
ATTI ACCADEMIA NAZIONALE LINCEI CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI

RENDICONTI LINCEI MATEMATICA E APPLICAZIONI

ENNIO DE GIORGI, MARCO FORTI, GIACOMO LENZI,
VINCENZO MARIA TORTORELLI

Calcolo dei predicati e concetti metateorici in una teoria base dei fondamenti della Matematica

*Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche,
Matematiche e Naturali. Rendiconti Lincei. Matematica e Applicazioni,
Serie 9, Vol. 6 (1995), n.2, p. 79–92.*

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLIN_1995_9_6_2_79_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti Lincei. Matematica e Applicazioni, Accademia Nazionale dei Lincei, 1995.

Logica matematica. — *Calcolo dei predicati e concetti metateorici in una teoria base dei Fondamenti della Matematica.* Nota di ENNIO DE GIORGI, MARCO FORTI, GIACOMO LENZI e VINCENZO MARIA TORTORELLI, presentata (*) dal Socio E. De Giorgi.

ABSTRACT. — *Predicate calculus and metatheoretic concepts within a basic theory for the Foundations of Mathematics.* Some basic concepts of the syntax and semantics of first order Predicate Calculus (predicates, propositions, formulae, interpretations, etc.) are introduced into the frame of the basic theories for the Foundations of Mathematics [11]. The ordinary qualities *Qver*, *Qfals* are unable to evaluate all propositions (Theorem 1). Hence new «metatheoretic objects», the metaqualities *Mver*, *Mfals*, are introduced to deal with the problem of truth. Being independent of the fundamental relations *Rfond b* of [11], these metaqualities provide a powerful «observatory» giving a truth value to all interpretations of first order formulae.

KEY WORDS: Basic theory; Predicate; Proposition; Metaquality; Interpretation.

RIASSUNTO. — I primi elementi della sintassi e della semantica del Calcolo dei Predicati del primo ordine (predicati, proposizioni, formule, interpretazioni, ecc.) sono introdotti nell'ambiente delle teorie base dei Fondamenti della Matematica di [11]. Il problema della verità e falsità delle proposizioni è affrontato introducendo, a fianco delle ordinarie qualità *Qver*, *Qfals*, che non possono valutare tutte le proposizioni (Teorema 1), nuovi «oggetti metateorici», le metaqualità *Mver*, *Mfals* che, indipendenti dalle relazioni fondamentali *Rfond b* di [11], costituiscono un «osservatorio» più potente in grado di fornire un giudizio di verità sulle interpretazioni di tutte le usuali formule del primo ordine.

1. INTRODUZIONE

Nella Nota [11] abbiamo introdotto alcune *teorie base* dei Fondamenti della Matematica in cui vengono considerati oggetti qualitativamente diversi, e precisamente *qualità, relazioni, operazioni, collezioni, numeri naturali e sistemi finiti*: queste teorie base sono lo sviluppo più recente di un filone di ricerca sui Fondamenti della Matematica cui appartengono anche [5, 8, 9]. I caratteri principali delle teorie base di [11] sono:

– *non riduzionismo*: le teorie considerano varie specie di oggetti che sono tutte considerate «ugualmente primitive» e non le riducono ad un'unica specie fondamentale (classi, relazioni o operazioni) tramite ingegnose codifiche, come nelle più conosciute teorie fondazionali (vedi [1, 2, 6, 13, 16, 21-24]);

– un notevole grado di *autoriferimento*: molte relazioni, operazioni e proprietà che descrivono il comportamento globale degli oggetti della teoria sono a loro volta «grandi» oggetti della teoria (sviluppando al massimo possibilità esplorate in [3, 14, 17, 21]): solo l'insorgere di antinomie limita l'introduzione di oggetti che forniscono una completa autodescrizione (vedi [10, 19]).

Le teorie base sono «teorie aperte» concepite per essere ampliate in molte direzioni; esse intendono essere, appunto, una «base» su cui «innestare» i vari rami della Matematica ed eventualmente di altre forme del sapere umano (vedi [4, 12, 15, 20]). In

(*) Nella seduta del 10 dicembre 1994.

questa *Nota* ci proponiamo in particolare di mostrare come si può realizzare l'innesto delle nozioni di *predicato*, *proposizione* e *metaqualità*. Le motivazioni filosofiche di questo innesto sono esposte nella relazione [7]. Useremo un'esposizione semiformale, nello stile di [11]; sarebbe assai utile dare formalizzazioni complete nella logica del primo ordine del tipo realizzato in [18].

2. RICHIAMO DELLA TEORIA BASE

Nelle teorie basi di [11], a una *collezione* C può appartenere un oggetto x , e in questo caso si scrive $x \in C$. In particolare vi è una *collezione universale* V alla quale appartengono tutti gli oggetti della teoria: nel seguito sarà sottinteso che tutti gli oggetti di cui parleremo appartengono a V . Altre collezioni presenti sono quella *vuota*, $\emptyset$, cui non appartiene nessun oggetto, e la collezione delle collezioni, *Coll*. Si noti che si ha una catena ciclica di appartenenze:

$$V \in \text{Coll} \in \text{Coll} \in V \in V.$$

Le collezioni sono *estensionali*, cioè due collezioni cui appartengono gli stessi oggetti sono uguali.

Una *qualità* o *proprietà* q può essere *goduta* da un oggetto x ; in questo caso si scrive qx . Una *relazione binaria* r può *sussistere* tra due oggetti x e y , e in questo caso si scrive $rx y$ (oppure talvolta xry); analogamente per le *relazioni ternarie*, *quaternarie*, ecc. si usano le notazioni $rx y z$, $rx y z t$, ecc. Un'*operazione semplice* f può *operare* su un oggetto x dando come risultato un oggetto y , e in questo caso si scrive $y = fx$; analogamente per le *operazioni binarie*, *ternarie*, ecc. si usano le notazioni $z = fxy$, $t = fxyz$, ecc.

Le prime qualità, nello spirito dell'autoriferimento, corrispondono alle diverse specie di oggetti introdotti; avremo perciò la qualità *Qqual* di essere una qualità, la qualità *Qcoll* di essere una collezione, la qualità *Qrel* di essere una relazione e le sue sottoqualità *Qrelb*, *Qrelt*, *Qrelq* di essere rispettivamente una relazione binaria, ternaria e quaternaria, la qualità *Qop* di essere un'operazione e le sue sottoqualità *Qops*, *Qopb* di essere un'operazione semplice e binaria. Anche qui si ha un autoriferimento perché la qualità *Qqual* gode di se stessa, cioè si ha *Qqual Qqual*.

La prima operazione introdotta è l'operazione *identità*, *Id*, che manda ogni oggetto in se stesso.

Avendo introdotto le collezioni, le relazioni e le operazioni si può esporre la parte più elementare dell'Aritmetica, introducendo la *collezione* N dei numeri naturali, le *operazioni* aritmetiche di *addizione*, *sottrazione* e *moltiplicazione*, e l'usuale *relazione d'ordine* tra numeri naturali. La parte dell'Aritmetica esposta in [11] è molto ristretta; ad esempio non sono introdotte le potenze e non è postulata alcuna forma del principio d'induzione, che può essere meglio discusso dopo l'innesto di qualche teoria degli insiemi o del calcolo dei predicati (vedi [15, 18]).

L'introduzione dei primi elementi dell'Aritmetica consente di formalizzare la nozione di «complessità relazionale» (o «arietà») usata informalmente in precedenza parlando di relazioni ternarie, operazioni binarie, ecc., mediante un'operazione *arietà*, *Ar*. Per $x \in N$ si ha $Ar x = 0$; per ogni qualità q e ogni collezione C , $Ar q = Ar C = 1$. Inoltre le

relazioni binarie hanno arietà 2, le relazioni ternarie hanno arietà 3 e le relazioni quaternarie hanno arietà 4. In generale, per ogni relazione r si ha $Ar\,r = b$ se e solo se r è una relazione b -aria. Analogamente le operazioni semplici hanno arietà 2 e le operazioni binarie hanno arietà 3; in generale, per ogni operazione f si ha $Ar\,f = b + 1$ se e solo se f è un'operazione b -aria. Diremo che un oggetto x è *unario* (risp. *binario*, *ternario*, ecc.) se si ha $Ar\,x = 1$ (risp. 2, 3, ecc.). Gli assiomi permettono di introdurre, in occasione di successivi innesti, altri oggetti unari oltre alle collezioni e alle qualità, altri oggetti binari oltre alle relazioni binarie, alle operazioni semplici e ai sistemi finiti di cui parleremo tra poco, ecc.; questa libertà è utile in vista dei successivi innesti sulle teorie base, compresa la presente *Nota*, dove ad esempio le proposizioni saranno introdotte come oggetti di arietà 0 (cfr. [12, 15]). In [11] non sono introdotti oggetti la cui arietà non è un numero naturale, ma tale possibilità non è esclusa dagli assiomi e potrebbe forse agevolare futuri innesti, come ad esempio quello delle logiche infinitarie.

Nelle teorie esposte in [11] un buon grado di autodescrizione è ottenuto introducendo l'operazione *generatrice di relazioni fondamentali*, $Rfond$: ricordiamo che per ogni numero naturale $b > 0$ esiste $Rfond\,b$ ed è una *relazione* di arietà $b + 1$ che «governa» gli oggetti di arietà b . In generale, se α è un oggetto di arietà b , useremo la notazione

$$\alpha \downarrow \uparrow x_1 \dots x_b$$

da leggersi « α agisce su $x_1 \dots x_b$ » invece di $(Rfond\,b)\,\alpha x_1 \dots x_b$. L'azione così definita riassume ed estende quelle precedentemente considerate per qualità, relazioni, operazioni e collezioni; ad esempio:

- per ogni qualità q e per ogni oggetto x si ha $q \downarrow \uparrow x$ se e solo se qx ;
- per ogni collezione C e per ogni x si ha $C \downarrow \uparrow x$ se e solo se $x \in C$;
- per ogni relazione binaria r e per ogni x, y si ha $r \downarrow \uparrow xy$ se e solo se $rx y$;
- per ogni operazione semplice f e per ogni x, y si ha $f \downarrow \uparrow xy$ se e solo se $y = fx$;
- ecc.

Risulta comodo introdurre anche le notazioni seguenti, ove α e β sono oggetti della stessa arietà $b > 0$:

$$\begin{aligned} \alpha \subseteq \beta \text{ se, per ogni } z_1, \dots, z_b, \alpha \downarrow \uparrow z_1 \dots z_b \text{ implica } \beta \downarrow \uparrow z_1 \dots z_b; \\ \alpha \approx \beta \text{ se } \alpha \subseteq \beta \subseteq \alpha. \end{aligned}$$

Partendo da tali nozioni esprimiamo l'*univocità*, o *funzionalità*, e l'*estensionalità* per mezzo delle qualità $Qfun$ e $Qest$. Precisamente diremo che un oggetto $b + 1$ -ario f è *funzionale* (gode della qualità $Qfun$) se le condizioni $f \downarrow \uparrow x_1 \dots x_b y, f \downarrow \uparrow x_1 \dots x_b z$ implicano $y = z$. Ad esempio tutte le operazioni sono oggetti funzionali. Inoltre diremo che una collezione C è *estensionale* (gode della qualità $Qest$) se tutti gli elementi di C hanno la stessa arietà e le condizioni $x, y \in C, x \approx y$ implicano $x = y$. Ad esempio la collezione *Coll* è estensionale.

L'ultima specie fondamentale di oggetti introdotta in [11] è quella dei *sistemi finiti*, che comprende le coppie ordinate, terne ordinate, quaterne ordinate, ..., n -uple ordi-

nate, le sostituzioni su un numero finito di elementi e vari altri concetti della Matematica e della vita comune ove vengono messi in relazione alcuni oggetti con alcuni indici. I sistemi finiti hanno tutti arietà 2, e formano una collezione estensionale che indicheremo col simbolo *Sif*.

Diremo che b è un *indice* del sistema x quando esiste un y tale che $x \downarrow \uparrow by$ e diremo che y è un *valore* del sistema x quando esiste un b tale che $x \downarrow \uparrow by$. Tra i sistemi finiti vi sono quello *univoci*, cioè i sistemi finiti in cui l'indice determina univocamente l'oggetto indicato (e che quindi sono oggetti funzionali): essi formano la collezione *Sinf*.

In [11] si postula che, dati comunque due oggetti x, y , esiste sempre il *sistema singolare* $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ che ha come unico indice x e come unico valore y . Inoltre i sistemi ammettono le naturali operazioni di unione binaria *Unb*, inversione *Inv* e composizione *Comp*: dati due sistemi finiti S, T si pone $S \cup T = \text{Unb } ST$, $S^{-1} = \text{Inv } S$, $S \circ T = \text{Comp } ST$ e si ha:

$$\begin{aligned} S \cup T \downarrow \uparrow xy &\text{ se e solo se } S \downarrow \uparrow xy \text{ oppure } T \downarrow \uparrow xy; \\ S^{-1} \downarrow \uparrow xy &\text{ se e solo se } S \downarrow \uparrow yx; \\ S \circ T \downarrow \uparrow xy &\text{ se e solo se esiste } z \text{ tale che } T \downarrow \uparrow xz \text{ e } S \downarrow \uparrow zy. \end{aligned}$$

Si noti che, ad es., componendo $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ si ottiene il *sistema vuoto*, che non ha indici né valori (unico per l'assioma di estensionalità della collezione *Sif*) che verrà indicato col simbolo $\emptyset_2$ per sottolineare che si tratta di un oggetto vuoto di arietà 2 (e quindi diverso dalla collezione vuota $\emptyset$ che ha arietà 1).

Disponendo dell'unione si possono costruire, partendo dai sistemi singolari, sistemi più complessi, per i quali useremo le notazioni mutate dalla teoria dei gruppi di sostituzioni:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x & y \\ a & b \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x \\ a \end{pmatrix} \cup \begin{pmatrix} y \\ b \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} x & y & z \\ a & b & c \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x \\ a \end{pmatrix} \cup \begin{pmatrix} y \\ b \end{pmatrix} \cup \begin{pmatrix} z \\ c \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ecc.

Casi particolari di sistemi univoci sono:

le 1-uple, cioè i sistemi del tipo $\begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix}$ che indicheremo anche con $[x]$;

le coppie ordinate $(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ x & y \end{pmatrix}$;

le terne $(x, y, z) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ x & y & z \end{pmatrix}$, ecc.

In generale se x è un oggetto binario funzionale, per esempio un sistema finito univoco, in luogo di $x \downarrow \uparrow bw$ scriveremo talvolta $x_b = w$, seguendo le notazioni usuali nel caso delle n -uple, oppure $xb = w$, ispirandoci alle notazioni delle operazioni.

Come abbiamo già ricordato, in [11] non viene introdotto il principio d'induzione, che dovrà essere trattato in successivi sviluppi della teoria, ma si postula esplicitamente che per ogni $n \in N$ esistono l' n -upla $(1, \dots, n)$ e la collezione V^n di tutte le n -uple.

In questi richiami abbiamo omissso l'operazione *Runiv* del § 6 di [11], la cui introduzione non sembra necessaria al nostro innesto. Quest'omissione, tra l'altro, ci consente di parlare al singolare di «Teoria Base», invece di parlare al plurale di «Teorie Base», in quanto gli assiomi dei §§ 1-5 di [11] erano univocamente determinati, e solo nel § 6 si introduceva un assioma F_v dipendente dal parametro v e riguardante l'operazione *Runiv*.

Chiameremo dunque TB la teoria base formata dagli assiomi dei §§ 1-5 di [11].

3. PREDICATI E PROPOSIZIONI

Gli assiomi introdotti in questa *Nota* saranno denotati da una lettera e da un numero. La prima lettera che useremo è G perché le lettere da A a F sono usate in [11] per gli assiomi della teoria base; si osservi però che noi assumiamo qui solo gli assiomi dei gruppi A-E.

Introduciamo anzitutto le qualità di essere una *proposizione* (appartenente a V), *Qprop*, e di essere un *predicato* (appartenente a V), *Qpred*:

G1. *Qprop e Qpred sono qualità.*

Notiamo che nell'esposizione di una qualsiasi teoria matematica coerente che ha tra i suoi oggetti simboli, formule e loro interpretazioni, proposizioni, predicati è inevitabile l'uso di simboli, formule, proposizioni e predicati che non sono oggetti della stessa teoria. Infatti l'«autoreferenza perfetta» è incompatibile con la coerenza di una teoria matematica, mentre ha un grande interesse la ricerca del maggior grado di autoreferenza compatibile con la coerenza. A tale proposito ripetiamo che simboli, formule, proposizioni, predicati nominati esplicitamente negli assiomi di questa *Nota* sono sempre oggetti della teoria TB, cioè elementi della collezione universale V .

Introduciamo ora l'operazione che dà l'ordine dei predicati, *Predord*:

G2. *Predord è un'operazione semplice che opera su tutti gli oggetti che godono della qualità Qpred.*

In questa *Nota* i predicati il cui ordine è un numero naturale sono *proposizioni*, se hanno ordine 0, e *operazioni semplici a valori predicati* di ordine immediatamente inferiore, se hanno ordine maggiore di 0 (notiamo tuttavia che non si escludono predicati di ordine non intero). Pertanto diamo gli assiomi:

G3. 1) *Se Qpred p , Predord $p = 0$ allora p è una proposizione;*

2) *Se Qpred p , Predord $p = h \in N$, $h > 0$, allora p è un'operazione semplice che agisce su ogni oggetto, e i cui valori sono predicati di ordine $h - 1$.*

I primi esempi di predicati sono prodotti a partire da oggetti qualunque mediante l'operazione *generatrice di predicati*, *Gpred*:

G4. *Gpred* è un'operazione semplice. Se x è un oggetto di arietà h , allora *Gpred* x è un predicato di ordine h . Inoltre:

$$Gpred z = \begin{cases} ((Gpred Id)z)z, & \text{se } Arz = 0; \\ (Gpred (Rfond h))z, & \text{se } Arz = h \in N, \quad h > 0. \end{cases}$$

Infine per ogni scelta degli oggetti x, y si ha $((Gpred Id)x)y = ((Gpred Id)y)x$.

Per l'assioma G3, dato un predicato di ordine elevato possiamo costruire una scala di predicati di ordine decrescente fino ai predicati di ordine 0 che sono proposizioni. Risulta comodo avere un'operazione che produce proposizioni direttamente da predicati di ordine arbitrariamente elevato; a tale scopo, ricordando la teoria dei sistemi finiti e in particolare le n -uple, introduciamo l'operazione di *valutazione sistemica* di predicati, *Sival*, che soddisfa l'assioma:

G5. *Sival* è un'operazione semplice; i valori di *Sival* sono operazioni semplici a valori proposizioni. Se p è un predicato di ordine 0, allora $(Sival p)\emptyset_2 = p$.

Se p è un predicato di ordine 1, allora per ogni x : $(Sival p)[x] = px$.

Se p è un predicato di ordine 2, allora per ogni x, y : $(Sival p)(x, y) = (px)y$.

Se p è un predicato di ordine $h > 2$, allora per ogni $x_1, \dots, x_h$: $(Sival p)(x_1, \dots, x_h) = (Sival (px_1))(x_2, \dots, x_h)$.

Le proposizioni del tipo $(Sival (Gpred z))(x_1, \dots, x_h)$, che sostanzialmente ci parlano del comportamento di *Rfond* h , saranno dette *proposizioni fondamentali*, mentre i predicati *Gpred*(*Rfond* h) saranno detti *predicati fondamentali*. Intuitivamente, se C è una collezione, la proposizione $(Gpred C)x$ corrisponde alla frase « x appartiene alla collezione C », se q è una qualità la proposizione $(Gpred q)x$ corrisponde alla frase « x gode della qualità q », se f è un'operazione semplice la proposizione $((Gpred f)x)y$ corrisponde alla frase «l'operazione f opera su x e dà come risultato y », ecc. In sostanza la proposizione $(Sival (Gpred z))(x_1, \dots, x_n)$ «dice» che si ha $z \downarrow \uparrow x_1 \dots x_n$ e questo suggerisce la notazione

$$"z \downarrow \uparrow x_1 \dots x_n" = (Sival (Gpred z))(x_1, \dots, x_n)$$

oppure la notazione alternativa

$$"z \downarrow (x_1, \dots, x_n)" = (Sival (Gpred z))(x_1, \dots, x_n)$$

in particolare, ad esempio, se q è una qualità, C è una collezione, r è una relazione binaria e f è un'operazione semplice useremo le notazioni

$$"qx" = "q \downarrow \uparrow x" = "q \downarrow [x]" = (Gpred q)x,$$

$$"x \in C" = "C \downarrow \uparrow x" = "C \downarrow [x]" = (Gpred C)x,$$

$$"rx y" = "r \downarrow \uparrow x y" = "r \downarrow (x, y)" = ((Gpred r)x)y,$$

$$"y = fx" = "f \downarrow \uparrow xy" = "f \downarrow (x, y)" = ((Gpred f)x)y.$$

Poniamo anche: $"y = x" = "x = y" = ((Gpred Id)x)y = ((Gpred Id)y)x$.

Notiamo che la proposizione $"y = fx" = "f \downarrow (x, y)"$ non va confusa con la proposizione $"y = (fx)" = "Id \downarrow (y, fx)"$, che esiste solo quando l'operazione f opera

su x , cioè quando esiste z tale che $z = fx$, e in tal caso coincide con " $y = z$ " = " $Id \downarrow (y, z)$ ".

Accanto alle proposizioni fondamentali ci sono quelle ottenibili dal *calcolo delle proposizioni e dei predicati*. Introduciamo quindi le *operazioni booleane*, cioè la *coniunzione* *Et*, la *disgiunzione* *Vel* e la *negazione* *Non*; inoltre introduciamo le quantificazioni *esistenziale*, *Exist*, ed *universale*, *Univ*, sulle quali postuliamo:

G6. *Et, Vel, Exist, Univ sono operazioni binarie; Non è un operazione semplice.*

Se α, β sono proposizioni allora esistono $Et \alpha\beta$, $Vel \alpha\beta$, $Non \alpha$ e sono proposizioni.

Se C è una collezione e p è un predicato di ordine 1, allora esistono $Exist C p$, $Univ C p$ e sono proposizioni.

Adottiamo le usuali notazioni: se α, β sono proposizioni, scriveremo $\alpha \& \beta$, $\alpha \vee \beta$, $\neg \alpha$ in luogo di $Et \alpha\beta$, $Vel \alpha\beta$, $Non \alpha$. Inoltre poniamo: $\alpha \rightarrow \beta = (\neg \alpha) \vee \beta$, $\alpha \leftrightarrow \beta = (\alpha \rightarrow \beta) \& (\beta \rightarrow \alpha)$. Se poi C è una collezione e p è un predicato di ordine 1, allora scriveremo $\exists_{Cp}$, $\forall_{Cp}$ in luogo di $Exist C p$, $Univ C p$. Talvolta al posto di $\exists_{Cp}$ e $\forall_{Cp}$ useremo la scrittura più familiare $\exists x \in C(p x)$, $\forall x \in C(p x)$ oppure $\exists x \in C(p z)$, $\forall z \in C p z$,

4. CALCOLO DEI PREDICATI

Passando al Calcolo dei Predicati propriamente detto, introduciamo alcune collezioni di simboli: *Spred*, la collezione dei simboli di predicati, *Svar*, la collezione dei simboli di variabili, *Scost*, la collezione dei simboli costanti, *Lett*, la collezione delle lettere, e *Form*, la collezione delle formule. L'operazione *Predord* associa ad ogni simbolo di predicato p un numero naturale e l'operazione di *saturazione*, *Sat*, associa a un simbolo di predicato e a una lista di lettere una formula; poniamo l'assioma:

H1. *Spred, Svar, Scost, Form sono collezioni a due a due disgiunte. Lett è una collezione e si ha $l \in Lett$ se e solo se $l \in Svar$ oppure $l \in Scost$. Se $p \in Spred$ allora esiste *Predord* p . *Sat* è un'operazione binaria; se $p \in Spred$, *Predord* $p = k \in \mathbb{N}$, $l_1, \dots, l_k \in Lett$ allora esiste *Sat* $p(l_1, \dots, l_k) \in Form$.*

Risulta conveniente anche il seguente assioma di abbondanza dei simboli:

H2. *Dati $n, v \in \mathbb{N}$, $n > 0$ esistono una n -upla di simboli di predicati distinti di ordine v , una n -upla di costanti distinte e una n -upla di variabili distinte.*

Estendiamo alle formule le operazioni del caso proposizionale, cioè la negazione *Non*, la disgiunzione *Vel*, la congiunzione, *Et*, la quantificazione esistenziale, *Exist* e la quantificazione universale, *Univ*; le due quantificazioni stavolta avranno come primo argomento una variabile e come secondo argomento una formula. Diamo perciò l'assioma:

H3. *Se φ, ψ sono formule e x è una variabile allora esistono $Non \varphi$, $Et \varphi \psi$, $Vel \varphi \psi$, $Exist x \varphi$, $Univ x \varphi$ e sono formule.*

Anche qui adottiamo le notazioni classiche: se φ, ψ sono formule e x è una variabile allora scriveremo $\varphi \& \psi$, $\varphi \vee \psi$, $\neg \varphi$, $\exists x \varphi$, $\forall x \varphi$ in luogo di *Et* $\varphi \psi$, *Vel* $\varphi \psi$, *Non* φ , *Exist* $x \varphi$, *Univ* $x \varphi$.

La semantica delle formule è definita dall'operazione di *interpretazione*, *Inter*, che è un'operazione definita su oggetti $\mathcal{M}$ corrispondenti ai *modelli* del calcolo dei predicati usuale; per tali $\mathcal{M}$, *Inter* $\mathcal{M}$ è un'operazione che agisce su oggetti «sintattici» ad esempio su formule, che possono essere precedute da una lista di variabili.

Diamo anzitutto l'assioma sull'interpretazione delle *formule atomiche*, cioè formule del tipo *Sat* $p(l_1, \dots, l_n)$:

H4. *Inter* è un'operazione semplice a valori operazionali. Se $q \in \text{Spred}$, $\text{Qpred } z$, $\text{Predord } q = \text{Predord } z = m$, $l_1, \dots, l_m \in \text{Lett}$, $A \in \text{Coll}$ allora

$$\left(\text{Inter} \left(A, \begin{pmatrix} q \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} l_1 & \dots & l_m \\ y_1 & \dots & y_m \end{pmatrix} \right) \right) \text{Sat } q(l_1, \dots, l_m) = (\text{Sival } z)(y_1 \dots y_m).$$

Le regole per le operazioni booleane sono le seguenti:

H5. Se φ, ψ sono formule ed esistono $(\text{Inter } \mathcal{M}) \varphi$, $(\text{Inter } \mathcal{M}) \psi$ e sono proposizioni allora:

- 1) esiste $(\text{Inter } \mathcal{M})(\neg \varphi) = \neg ((\text{Inter } \mathcal{M}) \varphi)$;
- 2) esiste $(\text{Inter } \mathcal{M})(\varphi \& \psi) = ((\text{Inter } \mathcal{M}) \varphi) \& ((\text{Inter } \mathcal{M}) \psi)$;
- 3) esiste $(\text{Inter } \mathcal{M})(\varphi \vee \psi) = ((\text{Inter } \mathcal{M}) \varphi) \vee ((\text{Inter } \mathcal{M}) \psi)$.

Per poter applicare H5 è talvolta necessario ampliare il modello; a tale scopo postuliamo:

H6. Siano dati $\mathcal{M} = (A, P, L)$, $\mathcal{M}' = (A, P', L')$ tali che valgono le seguenti condizioni:

- 1) $A \in \text{Coll}$;
- 2) $P, P', L, L' \in \text{Siuf}$, $P' \subseteq P$, $L' \subseteq L$;
- 3) se $\begin{pmatrix} q \\ z \end{pmatrix} \subseteq P$ allora $q \in \text{Spred}$, $\text{Qpred } z$, $\text{Predord } q = \text{Predord } z$;
- 4) se $\begin{pmatrix} l \\ y \end{pmatrix} \subseteq L$ allora $l \in \text{Lett}$;
- 5) $\varphi \in \text{Form}$;
- 6) $(\text{Inter } \mathcal{M}') \varphi = \alpha$, $\text{Qprop } \alpha$.

Allora si ha anche $(\text{Inter } \mathcal{M}) \varphi = \alpha$.

Per interpretare la quantificazione premettiamo l'interpretazione di coppie di variabili x e formule φ con predicati che «esprimono la dipendenza di φ da x », perciò diamo l'assioma:

H7. Se $A \in \text{Coll}$, $P, L \in \text{Siuf}$, $\varphi \in \text{Form}$, $x \in \text{Svar}$ e per ogni t esiste $\left(\text{Inter} \left(A, P, L \cup \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} \right) \right) \varphi$ ed è una proposizione, allora esiste $p = (\text{Inter}(A, P, L))(x, \varphi)$ ed è un predicato di ordine 1 tale che per ogni t si ha $p t = \left(\text{Inter} \left(A, P, L \cup \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} \right) \right) \varphi$.

L'interpretazione delle formule quantificate è data ora dall'assioma:

H8. Dati $A \in \text{Coll}$, $P, L \in \text{Siuf}$, $\varphi \in \text{Form}$, $x \in \text{Svar}$ tali che esiste $(\text{Inter}(A, P, L))(x, \varphi)$ ed è un predicato di ordine 1, si ha

$$(\text{Inter}(A, P, L)) \exists x \varphi = \exists_A ((\text{Inter}(A, P, L))(x, \varphi)),$$

$$(\text{Inter}(A, P, L)) \forall x \varphi = \forall_A ((\text{Inter}(A, P, L))(x, \varphi)).$$

Estendiamo l'assioma H7 in modo da interpretare formule «in dipendenza da liste arbitrarie di variabili»:

H9. Se $A \in \text{Coll}$, $P, L \in \text{Siuf}$, $\varphi \in \text{Form}$, $x_1, \dots, x_n \in \text{Svar}$ e per ogni $t_1, \dots, t_n$ esiste

$$\text{Inter} \left(A, P, L \cup \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_n \\ t_1 & \dots & t_n \end{pmatrix} \right) \varphi$$

ed è una proposizione, allora esiste $p = (\text{Inter}(A, P, L))(x_1, \dots, x_n, \varphi)$ ed è un predicato di ordine n tale che per ogni $t_1, \dots, t_n$ si ha

$$(\text{Sival } p)(t_1, \dots, t_n) = \text{Inter} \left(A, P, L \cup \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_n \\ t_1 & \dots & t_n \end{pmatrix} \right) \varphi.$$

Diamo infine un assioma che associa a ciascuna collezione predicati di ogni ordine $n \in \mathbb{N}$:

H10. Per ogni collezione C e per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste un predicato p_n di ordine n tale che $p_0 = \emptyset_2 \in C$, $p_1 x = [x] \in C$ e per $n \geq 2$ e per ogni $t_1, \dots, t_n$ si ha $(\text{Sival } p_n)(t_1, \dots, t_n) = (\text{Gpred } C)(t_1, \dots, t_n) = \langle t_1, \dots, t_n \rangle \in C$.

5. CRITERI DI VERITÀ DELLE PROPOSIZIONI

Dopo aver indicato delle operazioni che hanno come risultato proposizioni, dobbiamo affrontare il problema più difficile, cioè il «giudizio di verità» sulle proposizioni costruite. A tale scopo introdurremo una terna di qualità $QT = (Qver, Qfals, QVF)$, e fisseremo gli assiomi su queste qualità in modo da rispecchiare l'idea intuitiva che le proposizioni della teoria che godono di $Qver$ sono di fatto vere e la loro verità è «rilevabile» dall'«osservatorio» QT , e quelle che godono di $Qfals$ sono di fatto false e la loro falsità è «rilevabile» da QT . Introduciamo anche la qualità QVF di essere una proposizione «vera o falsa» secondo QT . Come vedremo tra poco, non è ragionevole postulare che ogni proposizione gode della qualità QVF .

Anzitutto postuliamo:

I1. *Qver*, *Qfals*, *QVF* sono qualità. Se x è un oggetto qualunque, allora:

- 1) non si ha mai simultaneamente *Qver* x e *Qfals* x ;
- 2) *QVF* x se e solo se *Qver* x oppure *Qfals* x ;
- 3) se *QVF* x allora *Qprop* x .

Per descrivere il comportamento della terna *QT*, cominciamo dalle proposizioni più semplici, cioè quelle fondamentali, e postuliamo:

I2. Per ogni $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ e per ogni z con $\text{Arz} = n$ si ha: *Qver* " $z \downarrow \uparrow x_1 \dots x_n$ " se e solo se $z \downarrow \uparrow x_1 \dots x_n$.

In sostanza se una proposizione fondamentale è vera allora gode di *Qver*, se è falsa l'assioma I2 non dice se gode o non gode di *Qfals*. Diamo ora alcune regole che riguardano il comportamento delle proposizioni che possono essere ottenute mediante le operazioni dell'assioma G6:

I3. 1) Se le proposizioni $\alpha, \beta, \alpha \vee \beta$ godono di *QVF*, allora *Qver* $(\alpha \vee \beta)$ se e solo se *Qver* α oppure *Qver* β .

2) Se le proposizioni $\alpha, \beta, \alpha \& \beta$ godono di *QVF*, allora *Qver* $(\alpha \& \beta)$ se e solo se *Qver* α e *Qver* β .

3) Se le proposizioni $\alpha, \neg \alpha$ godono di *QVF*, allora *Qver* $(\neg \alpha)$ se e solo se *Qfals* α .

4) Se C è una collezione, p è un predicato di ordine 1, $\exists_C p$ gode di *QVF* e $p x$ gode di *QVF* per ogni $x \in C$, allora *Qver* $(\exists_C p)$ se e solo se per qualche $x \in C$ si ha *Qver* $(p x)$.

5) Se C è una collezione, p è un predicato di ordine 1, $\forall_C p$ gode di *QVF* e $p x$ gode di *QVF* per ogni $x \in C$, allora *Qver* $(\forall_C p)$ se e solo se per ogni $x \in C$ si ha *Qver* $(p x)$.

L'assioma I3 sulla verità delle proposizioni composte contiene l'ipotesi che tutte le proposizioni coinvolte godano di *QVF*. Sarebbe desiderabile poter introdurre un assioma che dice che *tutte* le proposizioni godono di *QVF*, ma ciò è escluso dal seguente teorema:

TEOREMA 1. Esiste una proposizione che non gode di *QVF*.

DIMOSTRAZIONE: Supponiamo per assurdo che ogni proposizione goda di *QVF*.

Consideriamo un simbolo di predicato p di ordine 3, cinque costanti c_1, c_2, c_3, c_4, c_5 e due variabili x, y . Poniamo

$$\begin{aligned} \varphi &= \exists y (p(c_1, c_2, x) \& p(c_3, x, c_4) \& p(x, x, y) \& p(c_1, c_5, y)); \\ \mathcal{M} &= \left(V, \left(\begin{array}{c} p \\ \text{Rfond } 2 \end{array} \right), \left(\begin{array}{ccccc} c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & c_5 \\ \text{Rfond } 1 & \text{Qpred} & \text{Predord} & 1 & \text{Qfals} \end{array} \right) \right); \\ \theta &= (\text{Inter } \mathcal{M})(x, \varphi). \end{aligned}$$

Si avrebbe allora per ogni z *Qver* (θz) se e solo se *Qpred* z , *Predord* $z = 1$, *Qfals* (zz) , cioè θz sarebbe in sostanza la frase « z è un predicato di ordine 1, la proposizione zz gode della proprietà *Qfals*».

In particolare, prendendo $z = \theta$, si avrebbe: $Qver(\theta\theta)$ se e solo se $Qfals(\theta\theta)$, quindi la proposizione $\theta\theta$ non potrebbe godere di QVF. Q.E.D.

Questo teorema appartiene allo stesso filone di antinomie antiche e moderne che comprende l'antinomia del mentitore, l'antinomia di Russell e quella di Tarski (non definibilità della verità). La brevità della dimostrazione ci fa pensare che la teoria base, arricchita con gli assiomi precedenti, sia un buon ambiente per lo studio delle antinomie.

6. METAQUALITÀ

La dimostrazione del Teorema 1 ci mostra che la terna QT non è in grado di classificare come vere o false le proposizioni che si ottengono da $Gpred$ e $Rfond$ mediante le operazioni del § 4. Poiché questa classificazione appare desiderabile e rappresenterebbe il naturale coronamento dell'innesto del calcolo dei predicati nella teoria base TB, sembra opportuno tentare comunque di realizzarla. Una via ragionevole per raggiungere questo scopo sembra quella d'introdurre, dopo le qualità, altri oggetti che chiameremo *metaqualità*. In particolare considereremo una terna di metaqualità $MT = (Mver, Mfals, MVF)$ che «rassomiglia» alla terna QT ma è nello stesso tempo più potente e indipendente dalle relazioni $Rfond\ b$. Anche in questo caso, come per QT , una proposizione α gode di $Mver$ quando α è vera e la sua verità è rilevabile dall'«osservatorio» MT , e una proposizione α gode di $Mfals$ quando α è falsa e la sua falsità è rilevabile dall'«osservatorio» MT . Verità e falsità rilevate da QT sono pure rilevate da MT e inoltre MT è in grado di classificare tutte le proposizioni che si ottengono dai predicati $Gpred(Rfond\ b)$ mediante le operazioni del § 4, come risulterà dagli assiomi che ora esporremo.

Introduciamo anzitutto una nuova qualità che permette di distinguere tra teoria e metateoria, cioè la qualità di essere una *metaqualità*, $Qmetaqual$; perciò diamo l'assioma:

L1. *Qmetaqual è una qualità. Se Qmetaqual μ allora $Ar\mu = 0$.*

Le metaqualità hanno dunque arietà 0 e quindi la loro azione non è descritta da $Rfond\ b$ né da $Gpred$ in quanto, per gli assiomi visti, si ha $Gpred\mu = \langle \mu = \mu \rangle$.

Per le metaqualità adotteremo notazioni analoghe a quelle adottate per le qualità e quindi, data una metaqualità μ , scriveremo $\mu.x$ per dire che *l'oggetto x gode della metaqualità μ* .

Introduciamo ora, come preannunciato, la terna $MT = (Mver, Mfals, MVF)$:

L2. *Mver, Mfals, MVF sono metaqualità. Se x è un oggetto qualunque, allora:*

- 1) *Non si ha mai simultaneamente $Mver\ x$ e $Mfals\ x$;*
- 2) *$MVF\ x$ se e solo se $Mver\ x$ oppure $Mfals\ x$;*
- 3) *se $MVF\ x$ allora $Qprop\ x$;*
- 4) *$Qver\ x$ implica $Mver\ x$;*
- 5) *$Qfals\ x$ implica $Mfals\ x$.*

Per la terna *MT* valgono assiomi analoghi e più forti di quelli che valevano per la terna *QT*. La maggiore forza consiste nel fatto che *tutte le proposizioni fondamentali godono della metaqualità MVF e non vi sono negli assiomi che riguardano le proposizioni costruite con le operazioni del § 4 condizioni di giudicabilità analoghe a quelle che intervenivano nell'assioma I3*. Precisamente valgono i seguenti assiomi:

L3. Se z è un oggetto di arietà $n \in N$ allora per ogni $x_1, \dots, x_n$ si ha: $MVF "z \downarrow x_1 \dots x_n"$, $Mver "z \downarrow x_1 \dots x_n"$ se e solo se $z \downarrow x_1 \dots x_n$.

Si noti che dagli assiomi I2, L2 e L3 segue che *sulle proposizioni fondamentali Mver equivale a Qver*, mentre in base agli stessi assiomi proposizioni fondamentali che godono di *Mfals* potrebbero non godere di *Qfals*.

L4. 1) Se le proposizioni α, β godono di *MVF*, allora anche $\alpha \vee \beta$ ne gode, e si ha $Mver(\alpha \vee \beta)$ se e solo se $Mver \alpha$ oppure $Mver \beta$.

2) Se le proposizioni α, β godono di *MVF*, allora anche $\alpha \& \beta$ ne gode, e si ha $Mver(\alpha \& \beta)$ se e solo se $Mver \alpha$ e $Mver \beta$.

3) Se la proposizione α gode di *MVF*, allora anche $\neg \alpha$ ne gode, e si ha $Mver(\neg \alpha)$ se e solo se $Mfals \alpha$.

4) Se C è una collezione, p è un predicato di ordine 1 e px gode di *MVF* per ogni $x \in C$, allora anche $\exists_C p$ gode di *MVF*, e si ha $Mver(\exists_C p)$ se e solo se per qualche $x \in C$ si ha $Mver(px)$.

5) Se C è una collezione, p è un predicato di ordine 1 e px gode di *MVF* per ogni $x \in C$, allora anche $\forall_C p$ gode di *MVF* e si ha $Mver(\forall_C p)$ se e solo se per ogni $x \in C$ si ha $Mver(px)$.

Gli assiomi L3, L4 permettono in particolare di valutare tutte le interpretazioni (*Inter* $\mathcal{M}$) φ di formule costruite a partire da formule atomiche con l'uso di operazioni booleane e di quantificazioni, nel caso in cui nel modello $\mathcal{M} = (A, P, L)$ i valori del sistema P siano predicati del tipo *Gpred* (*Rfond* h) ed il modello $\mathcal{M}$ sia «abbastanza ampio» per assicurare che *Inter* $\mathcal{M}$ operi su φ dando come risultato una proposizione.

Possiamo ora dare un teorema ispirato alla classica *antinomia del mentitore*:

TEOREMA 2. Se *Qprop* p , *MVF* p , $Mver(p \leftrightarrow "Qfals p")$, allora si ha *Mfals* p e *Mfals* "*QVF* p ".

Notiamo che dagli assiomi finora esposti segue l'esistenza di proposizioni p che verifichino le ipotesi del Teorema 2, un esempio è la proposizione $\theta\theta$ costruita nella dimostrazione del Teorema 1. Chi volesse identificare il «mentitore» della classica antinomia con una persona che afferma una proposizione p soddisfacente le ipotesi del Teorema 2, potrebbe dire che il mentitore può essere smentito da chi si pone al «livello» *MT* ma non da chi si pone al «livello» *QT*.

OSSERVAZIONE. Non imponiamo che tutte le proposizioni debbano godere della metaqualità *MVF*, non volendo escludere né l'esistenza di proposizioni «insensate» a

cui non si può attribuire un valore di verità, né quella di proposizioni sensate ma non valutabili dalla terna *Mver*, *Mfals*, *MVF*.

Sostanzialmente abbiamo cercato, negli assiomi su *Mver*, *Mfals*, *MVF*, di scrivere degli assiomi «saggi» che non contraddicono ciò che il buonsenso e la saggezza ci dicono sulla verità e falsità, ma non pretendono di esaurire tutto ciò che buonsenso e saggezza ci potrebbero suggerire su questo inesauribile argomento.

7. PROBLEMI APERTI

Questo innesto della logica elementare nella teoria base presenta differenti ordini di questioni, che proponiamo all'attenzione di tutti i lettori di questa *Nota*.

i) Il primo problema già segnalato nella introduzione è quello della formalizzazione completa nella logica del primo ordine della teoria esposta in modo semiformale in questa *Nota*. Partendo da tale formalizzazione la teoria potrebbe essere analizzata criticamente dai due punti di vista complementari: ricerca di eventuali (anche se poco probabili) contraddizioni, ricerca di teoremi di coerenza relativa a sistemi di assiomi usualmente considerati molto «affidabili».

ii) Sarebbe interessante innestare sulla teoria base qualche formalismo diverso dal calcolo dei predicati del primo ordine, come calcolo dei predicati di ordine superiore, logiche modali, lambda-calcolo, ecc.

iii) Si potrebbero studiare possibili «rafforzamenti» della teoria esposta in questa *Nota*; sarebbe interessante sia la formulazione di rafforzamenti significativi e coerenti, sia l'eventuale scoperta di rafforzamenti apparentemente naturali, belli, interessanti che sottoposti ad analisi più accurata rivelano contraddizioni occulte e non banali di tipo diverso da quello delle antinomie tradizionali (cfr. [19]). Per esempio sarebbe interessante verificare la possibilità che *ogni* proposizione goda della metaqualità *MVF*, cioè che la terna *MT* possa classificare ogni proposizione; questo naturalmente esclude l'esistenza di un predicato interno che gode di *Qpred* corrispondente al «predicato esterno» μx di godimento di una qualunque metaqualità μ . Questo suggerisce di considerare terne di metaqualità μ_1, μ_2, μ_3 più forti di *QT* ma meno forti di *MT*; fra queste terne potrebbe essercene qualcuna che schematizza le nozioni di verificabilità effettiva, dimostrabilità, computabilità, ecc. In alternativa si potrebbero introdurre i *test booleani*, operazioni *f* tali che se $f\alpha = 1$ allora *Mver* α , e se $f\alpha = 0$ allora *Mfals* α .

In conclusione questa *Nota* ci sembra un buon punto di partenza per un'ulteriore esplorazione dei problemi di antinomie e autodescrizioni e, speriamo, un'occasione di discussione ed eventualmente di critica da parte di matematici e logici ma anche di informatici, filosofi, linguisti, economisti, studiosi di scienze sperimentali, ecc.

BIBLIOGRAFIA

- [1] H. P. BARENDREGT, *The Lambda-Calculus*. Amsterdam 1981.
- [2] Y. BAR HILLEL - A. A. FRAENKEL - A. LEVY, *Foundations of Set Theory*. Amsterdam 1973.
- [3] A. CHURCH, *Set theory with an universal set*. In: L. HENKIN et al. (eds.), *Proceedings of the Tarski Symposium*. Proc. of Symp. P. Math. XXV, Rhode Island 1974, 297-308.

- [4] M. CLAVELLI, *Variabili e teoria A*. Rend. Sem. Fac. Sci. Univ. Cagliari, (2) 59, 1985, 125-130.
- [5] M. CLAVELLI - E. DE GIORGI - M. FORTI - V. M. TORTORELLI, *A self-reference oriented theory for the Foundations of Mathematics*. In: *Analyse Mathématique et applications. Contributions en l'honneur de Jacques-Louis Lions*. Gauthiers-Villars, Parigi 1988, 67-115.
- [6] H. B. CURRY - R. FEYS, *Combinatory Logic*. Amsterdam 1958.
- [7] E. DE GIORGI, *Contributo*. In: *Fundamental Principles of Mathematics*, Plenary Session of the Pontifical Academy of Sciences (25-29 October 1994), in corso di stampa.
- [8] E. DE GIORGI - M. FORTI, *Una teoria quadro per i fondamenti della Matematica*. Atti Acc. Lincei Rend. fis., s. 8, vol. 79, 1985, 55-67.
- [9] E. DE GIORGI - M. FORTI, « 5×7 »: *A Basic Theory for the Foundations of Mathematics*. Preprint di Matematica, n. 74, Scuola Normale Superiore, Pisa 1990.
- [10] E. DE GIORGI - M. FORTI - V. M. TORTORELLI, *Sul problema dell'autoriferimento*. Atti Acc. Lincei Rend. fis., s. 8, vol. 80, 1986, 363-372.
- [11] E. DE GIORGI - M. FORTI - G. LENZI, *Una proposta di teorie base dei Fondamenti della Matematica*. Rend. Mat. Acc. Lincei, s. 9, vol. 5, 1994, 11-22.
- [12] E. DE GIORGI - M. FORTI - G. LENZI, *Introduzione delle variabili nel quadro delle teorie base dei Fondamenti della Matematica*. Rend. Mat. Acc. Lincei, s. 9, vol. 5, 1994, 117-128.
- [13] S. FEFERMAN, *Constructive theories of functions and classes*. In: M. BOFFA et al. (eds.), *Logic Colloquium 1978*. Amsterdam 1979.
- [14] M. FORTI - F. HONSELL, *Models of self-descriptive set theories*. In: F. COLOMBINI et al. (eds.), *Partial Differential Equations and the Calculus of Variations - Essays in Honor of Ennio De Giorgi*. Boston 1989, 473-518.
- [15] M. FORTI - F. HONSELL, *Sets and classes within the basic theories for the Foundations of Mathematics*. In: F. MONTAGNA - A. URSINI (eds.), *Proceedings of the International Conference on Logic and Algebra in Memory of Roberto Magari*. 1994, in corso di pubblicazione.
- [16] G. FREGE, *Grundgesetze der Arithmetik, begriffsschriftlich abgeleitet*. Vol. 1, Jena 1893; vol. 2, Phole, Jena 1903 (ristampato Olms, Hildesheim 1962).
- [17] J. M. GLUBRECHT - A. OBERSCHLIP - G. TODT, *Klassenlogik*. Zurigo 1983.
- [18] M. GRASSI - G. LENZI - V. M. TORTORELLI, *A formalization of a basic theory for the foundations of Mathematics*. Preprint n. 1.98.804, Dipartimento di Matematica, Università di Pisa, 1994.
- [19] G. LENZI, *Estensioni contraddittorie della teoria Ampia*. Atti Acc. Lincei Rend. fis., s. 8, vol. 83, 1989, 13-28.
- [20] G. LENZI - V. M. TORTORELLI, *Introducing predicates into a basic theory for the foundations of Mathematics*. Preprint di Matematica n. 51, Scuola Normale Superiore, Pisa.
- [21] W. V. O. QUINE, *New foundations for mathematical logic*. Amer. Math. Monthly, 44, 1973, 70-80.
- [22] B. RUSSELL - A. N. WHITEHEAD, *Principia Mathematica*. Cambridge 1925.
- [23] D. SCOTT, *Combinators and classes*. In: C. BÖHM (eds.), *λ -Calculus and Computer Science Theory*. Lect. Notes Comp. Sc., 37, Berlino 1975.
- [24] J. VON NEUMANN, *Eine Axiomatisierung der Mengenlehre*. J. f. Reine und Angew. Math., 154, 1925, 219-240.

E. De Giorgi, G. Lenzi:
Scuola Normale Superiore
Piazza dei Cavalieri, 7 - 56126 Pisa

M. Forti:
Istituto di Matematiche Applicate «U. Dini»
Università degli Studi di Pisa
Via Bonanno, 25B - 56100 Pisa

V. M. Tortorelli:
Dipartimento di Matematica
Università degli Studi di Pisa
Via Buonarroti, 2 - 56100 Pisa