
ATTI ACCADEMIA NAZIONALE LINCEI CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI

RENDICONTI LINCEI MATEMATICA E APPLICAZIONI

RENATA GRIMALDI, IGNAZIA MANISCALCO

Extension de métriques riemannniennes et type de croissance

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti Lincei. Matematica e Applicazioni, Serie 9, Vol. 9 (1998), n.3, p. 213-220.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLIN_1998_9_9_3_213_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI

<http://www.bdim.eu/>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti Lincei. Matematica e Applicazioni, Accademia Nazionale dei Lincei, 1998.

Geometria differenziale. — *Extension de métriques riemanniennes et type de croissance.*
Nota di RENATA GRIMALDI e IGNAZIA MANISCALCO, presentata (*) dal Socio E. Vesentini.

ABSTRACT. — *Extension of Riemannian metrics and growth-type.* Let M be a noncompact differentiable manifold and V an open proper submanifold endowed with a complete Riemannian metric g . We prove that g can be extended all over M to a complete Riemannian metric G having the same growth-type as g .

KEY WORDS: Riemannian metrics; Geodesic balls; Volume.

RIASSUNTO. — *Estensione di metriche riemanniane e tipo di crescita.* Sia M una varietà differenziabile non compatta e sia V una sottovarietà propria aperta, dotata di una metrica riemanniana completa g . Si mostra come estendere g a una metrica completa G su M con lo stesso tipo di crescita di g .

1. INTRODUCTION

Soit (V, g) une variété riemannienne connexe et complète; on appelle *type de croissance* de la métrique g la classe d'équivalence, pour la relation de réciproque dominance, de la fonction croissance $v_x(r) = \text{volume}_g B(x, r)$, où $B(x, r)$ est la boule géodésique fermée de centre $x \in V$ et de rayon $r > 0$ (voir, par exemple, [3] à [11]).

Dans cette *Note*, on considère une variété différentiable connexe non compacte M de dimension $q = p + m$ et une sous-variété propre ⁽¹⁾ ouverte connexe V de dimension p et on montre le théorème suivant:

THÉORÈME 1. *Si g est une métrique riemannienne complète sur la sous-variété V , il existe sur la variété M une métrique complète G qui est une extension de g et dont le type de croissance est celui de g .*

2. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 1

On va faire la démonstration du théorème en plusieurs étapes.

1^{ère} étape - Une décomposition topologique.

Soit M une variété différentiable connexe non compacte de dimension $q = p + m$ et soit V une sous-variété propre ouverte connexe de dimension p .

On considère sur V une métrique riemannienne complète g et on prend les boules géodésiques $[1, 2]$ fermées $\tilde{B}_n$ de centre un point $x \in V$ et de rayon $n = 1, 2, \dots$. On

(*) Nella seduta del 24 aprile 1998.

(1) *Propre* dans le sens que l'inclusion $i: V \hookrightarrow M$ est une application propre.

a

$$V = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} \tilde{B}_n$$

et

$$\tilde{B}_n \subset \text{int} \tilde{B}_{n+1}, \quad \forall n.$$

Cela veut dire qu'on a une exhaustion compacte de V ; mais, alors, on peut bien prendre une interpolation $\tilde{B}_n \subset B_n \subset \tilde{B}_{n+1}$ pour avoir une exhaustion compacte de V par des sous-variétés lisses B_n , à bord, de codimension zéro.

On pose

$$\Sigma_n =: \partial B_n, \quad \forall n.$$

On considère, maintenant, le *fibré normal* $E =: TM/TV$ de V : il est connu [12] qu'on peut le réaliser comme un voisinage tubulaire fermé de V . Soit $E \xrightarrow{\pi} V$ ce fibré normal: $\forall x \in V$ la fibre $\pi^{-1}(x)$ est (difféomorphe à) la boule euclidienne fermée B^m de dimension $m = q - p$. En outre, E est une sous-variété à bord de M , dont le bord ∂E est fibré aussi sur V , $\partial E \xrightarrow{\pi|_{\partial E}} V$, et la fibre est la sphère euclidienne S^{m-1} .

On utilise, à ce point, un fait bien connu:

LEMME 1. *Toute exhaustion de V par des sous-variétés compactes (à bord) de codimension zéro s'étend à une exhaustion de M par des sous-variétés compactes W_n de codimension zéro.*

Ceci veut dire que $W_n \cap V = B_n$, $\forall n$.

En utilisant ce lemme on peut faire la suivante décomposition topologique dans M : on considère le complémentaire $M - \overset{\circ}{E}$ dans M de l'intérieur du fibré normal E , et son bord ∂E .

Il existe, alors, dans $M - \overset{\circ}{E}$ une famille de sous-variétés compactes de codimension 1, N_n , à bord et propres dans le sens que le bord ∂N_n est dans ∂E :

$$(N_n, \partial N_n) \hookrightarrow (M - \overset{\circ}{E}, \partial E),$$

et telles que:

- (i) $N_n \cap N_m = \emptyset$ pour $n \neq m$,
- (ii) $\partial N_n = \pi^{-1} \Sigma_n \cap \partial E = (\pi|_{\partial E})^{-1} \Sigma_n$.

Il existe, alors, dans M des sous-variétés compactes W_n , de codimension zéro, à bord telles que

$$\partial W_n = N_n \cup \pi^{-1} \Sigma_n;$$

ces W_n constituent l'exhaustion compacte de M qui étend l'exhaustion de V .

Revenons à la sous-variété V avec sa métrique g : pour chaque n , on considère un voisinage tubulaire *riemannien* de Σ_n dans V :

$$I_n =: \Sigma_n \times [-\varepsilon_n, \varepsilon_n] \subset V;$$

on veut dire que les fibres de I_n sont des arcs géodésiques orthogonaux à Σ_n , tous de même longueur $2\varepsilon_n$, dans la métrique g (voir fig. 1).

Preuve du Lemme 2. Soit $V^p = \bigsqcup_{\alpha} U_{\alpha}$, $E|_{U_{\alpha}} = U_{\alpha} \times B^m$ et soient $U_{\alpha} \cap U_{\beta} \xrightarrow{h_{\alpha\beta}} O(m)$ les fonctions de transition.

Si g_1 est la métrique standard de B^m , pour chaque α on considère sur $U_{\alpha} \times B^m$ la métrique produit

$$\tilde{g}_{\alpha} =: g|_{U_{\alpha}} + g_1.$$

Si $U_{\alpha} \cap U_{\beta} \neq \emptyset$, sur $(U_{\alpha} \cap U_{\beta}) \times B^m$ les métriques $\tilde{g}_{\alpha}$ et $\tilde{g}_{\beta}$ coïncident ($h_{\alpha\beta}(x) \in O(m)$).

Donc, en recollant ces métriques locales on a une métrique globale $\tilde{g}$ sur E , complète, qui satisfait bien les conditions requises.

Il reste à voir seulement la propriété *iii*).

Soit ℓ un chemin géodésique entre $p \notin V$ et q dans E . On considère sur V les points $\pi(p)$ et $\pi(q)$, et soit ℓ' une géodésique minimale entre ces points: on a, donc,

$$\text{long}_g \ell' \leq \text{long}_g \pi \ell.$$

Mais, par la construction de $\tilde{g}$, on a aussi:

$$\text{long}_g \pi \ell \leq \text{long}_{\tilde{g}} \ell.$$

On considère la fibre $\pi^{-1}(\pi(p))$ et soit $0 < c \leq 1$ la distance euclidienne de p à l'origine; soit E_c le sous-fibré en sphères de rayon c et soit

$$X =: \pi^{-1} \ell' \cap E_c \stackrel{\text{diff}}{=} S_c^{m-1} \times \ell'.$$

Alors $\exists!$ champ de vecteurs tangents $\tilde{v}$ de norme 1 sur X , orthogonal à la fibre; soit λ la courbe intégrale par p de ce champ de vecteurs (λ est un chemin de p à un point $q' \in \pi^{-1}(\pi(q))$).

On a

$$\pi \lambda = \ell'$$

i.e. λ est un relèvement de ℓ' , et

$$\text{long}_{\tilde{g}} \lambda = \text{long}_g \ell'.$$

Par l'inégalité triangulaire:

$$\text{long}_{\tilde{g}} \ell \leq \text{long}_{\tilde{g}} \lambda + \text{const}$$

(où $\text{const} = d(q, q')$), *i.e.*

$$\text{long}_{\tilde{g}} \ell \leq \text{long}_g \ell' + \text{const}.$$

On conclut que $\text{long}_g \pi \ell \sim \text{long}_{\tilde{g}} \ell$.

Les conditions *ii*) et *iii*) impliquent que $cr \tilde{g} = cr g$. $\square$

Dans cette métrique $\tilde{g}$ les longueurs des fibres de $\pi^{-1}(\Sigma_n \times [-\varepsilon_n, \varepsilon_n]) \cap \partial E$ restent égales à $2\varepsilon_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \varepsilon_n = 0$.

Nous voulons qu'elles soient *constantes* sans changer la croissance.

On va modifier la métrique $\tilde{g}$ en une métrique g_E de la forme:

$$g_E = f^2(x, u)(\pi^*g) + \psi^2(x, u)g_1$$

à l'aide de deux fonctions réelles positives f et ψ , définies sur E de la manière suivante. L'espace E est fibré aussi sur $[0, 1]$:

$$E \xrightarrow{\pi} [0, 1]$$

$$p \mapsto \pi(p) = \text{distance de } p \text{ à l'origine dans la fibre } \pi^{-1}(\pi(p)).$$

Pour chaque point $p \in E$ on pose $x = \pi(p)$ et $u = \pi(p)$ et on considère deux fonctions $f(x, u)$ et $\psi(x, u)$:

$$E \rightarrow V \times [0, 1] \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \xrightarrow{\psi} \end{array} \mathbb{R}_+$$

$$p \cong (x, u) \begin{array}{c} \mapsto f(x, u) \\ \mapsto \psi(x, u) \end{array}$$

comme suit:

I_f) On fixe $u = 1$, c'est-à-dire on considère les points $p \in \partial E$; $\forall p \in \partial E$ tel que $\pi(p) = x \in \Sigma_n \times [-\varepsilon_n, \varepsilon_n]$, alors $f(x, 1) = \frac{1}{\varepsilon_n}$.

Dans les autres points $p \in \partial E$, on prend une interpolation C^∞ .

II_f) Soit $0 < \delta_2 < 1$; pour $0 \leq u \leq 1 - \delta_2$, $f(x, u) = 1$.

III_f) Pour $1 - \delta_2 < u < 1$, $f(x, u) > 1$ est une interpolation C^∞ .

IV_f) À u fixé dans la zone $1 - \delta_2 < u \leq 1$, $f(x, u) \rightarrow +\infty$ très rapidement pour $x \rightarrow +\infty$.

Après, la fonction $\psi(x, u)$ est toujours $0 < \psi(x, u) \leq 1$ et:

I_ψ) si $0 < \delta_1 < \delta_2$ alors pour $0 \leq u \leq \delta_1$, $\psi(x, u) = 1$.

II_ψ) Dans la zone $1 - \delta_2 < u \leq 1$, $\psi(x, u)$ est telle que le volume $_{g_E}$ de la partie

$$\tilde{E} =: \{p \in E \mid p \cong (x, u), 1 - \delta_2 \leq u \leq 1\}$$

de E soit très petit:

$$\text{vol}_{g_E} \tilde{E} < \varepsilon \quad (\varepsilon > 0 \text{ petit}).$$

Pour avoir ça, on doit choisir $\psi(x, u)$ de telle sorte que, à u fixé dans la zone $1 - \delta_2 \leq u \leq 1$, $\psi(x, u) \rightarrow 0$ très rapidement pour $x \rightarrow +\infty$: plus précisément on doit avoir que le produit

$$f(x, u)\psi(x, u) \rightarrow 0$$

très rapidement pour $x \rightarrow +\infty$.

III _{ψ}) Dans la zone $\delta_1 < u < 1 - \delta_2$ on prend une interpolation C^∞ .

Propriétés de cette métrique g_E sur E .

a)
$$cr \ g_E = cr \ g.$$

En fait, le volume total de la partie $\tilde{E}$ est *fini* et non donne contribution à la croissance; puis, dans la zone $0 \leq u \leq \delta_1$ la métrique g_E coïncide avec $\tilde{g}$ et dans la zone intermédiaire f est égale à 1 et ψ est bornée $0 < \psi(x, u) < 1$; le volume des boules de la métrique g_E est comparable au volume des boules dans la métrique $\tilde{g}$ et, par le Lemme 2, $cr \ \tilde{g} = cr \ g$.

b) La longueur des fibres de $\pi^{-1}(\Sigma_n \times [-\varepsilon_n, \varepsilon_n]) \cap \partial E$, (fibres qui sont $\perp_{|\partial E}^{-1}(\Sigma_n)$) est égale à 2 pour tout n , par la condition I_f .

III^{me} étape - Construction d'une métrique G sur M .

D'abord, on construit une métrique riemannienne sur $M - E$ de la manière suivante.

On considère, $\forall n$, la variété à bord N_n et on prend une métrique σ_n sur N_n de telle sorte que

$$\sum_n^\infty \text{diam}_{\sigma_n} N_n < +\infty,$$

$$\sum_n^\infty \text{vol}_{\sigma_n} N_n < +\infty.$$

Puis on considère le voisinage tubulaire (topologique) $P_n =: N_n \times [-1, 1]$ (voir fig. 1) et sur ce voisinage tubulaire on met la métrique

$$g_n =: \sigma_n + dt^2$$

(où dt^2 est la métrique standard de $[-1, 1]$ i.e. la longueur de $[-1, 1]$ est 2).

Propriétés de g_n :

- (I) Chaque fibre de $N_n \times [-1, 1]$ est $\perp N_n$;
- (II) la longueur de chaque fibre de $N_n \times [-1, 1]$ est *constante égale à 2*, $\forall n$;
- (III) $\sum_n^\infty \text{vol}_{g_n}(N_n \times [-1, 1]) < +\infty$.

Si on appelle "TROU n ", disons $T_n \subset M$ la partie compacte intermédiaire entre P_n

et P_{n-1} , on va mettre sur tels trous T_n , $\forall n$, une métrique g_{T_n} t.q.

$$\sum_n^{+\infty} \text{diam}_{g_{T_n}} T_n \rightarrow 0,$$

$$\sum_n^{+\infty} \text{vol}_{g_{T_n}} T_n \rightarrow 0$$

très rapidement pour $n \rightarrow +\infty$.

En utilisant une partition de l'unité, on peut recoller toutes ces métriques g_E , g_n , g_{T_n} $\forall n$, pour avoir une métrique *globale* G bien définie sur M .

IV^{me} étape - Étude de la croissance de G .

Propriétés de la métrique G .

1) Si $B_G(n)$ est la boule géodésique fermée, dans M , de centre $x \in V$ et de rayon n , on a

$$\pi^{-1}(B_n) \subset B_G(n) \subset \pi^{-1}(B_n) \cup \left(\bigsqcup_{i=1}^n (P_i \cup T_i) \right).$$

2) G est *complète*: en fait, $\forall n$, $B_G(n)$ est contenue dans un compact, par les inclusions précédentes.

3) *cr* $G = \text{cr } g$.

Comme tous les volumes de P_i et T_i dans la métrique G sont très petits,

$$\text{vol}_g B_n \leq \text{volume}_G B_G(n) \leq \text{vol}_g B_n + k_n$$

où $k_n \rightarrow 0$.

Cela conclut la démonstration du théorème. $\square$

Travail réalisé avec le concours du M.U.R.S.T. d'Italie et dans le groupe G.N.S.A.G.A. du C.N.R.

Les auteurs desirent exprimer leur gratitude à V. Poénaru pour des fructueuses discussions.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] I. CHAVEL, *Riemannian Geometry*. Acad. Press, 1984.
- [2] J. CHEEGER - D. EBIN, *Comparison theorems in Riemannian Geometry*. North-Holland 1975.
- [3] R. GRIMALDI, *Sur la croissance des métriques C^∞ sur $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{H}^2$* . Istit. Lombardo Rend. Sc., A 124, 1990, 119-124.
- [4] R. GRIMALDI, *Construction de métriques riemanniennes avec type de croissance de plus en plus grand*. C. R. Acad. Sc. Paris, 316, Sér. I, 1993 585-587.
- [5] R. GRIMALDI, *On systolic growth-type*. Diff. Geom. Appl., 5, 1995, 331-334.
- [6] R. GRIMALDI, *Sur la croissance des variétés riemanniennes*. Analele Stiint. Ovidius Univ. Constanta, Ser. Matem. III, 1995, fasc. 2, 47-54.
- [7] R. GRIMALDI - P. PANSU, *Sur le type de croissance des métriques de révolution*. C. R. Acad. Sc. Paris, 311, Sér. I, 1990, 889-892.
- [8] R. GRIMALDI - P. PANSU, *Sur la croissance du volume dans une classe conforme*. Jour. Math. pures et appl., 71, 1992, 1-19.

- [9] R. GRIMALDI - P. PANSU, *Sur la régularité de la fonction croissance d'une variété riemannienne*. Geometriae Dedicata, 50, 1994, 301-307.
- [10] R. GRIMALDI - P. PANSU, *Sur le degré de différentiabilité de la fonction croissance en dimension deux*. Boll. U.M.I., (7) 11-B, 1997, Suppl. fasc. 2, 25-38.
- [11] M. GROMOV, *Volume and bounded cohomology*. Publ. I.H.E.S., 56, 1982, 5-100.
- [12] M. HIRSCH, *Differential Topology*. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg 1976.

Pervenuta il 26 febbraio 1998,
in forma definitiva il 19 marzo 1998.

R. Grimaldi:
Dipartimento di Matematica ed Applicazioni
Facoltà di Ingegneria
Università degli Studi di Palermo
Viale delle Scienze - 90128 PALERMO
grimaldi@ipamat.math.unipa.it

I. Maniscalco:
Dipartimento di Matematica ed Applicazioni
Facoltà di Scienze M.F.N.
Università degli Studi di Palermo
Via Archirafi, 34 - 90123 PALERMO