Atti Accademia Nazionale Lincei Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti Lincei
Matematica e Applicazioni

Giovanni Bellettini, Maurizio Paolini

Teoremi di confronto tra diverse nozioni di movimento secondo la curvatura media

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti Lincei. Matematica e Applicazioni, Serie 9, Vol. **6** (1995), n.1, p. 45–54.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLIN_1995_9_6_1_45_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti Lincei. Matematica e Applicazioni, Accademia Nazionale dei Lincei, 1995.

Rend. Mat. Acc. Lincei
s. 9, v. 6:45-54 (1995)

Calcolo delle variazioni. — *Teoremi di confronto tra diverse nozioni di movimento secondo la curvatura media.* Nota di Giovanni Bellettini e Maurizio Paolini, presentata (*) dal Socio E. De Giorgi.

Abstract. — *Comparison theorems between different notions of motion by mean curvature.* In this *Note* we state some comparison theorems between De Giorgi's definition of motion by mean curvature using the barriers method and the evolutions defined with the methods of Evans-Spruck, Chen-Giga-Goto, Giga-Goto-Ishii-Sato.

Key words: Nonlinear partial differential equations of parabolic type; Mean curvature flow; Viscosity solutions; Barriers.

Riassunto. — In questa *Nota* presentiamo alcuni teoremi di confronto tra il movimento secondo la curvatura media ottenuto con il metodo delle minime barriere di De Giorgi e i movimenti definiti con i metodi di Evans-Spruck, Chen-Giga-Goto, Giga-Goto-Ishii-Sato.

1. Introduzione

In questi ultimi anni sono state proposte varie definizioni di movimento generalizzato secondo la curvatura media, inserite nell'ambito di teorie diverse, come la teoria geometrica della misura e la teoria delle soluzioni delle equazioni paraboliche nel senso della viscosità. L'opportunità di tali generalizzazioni nasce dal fatto che le ipersuperfici lisce che si evolvono secondo la curvatura media, non sempre rimangono regolari, ma, dopo un certo tempo, possono sviluppare delle singolarità. Prima di elencare gli approcci generalizzati che consentono di dare un senso al movimento anche dopo l'eventuale formazione di punti singolari, ricordiamo che, in assenza di singolarità, il moto secondo la curvatura media è stato studiato con metodi di geometria differenziale [20, 21, 25-27], e che il moto della frontiera di un insieme può essere caratterizzato mediante una semplice equazione differenziale soddisfatta dalla distanza con segno dalla stessa frontiera [3, 14]. Tra gli approcci generalizzati considerati nella letteratura matematica segnaliamo: 1) l'approccio di Brakke [6] che studia i movimenti secondo la curvatura nel contesto della teoria dei varifolds; 2) l'approccio di Evans-Spruck [17-19], Chen-Giga-Goto [8], Giga-Goto-Ishii-Sato [24], che considerano le linee di livello delle soluzioni, nel senso della viscosità, di alcune equazioni differenziali di tipo parabolico, ove la nozione di soluzione viscosa usata è quella che risale ai lavori di Crandall e P.-L. Lions [10], P.-L. Lions [34], Jensen [33] (si veda anche [28-32, 36-38]); 3) le soluzioni che si ottengono come limiti dell'equazione di reazione-diffusione di Allen-

(*) Nella seduta del 3 novembre 1994.

Cahn [3, 7, 11, 12, 15, 16, 35]; 4) l'approccio variazionale di Almgren-Taylor-Wang [1] e possibili generalizzazioni con il metodo dei movimenti minimizzanti di De Giorgi [13]; 5) il metodo della regolarizzazione ellittica di Ilmanen [31]; 6) il metodo delle minime barriere di De Giorgi [14].

La varietà di questi approcci sembra dovuta al fatto che il problema dei movimenti secondo la curvatura media è un importante punto di incontro tra l'analisi non lineare, il calcolo delle variazioni, la teoria geometrica della misura; da una parte esso infatti rappresenta un ottimo banco di prova di teorie e metodi già usati nello studio di altri problemi, dall'altro può essere una buona fonte di ispirazione che suggerisce problemi, teorie e metodi nuovi, suscettibili di ampie applicazioni. Ci sembra quindi che un confronto sistematico tra le diverse impostazioni del problema dei movimenti secondo la curvatura media ora indicati potrebbe avere un notevole interesse, e per cominciare tale confronto indichiamo alcuni primi risultati riguardanti il metodo delle minime barriere di De Giorgi e i metodi di Evans-Spruck, Chen-Giga-Goto, Giga-Goto-Ishii-Sato. Le dimostrazioni complete di tali risultati appariranno in [5].

2. Alcune notazioni

Dato un insieme $C \subseteq \boldsymbol{R}^n$, indichiamo con $\mathrm{int}(C)$, $\overline{C}$, e ∂C la parte interna, la chiusura, e la frontiera di C, rispettivamente. Denotiamo con $\mathcal{H}^h$ la misura di Hausdorff h-dimensionale in $\boldsymbol{R}^n$, per h intero, $0 \leqslant h \leqslant n$. Indichiamo con $\mathcal{P}(\boldsymbol{R}^n)$ la famiglia dei sottoinsiemi di $\boldsymbol{R}^n$, e con S^n lo spazio delle matrici $n \times n$ simmetriche reali. Se $p \in \boldsymbol{R}^n$, indichiamo con $p \otimes p$ la matrice individuata dalla formula $(p \otimes p)_{ij} = p_i p_j$.

Nel seguito $g \in \mathcal{C}^\infty(\boldsymbol{R}^n \times [0, +\infty[)$ sarà una funzione data, che verifica la seguente condizione: esiste una costante $\sigma > 0$ tale che

$$|g(x,t) - g(y,t)| \leqslant \sigma |x - y|, \qquad \forall x, y \in \boldsymbol{R}^n, \ \forall t \in [0, +\infty[. \tag{2.1}$$

La funzione g avrà, nei successivi paragrafi, il significato di un termine forzante.

3. Definizione di Evans-Spruck, Chen-Giga-Goto, Giga-Goto-Ishii-Sato

Richiamiamo la definizione di soluzione viscosa per una classe di equazioni paraboliche (si veda [8, 9, 17, 22, 23]). Sia T un numero positivo, e poniamo $J = [0, T] \times \boldsymbol{R}^n \times (\boldsymbol{R}^n \setminus \{0\}) \times S^n$. Sia $F: J \to \boldsymbol{R}$ una funzione continua, e indichiamo con $F_\star$ (rispettivamente $F^\star$) l'inviluppo semicontinuo inferiormente (rispettivamente l'inviluppo semicontinuo superiormente) di F in $[0, T] \times \boldsymbol{R}^n \times \boldsymbol{R}^n \times S^n$. Supponiamo che F verifichi le seguenti proprietà:

(*i*) F è ellittica degenere, cioè $F(t, x, p, X + Y) \leqslant F(t, x, p, X)$ in J quando Y è semidefinita positiva;

(*ii*) $-\infty < F_\star(t, x, 0, 0) = F^\star(t, x, 0, 0) < +\infty$ per ogni $(t, x) \in [0, T] \times \boldsymbol{R}^n$;

(*iii*) F soddisfa una condizione di equicontinuità rispetto a x, cioè esiste una costante $\sigma > 0$ tale che $|F(t,x,p,X) - F(t,y,p,X)| \leqslant \sigma|x-y|(|p|+1)$ per ogni $y \in \boldsymbol{R}^n$ e $(t,x,p,X) \in J$;

(*iv*) F è «geometrica», cioè $F(t,x,\lambda p, \lambda X + \sigma p \otimes p) = \lambda F(t,x,p,X)$ per ogni $\lambda > 0$, $\sigma \in \boldsymbol{R}$, $(t,x,p,X) \in J$;

(*v*) esiste una funzione $c \in \mathcal{C}^1([0,+\infty[)$ uniformemente positiva tale che $F_\star(t,x,p,-\mathrm{Id}) \leqslant c(|p|)$, $F^\star(t,x,p,\mathrm{Id}) \geqslant -c(|p|)$, per ogni $(t,x,p) \in [0,T] \times \boldsymbol{R}^n \times \boldsymbol{R}^n$.

Sia $u_0 : \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}$ una funzione continua che assume un valore costante β fuori da un insieme limitato di $\boldsymbol{R}^n$. Diciamo che una funzione $u \in \mathcal{C}(\boldsymbol{R}^n \times [0,T]) \cap L^\infty(\boldsymbol{R}^n \times [0,T])$ è una sottosoluzione viscosa (rispettivamente una soprasoluzione viscosa) dell'equazione

$$u_t + F(t,x,\nabla u, \nabla^2 u) = 0 \quad \text{in } \boldsymbol{R}^n \times [0,T] \tag{3.1}$$

con condizione iniziale

$$u(x,0) = u_0(x) \tag{3.2}$$

se, ogni volta che $(x_0,t_0) \in \boldsymbol{R}^n \times [0,T]$ e $u(x,t) \leqslant u(x_0,t_0) + p\cdot(x-x_0) + q(t-t_0) + (1/2)(x-x_0)^T R(x-x_0) + o(|x-x_0|^2 + |t-t_0|)$ per $(x,t) \to (x_0,t_0)$, $(x,t) \in \boldsymbol{R}^n \times [0,T]$, (rispettivamente $u(x,t) \geqslant u(x_0,t_0) + p\cdot(x-x_0) + q(t-t_0) + (1/2)(x-x_0)^T R(x-x_0) + o(|x-x_0|^2 + |t-t_0|)$ per $(x,t) \to (x_0,t_0)$, $(x,t) \in \boldsymbol{R}^n \times [0,T]$), per qualche $p \in \boldsymbol{R}^n$, $q \in \boldsymbol{R}$, $R \in S^n$, allora $q + F_\star(t_0,x_0,p,X) \leqslant 0$ (rispettivamente $q + F^\star(t_0,x_0,p,X) \geqslant 0$).

Una funzione $u \in \mathcal{C}(\boldsymbol{R}^n \times [0,T]) \cap L^\infty(\boldsymbol{R}^n \times [0,T])$ si dice soluzione viscosa di (3.1)-(3.2) se u è contemporaneamente una sottosoluzione viscosa e una soprasoluzione viscosa.

Sotto le ipotesi fatte su F e su u_0, Giga-Goto-Ishii-Sato hanno dimostrato [24, Th.4.9] che esiste un'unica soluzione nel senso della viscosità del problema (3.1)-(3.2), e tale soluzione assume costantemente il valore β fuori da un compatto di $\boldsymbol{R}^n \times [0,T]$.

Nel seguito considereremo la seguente scelta particolare di F:

$$F(t,x,p,X) = -\operatorname{traccia}\left(\left(\mathrm{Id} - \frac{p \otimes p}{|p|^2}\right) X\right) + |p| g(x,t). \tag{3.3}$$

Sia E un insieme chiuso con frontiera limitata; per ogni $t \in [0,+\infty[$ indichiamo con $V(E,g)(t)$ il movimento di E secondo la curvatura media con termine forzante g nel senso della viscosità. Questo significa che

$$V(E,g)(t) = \{v(\cdot,t) \leqslant 0\}, \qquad \forall t \in [0,+\infty[, \tag{3.4}$$

dove $v \in \mathcal{C}(\boldsymbol{R}^n \times [0,+\infty[) \cap L^\infty(\boldsymbol{R}^n \times [0,+\infty[)$ è l'unica soluzione in senso viscoso del problema (3.1)-(3.2) dove F è scelta come in (3.3) o, equivalentemente, v è l'unica soluzione viscosa di

$$\begin{cases} v_t - |\nabla v| \operatorname{div}(\nabla v / |\nabla v|) + |\nabla v| g = 0 , \\ v(x, 0) = v_0(x) , \end{cases} \tag{3.5}$$

e la funzione continua v_0 è costante al di fuori di un certo insieme limitato ed è scelta in modo che $E = \{x \in \boldsymbol{R}^n : v_0(x) \leqslant 0\}$ [23, 24].

Se E è un insieme aperto con frontiera limitata, prenderemo $V(E, g)(t) = \{v(\cdot, t) < 0\}$, ove v_0 è scelta in modo che E sia l'insieme dei punti $x \in \boldsymbol{R}^n$ tali che $v_0(x) < 0$.

Dato l'insieme E con frontiera limitata, quando scriveremo $V(E, g)$ implicitamente assumeremo che E è o aperto o chiuso, e $V(E, g)$ è definito con le convenzioni descritte sopra.

Notiamo che il collegamento tra il caso di E aperto e il caso di E chiuso è realizzato dalla formula: $\boldsymbol{R}^n \setminus V(E, g)(t) = V(\boldsymbol{R}^n \setminus E, -g)(t)$, per ogni $t \in [0, +\infty[$.

4. Definizione generale di barriera e minibarriera

Richiamiamo la definizione di barriera e di minibarriera secondo De Giorgi [14].

Definizione 4.1. *Sia S un insieme generico e sia $r \subseteq S^2$. Supponiamo che $S = \bigcap \{E : r \subseteq E^2\}$ (cioè S sia l'ambiente della relazione binaria r). Sia $\mathcal{F}$ una famiglia di funzioni di una variabile reale che soddisfa la seguente proprietà: per ogni $f \in \mathcal{F}$ esistono due numeri reali a, b tali che $a < b$, $f : [a, b] \to S$. Diremo che una funzione ϕ è una barriera associata alla coppia $(r, \mathcal{F})$, e scriveremo $\phi \in \mathrm{Barr}(r, \mathcal{F})$, se esiste un insieme convesso $I \subseteq \boldsymbol{R}$ tale che $\phi : I \to S$ e, quando a, b, f soddisfano le condizioni $[a, b] \subseteq I$, $f : [a, b] \to S$, $f \in \mathcal{F}$, $(f(a), \phi(a)) \in r$, allora si ha $(f(b), \phi(b)) \in r$.*

Definiamo gli insiemi minoranti e maggioranti, minimizzanti e massimizzanti, relativi a r, nel modo che segue: per ogni $E \subset S$ poniamo

$$\mathrm{Minor}(r, E) = \{x \in S : (x, y) \in r, \ \forall y \in E\} ,$$
$$\mathrm{Maior}(r, E) = \{x \in S : (y, x) \in r, \ \forall y \in E\} ,$$
$$\mathrm{Mini}(r, E) = E \cap \mathrm{Minor}(r, E) , \quad \mathrm{Maxi}(r, E) = E \cap \mathrm{Maior}(r, E) .$$

Se poi all'insieme $\mathrm{Mini}(r, E)$ (rispettivamente $\mathrm{Maxi}(r, E)$) appartiene un solo elemento, tale elemento verrà indicato con il simbolo $\min(r, E)$ (rispettivamente $\max(r, E)$)

Diamo ora la definizione di barriera minimale, o più brevemente di minibarriera.

Definizione 4.2. *Sia $x \in S$; se esiste una funzione $\sigma : [0, +\infty[\to S$ definita per ogni $t \in [0, +\infty[$ dalla formula seguente:*

$$\sigma(t) = \min(r, \{\phi(t) : \phi : [0, +\infty[\to S, \ \phi \in \mathrm{Barr}(r, \mathcal{F}), \ (x, \phi(0)) \in r\}) , \tag{4.1}$$

diremo che σ è la minibarriera associata a x, r, $\mathcal{F}$ e scriveremo $\sigma = \mathrm{mibar}(x, r, \mathcal{F})$.

È importante osservare che la definizione di barriera è molto generale e, per quanto riguarda il problema del movimento secondo la curvatura, può essere applicata anche nel caso in cui la varietà in movimento abbia codimensione arbitraria (si veda [2, 14]).

5. Barriere e minibarriere per il movimento per curvatura media

Vediamo come particolarizzare le precedenti definizioni nel caso del movimento secondo la curvatura media. Per ottenere la definizione di barriera e di minibarriera per il movimento di una ipersuperficie secondo la curvatura media con termine forzante g poniamo nella Definizione 4.2: $r = \{(E, L): E \subseteq L \subseteq \boldsymbol{R}^n\}$, $S = \mathcal{P}(\boldsymbol{R}^n)$ e scegliamo la famiglia $\mathcal{F}$, che indicheremo con $\mathcal{F}_g$, nel modo seguente:

Definizione 5.1. *Se $a, b \in \boldsymbol{R}$, $a < b$, una funzione $f: [a, b] \to \mathcal{P}(\boldsymbol{R}^n)$ appartiene a $\mathcal{F}_g$ se e solo se sono soddisfatte le seguenti tre condizioni:*

(1) *l'insieme $\{(x, t): a \leqslant t \leqslant b, x \in f(t)\}$ è compatto in $\boldsymbol{R}^{n+1}$;*

(2) *se $d(\cdot, t)$ indica la distanza con segno dall'insieme $f(t)$ negativa in $f(t)$ per $t \in [a, b]$, cioè*

$$d(x, t) = \operatorname{dist}(x, f(t)) - \operatorname{dist}(x, \boldsymbol{R}^n \setminus f(t)), \quad \forall x \in \boldsymbol{R}^n, \ \forall t \in [a, b],$$

allora esiste un aperto $A \subseteq \boldsymbol{R}^n$ tale che $d \in \mathcal{C}^\infty(A \times [a, b])$ e $\partial f(t) \subseteq A$ per ogni $t \in [a, b]$;

(3) *la seguente equazione in d è verificata su $\partial f(t)$:*

$$\frac{\partial d}{\partial t} - \Delta d + g = 0, \quad \forall t \in [a, b], \ \forall x \in \partial f(t). \tag{5.1}$$

Notiamo che la condizione (2) impone che l'insieme $f(t)$ sia di classe $\mathcal{C}^\infty$ per ogni $t \in [a, b]$, e la condizione (3) implica che $\partial f(t)$ si evolve in modo regolare nel tempo $t \in [a, b]$ secondo la curvatura media con termine forzante g. La classe $\mathcal{F}_g$ è pertanto la famiglia di tutte queste evoluzioni regolari. Nel seguito ometteremo la relazione r che d'ora in poi sarà la relazione di inclusione. La famiglia $\operatorname{Barr}(\subseteq, \mathcal{F}_g)$ verrà dunque indicata con $\operatorname{Barr}(\mathcal{F}_g)$.

Dalle definizioni precedenti segue che $\phi \in \operatorname{Barr}(\mathcal{F}_g)$ se e solo se esiste un sottoinsieme convesso $I \subseteq \boldsymbol{R}$ tale che $\phi: I \to \mathcal{P}(\boldsymbol{R}^n)$ e vale la seguente condizione:

se $f: [a, b] \subseteq I \to \mathcal{P}(\boldsymbol{R}^n)$ appartiene a $\mathcal{F}_g$ e $f(a) \subseteq \phi(a)$ allora $f(b) \subseteq \phi(b)$.

Dato un insieme $E \subseteq \boldsymbol{R}^n$ è facile provare che esiste la minibarriera $\operatorname{mibar}(E, \mathcal{F}_g)$ data dalla formula

$$\operatorname{mibar}(E, \mathcal{F}_g)(t) = \bigcap \{\phi(t): \phi: [0, +\infty[\to \mathcal{P}(\boldsymbol{R}^n), \ \phi \in \operatorname{Barr}(\mathcal{F}_g), \ \phi(0) \supseteq E\}. \tag{5.2}$$

La seguente osservazione è conseguenza delle definizioni.

Osservazione 5.1. *Supponiamo che $A \subseteq \boldsymbol{R}^n$ sia un insieme aperto e limitato. Allora* $\operatorname{mibar}(A, \mathcal{F}_g)(t)$ *è aperto per ogni $t \in [0, +\infty[$. Inoltre se $\{A_i\}_i$ è una successione di* *aperti tale che* $A_i \uparrow A$ *per* $i \to +\infty$, *allora per ogni* $t \in [0, +\infty[$ *si ha:* $\mathrm{mibar}(A_i, \mathcal{F}_g)(t) \uparrow \mathrm{mibar}(A, \mathcal{F}_g)(t)$ *per* $i \to +\infty$.

Per ogni $\rho > 0$ poniamo

$$E_\rho^- = \boldsymbol{R}^n \setminus \{x \in \boldsymbol{R}^n : \mathrm{dist}(x, \boldsymbol{R}^n \setminus E) < \rho\}, \qquad E_\rho^+ = \{x \in \boldsymbol{R}^n : \mathrm{dist}(x, E) < \rho\},$$

e definiamo le funzioni $\mathrm{mibar}_\star(E, \mathcal{F}_g)$, $\mathrm{mibar}^\star(E, \mathcal{F}_g)$ come segue:

$$\begin{aligned} &\mathrm{mibar}_\star(E, \mathcal{F}_g)(t) = \lim_{\rho \to 0^+} \mathrm{mibar}(E_\rho^-, \mathcal{F}_g)(t), \\ &\mathrm{mibar}^\star(E, \mathcal{F}_g)(t) = \lim_{\rho \to 0^+} \mathrm{mibar}(E_\rho^+, \mathcal{F}_g)(t). \end{aligned} \tag{5.3}$$

Per ogni $t \in [0, +\infty[$ si ha ovviamente

$$\mathrm{mibar}_\star(E, \mathcal{F}_g)(t) \subseteq \mathrm{mibar}(E, \mathcal{F}_g)(t) \subseteq \mathrm{mibar}^\star(E, \mathcal{F}_g)(t), \tag{5.4}$$

e generalmente si tratta di inclusioni strette; nel caso in cui E sia aperto la prima inclusione in (5.4) è una eguaglianza. Inoltre si ha:

$$\mathrm{mibar}_\star(E, \mathcal{F}_g)(t) = \mathrm{mibar}_\star(\mathrm{int}(E), \mathcal{F}_g)(t), \qquad \mathrm{mibar}^\star(E, \mathcal{F}_g)(t) = \mathrm{mibar}^\star(\overline{E}, \mathcal{F}_g)(t).$$

Si può inoltre dimostrare che se E è un arbitrario sottoinsieme di $\boldsymbol{R}^n$, allora l'insieme $\mathrm{mibar}^\star(E, \mathcal{F}_g)(t)$ è chiuso per ogni $t \in [0, +\infty[$.

La (5.4) è probabilmente suscettibile di varie generalizzazioni e De Giorgi ha congetturato (comunicazione privata) che per le varie definizioni di movimento secondo la curvatura media con termine forzante g richiamate nell'introduzione, $\mathrm{mibar}_\star(E, \mathcal{F}_g)$ e $\mathrm{mibar}^\star(E, \mathcal{F}_g)$ forniscano rispettivamente una limitazione inferiore e una limitazione superiore. I risultati esposti in questa *Nota* sono precisamente la conferma di tale congettura limitatamente al caso dei movimenti considerati nel paragrafo 3 di questo lavoro.

6. Primi risultati di confronto

Elenchiamo i risultati dimostrati finora (si veda [5]), in cui si confrontano la minibarriera definita in (5.2) e le funzioni definite in (5.3) con il movimento nel senso della viscosità. Segnaliamo in particolare il Teorema 6.2 che rappresenta il risultato principale finora ottenuto.

È da notare che la funzione $\mathrm{mibar}(E, \mathcal{F}_g)$ definita in (5.2) non è facilmente confrontabile con le altre definizioni di movimento generalizzato, essendo molto sensibile anche a piccolissime modifiche dell'insieme iniziale E. Risultano invece ben confrontabili le funzioni $\mathrm{mibar}_\star(E, \mathcal{F}_g)$ e $\mathrm{mibar}^\star(E, \mathcal{F}_g)$ definite in (5.3).

Un primo teorema di confronto è il

Teorema 6.1. *Sia $V(E, g)$ il movimento nel senso della viscosità a partire dall'insieme E come in* (3.1). *Allora* $V(E, g) \in \mathrm{Barr}(\mathcal{F}_g)$. *Pertanto* $\mathrm{mibar}(E, \mathcal{F}_g)(t) \subseteq V(E, g)(t)$ *per ogni* $t \in [0, +\infty[$.

Inoltre, se $V(E, g)(t)$ *è un insieme regolare per ogni* $t \in]0, T[$, $\mathrm{mibar}(E, \mathcal{F}_g)(t) = V(E, g)(t)$ *per ogni* $t \in]0, T[$.

Il seguente teorema, la cui dimostrazione fa uso di alcuni risultati di Ilmanen [29, 31], chiarisce la relazione tra la minibarriera e il movimento nel senso della viscosità.

TEOREMA 6.2. *Sia E un insieme con frontiera limitata. Sia $V(E,g)$ il movimento nel senso della viscosità dell'insieme E come in* (3.1), *e sia* $\mathrm{mibar}(E, \mathcal{F}_g)$ *la minibarriera che ha E come insieme iniziale. Allora se E è aperto si ha*

$$\mathrm{mibar}_\star(E, \mathcal{F}_g)(t) = \mathrm{mibar}(E, \mathcal{F}_g)(t) = V(E,g)(t), \quad \forall t \in [0, +\infty[,$$

e se E è chiuso si ha

$$\mathrm{mibar}^\star(E, \mathcal{F}_g)(t) = V(E,g)(t), \quad \forall t \in [0, +\infty[.$$

Nella dimostrazione del Teorema 6.2 si utilizza il fatto che se E è aperto con frontiera limitata allora

$$V(E,g)(t) = \lim_{\rho \to 0^+} V(E_\rho^-, g)(t),$$

e se E è chiuso con frontiera limitata allora

$$V(E,g)(t) = \lim_{\rho \to 0^+} V(E_\rho^+, g)(t).$$

In generale fra minibarriera e movimenti definiti con il metodo della viscosità valgono in ogni caso le relazioni di inclusione:

$$\mathrm{mibar}_\star(E, \mathcal{F}_g) \subseteq \mathrm{mibar}(E, \mathcal{F}_g) \subseteq V(E,g) \subseteq \mathrm{mibar}^\star(E, \mathcal{F}_g).$$

Il Teorema 6.2 è fondato essenzialmente sui teoremi di confronto tra soluzioni viscose e soluzioni classiche, e può essere generalizzato come segue.

TEOREMA 6.3. *Sia $g \in \mathcal{C}^\infty(\boldsymbol{R}^n \times [0, +\infty[)$ una funzione che verifica la proprietà* (2.1). *Sia $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\boldsymbol{R}^n)$ una famiglia di insiemi contenente gli aperti e i chiusi di $\boldsymbol{R}^n$. Sia R una funzione definita in $\mathcal{A} \times [0, +\infty[$ tale che, se $(E, \tau) \in \mathcal{A} \times [0, +\infty[$, posto $\phi = R(E, \tau)$, allora ϕ: $[\tau, +\infty[\to \mathcal{A}$, e valgano le seguenti proprietà:*

(1) *per ogni $A \in \mathcal{A}$ limitato, $0 \leq t_0 < t_1$, posto $B := R(A, t_0)(t_1)$ si ha $R(A, t_0)(t) = R(B, t_1)(t)$ per ogni $t \geq t_1$;*

(2) *per ogni insieme $K \subseteq \boldsymbol{R}^n$ compatto con frontiera regolare e per ogni $t_0 \geq 0$ si ha che $R(K, t_0)(t)$ coincide con il movimento classico di K secondo la curvatura media con termine forzante g per tutti i tempi t per cui tale movimento regolare esiste;*

(3) *dati $A, B \in \mathcal{A}$ con $A \subseteq B$, $t_0 \in [0, +\infty[$, si ha $R(A, t_0)(t) \subseteq R(B, t_0)(t)$ per ogni $t \geq t_0$. Allora per ogni $E \subseteq \mathcal{A}$, $t_0 \in [0, +\infty[$ e per ogni $t \geq t_0$ si ha:* $\mathrm{mibar}_\star(E, \mathcal{F}_g)(t) \subseteq$ $\subseteq R(E, t_0)(t) \subseteq \mathrm{mibar}^\star(E, \mathcal{F}_g)(t)$.

7. OSSERVAZIONI FINALI

Notiamo che in base ai risultati stabiliti nel paragrafo 6, $V(E,g)(t)$ può essere descritto completamente mediante $\mathrm{mibar}_\star(E, \mathcal{F}_g)$, $\mathrm{mibar}^\star(E, \mathcal{F}_g)$. Viceversa, la conoscenza di $V(E, g)$ non sembra sufficiente a una completa descrizione di mibar$(E, \mathcal{F}_g)$ quando E non sia un aperto con frontiera limitata. Lo studio diretto delle proprietà di queste minibarriere rappresenta un problema molto ampio. Noi qui ci limitiamo a segnalare per esempio il fatto che dalla chiusura dell'insieme E non segue in generale la chiusura di mibar$(E, \mathcal{F}_g)$ come mostra il seguente esempio.

ESEMPIO 7.1. *Sia $n = 2$, $g = 0$, e supponiamo che E sia il quadrato chiuso $[-1, 1]^2$ in $\mathbf{R}^2$. Allora si ha*

$$\mathrm{mibar}\,(E, \mathcal{F}_0)(t) = \mathrm{mibar}\,(\mathrm{int}(E), \mathcal{F}_0)(t), \quad \forall t \in]0, +\infty[.$$

A proposito della sensibilità della funzione mibar$(E, \mathcal{F}_g)$ rispetto a modifiche dell'insieme iniziale E, segnaliamo i due esempi seguenti.

ESEMPIO 7.2. *Sia $n = 2$, $g = 0$, e supponiamo che E sia la palla unitaria chiusa $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$. Indichiamo con S un segmento chiuso contenuto nella parte interna di E. Allora*

$$\mathrm{mibar}\,(E \setminus \{(0, 0)\}, \mathcal{F}_0)(t) = \mathrm{mibar}\,(E, \mathcal{F}_0)(t), \quad \forall t \in]0, +\infty[,$$

$$\mathrm{mibar}\,(E \setminus S, \mathcal{F}_0)(t) = \mathrm{mibar}\,(E, \mathcal{F}_0)(t), \quad \forall t \in]0, +\infty[,$$

e gli stessi risultati valgono quando E è la palla unitaria aperta.

ESEMPIO 7.3. *Sia $n = 2$, $g = 0$, e supponiamo che E sia la palla unitaria chiusa $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$. Sia p un punto della frontiera di E. Allora:*

$$\mathrm{mibar}\,(E \setminus \{p\}, \mathcal{F}_0)(t) = \mathrm{mibar}\,(\mathrm{int}\,(E), \mathcal{F}_0)(t), \quad \forall t \in]0, +\infty[.$$

Segnaliamo inoltre la seguente proprietà delle minibarriere.

TEOREMA 7.1. *Sia $E \subseteq \mathbf{R}^n$ un insieme aperto con frontiera limitata. Supponiamo che*

$$\mathrm{int}\,(\overline{\mathrm{mibar}\,(E, \mathcal{F}_g)(t)}) = \mathrm{mibar}\,(E, \mathcal{F}_g)(t), \quad \forall t \in [0, +\infty[.$$

Allora si ha

$$\mathrm{mibar}\,(\overline{E}, \mathcal{F}_g)(t) \subseteq \overline{\mathrm{mibar}\,(E, \mathcal{F}_g)(t)}, \quad \forall t \in [0, +\infty[.$$

Concludiamo osservando che si potrebbe considerare, al posto di (3.5) (e dunque anche in (5.1)), una equazione di tipo più generale, in cui, oltre al termine forzante g, si aggiunge anche un termine di «pressione» del tipo $\sum_{i=1}^{n} f_i\, \partial u / \partial x_i$, dove $f_1, \ldots, f_n$ sono opportune funzioni assegnate.

RINGRAZIAMENTI

Desideriamo ringraziare Ennio De Giorgi e Tom Ilmanen per le utili discussioni sull'argomento.

Ricerca parzialmente finanziata con i contributi del MURST (Progetto Nazionale «Equazioni di Evoluzione e Applicazioni Fisico-Matematiche» e «Analisi Numerica e Matematica Computazionale») e CNR (IAN e Contratti 92.00833.01, 93.00564.01) italiano.

Bibliografia

[1] F. Almgren - J. E. Taylor - L. Wang, *Curvature-driven flows: a variational approach.* SIAM J. Control Optim., 31, 1993, 387-437.

[2] L. Ambrosio - H.-M. Soner, *A level set approach to the evolution of surfaces of any codimension.* Preprint Scuola Normale Superiore di Pisa, Ottobre 1994.

[3] G. Barles - H.-M. Soner - P. E. Souganidis, *Front propagation and phase field theory.* SIAM J. Control Optim., 31, 1993, 439-469.

[4] G. Bellettini - M. Paolini, *Two examples of fattening for the curvature flow with a driving force.* Rend. Mat. Acc. Lincei, s. 9, v. 5, 1994, 229-236.

[5] G. Bellettini - M. Paolini, *Some comparison results between different notions of motion by mean curvature.* Rendiconti Accademia Nazionale delle Scienze detta dei XL, Memorie di Matematica, in corso di stampa.

[6] K. A. Brakke, *The Motion of a Surface by its Mean Curvature.* Princeton University Press, Princeton 1978.

[7] L. Bronsard - R. V. Kohn, *Motion by mean curvature as the singular limit of Ginzburg-Landau dynamics.* J. Differential Equations, 90, 1991, 211-237.

[8] Y. G. Chen - Y. Giga - S. Goto, *Uniqueness and existence of viscosity solutions of generalized mean curvature flow equation.* J. Differential Geom., 33, 1991, 749-786.

[9] M. G. Crandall - H. Ishii - P.-L. Lions, *User's guide to viscosity solutions of second order partial differential equations.* Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.), 27, 1992, 1-67.

[10] M. G. Crandall - P.-L. Lions, *Viscosity solutions of Hamilton-Jacobi equations.* Trans. Amer. Math. Soc., 227, 1983, 1-42.

[11] E. De Giorgi, *Some conjectures on flow by mean curvature.* In: M. L. Benevento - T. Bruno - C. Sbordone (eds.), *Methods of Real Analysis and Partial Differential Equations.* Liguori, Napoli 1990.

[12] E. De Giorgi, *Congetture sui limiti delle soluzioni di alcune equazioni paraboliche quasi lineari.* In: *Nonlinear Analysis. A Tribute in Honour of G. Prodi.* S.N.S. Quaderni, Pisa 1991, 173-187.

[13] E. De Giorgi, *New problems on minimizing movements.* In: J.-L. Lions - C. Baiocchi (eds.), *Boundary Value Problems for Partial Differential Equations and Applications 29.* Masson, Paris 1993.

[14] E. De Giorgi, *Barriere, frontiere, e movimenti di varietà.* Conferenza tenuta al Dipartimento di Matematica dell'Università di Pavia, 18 marzo 1994.

[15] P. De Mottoni - M. Schatzman, *Geometrical evolution of developped interfaces.* Trans. Amer. Math. Soc., in corso di stampa.

[16] L. C. Evans - H.-M. Soner - P. E. Souganidis, *Phase transitions and generalized motion by mean curvature.* Comm. Pure Appl. Math., 45, 1992, 1097-1123.

[17] L. C. Evans - J. Spruck, *Motion of level sets by mean curvature. I.* J. Differential Geom., 33, 1991, 635-681.

[18] L. C. Evans - J. Spruck, *Motion of level sets by mean curvature. II.* Trans. Amer. Math. Soc., 330, 1992, 321-332.

[19] L. C. Evans - J. Spruck, *Motion of level sets by mean curvature. III.* J. Geom. An., 2, 1992, 121-150.

[20] M. Gage, *Curve shortening makes curves circular.* Invent. Math., 76, 1984, 357-364.

[21] M. Gage - R. Hamilton, *The heat equations shrinking convex plane curves.* J. Differential Geom., 23, 1986, 69-96.

[22] Y. Giga - S. Goto, *Motion of hypersurfaces and geometric equations.* J. Math. Soc. Japan, 44, 1992, 99-111.

[23] Y. Giga - S. Goto - H. Ishii, *Global existence of weak solutions for interface equations coupled with diffusion equations.* SIAM J. Math. Anal., 23, 1992, 821-835.

[24] Y. Giga - S. Goto - H. Ishii - M. H. Sato, *Comparison principle and convexity preserving properties for singular degenerate parabolic equations on unbounded domains.* Indiana Univ. Math. J., 40, 1991, 443-470.

[25] M. A. Grayson, *The heat equation shrinks embedded plane curves to round points.* J. Differential Geom., 26, 1987, 285-314.

[26] M. A. Grayson, *Shortening embedded curves.* Ann. of Math., 129, 1989, 71-111.

[27] G. Huisken, *Flow by mean curvature of convex surfaces into spheres.* J. Differential Geom., 20, 1984, 237-266.

[28] T. Ilmanen, *The level-set flow on a manifold.* In: *Proceedings of Symposia in Pure Mathematics.* Amer. Math. Soc., 54, Part I, 1993, 193-204.

[29] T. Ilmanen, *Generalized flow of sets by mean curvature on a manifold.* Indiana Univ. Math. J., 41, 3, 1992, 671-705.

[30] T. Ilmanen, *Convergence of the Allen-Cahn equation to Brakke's motion by mean curvature.* J. Differential Geom., 38, 1993, 417-461.

[31] T. Ilmanen, *Elliptic Regularization and Partial Regularity for Motion by Mean Curvature.* Memoirs of the Amer. Math. Soc., 250, 1994, 1-90.

[32] H. Ishii, *On uniqueness and existence of viscosity solutions of fully nonlinear second-order elliptic PDE's.* Comm. Pure Appl. Math., 42, 1989, 15-45.

[33] R. Jensen, *The maximum principle for viscosity solutions of second-order fully nonlinear partial differential equations.* Arch. Rational Mech. Anal., 101, 1988, 1-27.

[34] P.-L. Lions, *Optimal control of diffusion processes and Hamilton-Jacobi-Bellman equations, I.* Comm. Partial Differential Equations, 8, 1983, 1101-1134.

[35] L. Modica - S. Mortola, *Un esempio di Γ-convergenza.* Boll. Un. Mat. Ital., B (5), 14, 1977, 285-299.

[36] S. Osher - J. A. Sethian, *Fronts propagating with curvature dependent speed: algorithms based on Hamilton-Jacobi formulations.* J. Comput. Phys., 79, 1988, 12-49.

[37] H.-M. Soner, *Motion of a set by the curvature of its boundary.* J. Differential Equations, 101, 1993, 313-372.

[38] H.-M. Soner, *Ginzburg-Landau equation and motion by mean curvature, I: convergence.* Research report n. 93-NA-026, August 1993, Carnegie Mellon University.

[39] H.-M. Soner - P. E. Souganidis, *Singularities and uniqueness of cylindrically symmetric surfaces moving by mean curvature.* Comm. Partial Differential Equations, 18, 1993, 859-894.

G. Bellettini:
Dipartimento di Matematica
Università degli Studi di Bologna
Piazza di Porta S. Donato, 5 - 40127 Bologna

M. Paolini:
Dipartimento di Matematica
Università degli Studi di Milano
Via C. Saldini, 50 - 20133 Milano