $\{\varphi_k\}$ è un sistema tale che $\{\Delta_2\varphi_k , \varphi_k\}$ sia completo in $L^2(\Omega) \times L^2(\partial\Omega)$

$$\int_\Omega u\Delta_2\varphi_k \, dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial\nu} \varphi_k \, d\sigma = \int_\Omega f\varphi_k \, dx + \int_{\partial\Omega} g \frac{\partial\varphi_k}{\partial\nu} d\sigma . \tag{6.9}$$

Allora, per il classico teorema di Fischer-Riesz in uno spazio di Hilbert si ha

$$u = \lim_{n\to\infty} \textstyle\sum_{k=1}^{n} c_k^{(n)} \Delta_2\varphi_k , \tag{6.10}$$

$$\frac{\partial u}{\partial\nu} = \lim_{n\to\infty} \textstyle\sum_{k=1}^{n} c_k^{(n)} \varphi_k . \tag{6.11}$$

Il primo limite (6.10) è inteso in $L^2(\Omega)$, il secondo (6.11) in $L^2(\partial\Omega)$; le $c_k^{(n)}$ sono le soluzioni del sistema lineare algebrico

$$\sum_{k=1}^{n} c_k^{(n)} \left(\int_\Omega \Delta_2\varphi_k\Delta_2\varphi_i \, dx + \int_{\partial\Omega} \varphi_k\varphi_i \, d\sigma \right) = \int_\Omega f\varphi_i \, dx + \int_{\partial\Omega} g \frac{\partial\varphi_i}{\partial\nu} d\sigma .$$

Ma questo procedimento non è solo un metodo di calcolo, applicabile quando la u è tale che sussista la (6.8). Esso porta anche a dimostrare l'esistenza di una soluzione debole di (6.1), (6.2). Infatti, scritte le (6.9) con γ al posto di $\partial u/\partial\nu$, valgono, in opportune ipotesi per f e g, le relazioni di limite (6.10), (6.11) (nella (6.11) $\partial u/\partial \nu$ è sostituita da γ) ed è possibile dimostrare che sussiste la (6.8), con γ al posto di $\partial u/\partial \nu$, per ogni $\varphi \in C^2(\overline{\Omega})$. Resta così provata l'esistenza di una soluzione debole u del problema (6.1), (6.2), che Amerio dimostrò, in seguito, essere, in opportune ipotesi di regolarità per f e g, una soluzione in senso classico, con $\gamma = \partial u/\partial \nu$ (Amerio, 1945) [1].

Si comprende, trasportando le cose dette ad operatori differenziali lineari (anche non ellittici) ed a problemi al contorno del tutto generali, quanto sia vasta la tematica cui i metodi di Picone dettero luogo. Molti dei problemi che essi originarono sono stati risolti dai suoi allievi e dagli allievi di questi.

Picone può, a buon diritto, essere considerato, assieme a K.O. Friedrichs (1901-1983) ed a S.L. Sobolev (1908-1989), uno dei «padri» della moderna teoria dei problemi al contorno per le equazioni differenziali lineari.

7. L'Aerodinamica transonica e l'equazione di tipo misto. F. Tricomi

Francesco Tricomi (1897-1978), ancora giovanissimo, si pose, nel 1920, il problema di studiare un'equazione lineare alle derivate parziali la quale fosse di *tipo misto*, cioè *ellittica* in una regione del piano x, y, *iperbolica* in quella complementare e *parabolica* sulla frontiera comune alle due regioni. Egli ebbe l'idea, rivelatasi in seguito veramente felice, di scegliere l'equazione (oggi detta *di Tricomi*)

$$yu_{xx} + u_{yy} = 0 , \tag{7.1}$$

ellittica per $y > 0$, iperbolica per $y < 0$, parabolica per $y = 0$ e di porre e risolvere per essa un problema al contorno (oggi detto *problema di Tricomi*) «ben posto» nel senso di Hadamard.

Espose le sue ricerche in un'importante Memoria di oltre cento pagine che Luigi Bianchi e Francesco Severi presentarono, con lusinghiera relazione, per la pubblicazione sugli Atti lincei nel 1923 (Tricomi, 1923) [22]. Questa Memoria sarebbe stata destinata, come scrisse lo stesso Tricomi, «a dormire sonni tranquilli nei grossi volumi delle Memorie dei Lincei» se, nel 1945, non si fosse verificato un fatto eccezionale. Erano da poco tempo apparsi, proprio sul finire della guerra, gli aerei a reazione e si prevedeva prossimo, date le altissime velocità raggiunte da quegli aeromobili, il superamento della «barriera del suono». Si imponeva, quindi, il compito di studiare e prevedere i conturbanti fenomeni che si presentano nella «fase transonica», cioè nell'intervallo di tempo in cui l'aereo è prossimo alla velocità del suono, la raggiunge e l'oltrepassa. T. Von Karman (1881-1963), negli U.S.A. e F.I. Frankl (1905-1961), nell'U.R.S.S., lavoravano su questa tematica, allorché, proprio nel 1945, si accorsero, indipendentemente l'uno dall'altro, che il modello matematico il quale, in prima approssimazione, traduce il problema transonico, è proprio retto dall'equazione (7.1) che Tricomi aveva studiato fra il 1920 ed il 1923. E con stupore constatarono che nella Memoria di Tricomi si trovava tutto l'armamento analitico che a loro serviva per costruire una «Aerodinamica transonica». Vi fu allora un'autentica ondata di entusiasmo per l'opera dell'analista italiano da parte di tutti i cultori di Aerodinamica transonica in campo internazionale. Non solo la (7.1) ed il relativo problema al contorno (per il quale era stato riconosciuto un importante significato fisico) vennero intitolati a Tricomi, ma addirittura il fluido ideale che nella fase transonica si comporta in modo da obbedire esattamente all'equazione di Tricomi, venne, in seguito, battezzato *Tricomi gas*.

Francesco Tricomi, che aveva uno straordinario senso umoristico, rivolto non solo verso gli altri, ma anche verso se stesso, ritenne tutto questo eccessivo e, mentre accettò di dare il suo nome alla (7.1) ed al relativo problema al contorno, ricusò la denominazione con il suo nome di un gas che, com'era ben prevedibile, aveva comportamenti anomali nelle fasi *subsonica* e *supersonica* (Tricomi, 1957) [24].

Il *problema di Tricomi* per l'equazione (7.1) consiste nel considerare un campo Ω del piano x, y che ha come frontiera una curva semplice ed aperta Γ contenuta nel *semipiano ellittico* $y > 0$, ma avente gli estremi in due punti A e B dell'asse x e due caratteristiche Γ_1 e Γ_2 uscenti, rispettivamente, da A e da B e che si incontrano nel punto C del *semipiano iperbolico* $y < 0$. Sono assegnati i valori della funzione incognita u su Γ, rappresentati da una funzione u_0 definita su Γ, ed i valori su una delle due caratteristiche, per esempio Γ_1, rappresentati da una funzione u_1 definita su Γ_1. Il metodo che egli segue per risolvere questo problema è notevolmente ingegnoso e consiste nel separare il problema stesso in due parti: una nel semipiano iperbolico, l'altra in quello ellittico. Ispirandosi a Darboux, egli riesce prima ad ottenere una formula esplicita per una soluzione u della (7.1) nel triangolo ABC, limitato dal *segmento parabolico* AB e dalle due caratteristiche Γ_1 e Γ_2, quando si suppongono noti i valori $u(x, 0) = \tau(x)$ e quelli della derivata $u_y(x, 0) = \nu(x)$ sul segmento AB. Con tale formula egli rappresenta la u su Γ_1, ma essendo $u = u_1$ su Γ_1, perviene ad un'equazione integrale che involge $\tau(x)$ e $\nu(x)$. Questa, risoluta rispetto a $\tau(x)$, permette di esprimere questa funzione mediante una trasformazione integrale operante su $\nu(x)$ e su u_1

$$\tau(x) \equiv T_1(\nu, u_1). \tag{7.2}$$

Successivamente egli considera il problema di Dirichlet per la (7.1) nel campo limitato da Γ e dal segmento AB. È questo un problema di Dirichlet anomalo, dato che la (7.1) *degenera* su AB e diventa parabolica. Esso costituisce uno dei primissimi esempi di problema al contorno per un'equazione ellittica degenerante su una parte della frontiera. In seguito questi problemi sono stati studiati in un assai ampio contesto (Oleinik e Radkevič, 1973) [16].

Tricomi dimostra l'esistenza e l'unicità per questo problema di Dirichlet ed ottiene una rappresentazione esplicita della soluzione mediante u_0 e τ. Tale rappresentazione gli permette di esprimere $u_y = \nu$ sul segmento AB mediante una trasformazione integrale lineare operante su τ e u_0

$$\nu(x) = T_0(\tau, u_0). \tag{7.3}$$

Da (7.2), (7.3) egli ottiene in AB

$$\nu = T_0[T_1(\nu, u_1), u_0] \equiv T(\nu; u_0, u_1). \tag{7.4}$$

La (7.4), fissate le funzioni u_0 ed u_1, è una equazione integrale lineare nell'incognita ν, che Tricomi dimostra essere perfettamente equivalente al problema iniziale. Purtroppo, tale equazione non è del *tipo di Fredholm*, dato che in essa intervengono nuclei non sommabili, ma aventi, soltanto, *integrali convergenti nel senso di Cauchy*. Ma Tricomi non si perde d'animo e con un geniale procedimento, che oggi lo fa considerare uno dei pionieri anche nella Teoria delle equazioni integrali singolari su una *curva aperta* (l'intervallo AB), riesce a dimostrare per la (7.4) l'*alternativa di Fredholm*. Ciò implica che se l'equazione $\nu = T(\nu; 0, 0)$ ha solo la soluzione $\nu = 0$, allora la (7.4) ha una ed una sola soluzione per ogni scelta di u_0 ed u_1, essendo queste funzioni soltanto assoggettate a soddisfare ovvie ipotesi qualitative e di raccordo. Poiché per il suo problema egli aveva preventivamente dimostrato un teorema di unicità, data l'equivalenza di esso con l'equazione integrale (7.4), perviene, in tal modo, alla dimostrazione del teorema di esistenza per il problema che si era posto (Tricomi, 1923).

Questo magistrale lavoro di Tricomi sarebbe rimasto un «pezzo di bravura» se, come dicemmo, non fosse stato scoperto, più di venti anni dopo la sua pubblicazione, che l'*equazione* ed il *problema di Tricomi* rivestono un interesse centrale nell'Aerodinamica transonica.

Ma non soltanto alle equazioni di tipo misto ed all'Aerodinamica transonica Tricomi ha lasciato legato il suo nome. Nel 1926, durante una ricerca relativa al potenziale elettrico nello spazio a tre dimensioni, creato da una carica distribuita su una lamina piana, egli s'imbattè in un'equazione integrale bi-dimensionale con nucleo non sommabile ma, soltanto, ad integrale convergente. Lo studio di questa equazione lo condusse ad affrontare ed a risolvere il problema dell'inversione di due integrazioni doppie singolari nel senso di Cauchy, scoprendo una formula che generalizza al caso bi-dimensionale quella che per il ben più semplice problema uni-dimensionale era stata da tempo scoperta da Poincaré e da Bertrand (1822-1900). L'analisi di Tricomi portò, in seguito, S.G. Mikhlin (1908-1990) e G. Giraud (1889-1943) ad introdurre il concetto di *simbolo* per un operatore integrale singolare pluri-dimensionale, aprendo così la via alla moderna Teoria degli *operatori pseudo-differenziali*.

Tricomi coltivò con successo molti altri campi dell'Analisi matematica classica, che sarebbe qui troppo lungo elencare. Non possono, tuttavia, tacersi i suoi contributi alla *Teoria delle funzioni speciali*, nella quale egli divenne una vera autorità in campo internazionale con la pubblicazione di una fondamentale Monografia (Tricomi, 1954) e con la partecipazione al *Bateman Project* che, condotto a termine assieme ad altri tre specialisti nella materia, portò alla pubblicazione, negli U.S.A., di quattro volumi, vera enciclopedia delle funzioni speciali e delle trasformazioni integrali classiche. Tricomi fu anche trattatista di grande successo e sui suoi libri, tradotti in molte lingue, si sono formate intere generazioni di matematici applicati.

8. L'Analisi funzionale in Italia fra le due guerre. Renato Caccioppoli. Luigi Fantappiè

Renato Caccioppoli (1904-1959), dopo Volterra e dopo le ricerche, rimaste purtroppo isolate, di Pia Nalli, fu il primo a sistematicamente studiare in Italia i grandi problemi dell'Analisi funzionale, specie non lineare, cercandone l'applicazione ai problemi insoluti dell'Analisi classica, riguardanti le equazioni integrali e, specialmente, differenziali non lineari. Questi studi avevano ricevuto una formidabile spinta in Polonia con l'opera di J. Schauder (1899-1943) ed in Francia con quella di J. Leray. I metodi che questi autori proposero sono fondati sull'estensione agli spazi funzionali di procedimenti di natura geometrica, ben noti negli ordinari spazi di dimensione finita e spesso fondati su argomentazioni di carattere topologico. Caccioppoli contribuì notevolmente, talvolta con autentica genialità, allo sviluppo di tali metodi ed all'applicazione di essi ai sopraddetti problemi di Analisi classica (Caccioppoli, 1963) [6, vol. II].

È impossibile cercare di descrivere in breve spazio in che cosa consistano i procedimenti generali di Analisi funzionale impiegati nello studio dei problemi non lineari. Sintetizzando al massimo, può dirsi che essi sono di tre tipi diversi. 1) *Metodi di prolungamento*. Questi considerano una trasformazione funzionale $u' = T(u, \lambda)$ fra due spazi astratti Σ e Σ' dotati di una struttura topologica o metrica. Si assume $u \in \Sigma$ e $u' \in \Sigma'$; λ è un parametro, reale o complesso, dal quale dipende T. Si supponga che per $\lambda = \lambda_0$, fissato u' in Σ' (o in un sottoinsieme di Σ'), esista la soluzione u dell'equazione $T(u, \lambda_0) = u'$. Il metodo consiste nel ricercare le opportune condizioni per l'esistenza di un $\rho > 0$ tale che per $|\lambda - \lambda_0| < \rho$ l'equazione $T(u, \lambda) = u'$ sia sempre dotata di una soluzione u. Il caso più semplice è quello in cui T dipende analiticamente da λ. 2) *Metodi di invertibilità di una trasformazione*. Questi metodi tendono a fornire condizioni perché, data la trasformazione $u' = T(u)$ fra Σ e Σ' ed ammesso che, fissato u_0' in Σ' esista u_0 in Σ tale che $T(u_0) = u_0'$, possa affermarsi che esiste tutto un intorno I_0' di u_0' in Σ' ed un intorno I_0 di u_0 tali che, per ogni $u' \in I_0'$, esiste un solo $u \in I_0$ tale che $T(u) = u'$. In tal caso si ha la *invertibilità locale nell'intorno di* u_0 della trasformazione T. Si ricercano poi condizioni atte ad assicurare che la invertibilità locale di T implichi la sua *invertibilità globale* o *in grande*, cioè l'esistenza di un unico u in Σ tale che $T(u) = u'$ comunque si sia fissato u' in Σ'. Ad esempio, se $u' = T(u)$ è una trasformazione di classe C' di un campo Σ di $\mathbb{R}^n$, su un campo Σ' di $\mathbb{R}^n$ essa, com'è ben noto, è localmente invertibile nell'intorno di u_0 se il determinante jacobiano $\det[\partial T/\partial u]_{u=u_0}$ è non nullo. In generale, tale T, anche se localmente invertibile nell'intorno di ogni $u_0 \in \Sigma$, non lo è in grande. Questo però si verifica, per un classico teorema di Hadamard, se Σ' è a *connessione lineare semplice*, se, cioè, due curve che uniscono due qualsiansi punti u_0' e v_0' di Σ' sono omotopiche su Σ' (cioè l'una si riduce all'altra con una deformazione continua che non fa mai uscire la curva deformata da Σ'). Questo teorema di Hadamard si estende a spazi assai più generali di $\mathbb{R}^n$, assieme ad altri criteri che fanno seguire l'invertibilità globale di una trasformazione T da quella locale. 3) *Metodi di esistenza del punto unito.* Supposto $\Sigma' = \Sigma$ e considerata la trasformazione T di Σ in se stesso, si cerca di dare dei criteri perché esista un *punto unito* (o *fisso*) di T, cioè un punto u tale che $u = T(u)$. Questo avviene se, supposto Σ uno spazio metrico, si ha per ogni coppia u e v di punti di Σ *distanza* $(Tu,\ Tv) \leq q$ *distanza* (u, v) con q indipendente da u, v e $0 \leq q < 1$. In tal caso la T dicesi una *contrazione* e si ha l'esistenza di un unico punto unito. Ma esistono condizioni di ancora più ampia applicabilità le quali, estendendo agli spazi normati (spazi di Banach) i teoremi dati da Brouwer (1881-1966) per gli ordinari spazi $\mathbb{R}^n$, permettono di stabilire l'esistenza di almeno un punto unito. Altri più sofisticati criteri di esistenza di un punto unito sono fondati su proprietà più profonde della trasformazione T, che fanno intervenire caratteri topologici particolari di detta trasformazione (Miranda, 1969) [13, pp. 188-194].

Tuttavia, l'aspetto più difficile nell'applicare i criteri, testé sommariamente descritti, ai problemi non lineari dell'Analisi, non tanto è il ricondurre i relativi teoremi di esistenza o unicità ad uno degli schemi predetti, ma far vedere che la particolare trasformazione T, che entra in gioco, gode delle proprietà richieste per la sua invertibilità o per l'esistenza di un punto unito. Ciò comporta la preventiva *maggiorazione a priori* della soluzione del problema, cioè la dimostrazione che la soluzione, se esiste, si lascia maggiorare, in un ben determinato modo, mediante i «dati» del problema. È questo, spesso, problema di ardua difficoltà.

Ma anche all'Analisi funzionale lineare Caccioppoli recò importanti contributi. Egli, nel 1934, si pose il problema, ripreso nel 1938, di dimostrare l'esistenza degli integrali abeliani di prima, seconda e terza specie su una superficie di Riemann compatta S. (Caccioppoli, 1963) [6, vol. II, pp. 106-112 e pp. 178-191].

Caccioppoli ricondusse facilmente questo problema alla dimostrazione dell'esistenza di una funzione u monodroma su S della quale è assegnato il laplaciano $\delta du = f$ su S. Constatato che f deve necessariamente essere ortogonale su S alla costante, considerò nello spazio delle funzioni appartenenti a $L^p(S)$ $(p > 1)$ la varietà lineare V costituita dai δdu (in senso debole) di funzioni $u \in C^0(S)$ e fece vedere che V coincide con quella delle funzioni di $L^p(S)$ ortogonali alla costante. Dopo aver constatato che V è una varietà chiusa di $L^p(S)$, usando il classico teorema di Hahn-Banach, dimostrò, infatti, che gli unici funzionali lineari e continui in $L^p(S)$ nulli su V e non identicamente nulli, sono quelli che esprimono l'ortogonalità di δdu alla costante. Riuscì in questo intento dimostrando, preventivamente, che se una misura, definita sui boreliani di un aperto Ω del piano, è tale che

$$\int_\Omega \Delta_2 u\, d\alpha = 0$$

per ogni u di $C^2(\Omega)$ con supporto in Ω, allora α è assolutamente continua ed ha per densità una funzione armonica in Ω. Questo lemma, del 1934, che, quasi contemporaneamente a Caccioppoli, veniva, in ipotesi lievemente differenti, dimostrato in U.R.S.S. anche da S.L. Sobolev, fu, nel 1940, riscoperto da H. Weyl che, tramite esso, provò la *regolarità all'interno* della soluzione del problema di Dirichlet (6.1), (6.2) (con $g = 0$), ottenuta con il suo metodo della proiezione. Oggi esso è, ingiustamente, indicato nella letteratura come *lemma di Weyl.*

Il lavoro, ora esposto, di Caccioppoli aperse la via ad una lunga serie di ricerche tendenti ad impiegare il teorema di Hahn-Banach e le estensioni di questo nella teoria esistenziale dei problemi al contorno lineari dell'Analisi classica.

Gli interessi di Caccioppoli si estesero alla teoria della misura e dell'integrale, a quella delle funzioni pseudo-analitiche di una variabile complessa, alle funzioni analitiche di due variabili complesse, al calcolo delle variazioni per gli integrali multipli, al problema della quadratura delle superficie e, più in generale, della misura di varietà k-dimensionali in uno spazio ad n dimensioni. Anche se non sempre le sue trattazioni furono completamente esenti da imprecisioni, tanto da originare, talvolta, qualche troppo severa critica (T. Radó, 1948) [18], le idee in esse profuse ispirarono positivamente moltissimi matematici italiani. Il problema della quadratura delle superficie in forma parametrica (il caso, assai più semplice, di quelle in forma ordinaria era stato completamente trattato da Tonelli nel 1925), venne ripreso da Lamberto Cesari (1910-1990) e da Tibor Radó (1895-1965) che, indipendentemente l'uno dall'altro, giunsero, fra il 1942 ed il 1946, ad una soluzione esauriente di esso.

Luigi Fantappiè (1901-1956) fu un cultore di Analisi funzionale con caratteristiche completamente diverse di quelle di Renato Caccioppoli. A Fantappiè si deve la creazione di un'originale teoria, quella dei *funzionali analitici*, alla quale, forse ancora oggi, non è stato chiesto tutto quello che essa può dare (Fantappiè, 1973) [8].

Fantappiè non si servì della geometria degli spazi funzionali dove sono definiti i suoi funzionali, ma potè costruire la sua teoria per una via puramente algoritmica, sfruttando unicamente il fatto che ciascuno di essi si considera come definito su classi di funzioni analitiche della variabile complessa z e che, inoltre, se la funzione, variabile indipendente, dipende analiticamente, oltre che da z, da un parametro complesso α, allora il funzionale è, per definizione, funzione analitica di α. Solo in seguito venne notato che alle classi funzionali dove vengono definiti i funzionali di Fantappiè può darsi una struttura di spazio topologico T_0.

Particolarmente importante è la teoria nel caso dei funzionali lineari. Per questi Fantappiè fornì un teorema di rappresentazione mediante il quale, poi, riuscì ad edificare un rigoroso *calcolo simbolico* per una vasta classe di operatori lineari, rappresentando, sotto opportune ipotesi, l'operatore come un funzionale analitico della sua *funzione caratteristica*. Estese poi, seppure parzialmente, la teoria ai funzionali analitici dipendenti da funzioni analitiche di più variabili complesse per le quali riuscì a stabilire qualche risultato di per se stesso interessante.

Sia K un insieme chiuso della sfera completa Σ e sia $\mathcal{A}$ la classe delle funzioni verificanti le seguenti condizioni: 1) ogni $f(z)$ di $\mathcal{A}$ è olomorfa in un aperto A contenente K; 2) se $A \ni \infty$ riesce $f(\infty) = 0$. È ovvio che $\mathcal{A}$ è uno spazio lineare complesso. Sia $F(f)$ un funzionale definito in $\mathcal{A}$ tale che $F(f_1) = F(f_2)$ se, essendo f_k definita in A_k ($k = 1, 2$), è $f_1 \equiv f_2$ in $A_1 \cap A_2$. Se $A \supset K$ e $f(z, \alpha)$ è definita per $z \in A$ e $\alpha \in \Omega$ ed è olomorfa rispetto a z e α, $F[f(z, \alpha)]$ è funzione olomorfa di α in Ω. F dicesi allora un *funzionale analitico definito in* $\mathcal{A}$. Se si ha $F(af_1 + bf_2) = aF(f_1) + bF(f_2)$, allora F è un funzionale analitico lineare. Sia $K \subset A$ (A aperto) e sia D un aperto tale che $K \subset D$, $\overline{D} \subset A$. La frontiera C di D sia costituita da una o più curve regolari. Per $\alpha \in C$ la funzione $(\alpha - z)^{-1}$ pensata come funzione di z appartiene ad $\mathcal{A}$. Si ponga

$u(\alpha) = F[(\alpha - z)^{-1}]$. Si ha allora per ogni $f(z) \in \mathcal{A}$ il seguente teorema di rappresentazione

$$F(f) = \frac{1}{2\pi i}\int_{+C} u(\alpha) f(\alpha) d\alpha . \tag{8.1}$$

La $u(\alpha)$ dicesi l'*indicatrice* di F. La dimostrazione della (8.1) si ottiene osservando che in D si ha

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{+C} \frac{f(\alpha)}{\alpha - z} d\alpha$$

e quindi, dopo aver dimostrato lecito lo scambio di $\int_{+C}$ con F,

$$F(f) = \frac{1}{2\pi i} F\left[\int_{+C} \frac{f(\alpha)}{\alpha - z} d\alpha\right] = \frac{1}{2\pi i}\int_{+C} F\left(\frac{1}{\alpha - z}\right) f(\alpha) d\alpha .$$

Si noti che la dimostrazione del teorema è concettualmente analoga a quella di F. Riesz della rappresentazione di un funzionale lineare e continuo in $C^0[a, b]$, la quale, dopo avere esteso F alla classe delle funzioni continue a tratti, considera la funzione

$$\varphi(\alpha, x) \begin{cases} = 0 & \alpha \leq x \\ = 1 & \alpha > x \end{cases}$$

e fa vedere che per $f \in C^0[a, b]$ si ha

$$F[f(x)] = F\left[\int_a^b f(\alpha) d\varphi(\alpha, x)\right] = \int_a^b f(\alpha) du(\alpha) ,$$

essendo $u(\alpha)$ la funzione a variazione limitata $u(\alpha) = F[\varphi(\alpha, x)]$.

Sia T un operatore lineare definito (e con codominio) in una varietà lineare di funzioni. Detta $f(\lambda)$ una funzione analitica di λ, Fantappiè si propone di dare significato all'operatore $f(T)$. Se $f(T)$ opera su $v(x)$, egli considera, fissati v e x, $f(T)[v(x)]$ come un funzionale lineare analitico di $f(\lambda)$ e, dopo aver fatto le opportune ipotesi per applicare il suo teorema di rappresentazione, suppone altresì che la indicatrice $u(\alpha, x)$ di tale funzionale sia l'unica soluzione dell'equazione $\alpha u(\alpha, x) - Tu(\alpha, x) = v(x)$, ciò che permette di determinarla. Questo lo porta a definire $f(T)[v(x)]$ al modo seguente

$$f(T)[v(x)] = \frac{1}{2\pi i}\int_{+C} u(\alpha, x) f(\alpha) d\alpha ,$$

con ovvio significato per C.

Deriva da ciò *un calcolo simbolico* che ha aspetti assai suggestivi e lo conduce a costruire le *formule risolutive* di diversi classici problemi dell'Analisi, considerati nel campo complesso. Di particolare eleganza la ricostruzione che egli propone, usando il suo metodo, della teoria delle funzioni analitiche di una matrice quadrata.

L'opera di Fantappiè s'intreccia, spesso precedendola, con quella di numerosi autori che, fra le due guerre, studiarono la teoria delle funzioni analitiche di un operatore.

9. La teoria delle funzioni di più variabili complesse in Italia. I contributi di Francesco Severi e di altri

Il primo ad occuparsi in Italia della Teoria delle funzioni olomorfe di due variabili complesse fu Tullio Levi-Civita, che in una Nota lincea del 1905 risolse il problema consistente nel dimostrare l'esistenza e l'unicità di una funzione olomorfa $w(z_1, z_2)$ delle due variabili complesse z_1 e z_2 in un campo Ω contenente una superficie semplice e analitica Γ di $\mathbb{R}^4$ non caratteristica, la quale su Γ assume valori (analitici) prescritti. Naturalmente, il problema è di natura locale, cioè Ω non può assegnarsi «a priori», ma è un campo, sufficientemente ristretto, contenente Γ.

Il risultato ottenuto da E. E. Levi nel 1910 condizionò tutto il successivo sviluppo della Teoria delle funzioni analitiche di due o di più variabili. Esso consiste in una *condizione necessaria* che la frontiera di classe C^2 di un campo Ω di $\mathbb{R}^4$ deve verificare perché esista $w(z_1, z_2)$ olomorfa in Ω e non prolungabile in una funzione olomorfa in un campo Ω' contenente propriamente Ω. Si dice allora che Ω è *campo di olomorfia* per w. Con questo risultato E. E. Levi scopriva un'ulteriore discrepanza fra la Teoria delle funzioni analitiche di una variabile complessa e quella di più variabili complesse. Infatti, è ben noto che ogni campo del piano è campo di olomorfia per qualche funzione di z.

Sia $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$ e sia Ω un campo di $\mathbb{R}^4$ la cui frontiera $\partial\Omega$ abbia equazione $\rho(x_1, y_1, x_2, y_2) = 0$ con $\rho \in C^2$ e $|\operatorname{grad}\rho| > 0$ su $\partial\Omega$. I punti di Ω siano quelli per i quali è $\rho > 0$. E. E. Levi dimostra (E. E. Levi, 1910) che, posto

$$\mathcal{L}(\rho) \equiv \sum_{h,k}^{1,2} \frac{\partial^2 \rho}{\partial z_h \partial \bar{z}_k} \lambda_h \bar{\lambda}_k \quad \left(\lambda_1 = \frac{\partial \rho}{\partial z_2}, \quad \lambda_2 = -\frac{\partial \rho}{\partial z_1}\right)$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial z_h} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_h} - i\frac{\partial}{\partial y_h}\right), \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}_h} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_h} + i\frac{\partial}{\partial y_h}\right), \quad h = 1, 2\right],$$

se esiste $w(z_1, z_2)$ olomorfa in Ω, non prolungabile analiticamente in una funzione olomorfa in un campo Ω' contenente Ω e non coincidente con Ω, deve essere $\mathcal{L}(\rho) \leq 0$ in ogni punto di $\partial\Omega$. Dimostrare l'inverso di questo teorema di E. E. Levi, cioè provare che $\mathcal{L}(\rho) \leq 0$ su $\partial\Omega$ (o, come si dice, che Ω è *pseudo-convesso*) implica l'esistenza di una w di cui Ω sia campo di olomorfia, impegnò i matematici per lunghi anni. Solo nel 1942 il giapponese K. Oka (1901-1978) riuscì a dimostrare questo fatto.

Ma un altro problema era sul tappeto, già dai tempi di Poincaré. Dimostrare l'esistenza di una funzione u parte reale di una funzione olomorfa, o, come si dice, di una funzione 2-*armonica*, della quale sono prescritti i valori su $\partial\Omega$. La difficoltà di questo problema consisteva nel fatto che, essendo le funzioni 2-armoniche particolari funzioni armoniche, non potevano prescriversi arbitrariamente i valori di u su $\partial\Omega$, ma questi dovevano verificare ulteriori misteriose condizioni, la scoperta delle quali appassionò molti matematici in Italia ed all'estero. Il primo a dare risposta a questo quesito, sia pure in modo non definitivo, fu il giovane matematico italiano Luigi Amoroso (1886-1965) che, nel 1911, supposto $\mathcal{L}(\rho) \neq 0$ su $\partial\Omega$, fornì condizioni necessarie e sufficienti, espresse da due equazioni differenziali su $\partial\Omega$ e da una integro-differenziale, perché una funzione U, assegnata su $\partial\Omega$, fosse la traccia su $\partial\Omega$ di una funzione u 2-armonica in Ω (Amoroso, 1911) [2]. Il lavoro pregevolissimo di Amoroso è oggi completamente ignorato nella letteratura sulle funzioni analitiche di più variabili complesse. Amoroso, in seguito, lasciò la Matematica, per divenire un eminente cultore di Economia. Suo merito, non ultimo, fu quello di aver procurato, nel 1927, a Mauro Picone, del quale era stato condiscepolo alla Normale di Pisa, il finanziamento, tramite una Banca, per fondare l'Istituto di Calcolo.

Il problema era stato ripreso da W. Wirtinger (1865-1945) nel 1927 il quale, in un lavoro dedicato a Riemann, nel 100° anniversario della sua nascita, riscoperse le due equazioni differenziali di Amoroso come condizioni necessarie per U. Pose il problema di dimostrare la sufficienza di queste due equazioni e, constatate le difficoltà del problema, concluse scrivendo: « ... *Vielleicht hätte Riemann auch die Ideen zur Ueberwindung dieser Schwierigkeiten gehabt* » [28].

Il problema venne ripreso da Francesco Severi nel 1931, il quale determinò prima la condizione perché W assegnata su $\partial\Omega$ ($\partial\Omega$ e W analitiche) fosse la traccia di una funzione $w(z_1, z_2)$ olomorfa in Ω e successivamente dimostrò che le due equazioni differenziali di Amoroso sono necessarie e sufficienti a caratterizzare U, provando, in tal modo, la ridondanza della terza condizione integro-differenziale imposta da Amoroso.

Per scendere più nel dettaglio di questa importante ricerca di Severi (Severi, 1931) [19], diremo che, supposto $\partial\Omega \in C^{\omega}$ e la funzione $W \in C^{\omega}(\partial\Omega)$, è assai facile dimostrare (Wirtinger, 1926) [28] che la condizione

$$\det \frac{\partial(W, z_1, z_2)}{\partial(t_1, t_2, t_3)} = 0 , \tag{9.1}$$

essendo t_1, t_2, t_3 parametri locali su $\partial\Omega$, è necessaria perché W sia la traccia su $\partial\Omega$ di una w olomorfa in un campo che contiene $\partial\Omega$. Severi, con geniale quanto semplice idea, date le ipotesi assunte su $\partial\Omega$ e W, considerò, nell'intorno di ogni punto di $\partial\Omega$, t_1, t_2, t_3 come variabili complesse e W, z_1 e z_2 come funzioni olomorfe di esse in tale intorno. La (9.1) esprime allora la *dipendenza funzionale* di W da z_1 e z_2 : $W = w(z_1, z_2)$ in un intorno complesso di ogni punto arbitrariamente fissato su $\partial\Omega$. Naturalmente la dipendenza funzionale va intesa in senso *analitico* rispetto alle variabili complesse z_1 e z_2. Ciò portò Severi a dovere estendere il *teorema dello jacobiano*, relativo alla dipendenza funzionale C^1 rispetto a variabili reali, ad uno relativo alla dipendenza funzionale analitica rispetto a variabili complesse. Cosa che egli, sostanzialmente, fece. La $w(z_1, z_2)$ olomorfa in un campo $A \supset \partial\Omega$ e tale che $w = W$ su $\partial\Omega$, riesce definita in tutto Ω in virtù di un fondamentale teorema di Hartogs (1874-1933) nella Teoria delle funzioni analitiche di più variabili complesse, teorema il quale afferma, appunto, la prolungabilità in tutto un campo limitato Ω di una funzione olomorfa definita in un *intorno* aperto A della frontiera $\partial\Omega$ di Ω. Fino a questo punto Severi non fa alcuna ipotesi concernente $\mathcal{L}(\rho)$ su $\partial\Omega$. Posto $W = U + iV$, Severi scrive la (9.1) al modo seguente: $L_1 V = L_2 U$, $L_2 V = -L_1 U$, essendo L_1 e L_2 operatori differenziali del primo ordine definiti su $\partial\Omega$. *Supposto* $\mathcal{L}(\rho) \neq 0$ *su* $\partial\Omega$, egli dimostra, usando la teoria delle parentesi di Poisson (1781-1840), che, data U, esiste V verificante le equazioni considerate se e solo se U verifica due equazioni differenziali del terz'ordine $K_1 U = 0$, $K_2 U = 0$. Sono queste le due equazioni differenziali già trovate da Amoroso, le quali, quindi, da sole, sono sufficienti a dimostrare l'esistenza in Ω della funzione $u = \mathcal{R}w$ che coincide con U su $\partial\Omega$.

Tale lavoro di Severi è, oggi, purtroppo, pressoché ignorato nella letteratura ed il teorema sulla traccia di una funzione olomorfa w su $\partial\Omega$ è, con notevole superficialità, attribuito, per un equivoco, a S. Bochner (1899-1982), che mai dimostrò un teorema del genere.

Severi estese i suoi risultati a funzioni di n variabili complesse. Ma, mentre quelli relativi alle funzioni olomorfe $w(z_1, \dots, z_n)$ sono esaurienti, quelli relativi alle funzioni n-armoniche $u = \mathcal{R}w$ sono solo indicativi e lungi dall'essere conclusivi. Va anche notato che le ipotesi assunte da Severi di analiticità di $\partial\Omega$ e di W sono, in un certo senso, *misleading*. Infatti, in tali ipotesi, la w, che su $\partial\Omega$ subordina W, è prolungabile, *quale si sia* $\mathcal{L}(\rho)$ *su* $\partial\Omega$, in un campo $\Omega' = \Omega \cup A$ che contiene all'interno $\overline{\Omega}$. Ma se $\partial\Omega$ non è analitica, ma solo C^2, ed è: $\mathcal{L}(\rho) \leq 0$ su $\partial\Omega$, $\rho > 0$ in Ω, allora per il teorema di Oka esiste qualche w non prolungabile in $\Omega' \supset \overline{\Omega}$. Ne viene che nel caso $\partial\Omega \in C^2$ non può più esser vero il risultato che è il punto di partenza della teoria di Severi: l'esistenza, in un intorno completo I (in $\mathbb{C}^2$) del punto z_0 di $\partial\Omega$, di una w olomorfa in I che su $I \cap \partial\Omega$ coincide con la W verificante (9.1). In effetti venne, nel 1936, dimostrato da H. Kneser (1898-1973) che, se è $\partial\Omega \in C^2$, la w esiste solo in $I \cap \Omega$ *se è* $\mathcal{L}(\rho) < 0$ *in* $I \cap \partial\Omega$. In genere, questa w non è prolungabile a tutto I.

Tale risultato fu per lungo tempo attribuito ad Hans Lewy (1904-1988) che lo aveva riscoperto nel 1956 (Fichera, 1985) [10].

Altro contributo importante recato da Severi nel 1931 alla teoria delle funzioni w di due variabili complesse è l'avere egli, per primo, esteso a siffatte funzioni il classico teorema di Morera della teoria delle funzioni di una variabile complessa, *facendo solo l'ipotesi della continuità di* w nel suo campo di definizione (Martinelli, 1984) [12].

Sorvoliamo su risultati, anche interessanti, ottenuti da Renato Caccioppoli, da Luigi Fantappiè e da Beniamino Segre (1903-1977) nella Teoria delle funzioni di due o più variabili complesse per, soltanto, ricordare l'importante risultato di Enzo Martinelli che, nel 1938, estese ad una funzione olomorfa di n variabili complesse il teorema di rappresentazione integrale di w in un campo limitato e regolare Ω, dove è olomorfa, mediante i valori di w su $\partial\Omega$, teorema che Cauchy (1789-1857) aveva classicamente dimostrato nel caso $n = 1$. Il teorema, riscoperto nel 1943 da Bochner, è ora noto come *teorema di Martinelli-Bochner*. Martinelli, superando non lievi difficoltà topologiche, estese poi il suo teorema, ottenendo rappresentazioni integrali in un certo campo Ω' di $\mathbb{R}^{2n}$ di una funzione olomorfa $w(z_1, \ldots, z_n)$ in $\Omega \supset \Omega'$ mediante i valori di questa su un ciclo $(n + l)$-dimensionale $(l = 0, 1, \ldots, n-1)$ contenuto nella frontiera $\partial\Omega'$ di Ω'. Tutta la portata analitica di tali importanti risultati di Martinelli è forse ancora da chiarire (Martinelli, 1984) [12].

10. Completamento della rassegna degli analisti italiani che operarono fra le due guerre

Tralasceremo di parlare di Giuseppe Peano (1858-1932) il quale, oltre che sommo logico matematico, fu anche valente analista: i suoi contributi appartengono essenzialmente al periodo antecedente la prima guerra mondiale.

Analista di grande levatura fu Beppo Levi, il cui nome abbiamo già ricordato. Oltre ai contributi già menzionati nella Sez. 5, a lui si deve un importante teorema sul passaggio al limite sotto il segno di integrale, nella Teoria di Lebesgue, nonché importanti risultati riguardanti la Teoria delle equazioni differenziali ordinarie. Egli fondò nel Sud-America una Scuola di matematici che lavorarono egregiamente in questo campo. Infatti, trascorse l'ultima parte della sua vita a Rosario (Argentina), dove era riparato in seguito alle leggi razziali fasciste, senza voler più far ritorno in Italia. A lui si debbono anche risultati relativi alla Geometria algebrica.

Di Levi-Civita abbiamo ricordato il contributo dato alla Geometria differenziale, alle funzioni di due variabili complesse, ma molti suoi lavori, specie quelli sulla stabilità delle soluzioni delle equazioni differenziali ordinarie, sulle equazioni della propagazione delle onde, sulla variabile complessa, ancorché motivati da problemi fisici o meccanici, sono pregevolissime ricerche di Analisi. Egli fu anche un precursore del «metodo della proiezione» di H. Weyl, applicato all'equazione biarmonica, con l'introduzione del concetto di «funzione armonica viciniore».

Un posto di primo piano nella Matematica italiana occupò Giovanni Sansone (1888-1979). Era studioso di ampia cultura e fu autore di pregevoli Trattati, che, assieme a Francesco Tricomi, lo fanno considerare il maggiore trattatista italiano, per l'Analisi matematica, fra le due guerre. Investigò a fondo, con risultati esaurienti, particolari ma difficili equazioni differenziali ordinarie non lineari che interessano le applicazioni.

Guido Ascoli (1887-1957) fu analista di vasti interessi e di notevole statura. Ha lasciato contributi che riguardano le equazioni a derivate parziali lineari di tipo misto in più variabili, equazioni che egli studiò anche da un punto di vita geometrico. Dette, indipendentemente da Hahn e da Banach, una dimostrazione del teorema di prolungamento dei funzionali lineari continui in uno spazio normato. Analizzò un caso in cui è dimostrabile il «principio di Zermelo». Riuscì a caratterizzare, mediante proprietà di invarianza rispetto al gruppo ortogonale, una vasta classe di sistemi di equazioni a derivate parziali lineari che, in precedenza, Picone aveva studiato, riconducendone l'integrazione al metodo della separazione delle variabili. A lui si deve un importante teorema nella teoria asintotica delle equazioni differenziali ordinarie del II ordine.

Nel periodo fra le due guerre iniziarono la loro attività scientifica alcuni analisti italiani che, prima del secondo conflitto mondiale, avevano già raggiunto la cattedra universitaria e dato i loro primi contributi all'Analisi matematica. Giovanni Ricci (1904-1973), cultore della Teoria analitica dei numeri, recò pregevoli contributi a delicate questioni relative alle funzioni analitiche di una variabile complessa. Gianfranco Cimmino (1908-1989), Carlo Miranda (1912-1982) e Giuseppe Scorza-Dragoni furono allievi di Picone e di Caccioppoli. Le loro personalità scientifiche si sarebbero affermate dopo la seconda guerra mondiale, ma già prima avevano dato piena dimostrazione del loro valore, con pregevoli contributi alla Teoria delle equazioni differenziali, ordinarie ed alle derivate parziali, alle equazioni integrali, al Calcolo delle variazioni, alla Teoria delle funzioni di più variabili complesse.

Furono allievi di Tonelli, Basilio Manià (1909-1939) e Silvio Cinquini. Il primo, dotato di spirito assai indipendente, sviluppò, secondo suoi originali punti di vista, alcuni dei metodi di Tonelli. Il Cinquini attese all'estensione di risultati di Tonelli riguardanti le equazioni differenziali e, specialmente, il Calcolo delle variazioni. Talune di queste estensioni erano tutt'altro che banali e richiedevano notevole impegno.

Maria Cibrario fu allieva di Fubini e di Tricomi. Studiò sistematicamente, con successo, i problemi relativi alle equazioni alle derivate parziali di tipo iperbolico. A lei si deve anche la completa classificazione di tutte le *forme canoniche* per un'equazione differenziale lineare del II ordine, in due variabili, di tipo misto. Fra queste ritrovò l'equazione (7.1) di Tricomi, che questi, in un primo momento, erroneamente credeva essere l'unica forma canonica per le equazioni di quel tipo.

Negli anni immediatamente precedenti il secondo conflitto, si era già affacciato alla ribalta matematica Lamberto Cesari (1910-1990), la cui grande personalità scientifica si sarebbe, però, affermata negli anni successivi alla guerra.

11. Notizie bibliografiche concernenti i matematici italiani citati in questo scritto

Segnaliamo l'importante Memoria di Francesco Tricomi: *Matematici italiani del primo secolo dello stato unitario*, Memorie dell'Accad. delle Scienze di Torino, serie 4^a, n° 1, 1962, pp. 1-120.

Oltre a brevi ma espressive biografie dei matematici in essa inclusi, vi si trovano le indicazioni bibliografiche dei necrologi che li riguardano, nonché l'eventuale indicazione bibliografica delle loro Opere (o «Selecta» di queste), raccolte in speciali volumi (se apparsi prima del 1961). Nella Memoria di Tricomi sono considerati i seguenti matematici italiani citati in questo scritto:

Arzelà, Giulio Ascoli, Guido Ascoli, Bagnera, Beltrami, Betti, Brioschi, Caccioppoli, Casorati, Castelnuovo, Cesaro, Cremona, De Franchis, Dini, Enriques, Fantappiè, Fubini, Levi-Civita, Peano, Pincherle, Ricci-Curbastro, Corrado Segre, Leonida Tonelli, Vitali, Volterra.

È opportuno anche segnalare gli Atti dei Convegni tenuti, nel centenario della nascita di Levi-Civita (1973) e di Leonida Tonelli (1985), presso l'Accademia dei Lincei. Per quanto riguarda Volterra, è opportuno consultare lo splendido necrologio, scritto per la Royal Society di Londra, da E. Whittaker e riportato in (Volterra, 1959) [26], nonché gli Atti del Convegno tenutosi ai Lincei nel cinquantenario della sua morte (1990).

I seguenti matematici furono tutti Soci lincei ed i loro necrologi apparvero negli Atti lincei qualche anno dopo la loro morte. Si consulti anche il Bollettino della Unione Matematica Italiana.

Bompiani, Cimmino, Beppo Levi, Miranda, Picone, Giovanni Ricci, Sansone, Beniamino Segre, Severi, Terracini, Tricomi.

Per quanto riguarda Bompiani, Sansone e Beniamino Segre, l'Unione Matematica Italiana ha curato, o sta curando, la pubblicazione delle loro Opere. Quelle di Severi sono state raccolte in sei volumi a cura dell'Accademia dei Lincei. Riguardo a Picone, si consultino anche gli Atti del Convegno tenuto presso l'Accademia dei Lincei nel 1985 per il centenario della sua nascita (e di quella di L. Tonelli).

Il necrologio di Pia Nalli apparve sul Bollettino della Unione Matematica Italiana nel 1965. Le sue «Opere scelte» furono pubblicate, a cura dell'U.M.I., nel 1976.

Ringraziamenti

Si ringrazia l'Istituto della Enciclopedia Italiana nella persona del suo Vice Presidente del Consiglio scientifico, Prof. Vincenzo Cappelletti, per l'autorizzazione concessa alla Accademia a pubblicare nei *Rendiconti Lincei: Matematica e Applicazioni* questo scritto inedito di Gaetano Fichera (1922-1996). Il lavoro, che gli fu commissionato nel 1991, è in corso di pubblicazione nella *Storia del ventesimo secolo* presso l'Istituto della Enciclopedia Italiana [*N.d.R.*].

Bibliografia

[1] L. Amerio, *Sull'integrazione dell'equazione* $\Delta_2 u - \lambda^2 u = f$ *in un dominio di connessione qualsiasi*. Rend. Istituto Lombardo, 78, 1944-45, 1-24.

[2] L. Amoroso, *Sopra un problema al contorno*. Rend. Circolo Matematico di Palermo, XXXIII, 1912, 75-85.

[3] S. Bergman, *The kernel function and conformal mapping*. New York, N.Y. 1950.

[4] S. Bergman - M. Schiffer, *Kernel functions and elliptic differential equations in Mathematical Physics*. New York, N.Y. 1953.

[5] M. Brillouin, *La méthode des moindres carrés et les équations aux dérivées partielles de la Physique mathématique*. Annales de Physique, VI, 1916, 137-223.

[6] R. Caccioppoli, *Opere*. A cura dell'Unione Matematica Italiana, Roma 1963, 2 voll.

[7] E. E. Levi, *Studi sui punti singolari essenziali delle funzioni analitiche di due o più variabili complesse*. Annali di Matem. pura e appl., 17, 1910, 61-68.

[8] L. Fantappiè, *Opere scelte*. A cura dell'Unione Matematica Italiana, Bologna 1973, 2 voll.

[9] G. Fichera, *Risultati concernenti la risoluzione delle equazioni funzionali lineari dovuti all'Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo*. Atti Acc. Lincei Mem. fis., s. 7, III, sez. 1, 1950, 3-81.
[10] G. Fichera, *Unification of local and global existence theorems for holomorphic functions of several complex variables*. Atti Acc. Lincei Mem. fis., s. 8, XVIII, fasc. 3, 1986, 61-83.
[11] K. Kreith, *Oscillation Theory*. Lecture Notes in Mathematics, 324, Berlin-Heidelberg-New York 1973.
[12] E. Martinelli, *Introduzione elementare alla teoria delle funzioni di variabili complesse con particolare riguardo alle rappresentazioni integrali*. Contributi del Centro Linceo Interdisciplinare, 67, Accademia Nazionale dei Lincei, Roma 1984.
[13] C. Miranda, *Partial differential equations of elliptic type*. Berlin-Heidelberg-New York 1954^{I}, 1969^{II}.
[14] P. Nalli, *Sulle serie di Fourier delle funzioni non assolutamente integrabili*. Rend. Circolo Matematico Palermo, XL, 1915, 33-37.
[15] P. Nalli, *Sulla rappresentazione di una funzione simmetrica* $K(s, t)$ *e dell'espressione* $k(s)g(s) + \int_a^b K(s, t)g(t)dt$. Rend. Circolo Matematico Palermo, XLIII, 1919, 105-124.
[16] O. A. Oleinik - E. V. Radkevič, *Second order equations with nonnegative characteristic form*. Providence, RI-New York-London 1973.
[17] M. Picone, *Appunti di Analisi superiore*. Napoli 1940.
[18] T. Radó, *Length and Area*. Amer. Math. Soc. Colloquium Publ., v. 30, Providence RI 1948.
[19] F. Severi, *Risoluzione generale del problema di Dirichlet per le funzioni biarmoniche*. Atti. Acc. Lincei Rend. fis., XIII, 1931, 795-804.
[20] V. I. Smirnov, *A course of higher mathematics*. Oxford-London-Edinburgh-New York-Paris-Frankfurt 1964, vol. V.
[21] L. Tonelli, *Fondamenti di Calcolo delle variazioni*. Bologna 1921-1923, 2 voll.
[22] F. Tricomi, *Sulle equazioni lineari alle derivate parziali del 2° ordine di tipo misto*. Atti Acc. Lincei Mem. fis., s. 5, XIV, sez. 1, 1923, 133-247.
[23] F. Tricomi, *Funzioni ipergeometriche confluenti*. Roma 1954.
[24] F. Tricomi, *Stranezze del "Tricomi gas"*. Atti Acc. Lincei, s. 8, XVI, 1957, 423-426.
[25] V. Volterra, *Leçons sur les fonctions de lignes*. Paris 1913.
[26] V. Volterra, *Theory of functionals and of integral and integro-differential equations*. New York, N.Y. 1959.
[27] H. Weyl, *The method of orthogonal projection in potential theory*. Duke Math. Journ., 7, 1940, 411-440.
[28] W. Wirtinger, *Zur formalen Theorie der Funktionen von mehr complexen Veränderlichen*. Mathem. Annalen, 97, 1926, 357-375.