Atti Accademia Nazionale Lincei Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti Lincei
Matematica e Applicazioni

Mario Servi

Definizione dei clan binari e loro classificazione

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti Lincei. Matematica e Applicazioni, Serie 9, Vol. **9** (1998), n.1, p. 5–18.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLIN_1998_9_9_1_5_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti Lincei. Matematica e Applicazioni, Accademia Nazionale dei Lincei, 1998.

Rend. Mat. Acc. Lincei
s. 9, v. 9:5-18 (1998)

Logica matematica. — *Definizione dei clan binari e loro classificazione.* Nota di Mario Servi, presentata (*) dal Socio G. Zappa.

Abstract. — *A classification of binary clans.* «Binary clans» arise from binary trees very much like integers arise from natural numbers. We prove that there are $2^{\aleph_0}$ non-isomorphic binary clans; more precisely, an isomorphic class of binary clans is determined by the similarity class of a denumerable sequence, $\mathfrak{s}\colon \mathbb{N} \to 2$, of two elements, having called «similar» two such sequences when they eventually coincide, up to a translation.

Key words: Binary clans; Binary trees; Natural numbers; Integer numbers; Non standard models.

Riassunto. — L'albero binario (libero) è una struttura analoga a quella dei numeri naturali (standard), salvo che ci sono due operazioni di successivo. Nello studio degli alberi binari non standard, si ha bisogno di strutture ordinate che stiano a quella di albero binario libero come la struttura (ordinata) $\mathbb{Z}$ sta ad $\mathbb{N}$. Si introducono perciò i clan binari e se ne studiano le classi di isomorfismo. Si dimostra che esse sono determinate dalle classi di similitudine delle successioni numerabili di 2 elementi, avendo chiamato «simili» due tali successioni quando – a meno di traslazioni – esse coincidono da un certo punto in poi.

0. Premessa

Dato un numero naturale $k > 0$, si consideri la teoria elementare *EAK* degli alberi (ordinati) k-ri; nello studio dei suoi modelli non standard è utile avere a disposizione il concetto di «clan k-rio» (o «albero sradicato k-rio»). In analogia a quello che solitamente si fa nei modelli non standard dell'Aritmetica, possiamo infatti, dato un modello non standard $\mathcal{R}^*$ di *EAK*, introdurre in esso la relazione di equivalenza «avere distanza finita» e studiare la struttura delle sue classi di equivalenza. Risulta allora (cfr. [2, 7]) che il concetto appropriato è per l'appunto quello di *clan k-rio*, nel senso che ogni classe di equivalenza è un clan k-rio e inoltre per ogni clan k-rio, $\mathcal{S}$, esiste un modello non standard $\mathcal{R}^*$ nel quale $\mathcal{S}$ compaia (a meno di isomorfismi) come classe di equivalenza.

Come vedremo dalle definizioni, per $k = 1$ il concetto di clan k-rio si riduce a quello della struttura ordinata $\mathbb{Z}$ dei numeri interi, ossia $\mathbb{Z}$ è l'unico clan k-rio, quando sia $k = 1$. Inoltre, i clan k-ri hanno, con la struttura $\mathcal{R}^{(k)}$ di albero k-rio libero, un rapporto analogo a quello che $\mathbb{Z}$ ha con la struttura $\mathbb{N}$ dei numeri naturali (standard). Per questo motivo, è utile riportare (cfr. anche [3, 5]) la definizione di *albero k-rio* (*libero*, avente *radice* $\mathbf{0}$). Si tratta di una struttura $\mathcal{R}^{(k)} = (R; \sigma_0, \dots, \sigma_{k-1}; \mathbf{0})$ tale che

$$\text{(A1)} \qquad \sigma_i : R \rightarrowtail R \qquad (i < k)\ ,$$

dove con questo simbolo indichiamo che σ_i è iniettiva;

$$\text{(A2)} \qquad \sigma_i(x) \neq \sigma_j(y) \qquad (x, y \in R; i \neq j)\ ,$$

(*) Nella seduta del 14 novembre 1997.

(A3) $$\mathbf{0} \notin \mathbf{im}(\sigma_i) \qquad (i < k)\ ,$$

(A4) $$\mathbf{0} \in M \ \&\ \underset{i<k}{\forall}\ \sigma_i[M] \subseteq M \implies M = R \qquad (M \subseteq R)\,.$$

È ovvio che per $k = 1$ si ottiene un sistema di Peano. Per questo motivo conserviamo gran parte della consueta terminologia relativa ai numeri naturali (standard); in particolare, chiameremo «induzione» la condizione (A4).

Come nel caso unario, la teoria degli alberi k-ri (liberi) ha, a meno di isomorfismi, un unico modello. Indicheremo dunque con $\mathcal{R}^{(k)} = (R; \sigma_0, \ldots, \sigma_{k-1}; \mathbf{0})$ l'unica struttura soddisfacente (A1)-(A4).

Sarà bene ricordare che in $\mathcal{R}^{(k)}$ si introduce una relazione $\leq$ di ordine, rispetto alla quale $\mathcal{R}^{(k)}$ risulta un *albero di radice* $\mathbf{0}$ (1) e tale che

(A5) $$x < \sigma_i(x) \qquad (x \in R; i < k)\ ,$$

(A6) $$\underset{y \in R}{\nexists}\ x < y < \sigma_i(x) \qquad (x \in R; i < k)\ ,$$

(A7) $$\mathbf{0} \leq x \qquad (x \in R)\,.$$

Dunque, ogni «figlio» di x *copre* x e la radice è il minimo. Per visualizzare $\mathcal{R}^{(k)}$ può essere utile ricordare come si ottiene un modello di albero k-rio libero partendo dal monoide (associativo) libero delle parole su k lettere, $a_0, \ldots, a_{k-1}$. Basta assumere come radice la parola vuota ( ) e definire σ_i come l'operazione che a ciascuna parola (di lunghezza, diciamo, n) associa la parola di lunghezza $n + 1$ ottenuta giustapponendo alla data parola la lettera a_i:

$$\sigma_i : l_1 \ldots l_n \longmapsto l_1 \ldots l_n a_i\,.$$

In questo modello è facile definire le operazioni $\mathbf{f}$ di *First* e $\mathbf{bf}$ di *ButFirst* per gli elementi diversi dalla radice ( ):

$$\mathbf{f}(l_1 \ldots l_n) = l_1 \quad \text{e} \quad \mathbf{bf}(l_1 \ldots l_n) = l_2 \ldots l_n\,.$$

Per dare una caratterizzazione intrinseca di $\mathbf{f}$ e di $\mathbf{bf}$, si osservi che, analogamente al caso dei numeri naturali, si dimostra che esiste un'unica operazione binaria, $+$, su $\mathcal{R}^{(k)}$ tale che

$$x + \mathbf{0} = x \quad \text{e} \quad x + \sigma_i(y) = \sigma_i(x + y) \qquad (x, y \in R;\ i < k)\,.$$

Ora dagli assiomi degli alberi k-ri (cfr. anche [9]) segue che, dato un $a \neq \mathbf{0}$, esistono un unico $i < k$ ed un unico $b \in R$ tali che $a = \sigma_i(\mathbf{0}) + b$. Si pone allora $\mathbf{f}(a) = \sigma_i(\mathbf{0})$ e $\mathbf{bf}(a) = b$.

Dagli assiomi sugli alberi k-ri segue poi che per ogni elemento a diverso dalla radice esistono, univocamente determinati, un $i < k$ e un elemento b tali che $a = \sigma_i(b)$; indicheremo tale b con $\pi(a)$ e lo chiameremo il *genitore* di a.

(1) Cfr. [4].

A partire dagli alberi k-ri, si possono introdurre i clan k-ri, così come da $\mathbb{N}$ si ottiene $\mathbb{Z}$; nel presente lavoro, tuttavia, tratteremo solo il caso $k = 2$, per cui ci limiteremo a studiare i clan binari. A differenza del caso unario (dove $\mathbb{Z}$ è univocamente determinato a meno di isomorfismi), i clan binari non sono tutti isomorfi. Lo scopo della presente ricerca è giungere ad una classificazione, quanto più possibile completa, degli alberi sradicati binari. Avendo richiamato il concetto di *albero binario libero* (che nel seguito indicheremo con $\mathcal{R}$, omettendo l'indice 2), possiamo utilizzarlo nella definizione di clan binario. Vedremo che si ottengono $2^{\aleph_0}$ classi di isomorfismo per gli alberi sradicati binari.

Chiudiamo questo paragrafo sugli alberi k-ri enunciando il seguente teorema di ricursione primitiva, la cui dimostrazione ricalca completamente quella per i sistemi di Peano.

TEOREMA DI RICURSIONE. *Sia A un insieme arbitrario, $g\colon A \to A$ una funzione e*

$$\varphi_i : A \times \mathcal{R}^{(k)} \times A \to A \qquad (i < k)\,.$$

Esiste allora un'unica funzione $f\colon A \times \mathcal{R}^{(k)} \to A$ tale che

$$f(x, \mathbf{0}) = g(x) \qquad (x \in A)$$

e

$$f(x, \sigma_i(a)) = \varphi_i(x, a, f(x, a)) \qquad (x \in A,\ a \in \mathcal{R}^{(k)},\ i < k)\,.$$

1. UNA RAPPRESENTAZIONE DELLA STRUTTURA DI ORDINE DI $\mathbb{Z}$

Allo scopo di rendere più comprensibile la scelta degli assiomi dati nel § 2 per i clan binari, vogliamo adesso presentare un'assiomatizzazione della struttura (di ordine) $\mathbb{Z}$ dei numeri interi. Sia dunque $\mathcal{A} = (A, \leq, \sigma)$ una struttura relazionale tale che

(Z1) $\qquad \leq$ è una relazione di ordine su A

(Z2) $$\sigma(x) \quad \text{copre} \quad x\,,$$

cioè

(Z2′) $$x < \sigma(x)\ \&\ \nexists_{y \in A}\, x < y < \sigma(y) \qquad (x \in A)\,,$$

(Z3) $$\sigma : A \rightarrowtail\!\!\!\twoheadrightarrow A\,,$$

ovvero σ è una biiezione;

(Z4) $$\forall_{a, b \in A}\ \exists_{n, m \in \mathbb{N}}\ \sigma^{-n}(a) = \sigma^{-m}(b)\,.$$

È facile verificare che una struttura $\mathcal{A}$ soddisfacente le condizioni (Z1)-(Z4) è isomorfa a $(\mathbb{Z}; \leq; \sigma)$, dove σ è l'operazione di passaggio al successivo in $\mathbb{Z}$. A tale scopo enunciamo alcuni lemmi, senza fornirne una dimostrazione.

LEMMA 1. *La condizione* ($\mathbb{Z}4$) *equivale a*

$$\underset{a,b\in A}{\forall} \ \underset{c\in A}{\exists} \ \underset{n,m\in\mathbb{N}}{\exists} \sigma^n(c) = a \,\&\, \sigma^m(c) = b\,.$$

LEMMA 2.

$$a \leq \sigma^p(a) \qquad (a \in \mathfrak{A},\ p \in \mathbb{N})\,.$$

LEMMA 3.

$$q < r \implies \sigma^q(a) < \sigma^r(a) \qquad (q,\ r \in \mathbb{Z}\,,\ a \in \mathfrak{A})\,.$$

LEMMA 4. *Sono equivalenti:*
(*i*) $a \leq b$,
(*ii*) $\sigma^n(a) = b$, *per un qualche* $n \in \mathbb{N}$,
(*iii*) $\sigma^{-n}(b) = a$, *per un qualche* $n \in \mathbb{N}$.

TEOREMA 5. *Sia* $\mathfrak{A} = (A, \leq, \sigma)$ *una struttura che soddisfi* (Z1)-(Z4). *Allora* $\mathfrak{A} \approx$ $\approx (\mathbb{Z}; \leq; \sigma)$, *dove* σ *è l'operazione* $q \mapsto q+1$ *in* $\mathbb{Z}$.

DIMOSTRAZIONE. Fissiamo $a \in A$ in modo arbitrario e definiamo h: $\mathbb{Z} \to A$ ponendo

$$h(q) = \sigma^q(a)\ , \qquad (q \in \mathbb{Z})\,. \tag{1}$$

Vogliamo dimostrare che h: $\mathbb{Z} \xrightarrow{\approx} \mathfrak{A}$. Essendo $\mathbb{Z}$ totalmente ordinato, dal Lemma 3 segue che h è iniettiva e bicrescente. Resta dunque solo da dimostrare la suriettiva:

$$\underset{b\in A}{\forall} \ \underset{q\in\mathbb{Z}}{\exists} h(q) = b\,.$$

Tenendo presente la definizione (1), la conclusione segue banalmente da (Z4).

COROLLARIO 6. *La relazione di ordine di cui in* (Z1) *è totale.*

La definizione di clan binario, contenuta nel prossimo paragrafo, si ispira alla caratterizzazione di $\mathbb{Z}$ fornita da (Z1)-(Z4).

2. LA DEFINIZIONE DI CLAN BINARIO

Sia data una struttura relazionale

$$\mathfrak{S} = (S; \leq; \sigma_0\,, \sigma_1\,, \pi)$$

dove $\leq$ è una relazione binaria e $\sigma_0\,, \sigma_1\,, \pi$ sono operazioni unarie. Si dice che essa è un *clan binario* (o *albero sradicato binario*) se sono soddisfatti i seguenti assiomi:

$$\leq \ \text{è una relazione di ordine} \tag{C1}$$

$$\sigma_0(x) \text{ e } \sigma_1(x) \text{ coprono } x \qquad (x \in S)\ , \tag{C2}$$

$$\sigma_0(x) \neq \sigma_1(y) \qquad (x, y \in S)\ , \tag{C3}$$

(C4) $$\pi \circ \sigma_i = \mathbf{1}_S \qquad (i < 2)\ ,$$

(C5) $$\sigma_0\big(\pi(x)\big) = x \quad \text{oppure} \quad \sigma_1\big(\pi(x)\big) = x \qquad (x \in S)\ ,$$

(C6) $$\underset{x,y\in S}{\forall}\ \underset{n,m\in\mathbb{N}}{\exists}\ \pi^n(x) = \pi^m(y)$$

(C7) $$x < y \implies x \leq \pi(y) \qquad (x, y \in S)\,.$$

Diversamente dal caso lineare, (cfr. Lemma 4), l'assioma (C7) non deriva dagli altri assiomi, come mostra un facile controesempio (cfr. [5], dove in Appendice si dimostra l'indipendenza di un assioma equivalente a (C7)). D'altra parte (cfr. [7]) gli assiomi scelti sono tutti necessari per gli scopi del presente lavoro, come osservato nella Premessa.

Da (C4) segue che ciascuna σ_i è iniettiva; da (C3) segue che nella (C5) l'*oppure* è esclusivo, per cui in corrispondenza a ciascun x esiste un unico $i \in 2$ tale che $\sigma_i(\pi(x)) = = x$; questo i viene detto il *genere* o la *posizione* di x e viene indicato con $\mathbf{g}(x)$. Dunque $\mathbf{g}\colon S \to 2$ e

(2) $$\sigma_{\mathbf{g}(x)}\big(\pi(x)\big) = x \qquad (x \in S)\,.$$

Lemma 7. *In ogni clan $\mathcal{S}$ valgono le seguenti proprietà:*

1. *Se $x \in S$ ed $i < 2$, allora $\mathbf{g}(\sigma_i(x)) = i$.*
2. $\underset{x\in S}{\forall}\ \underset{y\in S}{\exists!}$ *tale che $\sigma_0(y) = x$ oppure $\sigma_1(y) = x$. Dunque l'operazione π è determinata da σ_0 e da σ_1.*
3. *Se $x \in S$, allora x copre $\pi(x)$.*

Dimostrazione.

1. $\sigma_i(\pi(\sigma_i(x))) = \sigma_i(x)$ per (C4).

2. Dato x, ovviamente l'elemento $y = \pi(x)$ soddisfa la condizione richiesta. Per l'unicità, siano $y, z \in S$ e siano $i, j < 2$ tali che $\sigma_i(y) = x = \sigma_j(z)$. Per (C3) deve essere $i = j$ e dall'iniettiva di σ_i si ha $y = z$. In particolare si ha:

(3) $$\sigma_i(y) = x \implies y = \pi(x)\ , \qquad (x, y \in S)\,.$$

3. L'asserto segue da (C2), ricordando che $\sigma_{\mathbf{g}(x)}(\pi(x)) = x$.

Proposizione 8. *In ogni clan vale la:*

(4) $$x \leq y \iff \underset{n\in\mathbb{N}}{\exists}\ x = \pi^n(y) \qquad (x, y \in S)\,.$$

Dimostrazione. L'implicazione ($\Longleftarrow$) segue banalmente dal punto 3. del Lemma 7. Per quanto riguarda ($\Longrightarrow$), sia

(5) $$x \leq y$$

e cerchiamo un $p \in \mathbb{N}$ tale che $x = \pi^p(y)$. Per l'assioma (C6) siano n, m tali che

(6) $$z = \pi^n(x) = \pi^m(y)\,.$$

Poniamo: $M = \big\{ r \in \mathbb{N} : x \not< \pi^r(y) \big\}$.

In virtù della (6), $m \in M$ e dunque $M \neq \emptyset$: infatti se fosse $x < \pi^m(y)$, per la (6) si avrebbe $x < \pi^m(y) = z = \pi^n(x) \leq x$. Distinguiamo ora due casi:

(*i*) $0 \in M$, cioè $x \not< y$; dall'ipotesi (5) segue allora $x = y = \pi^0(y)$ e la conclusione vale per $p = 0$.

(*ii*) $0 \notin M$; allora il minimo di M non è 0 e sia esso $p+1$: $x \not< \pi^{p+1}(y)$, ma $x < \pi^p(y)$.

Da (C7) segue allora $x \leq \pi^{p+1}(y)$, e quindi $x = \pi^{p+1}(y)$.

La (4) dice che *l'ordine è generato dalla relazione di «genitore»*, π.

In [6] la (4) era stata assunta come assioma in luogo della condizione equivalente (C7); la presente formulazione è più comoda, in quanto – a differenza della (4) – la (C7) è esprimibile al primo ordine.

Proposizione 9. *Se una funzione h fra due clan conserva i successivi, allora è un omomorfismo. Se inoltre è iniettiva, allora conserva l'ordine in senso forte.*

Dimostrazione. Siano $\mathcal{S} = (S; \leq; \sigma_0, \sigma_1, \pi)$ e $\mathcal{S}' = (S'; \leq'; \sigma'_0, \sigma'_1, \pi')$ due clan e sia $h\colon S \to S'$ tale che

$$h \circ \sigma_i = \sigma'_i \circ h \qquad (i < 2).$$

Preso $x \in S$, sia $i < 2$ tale che $\sigma_i(\pi(x)) = x$. Si ha: $\sigma'_i(h(\pi(x))) = h(\sigma_i(\pi(x))) = h(x)$; da (3) segue allora $h(\pi(x)) = \pi'(h(x))$, e dunque h conserva l'operazione π di «genitore».

Sia ora $x \leq y$; per (4) sia $n \in \mathbb{N}$ tale che $x = \pi^n(y)$. Allora, tenendo presente quanto appena dimostrato, segue che $h(x) = h(\pi^n(y)) = (\pi')^n(h(y))$, da cui $h(x) \leq h(y)$, ancora per (4). Sempre usando (4), da $h(x) \leq h(y)$ si ottiene $h(x) = (\pi')^n(h(y)) = h(\pi^n(y))$, per un qualche $n \in \mathbb{N}$; e supponendo h iniettiva si ha $x = \pi^n(y)$ e quindi $x \leq y$.

Corollario 10. *Se una biiezione (fra due clan) conserva i successivi, essa è allora un isomorfismo.*

Conviene adesso definire (per ricursione, che, come osservato, vale negli alberi binari liberi) un'operazione di «somma»:

$$S \times \mathcal{R} \xrightarrow{\oplus} S,$$

ponendo: $x \oplus \mathbf{0} = x \quad \text{e} \quad x \oplus \sigma_i(a) = \sigma_i(x \oplus a) \qquad (x \in S,\ a \in \mathcal{R},\ i < 2)$.
Indicata con $+$ la somma in $\mathcal{R}$, ricordiamo che essa soddisfa

$$a + \mathbf{0} = a \quad \text{e} \quad a + \sigma_i(b) = \sigma_i(a + b) \qquad (a, b \in \mathcal{R}).$$

Per induzione su b è facile allora provare che

$$(x \oplus a) \oplus b = x \oplus (a + b) \qquad (x \in S; a, b \in \mathcal{R}). \tag{7}$$

Lemma 11. *Siano α, β due elementi di un clan e sia $m \in \mathbb{N}$ tale che $\alpha = \pi^m(\beta)$. Esiste allora $a \in \mathcal{R}$ tale che $\beta = \alpha \oplus a$.*

DIMOSTRAZIONE. Per induzione su m. Per $m = 0$, la proprietà è ovvia. Supponiamo dunque che essa valga per m e sia $\alpha = \pi^{m+1}(\beta)$, ovvero $\alpha = \pi(\pi^m(\beta))$. Per (C5) c'è $i < 2$ tale che $\pi^m(\beta) = \sigma_i(\pi(\pi^m(\beta)))$ e dunque $\pi^m(\beta) = \sigma_i(\alpha) = \alpha \oplus \sigma_i(\mathbf{0})$. Per ipotesi induttiva, sia b tale che $\beta = (\alpha \oplus \sigma_i(\mathbf{0})) \oplus b$. Ricordando la (7), l'asserto si ottiene con $a = \sigma_i(\mathbf{0}) + b$.

COROLLARIO 12. *Dati comunque α, β ci sono $n \in \mathbb{N}$, $a \in \Re$ tali che $\beta = \pi^n(\alpha) \oplus a$.*

DIMOSTRAZIONE. Per (C6) ci sono $n, m \in \mathbb{N}$ tali che $\pi^m(\beta) = \pi^n(\alpha)$; si applichi allora il Lemma 11 agli elementi $\pi^n(\alpha)$ e β.

PROPOSIZIONE 13. *Dati α, β esistono $\gamma \in S$, $a, b \in \Re$ tali che*

$$\alpha = \gamma \oplus a \;\&\; \beta = \gamma \oplus b\,. \tag{8}$$

DIMOSTRAZIONE. Dati α, β siano n, m tali che $\pi^n(\alpha) = \pi^m(\beta)$; si ponga $\gamma = \pi^n(\alpha) = \pi^m(\beta)$ e si applichi due volte il Lemma 11.

Si noti l'analogia della (8) con il Lemma 1. L'analogo del Lemma 4 è l'assioma (C7) che, come già osservato, non segue dagli altri assiomi.

3. IL CLAN DELLE DIFFERENZE

In questo paragrafo definiremo la «spettralità» di un clan e dimostreremo che, assegnata una spettralità arbitraria, esiste un clan avente tale spettralità.

DEFINIZIONE 14. Si chiama *spettro* ogni successione $\mathfrak{s}\colon \mathbb{N} \to 2$ di elementi di 2. A ciascun elemento $\alpha \in S$ associamo uno spettro, $\mathbf{spec}(\alpha)$, prendendo la successione dei generi degli antenati di α:

$$\mathbf{spec}(\alpha)(n) = \mathbf{g}\big(\pi^n(\alpha)\big) \qquad (n \in \mathbb{N})\,.$$

DEFINIZIONE 15. Due spettri $\mathfrak{s}$, $\mathfrak{t}$ si dicono *simili* (e si scrive $\mathfrak{s} \equiv \mathfrak{t}$) se, a meno di una traslazione, coincidono da un certo punto in poi:

$$\underset{n, m \in \mathbb{N}}{\exists} \;\; \underset{p \in \mathbb{N}}{\forall} \;\; \mathfrak{s}(n+p) = \mathfrak{t}(m+p)\,.$$

PROPOSIZIONE 16. *Due elementi di uno stesso clan hanno spettri simili:*

$$\mathbf{spec}(\alpha) \equiv \mathbf{spec}(\beta) \qquad (\alpha, \beta \in S)\,.$$

DIMOSTRAZIONE. Per (C6), gli elementi α, β hanno un antenato in comune ed è chiaro come da quel punto in poi i valori degli spettri coincidano.

DEFINIZIONE 17. Grazie al risultato della Proposizione 16, possiamo chiamare *spettralità* di un clan la classe di similitudine dello spettro di un suo qualunque elemento. La spettralità di $\mathbb{S}$ verrà indicata con $\mathbf{Spec}(\mathbb{S})$.

Il teorema cui vogliamo pervenire è il seguente: *Un clan è determinato dalla classe di similitudine di uno spettro.* In altre parole, dato comunque uno spettro $\mathfrak{s}$ esiste un (unico a meno di isomorfismi) clan $\mathbb{S}$ tale che $\mathbf{Spec}(\mathbb{S}) = |\mathfrak{s}|$.

Dato uno spettro $\mathfrak{s}$, ci proponiamo dunque di costruire un clan, $\mathfrak{Dif}_{\mathfrak{s}}$, di spettralità $|\mathfrak{s}|$. Cominciamo col considerare il prodotto cartesiano $\mathbb{N} \times \mathfrak{R}$, dove, come al solito, $\mathfrak{R}$ indica l'albero binario (libero), e definiamo su questo insieme tre operazioni unarie $\sigma_0^{\mathfrak{s}}$, $\sigma_1^{\mathfrak{s}}$ e $\pi^{\mathfrak{s}}$. Data una coppia $\alpha = (n, a) \in \mathbb{N} \times \mathfrak{R}$, definiamo $\sigma_i^{\mathfrak{s}}$ secondo le seguenti clausole:

(i) Sia $a \neq \mathbf{0}$ oppure $n = 0$. Allora:

$$\sigma_i^{\mathfrak{s}}(\alpha) = \big(n, \sigma_i(a)\big) ,$$

dove con σ_0 e σ_1 indichiamo le operazioni di successivo nell'albero binario $\mathfrak{R}$.

(ii) Sia invece $a = \mathbf{0}$ e $n \neq 0$. Distinguiamo allora due sottocasi:

(ii.1) $\mathfrak{s}(n-1) = 0$: allora si pone

$$\sigma_0^{\mathfrak{s}}(\alpha) = (n-1, \mathbf{0}) \quad \text{e} \quad \sigma_1^{\mathfrak{s}}(\alpha) = \big(n, \sigma_1(a)\big) ; \tag{9}$$

(ii.2) $\mathfrak{s}(n-1) = 1$: allora si pone

$$\sigma_1^{\mathfrak{s}}(\alpha) = (n-1, \mathbf{0}) \quad \text{e} \quad \sigma_0^{\mathfrak{s}}(\alpha) = \big(n, \sigma_0(a)\big) . \tag{10}$$

Posto $i = \mathfrak{s}(n-1)$, possiamo riassumere questi due sottocasi nelle seguenti formule:

$$\sigma_i^{\mathfrak{s}}(\alpha) = (n-1, \mathbf{0}) \quad \text{e} \quad \sigma_{1-i}^{\mathfrak{s}}(\alpha) = \big(n, \sigma_{1-i}(a)\big) . \tag{11}$$

Anche per la definizione di $\pi^{\mathfrak{s}}$ distinguiamo due casi:

(i) $a \neq \mathbf{0}$. Ricordiamo allora che in $\mathfrak{R}$ esiste un unico elemento b del quale a è uno dei successivi. Indichiamo tale b con $\pi(a)$ e in tal caso poniamo: $\pi^{\mathfrak{s}}(\alpha) = (n, \pi(a))$;

(ii) $a = \mathbf{0}$. Allora

$$\pi^{\mathfrak{s}}(\alpha) = (n+1, \mathbf{0}) . \tag{12}$$

In analogia con i clan, definiremo un «genere» anche per gli elementi dell'albero binario che siano distinti dalla radice. È noto che se $\mathbf{0} \neq a \in \mathfrak{R}$, allora esiste un unico $i < 2$ tale che $a = \sigma_i(\pi(a))$. Tale i verrà detto il *genere* di a e verrà indicato con $\mathbf{g}(a)$. Osserviamo poi che se per un $a \neq \mathbf{0}$ si ha $\mathbf{f}(a) = \sigma_i(\mathbf{0})$, allora $\mathbf{g}(\mathbf{f}(a)) = i$. Dunque

$$\mathbf{g}\big(\mathbf{f}(a)\big) = i \iff \text{esiste un } b \in \mathfrak{R} \text{ tale che } a = \sigma_i(\mathbf{0}) + b .$$

Con queste premesse, poniamo la seguente

Definizione 18. Una coppia $\alpha = (n, a) \in \mathbb{N} \times \mathfrak{R}$ verrà detta *non ridotta* se

$$n \neq 0 , \qquad a \neq \mathbf{0} \quad \text{e} \quad \mathbf{g}\big(\mathbf{f}(a)\big) = \mathfrak{s}(n-1) .$$

In tutti gli altri casi, α si dirà *ridotta*. Dunque, $\alpha = (n, a)$ è ridotta in ciascuno dei seguenti casi:

(•) $n = 0$,

(••) $a = \mathbf{0}$,

(•••) $n \neq 0, \quad a \neq \mathbf{0} \quad$ e $\quad \mathbf{g}(\mathbf{f}(a)) \neq \mathfrak{s}(n-1)$.

Notazione. Indicheremo con $\mathrm{Dif}_{\mathfrak{s}}$ il sottoinsieme di $\mathbb{N} \times \mathfrak{R}$ costituito dalle coppie ridotte. Data una coppia $\alpha \in \mathrm{Dif}_{\mathfrak{s}}$ indicheremo con n_α la sua ascissa e con $\mathbf{a}_\alpha$ la sua ordinata:

$$\alpha = (n_\alpha \,, \mathbf{a}_\alpha) \qquad (\alpha \in \mathrm{Dif}_{\mathfrak{s}})\,.$$

Proposizione 19. *Le operazioni* $\sigma_i^{\mathfrak{s}}$ *e* $\pi^{\mathfrak{s}}$ *si restringono ad operazioni su* $\mathrm{Dif}_{\mathfrak{s}}$.

Dimostrazione. Sia α ridotta. Distinguiamo vari casi.

(*i*) $n_\alpha = 0$. Allora $\sigma_i^{\mathfrak{s}}(\alpha) = (n_\alpha \,, \sigma_i(\mathbf{a}_\alpha))$, ridotta per ($\bullet$).

(*ii*) $n_\alpha \neq 0$ e $\mathbf{a}_\alpha \neq \mathbf{0}$. In questo caso $\sigma_i^{\mathfrak{s}}(\alpha) = (n_\alpha \,, \sigma_i(\mathbf{a}_\alpha))$, osserviamo che per $a \neq \mathbf{0}$ si ha $\mathbf{f}(a) = \mathbf{f}(\sigma_i(a))$, perciò da $\alpha \in \mathrm{Dif}_{\mathfrak{s}}$ segue $\mathbf{g}(\mathbf{f}(\sigma_i(a))) = \mathbf{g}(\mathbf{f}(a)) \neq \mathfrak{s}(n_\alpha - 1)$ e dunque anche $\sigma_i^{\mathfrak{s}}(\alpha)$ risulta ridotta per ($\bullet\bullet\bullet$).

(*iii*) $n_\alpha \neq 0$ e $\mathbf{a}_\alpha = \mathbf{0}$. Poniamo $i = \mathfrak{s}(n_\alpha - 1)$. Allora $\sigma_i^{\mathfrak{s}}(\alpha) = (n_\alpha - 1 \,, \mathbf{0})$ che è ridotta per ($\bullet\bullet$), mentre $\sigma_{1-i}^{\mathfrak{s}}(\alpha) = (n_\alpha \,, \sigma_{1-i}(\mathbf{a}_\alpha))$. Ma $\mathbf{g}(\mathbf{f}(\sigma_{1-i}(\mathbf{a}_\alpha))) = \mathbf{g}(\mathbf{f}(\mathbf{a}_\alpha)) \neq$ $\neq \mathfrak{s}(n_\alpha - 1)$ e dunque anche $\sigma_{1-i}^{\mathfrak{s}}(\alpha)$ è ridotta, per la ($\bullet\bullet\bullet$).

Passiamo ora a $\pi^{\mathfrak{s}}$ e anche qui distinguiamo alcuni casi.

(*i*) $\mathbf{a}_\alpha = \mathbf{0}$. Allora $\pi^{\mathfrak{s}}(\alpha) = (n_\alpha + 1 \,, \mathbf{0})$, che è ridotta per ($\bullet\bullet$).

(*ii*) $\mathbf{a}_\alpha \neq \mathbf{0}$ e $n_\alpha = 0$. Allora $\pi^{\mathfrak{s}}(\alpha) = (n_\alpha \,, \pi(\mathbf{a}_\alpha)) = (0 \,, \pi(\mathbf{a}_\alpha))$, che è ridotta per ($\bullet$).

(*iii*) $\mathbf{a}_\alpha \neq \mathbf{0}$ e $n_\alpha \neq 0$. Allora $\pi^{\mathfrak{s}}(\alpha) = (n_\alpha \,, \pi(\mathbf{a}_\alpha))$. Se $\pi(\mathbf{a}_\alpha) = \mathbf{0}$, allora $\pi^{\mathfrak{s}}(\alpha)$ è ridotta per ($\bullet\bullet$). Se invece $\pi(\mathbf{a}_\alpha) \neq \mathbf{0}$, allora $\mathbf{g}(\mathbf{f}(\pi(\mathbf{a}_\alpha))) = \mathbf{g}(\mathbf{f}(\mathbf{a}_\alpha)) \neq \mathfrak{s}(n_\alpha - 1)$ e $\pi^{\mathfrak{s}}(\alpha)$ è ridotta per ($\bullet\bullet\bullet$).

Definiamo su $\mathrm{Dif}_{\mathfrak{s}}$ una relazione binaria $\leq^{\mathfrak{s}}$, come segue. Dati α e β, poniamo $\alpha \leq^{\mathfrak{s}} \beta$ se e soltanto se si verifica uno dei seguenti due casi:

$$(*) \qquad n_\alpha = n_\beta \quad \text{e} \quad \mathbf{a}_\alpha \leq \mathbf{a}_\beta \,,$$

$$(**) \qquad n_\beta \leq n_\alpha \quad \text{e} \quad \mathbf{a}_\alpha = \mathbf{0}\,.$$

Lemma 20. *La relazione* $\leq^{\mathfrak{s}}$ *è di ordine* [*su* $\mathbb{N} \times \mathfrak{R}$, *e quindi*] *su* $\mathrm{Dif}_{\mathfrak{s}}$.

Dimostrazione. La riflessiva è ovvia, per ($*$). Sia $\alpha \leq^{\mathfrak{s}} \beta$ e $\beta \leq^{\mathfrak{s}} \alpha$; se entrambi le disuguaglianze rientrano in ($*$) oppure entrambe in ($**$), allora la conclusione $\alpha = \beta$ è ovvia. Supponiamo dunque che valga $\alpha \leq^{\mathfrak{s}} \beta$ per ($*$) e $\beta \leq^{\mathfrak{s}} \alpha$ per ($**$). Allora $n_\alpha = n_\beta$ e $\mathbf{a}_\alpha \leq \mathbf{a}_\beta = \mathbf{0}$, da cui anche $\mathbf{a}_\alpha = \mathbf{0}$, cioè $\mathbf{a}_\alpha = \mathbf{a}_\beta$: $\alpha = \beta$ e l'antisimmetrica è assicurata.

Per quanto riguarda la transitiva, supposto $\alpha \leq^{\mathfrak{s}} \beta$ e $\beta \leq^{\mathfrak{s}} \gamma$, se entrambi le disuguaglianze valgono per la stessa clausola, allora la conclusione $\alpha \leq^{\mathfrak{s}} \gamma$ è ovvia. Nei casi «misti», si verifica facilmente che $\alpha \leq^{\mathfrak{s}} \gamma$ per la ($**$).

Osservazione. Detta $<^{\mathfrak{s}}$ la relazione di ordine stretto associata a $\leq^{\mathfrak{s}}$, è facile verificare che $\alpha <^{\mathfrak{s}} \beta$ se e solo se vale uno dei seguenti due casi:

$$(\circ) \qquad n_\alpha = n_\beta \quad \text{e} \quad \mathbf{a}_\alpha < \mathbf{a}_\beta\,,$$

$$(\circ\circ) \qquad n_\beta < n_\alpha \quad \text{e} \quad \mathbf{a}_\alpha = \mathbf{0}\,.$$

Lemma 21. *Per ogni $\alpha \in \mathrm{Dif}_{\mathfrak{s}}$, gli elementi $\sigma_0^{\mathfrak{s}}(\alpha)$ e $\sigma_1^{\mathfrak{s}}(\alpha)$ coprono α.*

Dimostrazione. Facciamo la verifica solo per $\sigma_0^{\mathfrak{s}}(\alpha)$, l'altra essendo del tutto simmetrica. Se siamo in uno dei casi in cui $\mathbf{a}_{\sigma_0^{\mathfrak{s}}(\alpha)} = \sigma_0(\mathbf{a}_\alpha)$, l'asserto è ovvio, perché $\sigma_0(a)$ copre a in $\mathfrak{R}$. Sia dunque $\mathbf{a}_\alpha = \mathbf{0}$ e $\mathfrak{s}(n_\alpha - 1) = 0$. In tal caso, $\sigma_0^{\mathfrak{s}}(\alpha) = (n_\alpha - 1\,, \mathbf{0})$ e $\alpha <^{\mathfrak{s}} \sigma_0^{\mathfrak{s}}(\alpha)$ per $(\circ\circ)$. D'altra parte, $\alpha <^{\mathfrak{s}} \gamma <^{\mathfrak{s}} \sigma_0^{\mathfrak{s}}(\alpha)$ è assurdo perché richiederebbe $\mathbf{a}_\gamma < \mathbf{0}$ oppure $\mathbf{a}_\alpha < \mathbf{0} = \mathbf{a}_\gamma$ oppure $n_\alpha - 1 < n_\gamma < n_\alpha$.

Lemma 22. *Presi α e β, si ha $\sigma_0^{\mathfrak{s}}(\alpha) \neq \sigma_1^{\mathfrak{s}}(\beta)$.*

Dimostrazione. Per $\sigma_0^{\mathfrak{s}}(\alpha)$ si ha:

$$\mathbf{a}_{\sigma_0^{\mathfrak{s}}(\alpha)} = \sigma_0(\mathbf{a}_\alpha) \qquad \text{oppure} \qquad \mathbf{a}_{\sigma_0^{\mathfrak{s}}(\alpha)} = \mathbf{0}$$

e per $\sigma_1^{\mathfrak{s}}(\beta)$ si ha:

$$\mathbf{a}_{\sigma_1^{\mathfrak{s}}(\beta)} = \sigma_1(\mathbf{a}_\beta) \qquad \text{oppure} \qquad \mathbf{a}_{\sigma_1^{\mathfrak{s}}(\beta)} = \mathbf{0}\,.$$

Si hanno dunque tre casi:

(i) $\mathbf{a}_{\sigma_0^{\mathfrak{s}}(\alpha)} = \sigma_0(\mathbf{a}_\alpha)$ e $\mathbf{a}_{\sigma_1^{\mathfrak{s}}(\beta)} = \sigma_1(\mathbf{a}_\beta)$. In questo caso è chiaramente $\sigma_0^{\mathfrak{s}}(\alpha) \neq \sigma_1^{\mathfrak{s}}(\beta)$, perché in $\mathfrak{R}$ è $\sigma_0(a) \neq \sigma_1(b)$.

(ii) Uno dei due elementi da confrontare ha ordinata $\mathbf{0}$ e l'altro l'ha della forma $\sigma_i(x)$. Anche in questo caso, $\mathbf{a}_{\sigma_0^{\mathfrak{s}}(\alpha)} \neq \mathbf{a}_{\sigma_1^{\mathfrak{s}}(\beta)}$ e dunque $\sigma_0^{\mathfrak{s}}(\alpha) \neq \sigma_1^{\mathfrak{s}}(\beta)$.

(iii) Entrambi gli elementi hanno ordinata $\mathbf{0}$: $\mathbf{a}_{\sigma_0^{\mathfrak{s}}(\alpha)} = \mathbf{a}_{\sigma_1^{\mathfrak{s}}(\beta)} = \mathbf{0}$. Ma questo accade quando $\mathfrak{s}(n_\alpha - 1) = 0$ e $\mathfrak{s}(n_\beta - 1) = 1$; dunque $n_\alpha \neq n_\beta$ e poiché $n_{\sigma_0^{\mathfrak{s}}(\alpha)} = n_\alpha$ e $n_{\sigma_1^{\mathfrak{s}}(\beta)} = n_\beta$ si ha di nuovo la tesi.

Lemma 23. *Preso $\alpha \in \mathrm{Dif}_{\mathfrak{s}}$ si ha:*

$$\pi^{\mathfrak{s}}\big(\sigma_i^{\mathfrak{s}}(\alpha)\big) = \alpha\,.$$

Dimostrazione. Come di consueto, poniamo $\alpha(n, a)$ e distinguiamo due casi.

(i) $a \neq \mathbf{0}$ oppure $n = 0$. Allora $\sigma_i^{\mathfrak{s}}(\alpha) = (n\,, \sigma_i(a))$ e $\pi^{\mathfrak{s}}(\sigma_i^{\mathfrak{s}}(\alpha)) = \pi^{\mathfrak{s}}(n\,, \sigma_i(a)) = (n\,, \pi(\sigma_i(a))) = (n\,, a) = \alpha$.

(ii) $a = \mathbf{0}$ e $n \neq 0$. Si ponga $i = \mathfrak{s}(n-1)$. Allora $\sigma_i^{\mathfrak{s}}(\alpha) = (n - 1\,, \mathbf{0})$ e $\pi^{\mathfrak{s}}(\sigma_i^{\mathfrak{s}}(\alpha)) = \pi^{\mathfrak{s}}(n - 1\,, \mathbf{0}) = (n\,, \mathbf{0}) = \alpha$. Invece $\sigma_{1-i}^{\mathfrak{s}}(\alpha) = (n\,, \sigma_{1-i}(a))$ e $\pi^{\mathfrak{s}}(\sigma_{1-i}^{\mathfrak{s}}(\alpha)) = \pi^{\mathfrak{s}}(n\,, \sigma_{1-i}(a)) = (n\,, \pi(\sigma_{1-i}(a))) = (n\,, a) = \alpha$, giacché in $\mathfrak{R}$ si ha $\pi(\sigma_i(a)) = a$.

Lemma 24. *Dato un arbitrario $\alpha \in \mathrm{Dif}_{\mathfrak{s}}$ esiste $i < 2$ tale che $\sigma_i^{\mathfrak{s}}\pi^{\mathfrak{s}}(\alpha) = \alpha$.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $\alpha = (n, a)$ e distinguiamo due casi:

(i) $a = \mathbf{0}$. Allora $\pi^{\mathfrak{s}}(\alpha) = (n + 1, \mathbf{0})$. Posto $i = \mathfrak{s}(n)$, si ha $\sigma_i^{\mathfrak{s}} \pi^{\mathfrak{s}}(\alpha) = \sigma_i^{\mathfrak{s}}(n + 1, \mathbf{0}) = (n, \mathbf{0}) = (n, a) = \alpha$.

(ii) $a \neq \mathbf{0}$. Allora $\pi^{\mathfrak{s}}(\alpha) = (n, \pi(a))$. Distinguiamo allora due sottocasi:

$(ii.1)$ $\pi(a) \neq \mathbf{0}$ oppure $n = 0$; per note proprietà dell'albero binario, c'è un $i < 2$ tale che $\sigma_i(\pi(a)) = a$. In questo caso si ha $\sigma_i^{\mathfrak{s}}(\pi^{\mathfrak{s}}(\alpha)) = \sigma_i^{\mathfrak{s}}(n, \pi(a)) = (n, \sigma_i(\pi(a))) = (n, a) = \alpha$.

$(ii.2)$ $\pi(a) = \mathbf{0}$ e $n \neq 0$; posto $i = \mathbf{g}(a) = \mathbf{g}(\mathbf{f}(a))$, avremo $a = \sigma_i(\mathbf{0})$. Ricordando che la coppia α è ridotta, si avrà $i \neq \mathfrak{s}(n - 1)$, cioè $\mathfrak{s}(n - 1) = 1 - i$. Dunque: $\sigma_i^{\mathfrak{s}}(\pi^{\mathfrak{s}}(\alpha)) = \sigma_{1-(1-i)}^{\mathfrak{s}}(n, \pi(a)) = \sigma_{1-(1-i)}^{\mathfrak{s}}(n, \mathbf{0}) = (n, \sigma_i \pi(a)) = (n, \sigma_i(\mathbf{0})) = (n, a) = \alpha$.

LEMMA 25. *Se* $\pi^p(a) = \mathbf{0}$, *allora* $(\pi^{\mathfrak{s}})^p(n, a) = (n, \mathbf{0})$.

DIMOSTRAZIONE. Induzione su p.

LEMMA 26. $(\pi^{\mathfrak{s}})^q(n, \mathbf{0}) = (n + q, \mathbf{0})$.

DIMOSTRAZIONE. Basta Applicare q volte la (12).

LEMMA 27. *Dati* $\alpha, \beta \in \mathrm{Dif}_{\mathfrak{s}}$, *esistono* $p, q \in \mathbb{N}$ *tali che* $(\pi^{\mathfrak{s}})^p(\alpha) = (\pi^{\mathfrak{s}})^q(\beta)$.

DIMOSTRAZIONE. Posto $\alpha = (n, a)$ e $\beta = (m, b)$, possiamo supporre, senza perdita di generalità, che sia $n \leq m$. Per note proprietà degli alberi binari ci sono $p, q \in \mathbb{N}$ tali che $\pi^p(a) = \mathbf{0}$ e $\pi^q(b) = \mathbf{0}$. È sufficiente allora dimostrare che $(\pi^{\mathfrak{s}})^{m-n+p}(\alpha) = (\pi^{\mathfrak{s}})^q(\beta)$. Dai Lemmi 25 e 26 si ha ora:

$$(\pi^{\mathfrak{s}})^{m-n+p}(\alpha) = (\pi^{\mathfrak{s}})^{m-n}\big((\pi^{\mathfrak{s}})^p(\alpha)\big) = (\pi^{\mathfrak{s}})^{m-n}(n, \mathbf{0}) = (m, \mathbf{0}) = (\pi^{\mathfrak{s}})^q(\beta)\,.$$

LEMMA 28. *Siano dati* $\alpha = (n, a) \in \mathrm{Dif}_{\mathfrak{s}}$ *e* $\beta = (m, b) \in \mathrm{Dif}_{\mathfrak{s}}$*; se* $\alpha <^{\mathfrak{s}} \beta$ *allora* $\alpha \leq^{\mathfrak{s}} \pi^{\mathfrak{s}}(\beta)$.

DIMOSTRAZIONE. Poniamo $\gamma = \pi^{\mathfrak{s}}(\beta)$ e dimostriamo che $\alpha \leq^{\mathfrak{s}} \gamma$. Se $n = m$ e $a < b$, allora è $b \neq \mathbf{0}$ e $\gamma = (n, \pi(b))$; ora in $\mathfrak{R}$ si ha $a \leq \pi(b)$, da cui $\alpha \leq^{\mathfrak{s}} \gamma$ per la $(*)$. Supponiamo invece che $m < n$ e $a = \mathbf{0} = b$. Allora $\gamma = (m + 1, \mathbf{0})$ oppure $\gamma = (m, \pi(b))$ e in entrambi i casi è $\alpha \leq^{\mathfrak{s}} \gamma$ per la $(**)$.

Dai Lemmi 21-28 segue dunque che:

TEOREMA 29. *La struttura* $(\mathrm{Dif}_{\mathfrak{s}}; \leq^{\mathfrak{s}}; \sigma_0^{\mathfrak{s}}, \sigma_1^{\mathfrak{s}}, \pi^{\mathfrak{s}})$ *è un clan.*

DEFINIZIONE 30. Chiameremo *clan delle differenze* (*determinato dallo spettro* $\mathfrak{s}$) il clan di cui al Teorema 29 e lo denoteremo con $\mathfrak{Dif}_{\mathfrak{s}}$.

4. Classificazione dei clan binari

Proposizione 31. *La spettralità di* $\mathfrak{Dif}_{\mathfrak{s}}$ *è* $|\mathfrak{s}|$.

Dimostrazione. È sufficiente dimostrare che $\mathbf{spec}(\alpha) = \mathfrak{s}$, dove $\alpha = (0\,,\mathbf{0})$. A questo scopo, fissato un generico $n \in \mathbb{N}$, poniamo $\beta = (n\,,\mathbf{0})$ e osserviamo che

$$\mathbf{spec}(\alpha)(n) = \mathbf{g}\big((\pi^{\mathfrak{s}})^n(\alpha)\big) = \mathbf{g}(n\,,\mathbf{0}) = \mathbf{g}(\beta) \tag{13}$$

(si veda anche il Lemma 26). Ora $\mathbf{g}(\beta)$ è caratterizzato da $\sigma^{\mathfrak{s}}_{\mathbf{g}(\beta)}(\pi^{\mathfrak{s}}(\beta)) = \beta$. Posto

$$i = \mathfrak{s}(n) = \mathfrak{s}\big((n+1)-1\big)\ , \tag{14}$$

ricordando che $\pi^{\mathfrak{s}}(\beta) = (n+1\,,\mathbf{0})$, si ha $\sigma^{\mathfrak{s}}_i \pi^{\mathfrak{s}}(\beta) = (n\,,\mathbf{0}) = \beta$ e dunque

$$i = \mathbf{g}(\beta)\,. \tag{15}$$

Confrontando (13), (14) e (15) si ottiene $\mathbf{spec}(\alpha)(n) = \mathfrak{s}(n)$, da cui l'asserto segue per l'arbitrarietà di n.

Proveremo ora che *dato un albero sradicato di spettralità* $|\mathfrak{s}|$, *esso risulta isomorfo al clan delle differenze* $\mathfrak{Dif}_{\mathfrak{s}}$ *costruito sopra.*

Lemma 32. *Sia* $\mathbb{S}$ *un clan e sia* $\mathfrak{s} \in \mathbf{Spec}(\mathbb{S})$. *Esiste allora un* $\alpha \in S$ *con* $\mathbf{spec}(\alpha) = \mathfrak{s}$.

Dimostrazione. Preso $\beta \in S$ si ha che $\mathbf{spec}(\beta) \equiv \mathfrak{s}$; siano dunque n, m tali che

$$\mathbf{spec}(\beta)(n+p) = \mathfrak{s}(m+p) \qquad (p \in \mathbb{N})\,.$$

Poniamo

$$\alpha = \sigma_{\mathfrak{s}(0)}\sigma_{\mathfrak{s}(1)}\sigma_{\mathfrak{s}(2)}\ldots\sigma_{\mathfrak{s}(m-1)}\pi^n(\beta) \quad (2)$$

e verifichiamo che $\mathbf{spec}(\alpha) = \mathfrak{s}$. Per $p < m$, si ha $\pi^p(\alpha) = \sigma_{\mathfrak{s}(p)}\sigma_{\mathfrak{s}(p+1)}\sigma_{\mathfrak{s}(p+2)}\ldots$ $\ldots\sigma_{\mathfrak{s}(m-1)}\pi^n(\beta)$, perciò

$$\mathbf{spec}(\alpha)(p) = \mathbf{g}\big(\pi^p(\alpha)\big) = \mathfrak{s}(p)\,.$$

Per $p = m + q$ si ha $\pi^p(\alpha) = \pi^{m+q}(\alpha) = \pi^{n+q}(\beta)$ e dunque

$$\mathbf{spec}(\alpha)(p) = \mathbf{g}\big(\pi^p(\alpha)\big) = \mathbf{g}\big(\pi^{n+q}(\beta)\big) = \mathbf{spec}(\beta)(n+q) = \mathfrak{s}(m+q) = \mathfrak{s}(p)\,.$$

Lemma 33. *Sia* $\mathbb{S}$ *un clan arbitrario e siano* $\alpha \in \mathbb{S}$ *e* $b \in \mathfrak{R}$. *Supposto* $b \neq \mathbf{0}$, *si ha* $\pi(\alpha \oplus b) = \alpha \oplus \pi(b)$.

Dimostrazione. Essendo $b \neq \mathbf{0}$, sia i tale che $b = \sigma_i\pi(b)$. Allora

$$\pi(\alpha \oplus b) = \pi\big(\alpha \oplus \sigma_i\pi(b)\big) = \pi\sigma_i\big(\alpha \oplus \pi(b)\big) = \alpha \oplus \pi(b)\,.$$

Corollario 34. *Sia* $n \in \mathbb{N}$ *e siano* a, $b \in \mathfrak{R}$ *tali che* $a = \pi^n(b)$. *Preso* $\alpha \in S$, *si ha allora che* $\pi^n(\alpha \oplus b) = \alpha \oplus a$.

(2) Ovviamente con questa espressione intendiamo denotare $\pi^n(\beta)$, nel caso che $m = 0$.

DIMOSTRAZIONE. Per induzione su n. Se $n = 0$, la conclusione è ovvia. Valga dunque l'asserto per n e supponiamo che sia $a = \pi^{n+1}(b)$. Posto $c = \pi(b)$, si ha $a = \pi^n(c)$; per l'ipotesi induttiva si ha dunque $\pi^n(\alpha \oplus c) = \alpha \oplus a$, e dal Lemma 33 segue che $\pi^{n+1}(\alpha \oplus b) = \pi^n(\pi(\alpha \oplus b)) = \pi^n(\alpha \oplus \pi(b)) = \pi^n(\alpha \oplus c) = \alpha \oplus a$.

TEOREMA 35. *Se $\mathcal{S}$ è un clan di spettralità $|\mathfrak{s}|$, allora $\mathcal{S} \approx \mathcal{D}if_{\mathfrak{s}}$.*

DIMOSTRAZIONE. Fissato in $\mathcal{S}$ un α di spettro $\mathfrak{s}$, si definisca:

$$h : \mathrm{Dif}_{\mathfrak{s}} \longrightarrow S\ ,$$

ponendo

$$h(n\,, a) = \pi^n(\alpha) \oplus a\,.$$

Cominciamo col dimostrare che h conserva i successivi. Distinguiamo come al solito due casi:

(*i*) $\sigma_i^{\mathfrak{s}}(n\,, a) = (n\,, \sigma_i(a))$; in questo caso, tenendo presenti le equazioni definitorie di $\oplus$ e la definizione di h, si ha subito che $h\sigma_i^{\mathfrak{s}}(n\,, a) = \sigma_i h(n\,, a)$.

(*ii*) $a = \mathbf{0}$ e $n \neq 0$. Posto $i = \mathfrak{s}(n-1)$, si osservi che $i = \mathbf{g}(\pi^{n-1}(\alpha))$; ne segue che

$$\pi^{n-1}(\alpha) = \sigma_i\big(\pi^n(\alpha)\big)\ . \tag{16}$$

Ora, da $a = \mathbf{0}$, si ottiene $h\sigma_i^{\mathfrak{s}}(n\,, a) = h(n-1\,, \mathbf{0}) = \pi^{n-1}(\alpha)$ e $\sigma_i h(n\,, a) = \sigma_i(\pi^n(\alpha)) = \pi^{n-1}(\alpha)$, per la (16), da cui l'asserto. Per quanto riguarda $\sigma_{1-i}^{\mathfrak{s}}$, si rientra nel caso (*i*).

Dal Lemma 9 si ha dunque che

$$h : \mathcal{D}if_{\mathfrak{s}} \longrightarrow \mathcal{S}\,.$$

Resta perciò da dimostrare solo che h è una biiezione.

Suriettiva. Dato un quanlunque $\beta \in \mathcal{S}$, per il Corollario 12 sia n il minimo numero naturale per cui esiste $a \in \mathcal{R}$ con

$$\beta = \pi^n(\alpha) \oplus a\,. \tag{17}$$

Si tratta solo di verificare che la coppia $(n\,, a)$ è ridotta. Per assurdo, si abbia $n \neq 0$, $a \neq \mathbf{0}$ e $\mathbf{g}(\mathbf{f}(a)) = \mathfrak{s}(n-1)$. Posto $i = \mathfrak{s}(n-1) = \mathbf{g}(\mathbf{f}(a))$ e $b = \mathbf{bf}(a)$, si ha $a = \sigma_i(\mathbf{0}) + b$ e quindi

$$\beta = \pi^n(\alpha) \oplus \big(\sigma_i(\mathbf{0}) + b\big) = \sigma_i\big(\pi^n(\alpha)\big) \oplus b = \pi^{n-1}(\alpha) \oplus b\ ,$$

giacché $\mathbf{g}(\pi^{n-1}(\alpha)) = \mathbf{spec}(\alpha)(n-1) = \mathfrak{s}(n-1) = i$. Dunque n non era il minimo soddisfacente (17).

Iniettiva. Dimostriamo che se $(n\,, a) <^{\mathfrak{s}} (m\,, b)$, allora $\pi^n(\alpha) \oplus a < \pi^m(\alpha) \oplus b$. Si hanno due casi:

(*i*) $n = m$ e $a < b$. Da note proprietà di $\mathcal{R}$ si ha allora che $a = \pi^p(b)$, per un qualche $p > 0$. Dal Corollario 34 segue, usando la (4), che $\pi^n(\alpha) \oplus a = \pi^n(\alpha) \oplus \pi^p(b) = \pi^p(\pi^m(\alpha) \oplus b) < \pi^m(\alpha) \oplus b$.

(*ii*) $m < n$ e $a = \mathbf{0} = b$. Sia $n = m + p + 1$; ancora per la (4) e per il Lemma 7 (punto 3), si ha $\pi^n(\alpha) = \pi^{p+1}(\pi^m(\alpha)) < \pi^m(\alpha)$.

PROPOSIZIONE 36. *Se due clan sono isomorfi, essi hanno la stessa spettralità.*

DIMOSTRAZIONE. Ovviamente, se h: $\mathbb{S} \longrightarrow \mathbb{S}'$ ed $\alpha \in S$, allora $\mathbf{spec}_{\mathbb{S}}(\alpha) = \mathbf{spec}_{\mathbb{S}'}(h(\alpha))$.

5. CONCLUSIONE

Usando i Teoremi 29 e 35 e le Proposizioni 31 e 36, possiamo dunque concludere che i tipi di isomorfismo dei clan binari sono tanti quante le *spettralità*. Gli spettri sono ovviamente $2^{\aleph_0}$; per contare le spettralità è quindi sufficiente provare che dentro una classe di similitudine ci sono $\aleph_0$ spettri. Ma questo è facile, perché (cfr. Lemma 32) se $\mathbf{Spec}(\mathbb{S}) = |\mathfrak{s}|$, allora $\mathbf{spec}$: $S \longrightarrow |\mathfrak{s}|$ è suriettiva e dunque $|\mathfrak{s}|$ è numerabile, essendo ovviamente tale ciascun clan (3). Dunque:

TEOREMA. *I tipi di isomorfismo di clan binari sono* $2^{\aleph_0}$.

BIBLIOGRAFIA

[1] C. CHEVALLEY, *Fundamental Concepts of Algebra*. New York 1956.
[2] F. FIORENZI, *Gli Alberi Sradicati Binari come concetto essenziale per la descrizione dei modelli di EAB*. Dipartimento di Matematica, Università degli Studi di Parma, quaderno n. 152, ottobre 1996.
[3] F. FIORENZI, *Albero binario libero*. Dipartimento di Matematica, Università degli Studi di Parma, quaderno n. 153, novembre 1996.
[4] M. SERVI, *Note sulla definizione di «albero»*. Dipartimento di Matematica, Università degli Studi di Parma, Appunti per le lezioni di «Critica dei Principi», 1995.
[5] M. SERVI, *Albero binario e classificazione dei clan binari* (*numeri naturali binari e numeri interi binari*). Dipartimento di Matematica, Università degli Studi di Parma, quaderno n. 112, marzo 1995.
[6] M. SERVI, *Classificazione dei Clan binari*. Dipartimento di Matematica, Università degli Studi di Parma, quaderno n. 113, giugno 1995.
[7] M. SERVI, *Alberi binari non standard*. Comunicazione tenuta al *XVI Incontro di Logica* (Genova, 24-26 ottobre 1996).

Pervenuta il 13 giugno 1996,
in forma definitiva il 14 novembre 1997.

Dipartimento di Matematica
Università degli Studi di Parma
Via M. D'Azeglio, 85/A - 43100 PARMA
servi@prmat.math.unipr.it

(3) Per il Teorema 35, ogni clan è isomorfo ad un clan delle differenze, che è ovviamente numerabile, tale essendo l'albero binario $\mathfrak{R}$.