Atti Accademia Nazionale Lincei Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti Lincei
Matematica e Applicazioni

Guido Zappa

Sui gruppi finiti col rango di Cipolla uguale a uno

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti Lincei. Matematica e Applicazioni, Serie 9, Vol. **9** (1998), n.2, p. 81–88.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLIN_1998_9_9_2_81_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti Lincei. Matematica e Applicazioni, Accademia Nazionale dei Lincei, 1998.

Rend. Mat. Acc. Lincei
s. 9, v. 9:81-88 (1998)

Teoria dei gruppi. — *Sui gruppi finiti col rango di Cipolla uguale a uno.* Nota (*) del Socio GUIDO ZAPPA.

ABSTRACT. — *On finite groups whose Cipolla's rank is one.* Let G be a non-abelian finite group, and Z be its center. Let I be the poset of centralizers of elements in $G \setminus Z$. G is said to have «rank 1» if the lenght of I is 0, and is said to be an «$\mathcal{M}$-group» if every $H \in I$ is abelian. Every $\mathcal{M}$-group has rank 1. Schmidt [10] classified the $\mathcal{M}$-groups. In this *Note* the rank 1 groups which are not $\mathcal{M}$-groups are classified.

KEY WORDS: Finite groups; Centralizers; Partitions.

RIASSUNTO. — Sia G un gruppo finito non abeliano e Z il suo centro. Sia I l'insieme parzialmente ordinato dei centralizzanti di $G \setminus Z$. Si dice che G ha «rango 1» se la lunghezza di I è 0, e si dice che esso è un «$\mathcal{M}$-gruppo» se ogni $H \in I$ è abeliano. Ogni $\mathcal{M}$-gruppo ha rango 1. Schmidt [10] ha classificato gli $\mathcal{M}$-gruppi. In questa *Nota* si classificano i gruppi di rango 1 che non sono $\mathcal{M}$-gruppi.

1. INTRODUZIONE E PRELIMINARI

1.1. Nella lettura dei lavori di teoria dei gruppi di Michele Cipolla in vista della preparazione del volume [4], recentemente pubblicato, in cui sono raccolte le principali memorie e note di questo autore, mi sono reso conto del fatto che alcuni problemi, a suo tempo da lui posti, si possono oggi risolvere agevolmente grazie ai progressi compiuti dalla teoria dei gruppi negli ultimi cinquanta anni.

In questa *Nota* ci occuperemo dei gruppi detti da Cipolla «di rango 1», cioè tali che, comunque si prendano due elementi a, b non appartenenti al centro, il centralizzante di a non è mai un sottogruppo proprio di quello di b.

Un contributo molto importante alla soluzione del problema della determinazione di tutti i gruppi di rango 1 è dovuta a R. Schmidt [10]. Egli ha classificato i gruppi finiti da lui chiamati $\mathcal{M}$-gruppi, cioè i gruppi in cui i centralizzanti degli elementi non centrali sono tutti abeliani. Si vede facilmente che gli $\mathcal{M}$-gruppi sono di rango 1, ma esistono gruppi finiti di rango 1 che non sono $\mathcal{M}$-gruppi.

Risultati parziali erano stati dati precedentemente da L. Weisner [14] e da N. Ito [7]. Per problemi connessi vedi anche C. Marchionna Tibiletti [9].

Nel § 1.2 dimostreremo che i p-gruppi extraspeciali di ordine $> p^3$ sono di rango 1, ma non sono $\mathcal{M}$-gruppi. Nel § 1.3 daremo un esempio di un gruppo finito di rango 1, che non è un $\mathcal{M}$-gruppo, il cui quoziente rispetto al centro è un gruppo di Frobenius. Nei numeri seguenti proveremo che un gruppo finito non abeliano è di rango 1 non $\mathcal{M}$-gruppo se e solo se appartiene ad una delle classi seguenti: A) gruppi della forma $P \times H$ con P p-gruppo (non abeliano) di rango 1 non $\mathcal{M}$-gruppo e H p'-gruppo abeliano; B) gruppi finiti il cui quoziente rispetto al centro è un gruppo di Frobenius,

(*) Presentata nella seduta del 12 dicembre 1997.

a complementi di Frobenius ciclici e a nucleo di Frobenius p-gruppo, e tali che l'unico p-sottogruppo di Sylow è un p-gruppo finito di rango 1 non $\mathcal{M}$-gruppo.

Mettendo insieme i risultati di Schmidt con i nostri si ha una classificazione completa dei gruppi finiti di rango 1. Il problema della loro completa determinazione è ricondotto a quello dei p-gruppi di rango 1.

Tutti i gruppi considerati in questo lavoro sono supposti finiti.

1.2. Ricordiamo ora alcuni concetti introdotti da Cipolla. Sia G un gruppo non abeliano e Z il suo centro. Tutti gli elementi di $G \setminus Z$ che hanno il medesimo centralizzante costituiscono un cosiddetto *sistema fondamentale*. Il centralizzante comune degli elementi di un sistema fondamentale è chiamato *sottogruppo fondamentale* ad esso legato. Il centro di un sottogruppo fondamentale è detto *normocentro* (1) legato al sottogruppo fondamentale e al corrispondente sistema fondamentale.

I sottogruppi fondamentali di G costituiscono un insieme parzialmente ordinato rispetto all'inclusione. Cipolla chiama *rango* di G la lunghezza di tale insieme parzialmente ordinato.

Segue dalla definizione:

Proposizione 1. *Un gruppo non abeliano G è di rango 1 se e solo se ogni sottogruppo fondamentale (cioè ogni centralizzante di un elemento non centrale) è massimale (e quindi anche minimale) nell'insieme parzialmente ordinato I costituito dai sottogruppi fondamentali.*

Dimostriamo ora la seguente proposizione, benché essa sia sostanzialmente contenuta nei lavori di Cipolla.

Proposizione 2. *Un sottogruppo fondamentale S di un gruppo non abeliano G è massimale in I se e solo se il relativo normocentro N è unione insiemistica del sistema fondamentale H ad esso legato e del centro Z di G.*

Dimostrazione. Si vede subito che ogni normocentro e ogni sottogruppo fondamentale è unione insiemistica del centro e di alcuni sistemi fondamentali.

Necessariamente N contiene H e Z. Supponiamo che sia $N \neq H \cup Z$. Allora N contiene almeno un sistema fondamentale $\overline{H} \neq H$. Ma $\overline{H}$, essendo incluso in N, è centralizzato da ogni elemento di S, onde il sottogruppo fondamentale $\overline{S}$ legato ad $\overline{H}$ contiene S, ma è distinto da esso, essendo $\overline{H} \neq H$. Pertanto S non è massimale.

Viceversa, sia S non massimale. Allora S è incluso propriamente in un altro sottogruppo fondamentale $\overline{S}$. Il sistema fondamentale $\overline{H}$ legato ad $\overline{S}$ è nel centro di $\overline{S}$, quindi centralizza H, e pertanto è incluso in S. Ma essendo nel centro di $\overline{S}$, centralizza S, quindi è in N. Pertanto $N \neq H \cup Z$.

Segue subito la

Proposizione 3. *Un gruppo non abeliano G è di rango 1 se e solo se ogni normocentro N è unione insiemistica del sistema fondamentale ad esso legato e del centro di G.*

(1) Il termine «normocentro» è dovuto a Gaetano Scorza. Cipolla usava al suo posto la dizione: «sottogruppo abeliano fondamentale».

DEFINIZIONE 1. Dati un gruppo G e un suo sottogruppo $M \neq G$, si dice M-partizione stretta di G un insieme di sottogruppi di G contenenti M, tali che ogni elemento di $G \setminus M$ appartenga ad uno ed un solo sottogruppo dell'insieme. La M-partizione è detta abeliana se tali sono i sottogruppi che ne fanno parte.

Dalla Proposizione 3 segue subito:

PROPOSIZIONE 4. *Un gruppo non abeliano G di centro Z è di rango 1 se e solo se i suoi normocentri costituiscono una Z-partizione stretta abeliana.*

Ne segue il

COROLLARIO 1. *Se G è un gruppo non abeliano di centro Z e rango 1, le immagini epimorfiche dei normocentri di G nell'epimorfismo naturale di G su G/Z costituiscono una partizione abeliana normale di G/Z.*

1.3. Una gran parte dei gruppi di rango 1 è costituita dai cosiddetti «$\mathcal{M}$-gruppi» studiati da R. Schmidt in [10], e da lui trattati anche nel volume [11].

Dato un gruppo G, Schmidt indica con $\mathcal{C}(G)$ il reticolo costituito dai centralizzanti dei sottogruppi di G rispetto all'inclusione. Egli chiama G $\mathcal{M}$-gruppo se $\mathcal{C}(G)$ ha lunghezza 2. Egli dimostra facilmente che G è un $\mathcal{M}$-gruppo se e solo se non è abeliano e il centralizzante di ogni elemento non centrale è abeliano. Potremo quindi dare la seguente

DEFINIZIONE 2. Un gruppo G si dice $\mathcal{M}$-gruppo se non è abeliano e il centralizzante di ogni elemento non centrale è abeliano.

Si vede subito che:

PROPOSIZIONE 5. *Ogni $\mathcal{M}$-gruppo è un gruppo di rango 1.*

DIMOSTRAZIONE. Sia G un $\mathcal{M}$-gruppo di centro Z e sia F un suo sottogruppo fondamentale massimale. Poiché F è abeliano, comunque si prenda un elemento di $F \setminus Z$, il suo centralizzante coincide con F. Ne segue che F non può contenere propriamente alcun altro sottogruppo fondamentale, e di conseguenza G è di rango 1.

2. ESEMPI DI GRUPPI DI RANGO 1 CHE NON SONO $\mathcal{M}$-GRUPPI

2.1. Un esempio di p-gruppo di rango 1 che non sia un $\mathcal{M}$-gruppo fu dato da N. Ito in [7, pag. 23, ex. 3]. Si tratta di un gruppo extraspeciale di ordine p^5 (p primo dispari). Possiamo dimostrare, più in generale, che

PROPOSIZIONE 6. *Ogni p-gruppo non abeliano il cui derivato abbia ordine p è di rango 1. In particolare, ogni p-gruppo extraspeciale è di rango 1. Se il suo ordine è $> p^3$, esso non è un $\mathcal{M}$-gruppo.*

DIMOSTRAZIONE. Sia G un p-gruppo il cui derivato G' abbia ordine p, e sia a un elemento non centrale di G. I coniugati di a sono della forma ak con $k \in G'$, onde il loro numero è $\leq p$. D'altra parte, essendo a non centrale, il numero dei suoi coniugati è > 1, quindi $\geq p$. Pertanto a ha esattamente p-coniugati, onde il suo centralizzante ha indice p. Tutti i sottogruppi fondamentali di G hanno pertanto lo stesso ordine, e nessuno di essi ne può contenere propriamente un altro, onde G è di rango 1.

Sia ora G un p-gruppo extraspeciale. Allora (vedi Huppert [6, III.13.1]) il centro Z di G coincide col derivato G' e ha ordine p, onde G è di rango 1.

Inoltre (vedi Huppert [6, III.13.7 e III.13.8]) G ha ordine della forma p^{2m+1} ed è prodotto diretto con centro amalgamato di m gruppi non abeliani $H_1, \ldots, H_m$ di ordine p^3. Se l'ordine del gruppo è $> p^3$, cioè se $m \geq 2$, il centralizzante di un elemento di $H_1 \setminus Z$ contiene H_2, e quindi non è abeliano, perché H_2 non lo è. Segue che in tal caso G non è un $\mathcal{M}$-gruppo.

2.2. Diamo ora un esempio di un *gruppo G di rango 1 non $\mathcal{M}$-gruppo, il cui quoziente rispetto al centro è un gruppo di Frobenius*.

Sia P un 3-gruppo extraspeciale di ordine 3^5. Si abbia:

$$P = \Big\langle a_1, b_1, a_2, b_2, k \mid a_1^3 = b_1^3 = a_2^3 = b_2^3 = k^3 = 1, a_1 b_1 = b_1 a_1 k, a_2 b_2 = b_2 a_2 k, a_1 a_2 = a_2 a_1,$$
$$a_1 b_2 = b_2 a_1, b_1 a_2 = a_2 b_1, b_1 b_2 = b_2 b_1, a_i k = k a_i, b_i k = k b_i \ (i = 1, 2) \Big\rangle.$$

Il gruppo P ammette un automorfismo ω tale che $a_i^\omega = a_i^{-1}$, $b_i^\omega = b_i^{-1}$ $(i = 1, 2)$. Si avrà $k^\omega = (a_1^{-1} b_1^{-1} a_1 b_1)^\omega = a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} = b_1 a_1 k a_1^{-1} b_1^{-1} = k b_1 a_1 a_1^{-1} b_1^{-1} = k$.

Sia $Q = \langle c \mid c^2 = 1 \rangle$. Si costruisca il prodotto semidiretto $G = PQ$ in modo che c induca in P l'automorfismo ω. Poiché ω muta k in sé, si ha $Z(G) = \langle k \rangle$, e $G/Z(G)$ è un gruppo di Frobenius. G non è un $\mathcal{M}$-gruppo perché il centralizzante di a_1 contiene $\langle a_2, b_2 \rangle$ il quale non è abeliano. Resta da dimostrare che G è di rango 1.

Si vede facilmente che se $h \in QZ \setminus Z$, il centralizzante di h è QZ, cioè ha ordine 6. Altrettanto si dica per ogni elemento di un coniugato di QZ, non contenuto in Z. Un elemento di $P \setminus Z$ ha il centralizzante contenuto in P, e di ordine 3^4. Ne segue che nessun sottogruppo fondamentale di G può contenere propriamente un altro sottogruppo fondamentale, e G è di rango 1.

3. Classificazione dei gruppi di rango 1 che non sono $\mathcal{M}$-gruppi

3.1. Dal Corollario 1 risulta che se G è un gruppo di rango 1 e Z è il suo centro, G/Z deve ammettere una partizione abeliana.

Dagli articoli di R. Baer [1-3], O. Kegel [8] e M. Suzuki [13] risulta che se un gruppo G ammette una partizione non banale, esso deve appartenere ad una delle seguenti classi: *a*) p-gruppi; *b*) gruppi di Frobenius; *c*) gruppi di Hughes-Thompson non appartenenti alle classi precedenti; *d*) gruppi lineari proiettivi generali di dimensione 2, $PGL(2, p^n)$; *e*) gruppi lineari proiettivi speciali di dimensione 2, $PSL(2, p^n)$; *f*) gruppi di Suzuki $S(q)$.

I gruppi di Suzuki $S(q)$ non ammettono partizioni abeliane. Infatti in essi i 2-

sottogruppi di Sylow sono generati dagli elementi di ordine 4, quindi non ammettono partizioni non banali. Segue che un 2-sottogruppo di Sylow di un gruppo di Suzuki deve essere contenuto in una componente di ogni partizione non banale; ma non è abeliano, onde $S(q)$ non può mai ammettere partizioni abeliane (2).

Sia ora G un gruppo di rango 1 e centro Z. Allora G/Z deve appartenere ad una delle classi *a*), *b*), *c*), *d*), *e*). Distinguiamo i vari casi.

Classe a). Sia G/Z un p-gruppo. Allora $Z = H \times K$ con H p-gruppo e K p'-gruppo. Sia P un p-sottogruppo di Sylow di G. Allora $P \supset H$ e $G = P \times K$. Inoltre H coincide col centro di P. Siano $a, b \in P$. Allora $C_G(a) = C_P(a) \times K$, $C_G(b) = C_P(b) \times K$. Se $C_P(a)$ fosse contenuto propriamente in $C_P(b)$, anche $C_G(a)$ sarebbe contenuto propriamente in $C_G(b)$, il che non può essere, perché G è di rango 1. Segue che P è di rango 1. Inoltre G è un $\mathcal{M}$-gruppo se e solo se lo è P.
Concludendo:

PROPOSIZIONE 7. *Sia G un gruppo di rango 1 e centro Z con G/Z p-gruppo. Allora $G =$ $= P \times K$ con P p-sottogruppo di Sylow di rango 1 e K p'-gruppo abeliano. G è un $\mathcal{M}$-gruppo se e solo se lo è P.*

Classe b). Sia G/Z un gruppo di Frobenius. Le immagini dei normocentri di G nell'epimorfismo naturale di G su G/Z costituiscono una partizione abeliana Σ di G/Z. Essa è necessariamente normale perché un coniugato di un normocentro è ancora un normocentro. Sia N/Z il nucleo di Frobenius di G/Z. Nessun elemento non identico di N/Z è permutabile con alcun elemento esterno a N/Z, onde qualunque componente di Σ o è contenuta in N/Z, o ha con esso intersezione unitaria. Segue che N/Z è ammissibile per Σ. In base al teorema di Baer riportato in [11, n. 3.5.7], i complementi di Frobenius di G/Z sono componenti di Σ. Sia Q/Z uno di essi. Poiché Q/Z è una componente di Σ, Q è un normocentro di G, quindi è abeliano. Se $a \in Q \setminus Z$, il centralizzante di Za in G/Z è Q/Z, onde il centralizzante di a è Q. Segue che Q è anche sottogruppo fondamentale di G.

Ne discende che Σ è costituita da complementi di Frobenius di G/Z e da sottogruppi di N/Z. Distinguiamo ora due casi:

Classe b'). *N è abeliano*. Allora N è il centralizzante di ogni suo elemento, e quindi è sottogruppo fondamentale e normocentro di G. Tutti i sottogruppi fondamentali di G sono allora abeliani, e G è un $\mathcal{M}$-gruppo.

Classe b''). *N non è abeliano*. Allora il centro di N coincide con Z. Infatti, in caso contrario, se a, $b \in N \setminus Z$ con a nel centro di N e b ad esso esterno si avrebbe che il centralizzante di a in G è N, mentre quello di b è un sottogruppo proprio di N, contro il fatto che G è di rango 1. Ma N è nilpotente, quindi tale è N/Z. Essendo N non abeliano, le componenti di Σ contenute in N/Z sono sottogruppi propri di N/Z, onde N/Z è un p-gruppo. I sottogruppi fondamentali e i normocentri di G contenuti in N coincidono allora coi sottogruppi fondamentali e i normocentri di N. Essendo

(2) Per le proprietà dei gruppi di Suzuki $S(q)$ vedi Suzuki [12].

N/Z un p-gruppo, N è un gruppo di rango 1 appartenente alla classe a). Inoltre G è un $\mathcal{M}$-gruppo se e solo se lo è N. Concludendo:

Proposizione 8. *Sia G un gruppo di rango 1 e centro Z con G/Z gruppo di Frobenius e N/Z nucleo di Frobenius di G/Z. Se N è abeliano, G è un $\mathcal{M}$-gruppo. Se non è abeliano N è un p-gruppo, il centro di N è Z ed N è un gruppo di rango 1 appartenente alla classe* a). *I sottogruppi fondamentali di G sono i sottogruppi fondamentali di N e le retroimmagini dei complementi di Frobenius di G/Z. Inoltre G è un $\mathcal{M}$-gruppo se e solo se tale è N.*

L'esempio dato nel § 2.2 mostra che il caso in cui G non è un $\mathcal{M}$-gruppo può effettivamente verificarsi.

Classe c). Sia G/Z un gruppo di Hughes-Thompson che non sia nè un gruppo di Frobenius, nè un p-gruppo. Allora, per il teorema di Hughes-Thompson [5], per un certo primo p che divide l'indice di G/Z, gli elementi di G/Z che non hanno periodo p generano un sottogruppo nilpotente H/Z di indice p. Inoltre l'ordine di H/Z è divisibile per p, altrimenti G/Z sarebbe un gruppo di Frobenius. Segue che H/Z ha un elemento d'ordine p appartenente al suo centro, onde H/Z non ammette partizioni proprie, e l'unica partizione propria Σ di G/Z è costituita da H/Z e dai sottogruppi d'ordine p esterni ad H/Z, siano essi $P_1/Z, P_2/Z, \dots, P_r/Z$. Allora H, $P_1, \dots, P_r$ sono i normocentri di G, e quindi sono abeliani. Il centralizzante di un elemento di $H \setminus Z$ è H, quindi H è anche un sottogruppo fondamentale. Sia Q_i il centralizzante di un elemento di $P_i \setminus Z$. Si ha evidentemente $Q_i \supset P_i$. Supponiamo che esista un elemento $x \in Q_i \setminus P_i$. Allora $x = yz$ con $y \in H$, $z \in P_i$. Avendosi $x \in Q_i$, $z \in Q_i$ segue $y \in Q_i$. Ma $y \in H$, onde il centralizzante di y contiene $HQ_i = G$, cioè $y \in Z$, quindi $y \in P_i$, e pertanto $x \in P_i$, contro l'ipotesi $x \in Q_i \setminus P_i$. Ne discende che P_i è un sottogruppo fondamentale. Tutti i sottogruppi fondamentali sono quindi abeliani, e G è un $\mathcal{M}$-gruppo. Concludendo:

Proposizione 9. *Se G è un gruppo di rango 1 con G/Z gruppo di Hughes-Thompson che non sia nè p-gruppo, nè un gruppo di Frobenius, G è un $\mathcal{M}$-gruppo.*

Classi d) ed e). Sia G/Z isomorfo a $PGL(2, p^n)$ o a $PSL(2, p^n)$. Se $p = 2$ e Za è un elemento $\neq Z$ di G/Z il cui ordine sia primo con p, il centralizzante di Za in G/Z è ciclico, onde il centralizzante di a in G, essendo un ampliamento ciclico di Z, è abeliano. Sia ora $p > 2$, e per quanto riguarda $PSL(2, p^n)$ supponiamo per il momento $p^n > 5$. Allora G/Z contiene gruppi diedrali di ordine $4t$ con $t > 1$. Sia D uno di essi. Allora $D = \langle Za, Zb \rangle$ con Za di ordine $2t$ e Zb di ordine 2. Si avrà $(Zb)^{-1} Za\, Zb = (Za)^{-1}$. Il centralizzante di $(Za)^t$ è D, mentre quello di Za è costituito dalle sole potenze di Za, quindi ha ordine $2t$. Il centralizzante di a in G è allora dato da $Z\langle a \rangle$ e quindi quello di a^t contiene $Z\langle a \rangle$. Ma essendo G di rango 1, anche il centralizzante di a^t deve coincidere con $Z\langle a \rangle$, onde non può contenere b, e pertanto $[a^t, b] \neq 1$. Poiché in G/Z ogni elemento di ordine primo con p e $\neq 2$ ha centralizzante ciclico ne segue che se d è un qualunque elemento di G tale che la sua immagine in G/Z abbia ordine primo con p, il centralizzante di d in G è ampliamento ciclico di Z, e pertanto è abeliano.

Gli elementi di G/Z il cui ordine è divisibile per p hanno necessariamente ordine p e stanno quindi in qualche p-sottogruppo di Sylow di G. Sia H/Z uno di questi. Allora H/Z è abeliano elementare. Sia ora p^n qualunque, purché $\neq 3, 4, 5, 9$. Ragionando come nel volume [11, n. 9.3.12] di Schmidt, si dimostra che $G' \cap Z$ è isomorfo ad un sottogruppo del gruppo del moltiplicatore M di Schur. Per $p = 2$ e $p^n \neq 4$, si ha $M = 1$, mentre per $p > 2$ e $p^n \neq 3, 5, 9$ si ha M di ordine 2. Siano aZ e bZ due elementi $\neq Z$ di H/Z. Essendo H/Z abeliano, è $[aZ, bZ] = Z$, onde $[a, b] \in Z$. Ma avendo aZ e bZ ordine p, posto $[a, b] = k$, si ha $ak = ka$, $bk = kb$, onde $[a^p, b] = k^p$. Ma $a^p \in Z$, onde $k^p = 1$. Inoltre $k \in Z \cap G'$ e quindi, per $p = 2$, è $k = 1$, mentre per $p > 2$, essendo $Z \cap G'$ di ordine 1 o 2, da $k^p = 1$ segue $k = 1$. Ne segue che H è abeliano. Se $a \in H \setminus Z$, si ha $C(Za) = H/Z$, onde $C(a) \subset H$. Ma essendo H abeliano, $C(a) = H$. Ne segue che ogni elemento di $G \setminus Z$ ha centralizzante abeliano, e quindi G è un $\mathcal{M}$-gruppo.

Veniamo ora ai casi $p = 3, 4, 5, 9$. Poiché $PGL(2, 4) = PSL(2, 4) = PSL(2, 5) \simeq \simeq A_5$, si può lasciare da parte l'ipotesi $p^n = 4$. Se $G/Z = PGL(2, 3)$ o $= PGL(2, 5)$, e $a \in G \setminus Z$, abbiamo visto che $C(a)$ è abeliano se Za ha ordine primo rispettivamente con 3 o con 5. In caso contrario Za ha ordine 3 o rispettivamente 5, e il centralizzante di a è abeliano. Pertanto G in tali casi è un $\mathcal{M}$-gruppo. Nei casi $PSL(2, 3) \simeq A_4$ e $PSL(2, 5)$, il centralizzante di un elemento $a \in G \setminus Z$ con Za di ordine $\neq 2$ è abeliano perché quello di Za in G/Z è ciclico. Sia ora Za di ordine 2. Il centralizzante di Za in G/Z è un 2-sottogruppo di Sylow S/Z di G/Z, quindi è abeliano elementare di ordine 4. Se S è abeliano, esso è il centralizzante di a in G. Se S non è abeliano, esiste un elemento $b \in S$ con $[a, b] \neq 1$. Ma S/Z ha ordine 4, onde $C(a)$, non contenendo b, ha indice 2 in S, cioè $C(a) = Z\langle a \rangle$. Allora $C(a)$, essendo ampliamento ciclico di Z, è abeliano. Quindi in tal caso G è un $\mathcal{M}$-gruppo.

Per $G/Z = PGL(2, 9)$ o $G/Z = PSL(2, 9)$, il centralizzante di un elemento a di G/Z tale che Za ha ordine $\neq 3$ è abeliano. Sia ora Za di ordine 3. Allora $Za \in S/Z$ con S/Z 3-sottogruppo di Sylow d'ordine 9, abeliano elementare. Ragionando come nel caso di $PSL(2, 3)$ e $PSL(2, 5)$, si vede che anche in questo caso $C(a)$ è abeliano. Risulta pertanto che G è un $\mathcal{M}$-gruppo. Concludendo:

Proposizione 10. *Se G è un gruppo di rango* 1 *con G/Z isomorfo a $PGL(2, p^n)$ o a $PSL(2, p^n)$, G è un $\mathcal{M}$-gruppo.*

3.2. Possiamo ora giungere al seguente

Teorema. *Un gruppo G di centro Z appartiene alla classe dei gruppi di rango* 1 *che non sono $\mathcal{M}$-gruppi se e solo se soddisfa una delle seguenti condizioni:*

A) *$G = P \times K$ con P p-gruppo di rango* 1 *non $\mathcal{M}$-gruppo e K p'-gruppo abeliano.*

B) *G/Z è un gruppo di Frobenius con nucleo di Frobenius N/Z, con complemento di Frobenius F/Z ciclico, col centro di N coincidente con Z, e con N verificante la condizione* A).

Dimostrazione. Dal § 3.1 discende che se G è un gruppo di rango 1 G/Z deve appartenere ad una delle classi a), b), c), d), e), e dalle Proposizioni 7, 8, 9, 10 discende che G deve di conseguenza soddisfare una delle condizioni A) e B).

Viceversa, sia G un gruppo soddisfacente la condizione A), e sia $a \in G \setminus Z$. Allora $a = bc$ con $b \in P \setminus Z$, $c \in K$. Essendo $K \subset Z$, si ha $C_G(a) = C_G(b) = C_P(b) \times K$. Presi due elementi $a_1, a_2 \in G \setminus Z$ con $a_1 = b_1 c_1$ e $a_2 = b_2 c_2$ ($b_i \in P$, $c_i \in K$, $i = 1, 2$) si ha $C_G(a_1) = C_P(b_1) \times K$, $C_G(a_2) = C_P(b_2) \times K$ e quindi si avrà $C_G(a_1) \subsetneqq C_G(a_2)$ se e solo se $C_P(b_1) \subsetneqq C_P(b_2)$. Non potendosi avere $C_P(b_1) \subsetneqq C_P(b_2)$ perché P è di rango 1, non può aversi nemmeno $C_G(a_1) \subsetneqq C(a_2)$, onde G è di rango 1, e non è un $\mathcal{M}$-gruppo, perché P non lo è.

Sia ora G un gruppo verificante la condizione B), e sia $a \in G \setminus Z$. Allora Za appartiene al nucleo di Frobenius N/Z di G/Z o ad un suo complemento di Frobenius F/Z. Sia $Za \in F/Z$. Essendo F/Z ciclico, si ha che il centralizzante di Za in G/Z è F/Z, onde il centralizzante di a in G è contenuto in F. Ma F è ampliamento ciclico del centro Z, quindi è abeliano. Ne segue che il centralizzante di a è F. Sia ora $Za \in N/Z$. Allora il centralizzante di Za in G/Z è N/Z, onde il centralizzante di a in G è contenuto in N, e coincide col centralizzante di a in N. Poiché N verifica la condizione A) e quindi è di rango 1, due centralizzanti di due elementi di $N \setminus Z$ non sono mai contenuti propriamente l'uno nell'altro, onde altrettanto avviene per i centralizzanti di due qualunque elementi di $G \setminus Z$. Pertanto G è di rango 1, e non è un $\mathcal{M}$-gruppo, perché N non lo è.

Gli esempi dati ai §§ 2.1 e 2.2 mostrano che le classi A) e B) di cui al teorema non sono vuote.

Bibliografia

[1] R. Baer, *Partitionen endlicher Gruppen*. Math. Zeitsch., 75, 1961, 333-372.
[2] R. Baer, *Einfache Partitionen nicht-einfacher Gruppen*. Math. Zeitsch., 77, 1961, 1-17.
[3] R. Baer, *Einfache Partitionen endlicher Gruppen mit nichttrivialen Fittingscher Untergruppen*. Arch. der Math., 12, 1961, 81-89.
[4] M. Cipolla, *Opere*. Palermo 1997.
[5] D. H. Hughes - J. G. Thompson, *The H_p-problem and the structure of H_p-groups*. Pacif. J. of Math., 9, 1959, 1097-1101.
[6] B. Huppert, *Endliche Gruppen I*. Berlin 1967.
[7] N. Ito, *On finite groups with given conjugate types, I*. Nagoya Math. J., 6, 1953, 17-28.
[8] O. Kegel, *Nichteinfache Partitionen endlicher Gruppen*. Arch. der Math., 12, 1961, 170-175.
[9] C. Marchionna Tibiletti, *Sui gruppi a distanza 2*. Boll. Un. Mat. Ital., (5) 17-B, 1980, 14-32.
[10] R. Schmidt, *Zentralisatorverbände endlicher Gruppen*. Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, 40, 1970, 97-131.
[11] R. Schmidt, *Subgroup lattices of groups*. Berlin-New York 1994.
[12] M. Suzuki, *On a type of simple group of finite order*. Proc. Nat. Acad. of Sci., 49, 1960, 868-870.
[13] M. Suzuki, *On a finite group with a partition*. Arch. der Math., 12, 1961, 241-254.
[14] L. Weisner, *Groups in which the normalizer of every element except identity is abelian*. Bull. Am. Math. Soc., 31, 1925, 413-416.

Pervenuta il 16 luglio 1997,
in forma definitiva il 3 dicembre 1997.

Dipartimento di Matematica «U. Dini»
Università degli Studi di Firenze
Viale Morgagni, 67A - 50134 Firenze