Atti Accademia Nazionale Lincei Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti Lincei
Matematica e Applicazioni

Liviu Ornea, Paolo Piccinni

Una classe di varietà quaternionali che ammettono una struttura complessa compatibile

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti Lincei. Matematica e Applicazioni, Serie 9, Vol. **8** (1997), n.4, p. 293–298.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLIN_1997_9_8_4_293_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti Lincei. Matematica e Applicazioni, Accademia Nazionale dei Lincei, 1997.

Rend. Mat. Acc. Lincei
s. 9, v. 8:293-298 (1997)

Geometria differenziale. — *Una classe di varietà quaternionali che ammettono una struttura complessa compatibile.* Nota (*) di LIVIU ORNEA e PAOLO PICCINNI, presentata dal Socio E. Martinelli.

ABSTRACT. — *A class of quaternionic manifolds admitting a compatible complex structure*. The existence of a global compatible complex structure is proved on compact regular quaternion Hermitian-Weyl manifolds. Some restrictions on the Betti numbers are deduced.

KEY WORDS: Quaternionic manifold; Weyl structure; Compatible complex structure.

RIASSUNTO. — Si dimostra l'esistenza di una struttura complessa compatibile globale sulle varietà quaternionali di Hermite-Weyl compatte regolari. Se ne deducono alcune restrizioni sui numeri di Betti.

Una delle più naturali questioni nello studio delle strutture quaternionali su varietà è la ricerca di condizioni che assicurino o che escludano l'esistenza e l'eventuale compatibilità di una struttura complessa. Il problema ha sia aspetti locali che globali, entrambi in relazione con l'integrabilità delle strutture complesse e quaternionali considerate, cfr. [1, 2]. In particolare la non esistenza di strutture complesse globali, ben nota per gli spazi proiettivi HP^n – primi esempi di varietà che hanno ispirato l'attuale definizione di varietà quaternionale [7, 8] – è stata recentemente provata per strutture complesse compatibili su varietà quaternionali kähleriane compatte a curvatura scalare diversa da zero [16, 2].

La presente *Nota* contiene un risultato di segno opposto. Si ottiene infatti l'esistenza di una struttura complessa compatibile globale su varietà M^{4n} compatte e dotate di metrica h localmente e non globalmente quaternionale kähleriana, con una condizione di regolarità relativa a due foliazioni canonicamente associate alla struttura. Tali varietà M^{4n} sono anche chiamate di Hermite-Weyl quaternionali, la struttura di Weyl essendo data dalla classe conforme della metrica h, e dalle connessioni di Levi Civita delle metriche locali quaternionali kähleriane, che danno luogo ad una connessione globale D. I risultati esposti si inquadrano nella più ampia ricerca [13], contenente anche i dettagli di dimostrazioni qui omesse.

1. Sia $M = M^{4n}$ una varietà differenziabile, di dimensione $4n$. Un sottofibrato $H \subset \subset \mathrm{End}\, TM$ è detto *struttura quasi quaternionale* su M se H è localmente generato da terne (I_1, I_2, I_3) verificanti $I_\alpha^2 = -id$, $I_\alpha \circ I_\beta = I_\gamma$ per ogni (α, β, γ) permutazione ciclica di $(1, 2, 3)$; sulle intersezioni degli aperti di banalizzazione ogni coppia di terne (I_1, I_2, I_3), (I'_1, I'_2, I'_3) è legata da funzioni a valori in $SO(3)$. Ogni $J = a_1 I_1 + a_2 I_2 + + a_3 I_3$ con $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 1$ si dice *struttura quasi complessa compatibile locale*, e le terne (I_1, I_2, I_3) *strutture quasi ipercomplesse compatibili locali*. Una metrica riemanniana h su

(*) Pervenuta all'Accademia il 2 luglio 1997.

M che sia hermitiana rispetto a ogni J compatibile locale si dice *quaternionale hermitiana*. La terna (M, H, h) è detta *varietà quaternionale hermitiana* se H è 1-integrabile, ovvero se esiste una connessione D a torsione nulla verificante $DH \subset H$. Questo è certamente il caso per le varietà *quaternionali kähleriane*, per le quali come connessione D può assumersi la connessione di Levi Civita ∇ di h.

Una classe naturale di varietà quaternionali hermitiane è data dalle *varietà quaternionali di Hermite-Weyl*, che denotiamo con $(M^{4n}, H, [h], D)$. In esse è assegnata, oltre alla struttura quaternionale H, una classe conforme $[h]$ di metriche hermitiane quaternionali, e una connessione D a torsione nulla che preservi sia H che la classe $[h]$. Per ogni rappresentante h della classe conforme, la relazione $Dh = \omega \otimes h$ definisce la *1-forma* (chiusa) *di Lee* ω, che consente di riconoscere che, per $n > 1$, le varietà quaternionali di Hermite-Weyl coincidono con le varietà dotate di metrica *localmente conforme quaternionale kähleriana* [14]. In particolare, le varietà quaternionali di Hermite-Weyl costituiscono una classe di esempi di varietà di Einstein-Weyl [14, 11, 12]. Nel caso compatto e nell'ipotesi che tutte le metriche della classe conforme siano non quaternionali kähleriane, la struttura di Einstein-Weyl consente, a norma di un risultato di [5], di scegliere la metrica h nella sua classe conforme con la proprietà che la sua forma di Lee ω sia parallela rispetto alla connessione ∇ di Levi Civita di h.

2. Sia $(M^{4n}, H, [h], D)$ una varietà compatta quaternionale di Hermite-Weyl e non quaternionale kähleriana, sia h un rappresentante della classe conforme tale che $\nabla\omega = 0$, $|\omega| = 1$. Il campo unitario $B = \omega^{\#}$ è di Killing e genera la foliazione riemanniana geodetica $\mathcal{B}$. Denotiamo con g la metrica proiettata sullo spazio delle foglie P, che risulta una varietà nel caso la foliazione $\mathcal{B}$ sia regolare. Denotiamo con $\mathcal{K}$ la foliazione localmente generata su P dai campi X_α proiettati di $I_\alpha B$, $\alpha = 1, 2, 3$. Diremo che la varietà di Hermite-Weyl M^{4n} è *regolare* se $\mathcal{B}$ è regolare e se $\mathcal{K}$ ha tutte le foglie compatte.

Di fatto M è spazio totale di un S^1-fibrato principale piatto su P (la forma di Lee, chiusa, è una forma di connessione). Un calcolo diretto mostra che il sottofibrato $K \subset \subset TP$, generato dai campi di Killing X_α, ha funzioni di transizione localmente costanti. Il fibrato vettoriale $K \to P$ ammette dunque una connessione piatta. D'altra parte il parallelismo di ω su M assicura che gli endomorfismi locali ∇X_α, $\alpha = 1, 2, 3$, soddisfano l'identità che definisce le strutture sasakiane. Lo spazio delle foglie $P = M/\mathcal{B}$ di una varietà di Hermite-Weyl quaternionale compatta regolare è dunque dotata della struttura appresso descritta.

Sia (P, g) una varietà riemanniana di dimensione $(4n - 1)$ e sia K un sottofibrato vettoriale di rango 3 di TP. Allora (P, g, K) è una *varietà localmente 3-sasakiana* se sono verificate le seguenti due condizioni:

i) K è localmente generato da terne ortonormali X_1, X_2, X_3 di campi di Killing tali che $[X_\alpha, X_\beta] = 2X_\gamma$, per ogni permutazione ciclica (α, β, γ) di $(1, 2, 3)$. Terne distinte $(X_\alpha, X_\beta, X_\gamma)$, $(X'_\alpha, X'_\beta, X'_\gamma)$ sono legate, nelle intersezioni dei rispettivi aperti di definizione, da matrici di funzioni con valori in $SO(3)$.

ii) I campi di tensori $F_\alpha = \nabla X_\alpha$ soddisfano la relazione $(\nabla_Y, F_\alpha) Z = X_\alpha^{\#}(Z) Y - g(Y, Z) X_\alpha$, essendo $X_\alpha^{\#}$ la 1-forma duale di X_α.

Se il fibrato K è globalmente banalizzato da una terna X_1, X_2, X_3 con le proprietà sopra indicate, la varietà P è (globalmente) 3-sasakiana, cfr. [4].

Denotiamo ora con $\mathcal{K}$ la foliazione determinata sulla varietà localmente 3-sasakiana P dalla distribuzione integrabile K. Il calcolo della curvatura di P e delle foglie di $\mathcal{K}$ fornisce:

LEMMA 1. *Una varietà localmente 3-sasakiana è una varietà di Einstein a curvatura scalare positiva. Le foglie di $\mathcal{K}$ sono varietà a curvatura costante positiva S^3/G, generalmente non omogenee.*

Dalla precedente discussione sulla proiezione $M \to P = M/\mathcal{B}$ si ha anche:

LEMMA 2. *La classe delle varietà quaternionali di Hermite-Weyl compatte M che non sono quaternionali kähleriane e che hanno la foliazione $\mathcal{B}$ regolare coincide con la classe dei fibrati principali piatti in S^1 con base varietà P localmente 3-sasakiane.*

La struttura quaternionale H di M è ottenuta da quella localmente 3-sasakiana di P mediante la 1-forma di connessione piatta u, definendo le sue strutture quasi ipercomplesse compatibili:

$$I_\alpha Y = -F_\alpha Y - X_\alpha^{\#}(Y) u^{\#}, \qquad I_\alpha u^{\#} = X_\alpha, \tag{1}$$

essendo $\alpha = 1, 2, 3$, e Y un campo orizzontale. La metrica $h = \pi^* g + u \otimes u$ di M risulta hermitiana rispetto ad H, e la connessione di Weyl D può essere definita mediante la formula $2D = 2\nabla - u \otimes id - id \otimes u + h \otimes u^{\#}$.

3. La classificazione delle varietà S^3/G di dimensione 3 a curvatura costante positiva si ottiene determinando i sottogruppi G finiti di $SO(4) \cong Sp(1) \cdot Sp(1)$ che agiscono liberamente sulla sfera S^3. Una classe importante di tali gruppi G è costituita dai sottogruppi finiti di S^3 stessa (gruppi ciclici, diedrale, tetraedrale, ottaedrale e icosaedrale): i rispettivi quozienti S^3/G sono in questi casi omogenei e ricevono da S^3 una struttura globalmente 3-sasakiana indotta. Nel caso di sottogruppi $G \subset SO(4)$, $G \not\subset S^3$, che comunque agiscano liberamente su S^3 si può dimostrare che ogni tale G è coniugato in $SO(4)$ con un sottogruppo di $\Gamma_1 = U(1) \cdot Sp(1)$ oppure di $\Gamma_2 = Sp(1) \cdot U(1)$, cfr. [17]. Si noti che Γ_1 e Γ_2 sono isomorfi a $U(2)$ mediante gli isomorfismi rispettivamente destro e sinistro tra $\boldsymbol{H}$ e $\boldsymbol{C}^2$. Dunque ogni sottogruppo finito Γ di Γ_1, Γ_2 conserva due strutture su $S^3 \subset \boldsymbol{C}^2$: quella 3-sasakiana locale indotta dalla struttura ipercomplessa di $\boldsymbol{C}^2$ e quella sasakiana globale compatibile con la prima, indotta dalla struttura complessa di $\boldsymbol{C}^2$. Se si sostituisce Γ con un sottogruppo G ad esso coniugato in $SO(4)$, tali strutture sono ugualmente conservate, con la struttura sasakiana globale indotta da un'altra struttura complessa, ottenuta da quella standard di $\boldsymbol{R}^4$ mediante la relazione di coniugio tra i sottogruppi G e Γ di $SO(4)$.

Si è così ottenuto che le foglie compatte della foliazione $\mathcal{K}$ sono varietà a curvatura costante positiva S^3/G, dotate di una struttura sasakiana globale compatibile con la loro struttura localmente 3-sasakiana. Applicando ciò a tutte le foglie di $\mathcal{K}$, si ha:

LEMMA 3. *Una varietà localmente 3-sasakiana P, tale che tutte le foglie di $\mathcal{K}$ sono compatte, ammette una struttura sasakiana compatibile globale.*

4. Torniamo alla varietà quaternionale di Hermite-Weyl M^{4n}, che supponiamo compatta e regolare. Dal Lemma 2 abbiamo che M è spazio totale di un fibrato principale piatto π: $M \to P$ in S^1 su una varietà localmente 3-sasakiana P tale che le foglie di $\mathcal{K}$ sono compatte. Possiamo allora costruire su M una struttura quasi complessa globale compatibile J partendo dalla struttura di Sasaki globale compatibile su P. Ciò può essere fatto usando formule simili alla (1). Una verifica diretta mostra che J è parallela rispetto alla connessione di Weyl D, e dunque integrabile. Ricordiamo che per *varietà di Hopf generalizzata* si intende una varietà complessa con metrica localmente kähleriana tale che la forma di Lee sia parallela rispetto alla connessione di Levi Civita [18]. La compatibilità di J con la struttura di Weyl e con la struttura quaternionale H fornisce allora il seguente risultato:

TEOREMA. *Sia $(M^{4n}, H, [h], D)$ una varietà compatta dotata di struttura quaternionale di Hermite-Weyl regolare. Allora M^{4n} ammette una struttura complessa globale J compatibile ed è una varietà di Hopf generalizzata rispetto a J e a una metrica opportuna nella classe $[h]$.*

Le varietà quaternionali di Hermite-Weyl e non quaternionali kähleriane sono esempi di varietà di Weyl Ricci-piatte, la connessione di Weyl D avendo tensore di Ricci nullo, cfr. [5, 11]. Ciò comporta che le metriche locali quaternionali kähleriane, localmente conformi alle metriche della classe $[g]$ assegnata, sono di fatto localmente iperkähleriane, ovvero a olonomia ridotta contenuta in $Sp(n)$. Tale proprietà non sembra tuttavia sufficiente ad assicurare l'esistenza di una struttura complessa compatibile. Si noti, in analogia con ciò e in una situazione relativamente più semplice, che non tutte le varietà localmente iperkähleriane ammettono una struttura complessa compatibile con la loro struttura quaternionale. Un esempio che illustra tale fatto è la 4-varietà di Hitchin $K3/(\mathbf{Z}_2^+ \times \mathbf{Z}_2^-)$, quoziente di una superficie iperkähleriana $K3$, le cui strutture complesse non sono invarianti per il gruppo che definisce il quoziente: cfr. [9, p. 895]. Esempi di dimensione maggiore possono costruirsi mediante simili quozienti di alcune varietà iperkähleriane di Beauville, cfr. [10, p. 4868] e l'introduzione di [15].

L'esistenza della struttura complessa J consente di individuare sulla varietà M un'altra foliazione canonica $\mathcal{V}$, generata dal campo di Lee B e dal campo JB. Diremo che M è *fortemente regolare* se sono regolari le foliazioni $\mathcal{B}$, $\mathcal{V}$ su M e la foliazione $\mathcal{K}$ su P. Le varietà quaternionali compatte di Hermite-Weyl fortemente regolari danno luogo a fibrazioni:

$$M \xrightarrow{S^1} P \xrightarrow{S^1} Z \xrightarrow{S^2} N,$$

essendo $N = P/\mathcal{K}$ una varietà quaternionale kähleriana a curvatura scalare positiva e $Z = M/\mathcal{V}$ il suo spazio dei twistors. Si noti che le foglie di $\mathcal{V}$ sono tori complessi, ottenibili come controimmagini di punti di Z nella composizione delle prime due fibrazioni. Si noti anche che la varietà M è dotata di un'ulteriore foliazione canonica $\mathcal{D}$ – di dimensione 4 – localmente generata dai campi B, $I_1 B$, $I_2 B$, $I_3 B$, definiti utilizzando un'arbitraria struttura quasi ipercomplessa compatibile. Risulta dunque $N \cong P/\mathcal{K} \cong$ $\cong M/\mathcal{D}$.

Le fibrazioni indicate consentono di ottenere indicazioni topologiche sulle varietà M come conseguenza di alcune ben note restrizioni sui numeri di Betti di varietà N quaternionali kähleriane a curvatura scalare positiva [3, 6]. Il confronto tra le successioni di Gysin dei fibrati in sfere sopra descritti forniscono infatti:

COROLLARIO. *Sia $(M^{4n}, H, [h], D)$ una varietà quaternionale compatta di Hermite-Weyl fortemente regolare. I numeri di Betti di M e della sua base quaternionale kähleriana $N = M/\mathcal{D}$ soddisfano le relazioni*:

$$b_{2p}(M) = b_{2p+1}(M) = b_{2p}(N) - b_{2p-4}(N), \qquad (0 \leq 2p \leq 2n-2),$$

e le rispettive relazioni duali di Poincaré. Risulta inoltre $b_{2n}(M) = 0$, nonché:

$$\sum_{k=1}^{n-1} k(n-k+1)(n-2k+1)\, b_{2k}(M) = 0\,.$$

BIBLIOGRAFIA

[1] D. V. ALEKSEEVSKY - S. MARCHIAFAVA - M. PONTECORVO, *Compatible Complex Structures on Almost Quaternionic Manifolds*. E. Schrödinger Int. Inst. Vienna, preprint 404, 1996.

[2] D. V. ALEKSEEVSKY - S. MARCHIAFAVA - M. PONTECORVO, *Compatible Almost Complex Structures on Quaternion Kähler Manifolds*. E. Schrödinger Int. Inst. Vienna, preprint 419, 1997.

[3] A. BESSE, *Einstein Manifolds*. Springer-Verlag, 1987.

[4] CH. P. BOYER - K. GALICKI - B. MANN, *The geometry and topology of 3-sasakian manifolds*. J. Reine Angew. Math., 455, 1994, 183-220.

[5] P. GAUDUCHON, *Structures de Weyl-Einstein, espaces de twisteurs et variétés de type $S^1 \times S^3$*. J. Reine Angew. Math., 469, 1995, 1-50.

[6] C. R. LEBRUN - S. M. SALAMON, *Strong rigidity of positive quaternion Kähler manifolds*. Invent. Math., 118, 1994, 109-132.

[7] E. MARTINELLI, *Varietà a struttura quaternionale generalizzata*. Atti Acc. Lincei Rend. fis., s. 8, v. 26, 1959, 353-362.

[8] E. MARTINELLI, *Modello metrico reale dello spazio proiettivo quaternionale*. Ann. Mat. Pura Appl., 49, 1960, 78-89.

[9] B. MCINNES, *Methods of holonomy theory for Ricci-flat Riemannian manifolds*. J. Math. Phys., 32, 1991, 888-896.

[10] B. MCINNES, *Complex symplectic geometry and compact locally hyper-Kählerian manifolds*. J. Math. Phys., 34, 1993, 4857-4871.

[11] L. ORNEA - P. PICCINNI, *Weyl Structures on Quaternionic Manifolds*. Proc. Meeting on *Quaternionic Structures in Math. and Phys.*, held in SISSA, Sept. 1994, Lab. Int. SISSA, 6, 1996, 261-266.

[12] L. ORNEA - P. PICCINNI, *Locally conformal Kähler structures in quaternionic geometry*. Trans. Am. Math. Soc., 349, 1997, 641-655.

[13] L. Ornea - P. Piccinni, *Compact Hyperhermitian Weyl and quaternion Hermitian Weyl manifolds*. Preprint Dip. Mat. «G. Castelnuovo», Univ. «La Sapienza», Roma, n. 14, 1997.
[14] H. Pedersen - Y. S. Poon - A. Swann, *The Einstein-Weyl equations in complex and quaternionic geometry*. Diff. Geom. Appl., 3, 1993, 99-113.
[15] P. Piccinni, *The Geometry of positive locally quaternion Kähler manifolds*. Preprint Dip. Mat. «G. Castelnuovo», Univ. «La Sapienza», Roma, n. 26, 1997.
[16] M. Pontecorvo, *Complex structures on quaternionic manifolds*. Diff. Geom. Appl., 4, 1994, 163-177.
[17] P. Scott, *The geometry of 3-manifolds*. Bull. London Math. Soc., 15, 1983, 401-487.
[18] I. Vaisman, *Generalized Hopf manifolds*. Geom. Dedicata, 13, 1982, 231-255.

L. Ornea:
Facoltà di Matematica
Università di Bucarest
14 Academiei str. - Bucarest (Romania)

P. Piccinni:
Dipartimento di Matematica
Università degli Studi di Roma «La Sapienza»
Piazzale A. Moro, 2 - 00185 Roma