Atti Accademia Nazionale Lincei Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti Lincei
Matematica e Applicazioni

Larbi Belkhchicha, Jean-Pierre Vigué

Sur les espaces complets pour la distance de Carathéodory

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti Lincei. Matematica e Applicazioni, Serie 9, Vol. **5** (1994), n.2, p. 189–192.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLIN_1994_9_5_2_189_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI
http://www.bdim.eu/

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti Lincei. Matematica e Applicazioni, Accademia Nazionale dei Lincei, 1994.

Rend. Mat. Acc. Lincei
s. 9, v. 5:189-192 (1994)

Geometria. — *Sur les espaces complets pour la distance de Carathéodory.* Nota di
LARBI BELKHCHICHA e JEAN-PIERRE VIGUÉ, presentata (*) dal Socio E. Vesentini.

ABSTRACT. — *On complete spaces for the Carathéodory distance.* An example of a finite dimensional analytic space is exhibited, for which the Carathéodory integrated distance and the Carathéodory distance, although defining the same topology, are respectively complete and incomplete.

KEY WORDS: Carathéodory distance; Carathéodory integrated distance; Analytic space.

RIASSUNTO. — *Sugli spazi completi per la distanza di Carathéodory.* Si costruisce uno spazio analitico connesso, di dimensione finita, per il quale la distanza di Carathéodory e la distanza integrata di Carathéodory sono, rispettivamente, incompleta e completa.

1. INTRODUCTION

On considère un espace analytique X de dimension finie. La pseudodistance de Carathéodory c_X et la pseudodistance intégrée de Carathéodory c_X^i sont continues sur X, et on sait que $c_X \leqslant c_X^i$. D'autre part, d'après M. Jarnicki, P. Pflug et J.-P. Vigué [3], même si c_X est une distance, elle ne définit pas forcément la topologie de X. Cependant, dans le cas où c_X (et *a fortiori* c_X^i) sont des distances qui définissent la topologie de X, il est important de comparer les différentes notions d'espace complet pour c_X et c_X^i.

Nous allons commencer par quelques rappels.

2. RAPPELS

Soit X un espace analytique de dimension finie. La pseudodistance de Carathéodory c_X sur X est définie (voir par exemple S. Dineen [1] ou T. Franzoni et E. Vesentini [2]) par la formule

$$c_X(x, y) = \sup_{f \in H(X, \Delta)} \rho(f(x), f(y)),$$

où $H(X, \Delta)$ désigne l'ensemble des applications holomorphes de X dans le disque-unité Δ et ρ est la distance de Poincaré sur Δ.

On peut par exemple définir la pseudodistance intégrée de Carathéodory c_X^i de la façon suivante: on commence par définir la longueur $L(\gamma)$ d'une courbe $\gamma: [0, 1] \to X$ de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux: $L(\gamma)$ est la borne supérieure, pour toutes les partitions finies $t_0 = 0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n = 1$ de $[0, 1]$, de la somme

$$\sum_{i=0}^{n-1} c_X(\gamma(t_i), \gamma(t_{i+1})).$$

Alors, si x et y sont deux points de X, $c_X^i(x, y)$ est la borne inférieure des longueurs $L(\gamma)$ des chemins de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux d'origine x et d'extrémité y.

(*) Nella seduta dell'11 dicembre 1993.

Si X est un espace analytique connexe, on déduit, par exemple du théorème de désingularisation de Hironaka que X est connexe par arcs de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux. Par suite, c_X^i est une pseudodistance et c'est une pseudodistance intégrée, puisque $(c_X^i)^i = c_X^i$.

Si maintenant (E, d) est un espace métrique localement compact, il existe plusieurs notions non équivalentes d'espaces métriques complets. On dit que (E, d) est fortement complet si, pour tout $a \in E$, pour tout $r \geqslant 0$, la boule fermée $B'(a, r) = \{x \in E \,|\, d(a, x) \leqslant r\}$ est compacte dans E. De manière plus classique, (E, d) est dit complet ou Cauchy-complet si toute suite de Cauchy dans E est convergente. Il est clair que (E, d) fortement complet entraîne (E, d) complet, et il est facile de construire des exemples qui montrent que la réciproque est fausse. On sait d'autre part, d'après W. Rinow [6] (voir aussi S. Kobayashi [5]), que, pour une distance intégrée d, les deux notions sont équivalentes.

3. Les résultats

Considérons maintenant un espace analytique X de dimension finie tel que la pseudodistance de Carathéodory c_X soit une distance qui définisse la topologie de X. Considérons les propositions suivantes:

(i) X est c_X-fortement complet;

(ii) X est c_X-Cauchy-complet;

(iii) X est c_X^i-Cauchy-complet;

(iv) X est c_X^i-fortement complet.

Comme $c_X \leqslant c_X^i$, il est clair que $(i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iii) \Leftrightarrow (iv)$. Dans [4], M. Jarnicki, P. Pflug et J.-P. Vigué ont construit un exemple d'un espace analytique X, c_X-Cauchy-complet mais non c_X-fortement complet. Ainsi la réciproque de $(i) \Rightarrow (ii)$ est fausse.

Dans cette *Note*, nous allons montrer que la réciproque de $(ii) \Rightarrow (iii)$ est fausse également. Plus précisément, nous avons la proposition suivante.

Proposition 1. *Il existe un espace analytique* X *tel que* c_X *et* c_X^i *définissent la topologie de* X *et que* X *soit* c_X^i*-Cauchy-complet et non* c_X*-Cauchy-complet.*

Remarque. Comme dans [4], la question reste ouverte quand X est un domaine borné de $\mathbf{C}^n$.

4. Construction de l'exemple

La construction utilise les méthodes de [4]. On considère une famille $(D_n)_{n \in \mathbf{N}}$ de copies du disque-unité ouvert $\Delta \subset \mathbf{C}$. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on choisit une famille finie de points $(a_n^i)_{i=1,\dots,p_n}$ de D_n et $(b_n^i)_{i=1,\dots,p_n}$ de D_{n+1} tels que $|a_n^i| = |b_n^i| = 1 - 1/(n+1)$.

On suppose que, dans l'identification de D_n et D_{n+1} à Δ, $a_n^i = b_n^i$, pour tout i. On considère l'espace analytique réductible X obtenu de la façon suivante: topologiquement, X est la réunion disjointe des D_n, quotienté par la relation d'équivalence suivante: $\forall n \in \mathbf{N}$, pour tout $i = 1, \ldots, p_n$, $a_n^i \sim b_n^i$.

La structure analytique sur X est définie par le fait qu'en un point $a_n^i \sim b_n^i$, D_n et D_{n+1} sont deux morceaux de droites complexes se coupant transversalement.

Ainsi, une fonction holomorphe f sur X consiste en la donnée d'une famille $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ de fonctions holomorphes sur chacun des D_n telles que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, pour tout $i = 1, \ldots, p_n$, $f_n(a_n^i) = f_{n+1}(b_n^i)$. Fixons maintenant le nombre p_n de points de D_n que l'on identifie à des points de D_{n+1} de façon à ce que, si on pose $q_n = (1 - 1/(n+1))^{p_n}$, la série $\sum_n q_n$ soit convergente (il suffit, par exemple, de prendre $p_n = n^2$).

Un entier p étant donné, on peut, en utilisant un produit de Blaschke, construire une fonction $f = (f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ de X dans le disque-unité Δ telle que $f_n \equiv 0$, $\forall n > p$ (respectivement $\forall n < p$) et telle que f_p ne s'annule qu'en les points a_p^i (respectivement b_{p-1}^i). Ceci suffit à montrer que la distance de Carathéodory c_X définit la topologie de X. Comme $c_X \leq c_X^i$, c'est aussi vrai pour c_X^i.

Il reste à montrer que X est c_X^i-complet et non c_X-complet. D'abord, il est clair que, si on identifie D_n à son image dans X, on a:

$$c_X^i \,|_{D_n} = c_X \,|_{D_n} = c_\Delta \, .$$

D'autre part, tout chemin joignant un point x de D_n à un point y de D_p $(p \neq n)$ passe forcément par un des points a_n^i ou b_{n-1}^i. Sa longueur est donc supérieure à $\inf\,(c_\Delta(x, b_{n-1}^i), c_\Delta(x, a_n^i))$. On en déduit que toute boule fermée pour c_X^i est contenue dans la réunion d'un nombre fini de D_n, et est donc compacte. Ainsi, X est c_X^i-fortement complet et c_X^i-complet.

Soit maintenant O_n l'image de l'origine O de Δ dans D_n. Soit $f = (f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une application holomorphe de X dans le disque-unité Δ. Soit ϕ_n l'application holomorphe de Δ dans Δ définie par $\phi_n(x) = (f_{n+1}(x) - f_n(x))/2$. Il est clair que $\phi_n(a_n^i) = 0$, $i = 1, \ldots, p_n$. On peut donc mettre en facteur dans ϕ_n le produit de Blaschke

$$g(x) = \prod_{i=1}^{p_n} \frac{x - a_n^i}{1 - \overline{a_n^i}\, x} \, ,$$

c'est à dire que $\phi_n = g \cdot \psi_n$, où ψ_n est une application holomorphe de Δ dans Δ. Ceci entraîne que $|\phi_n(O)| \leq |1 - 1/(n+1)|^{p_n} \leq q_n$. Par suite, $c_X(O, O_{n+1}) \leq th^{-1}(2q_n)$. Comme la série de terme général $th^{-1}(2q_n)$ est convergente, O_n est une suite de Cauchy pour c_X, il est clair que cette suite n'est pas convergente dans X, et X n'est pas c_X-Cauchy-complet.

Bibliographie

[1] S. Dineen, *The Schwarz Lemma.* Clarendon Press, Oxford 1989.

[2] T. Franzoni - E. Vesentini, *Holomorphic Maps and Invariant Distances.* North-Holland Math. Studies, 40, Amsterdam 1980.

[3] M. Jarnicki - P. Pflug - J.-P. Vigué, *The Carathéodory distance does not define the topology – the case of domains.* C. R. Acad. Sc. Paris, Série I, 312, 1991, 77-79.

[4] M. Jarnicki - P. Pflug - J.-P. Vigué, *An example of a Carathéodory complete but not finitely compact analytic space.* Proc. A.M.S., 118, 1993, 537-539.

[5] S. Kobayashi, *Intrinsic distances, measures and geometric function theory.* Bull. A.M.S., 82, 1976, 357-416.

[6] W. Rinow, *Die innere Geometrie der metrischen Räume.* Die Grundlehren der Math. Wissenschaften, Band 105, Springer-Verlag, Berlin 1961.

Mathématiques, Université de Poitiers
URA CNRS D 1322 «Groupes de Lie et géométrie»
40, Avenue du Recteur Pineau - 86022 Poitiers Cedex (Francia)