Atti Accademia Nazionale Lincei Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

# Rendiconti Lincei
# Matematica e Applicazioni

Claudio Saccon

## Autovalori di alcune disequazioni variazionali con vincoli puntati sulle derivate

*Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti Lincei. Matematica e Applicazioni, Serie 9*, Vol. **4** (1993), n.3, p. 185–195.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLIN_1993_9_4_3_185_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti Lincei. Matematica e Applicazioni, Accademia Nazionale dei Lincei, 1993.

*Rend. Mat. Acc. Lincei*
*s. 9, v. 4:185-195 (1993)*

**Calcolo delle variazioni.** — *Autovalori di alcune disequazioni variazionali con vincoli puntati sulle derivate.* Nota di CLAUDIO SACCON, presentata (*) dal Socio E. De Giorgi.

ABSTRACT. — *Eigenvalue problems for some variational inequalities with pointwise gradient constraint.* Some eigenvalue problems for elliptic semilinear variational inequalities are studied, the main feature being the presence of an obstacle on the first derivative of the unknown function. The role of a «nontangency» assumption is put into evidence: to have existence and multiplicity results one has to check that the convex set, produced by the obstacle condition, and the sphere in the function space, on which it seems natural to study eigenvalue problems, are not tangent. This condition is studied in some problems of the fourth and of the second order and some sufficient conditions for it are found, which allow to get results of existence and multiplicity.

KEY WORDS: Eigenvalue problems; Variational inequalities; Nonsmooth analysis.

RIASSUNTO. — Si studiano problemi di autovalori per disequazioni variazionali semilineari ellittiche con un ostacolo puntuale sulla derivata prima della funzione incognita. Si mette in particolare in evidenza il ruolo della «ipotesi di non tangenza» tra il convesso, che viene definito dalla condizione di ostacolo, e la sfera dello spazio funzionale, su cui è naturale studiare un problema di autovalori. Tale condizione viene analizzata in alcuni casi concreti e si indicano alcune ipotesi che, garantendone la validità, danno luogo ad alcuni risultati di esistenza e molteplicità.

## 1. INTRODUZIONE

I problemi di autovalori per operatori ellittici semilineari con parte lineare simmetrica costituiscono un campo di ricerca ampiamente coltivato, per il quale un approccio ormai consolidato è quello variazionale, consistente nell'interpretare tali problemi come ricerca di uno, oppure molti, punti stazionari di un funzionale regolare $f$ definito in uno spazio di Hilbert $H$, ristretto ad una sottovarietà regolare $M$ di $H$. Un esempio tipico si ha considerando come $H$ uno spazio di Sobolev $W_0^{1,2}(\Omega)$, $M = \left\{ u \mid \int_\Omega u^2 = \text{cost.} \right\}$ e $f(u) = \int_\Omega |Du|^2 + G(x,u)$ (vedi ad es. [22]). I metodi per ottenere risultati di esistenza vanno dalla minimizzazione alle tecniche basate sulle teorie di Morse o di Lusternik-Schnirelmann, che permettono di collegare il numero di punti stazionari di $f$ su $M$ con la «complessità topologica» di $M$ (si veda ad es. [1, 10]).

Sono stati recentemente affrontati problemi di autovalori per disequazioni variazionali, in cui è abbastanza naturale considerare come funzionale una $f$ del tipo indicato sopra, ristretta ad un convesso $\boldsymbol{K}$ o, in altri termini, la somma $f + I_K$ dove $I_K$ è la funzio-

(*) Nella seduta dell'11 novembre 1992.

ne indicatrice di $\boldsymbol{K}$. Per considerare situazioni di questo genere, che escono anche dal quadro teorico delle funzioni convesse e loro perturbazioni, sono stati proposti vari approcci (vedi ad esempio [3-8, 14, 15]). Uno di questi utilizza le funzioni $\varphi$-convesse (vedi [8]), cioè una classe di funzioni non regolari con cui si riesce a fare una teoria di curve di evoluzione e di molteplicità per i punti «critici», con opportune definizioni.

Tra le varie applicazioni (vedi [2, 3, 5, 16, 24]) una tipica è quella degli autovalori dell'operatore di Laplace con ostacolo, in cui si considera proprio il funzionale indicato sopra e

$$\boldsymbol{K} = \{u \mid \varphi_1 \leq u \leq \varphi_2\}$$

($\varphi_1$ e $\varphi_2$ assegnate sono gli «ostacoli») e si ottengono, in opportune ipotesi, risultati di esistenza di infinite soluzioni. Studiando tale problema si vede tra l'altro che un ruolo chiave, per ricondursi ai risultati astratti detti prima, è giocato dalla condizione di non tangenza tra $M$ e $\boldsymbol{K}$.

In questa *Nota* si considerano il funzionale $f(u) = \int_\Omega |\Delta u|^2 + G(x,u)$, $M$ come sopra e

$$\boldsymbol{K} = \{u \mid |Du| \leq \varphi\}$$

con $\varphi$ assegnata (ostacolo sulle derivate).

Nel paragrafo 2 si indicano alcune caratterizzazioni dei punti stazionari, in particolare come «autovettori» di alcune disequazioni variazionali; anche in questo caso per questo è necessario che $M$ e $\boldsymbol{K}$ non siano tangenti, come pure per dimostrare risultati di esistenza. Il paragrafo 3 è quindi dedicato a individuare delle condizioni sufficienti per la non tangenza. Sono anche indicati alcuni problemi aperti in relazione ad una completa caratterizzazione della tangenza, che fino ad ora non è stata ottenuta. Vengono dati poi, nel paragrafo 4 dei risultati di esistenza e molteplicità. Nel paragrafo 5 vengono esposti alcuni risultati che collegano il problema da studiare con un opportuno problema «asintotico» in zero. In quest'ambito, come osservato in [7], la non tangenza si realizza automaticamente dove è necessaria.

Nel paragrafo 6 si considera il caso del funzionale $f(u) = \int_\Omega |Du|^2 + G(x,u)$ per il quale l'analisi della non tangenza è un problema ancora insoluto; si mostra come questo problema sia collegato con la validità di un risultato del tipo Lemma di Sard per una funzione convessa su una sfera.

In conclusione, si può dire che la condizione di non tangenza sembra essere il punto chiave per ricondursi al quadro astratto citato all'inizio; peraltro essa si è rivelata in alcuni casi piuttosto ardua da trattare, quindi fonte di numerosi e interessanti problemi.

Ricordiamo qui alcune definizioni astratte che saranno utilizzate nel seguito (per una trattazione più sistematica vedi ad esempio [17]). Supponiamo che $H$ sia uno spazio di Hilbert con prodotto scalare $\langle\cdot,\cdot\rangle$ e norma $\|\cdot\|$ e sia $h\colon H \to \boldsymbol{R} \cup \{+\infty\}$ una funzione. Indichiamo con $\mathcal{D}(h)$ l'insieme $\{u \in H \mid h(u) < +\infty\}$.

(1.1) DEFINIZIONE. *Sia* $u \in \mathcal{D}(h)$. *Definiamo il sottodifferenziale di* $h$ *in* $u$, *che indichiamo con* $\partial^- h(u)$, *come l'insieme (eventualmente vuoto) degli* $\alpha$ *in* $H$ *tali che*

$$\liminf_{v \to u} \frac{h(v) - h(u) - \langle \alpha, v - u \rangle}{\|v - u\|} \geq 0 .$$

(1.2) DEFINIZIONE. *Sia* $V \subset H$ *(un vincolo). Definiamo la funzione indicatrice di* $V$ $I_V: H \to \boldsymbol{R} \cup \{+\infty\}$ *mediante*

$$I_V(u) = \begin{cases} 0 & se\ v \in V \\ +\infty & altrimenti \end{cases}$$

*a) Se* $u \in V$ *e* $\nu \in H$ *diciamo che* $\nu$ *è una normale esterna a* $V$ *in* $u$, *se* $\nu \in \partial^- I_V(u)$.

*b) Se* $u \in \mathcal{D}(h) \cap V$, *diciamo che* $h$ *è un punto inferiormente stazionario per* $h$ *su* $V$, *se* $0 \in \partial^- (h + I_V)(u)$.

(1.3) DEFINIZIONE. *Sia* $T > 0$ *e sia* $\mathcal{U}: [0, T[ \to H$ *una curva. Diciamo che* $\mathcal{U}$ *è una curva di evoluzione forte per* $h$ *se*

*a)* $\mathcal{U}$ *è assolutamente continua nei compatti di* $[0, T[$;

*b)* $h \circ \mathcal{U}$ *è finita e non crescente in* $[0, T[$;

*c) per quasi ogni* $t$ *in* $[0, T[$, $-\mathcal{U}(t) \in \partial^- h(\mathcal{U}(t))$.

## 2. UN PROBLEMA DI AUTOVALORI CON VINCOLI SULLE DERIVATE

Siano $\Omega$ un aperto regolare di $\boldsymbol{R}^N$ e $g: \Omega \times \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$. Consideriamo $\varphi: \Omega \to [0, +\infty[$, e siano

(2.1) $$\boldsymbol{K} = \{u \in W_0^{2,2}(\Omega) \mid |Du| \leq \varphi \text{ quasi ovunque in } \Omega\},$$

(2.2) $$S_\rho = \left\{u \in L^2(\Omega) \mid \int_\Omega u^2 dx = \rho^2\right\},$$

dove $\rho$ è un numero positivo assegnato.

(2.3) IPOTESI. *Assumeremo le seguenti ipotesi semplificate su* $g$

(g) $$\begin{cases} g(\cdot, s) \text{ è misurabile in } \Omega \text{ per ogni } s \text{ in } \boldsymbol{R}, \\ g(x, \cdot) \text{ è } \mathcal{C}^1(\Omega) \text{ per quasi ogni } x \text{ in } \Omega, \\ g(\cdot, 0) \in L^2(\Omega), \\ \text{esiste } c \text{ in } \boldsymbol{R} \text{ tale che } g_s'(x,s) \geq -c \quad \forall x \in \Omega,\ \forall s \in \boldsymbol{R}, \\ \text{se } N > 4, \text{ esistono } a \text{ e } b \text{ in } \boldsymbol{R} \text{ tali che, se } 1/q = 1/2 - 2/N \\ \qquad g_s'(x,s) \leq a + b|s|^{q-2}\ \forall x \in \Omega,\ \forall s \in \boldsymbol{R}. \end{cases}$$

Introduciamo ora i funzionali $f$, $f_\lambda : L^2(\Omega) \to \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ definiti da:

$$f(u) = \begin{cases} \displaystyle\int_\Omega \left[ (\Delta u)^2 + \int_0^{u(x)} g(x,s)\, ds \right] dx & \text{se } u \in W_0^{2,2}(\Omega), \\ +\infty & \text{altrimenti}, \end{cases}$$

$$f_\lambda(u) = f(u) + \lambda \int_\Omega u^2\, dx$$

essendo $\lambda$ assegnato in $\mathbf{R}$.

(2.4) Problemi stazionari. *Si considerano i seguenti problemi:*

($Ps1$) *trovare $u$ in $\mathbf{K} \cap S_\rho$ punto inferiormente stazionario per $f$ su $\mathbf{K} \cap S_\rho$;*

($Ps2$) *trovare $(u, \lambda)$, in $\mathbf{K} \times \mathbf{R}$ tali che $u$ sia punto inferiormente stazionario per $f_\lambda$;*

($Ps3$) *trovare $(u, \lambda)$ in $\mathbf{K} \times \mathbf{R}$ tali che valga la seguente disequazione variazionale*

$$\int_\Omega [\Delta u\, \Delta(v-u) + (g(x,u) + \lambda u)(v-u)]\, dx \geq 0 \qquad \forall v \in \mathbf{K}.$$

(2.5) Proposizione.

*a) Se $(u, \lambda)$ è soluzione di ($Ps2$), allora $u$ è soluzione di ($Ps1$) con $\int_\Omega u^2\, dx = \rho$ e $(u, \lambda)$ è soluzione di ($Ps3$).*

*b) Se $(u, \lambda)$ è soluzione di ($Ps3$), allora $u$ è soluzione di ($Ps1$) e $(u, \lambda)$ è soluzione di ($Ps2$) (quindi ($Ps2$) e ($Ps3$) sono equivalenti).*

*c) Se $u$ è soluzione di ($Ps1$) e se $\mathbf{K}$ e $S_\rho$ non sono tangenti in $u$, allora esiste $\lambda$ in $\mathbf{R}$ tale che $(u, \lambda)$ è soluzione di ($Ps2$) e di ($Ps3$).*

Analogamente ai problemi stazionari si possono considerare i problemi di evoluzione, la cui soluzione, come è noto, viene utilizzata per ottenere dei risultati di molteplicità.

(2.6) Problemi di evoluzione. *Dato $u_0$ in $\mathbf{K} \cap S_\rho$ si considerano i seguenti problemi:*

($Pe1$) *trovare $T > 0$ e $\mathcal{U}$: $[0, T[ \to \mathbf{K} \cap S_\rho$ assolutamente continua nella norma di $L^2(\Omega)$ tale che $\mathcal{U}$ sia una curva di evoluzione forte per $f + I_K + I_{S_\rho}$ con $\mathcal{U}(0) = u_0$;*

($Pe2$) *trovare $T > 0$, $\mathcal{U}$: $[0, T[ \to \mathbf{K} \cap S_\rho$ assolutamente continua nella norma di $L^2(\Omega)$ con $\mathcal{U}(0) = u_0$ e $\Lambda$: $[0, T[ \to \mathbf{R}$ che risolvono la disequazione variazionale parabolica*

$$\int_\Omega [\Delta \mathcal{U}(t)\, \Delta(v - \mathcal{U}(t)) + (g(x, \mathcal{U}(t)) + \Lambda(t)\, \mathcal{U}(t) + \mathcal{U}'(t))(v - \mathcal{U}(t))]\, dx \geq 0 \qquad \forall v \in \mathbf{K}.$$

(2.7) PROPOSIZIONE.

*a) Se* $(\mathcal{U},\Lambda)$ *è soluzione di (Pe2), allora* $\mathcal{U}$ *è soluzione di (Pe1);*

*b) se* $\mathcal{U}$ *è soluzione di (Pe1) e se per ogni* $t$ *in* $[0,T[$ $\boldsymbol{K}$ *e* $S_\rho$ *non sono tangenti in* $\mathcal{U}(t)$, *allora esiste* $\Lambda$ *tale che* $(\mathcal{U},\Lambda)$ *è soluzione di (Pe2).*

La verifica di *a*) e *b*) della Proposizione (2.5) e della *a*) della Proposizione (2.7) sono semplici conseguenze delle definizioni; per quanto riguarda la *c*) di (2.5) e la *b*) di (2.7) esse seguono dal Teorema (1.10) tipo «moltiplicatori di Lagrange», di [3].

## 3. LA CONDIZIONE DI NON TANGENZA

Le Proposizioni (2.5) e (2.7) mettono in luce l'importanza della condizione di non tangenza tra $\boldsymbol{K}$ ed $S_\rho$. Vogliamo ora esaminare alcune ipotesi sufficienti ad assicurare questa condizione. In tutto questo paragrafo supporremo che valgono le ipotesi (*g*). Le dimostrazioni dei risultati di questo paragrafo e del successivo sono contenute in [25].

(3.1) TEOREMA DI NON TANGENZA. *Supponiamo che* $\varphi$ *sia continua in* $\Omega$ *e poniamo* $\mathcal{C} = \{\text{componenti connesse di } \{x \in \Omega \mid \varphi(x) > 0\}\}$, $\mathcal{C}_0 = \{\Omega' \in \mathcal{C} \mid \varphi \in W_0^{1,2}(\Omega')\}$.
*Allora*:

*a) se* $\mathcal{C}_0 = \emptyset$, *allora per ogni* $\rho > 0$ $\boldsymbol{K}$ *ed* $S_\rho$ *non sono tangenti in nessuna u;*

*b) se* $\mathcal{C}_0 \neq \mathcal{C}$ *e se* $\varphi \in L^p\left(\bigcup_{\Omega' \in \mathcal{C}_0} \Omega'\right)$, *con* $1/p = 1/2 + 1/N$ *allora esiste* $\rho_0$ *con* $0 \leq \rho_0 < \sup_{u \in \boldsymbol{K}} \|u\|_{L^2(\Omega)}$ *tale che per ogni* $\rho > \rho_0$ $\boldsymbol{K}$ *ed* $S_\rho$ *non sono tangenti in nessuna* $u$.

Il teorema ora esposto si basa sulla nozione di «$\varphi$-distanza» in $\Omega$.

(3.2) DEFINIZIONE. *Sia* $\varphi$ *continua. Dati* $x, y$ *in* $\Omega$ *poniamo*:

$$d_\varphi(x,y) = \inf\left\{ \int_0^1 \varphi(\gamma(t))\,|\dot{\gamma}(t)|\,dt \mid \gamma \in \mathcal{C}^1(0,1;\Omega), \gamma(0) = x, \gamma(1) = y \right\}.$$

(3.3) LEMMA. *Sia* $\varphi$ *continua e sia* $\rho > 0$. *Se* $u \in \boldsymbol{K} \cap S_\rho$ *e se* $\boldsymbol{K}$ *ed* $S_\rho$ *sono tangenti in u, allora*:

*a) per ogni* $\tilde{\Omega}$ *aperto ben contenuto in* $\{x \in \Omega \mid \varphi(x) > 0, u(x) > 0\}$ *si ha che* $u(x) = \inf\{u(y) + d_\varphi(x,y) \mid y \in \Omega \setminus \tilde{\Omega}\}$ $\forall x \in \tilde{\Omega}$; *per ogni* $\tilde{\Omega}$ *aperto ben contenuto in* $\{x \in \Omega \mid \varphi(x) > 0, u(x) < 0\}$ *si ha che* $u(x) = \sup\{u(y) - d_\varphi(x,y) \mid y \in \Omega \setminus \tilde{\Omega}\}$ $\forall x \in \tilde{\Omega}$;

*b) (di conseguenza)* $|Du(x)| = \varphi(x)$ *per quasi ogni* $x$ *tale che* $u(x) \neq 0$;

*c) se* $\Omega' \in \mathcal{C}$, *allora o* $u \equiv 0$ *in* $\Omega'$ *oppure* $|Du| \equiv \varphi$ *e* $\varphi \in W_0^{1,2}(\Omega')$.

Mettiamo in evidenza che il Teorema (3.1) fornisce solamente condizioni sufficienti per la non tangenza. Vale infatti, ad esempio, il seguente risultato.

(3.4) PROPOSIZIONE. *Se* $N = 1, 2$ *e se* $\varphi > 0$ *in* $\Omega$, *allora* $\boldsymbol{K}$ *ed* $S_\rho$ *non sono tangenti per nessun* $\rho > 0$.

In conclusione di questo paragrafo osserviamo che resta quindi aperto il problema di una più precisa caratterizzazione della tangenza tra $\boldsymbol{K}$ ed $S_\rho$. Le considerazioni svolte fino a ora suggeriscono alcune domande.

(3.5) Problemi aperti.

*a) In quali ipotesi si può affermare che funzioni verificanti la a) del Lemma* (3.3) *non appartengono a* $W_0^{2,2}(\Omega)$, *se non in casi molto particolari?*

*a') In particolare, supponendo ad esempio* $\varphi \equiv 1$, $N = 3$, $\Omega$ *connesso, si può dire che, se esiste una funzione* $u$ *in* $W_0^{2,2}(\Omega)$ *tale che* $|u| = \operatorname{dist}(\cdot, Z_u)$, *dove* $Z_u = \{x \in \Omega \,|\, u(x) = 0\}$, *allora* $\Omega$ *è una palla?*

*b) In opportune ipotesi su* $\Omega$ *e su* $\varphi$ *si può dire che i raggi di tangenza sono «pochi» (a tal proposito vedi anche il paragrafo* 6)?

*c) Cosa si potrebbe dire se il problema anziché in* $W_0^{2,2}(\Omega)$ *venisse ambientato in tutto* $W^{2,2}(\Omega)$, *oppure nell'ambito delle funzioni periodiche?*

## 4. Alcuni teoremi di esistenza

Assumeremo in tutto questo paragrafo che valgano le ipotesi ($g$).

Minimizzando il funzionale $f$ su $\boldsymbol{K} \cap S_\rho$ si ottiene innanzitutto il seguente semplice teorema.

(4.1) Teorema. *Sia* $\rho > 0$. *Se* $\boldsymbol{K}$ *ed* $S_\rho$ *non sono tangenti e se* $\boldsymbol{K} \cap S_\rho \neq \emptyset$, *allora esiste* $(u, \lambda)$ *soluzione di* ($Ps$1)-($Ps$3) *con* $\|u\|_{L^2(\Omega)} = \rho$.

Il seguente teorema mostra che in presenza di simmetria e in opportune ipotesi su $\varphi$ esistono infinite soluzioni di ($Ps$1)-($Ps$3). Le ipotesi fatte su $\varphi$ hanno un duplice scopo:

*a*) assicurare la non tangenza tra $\boldsymbol{K}$ ed $S_\rho$,

*b*) assicurare che $\operatorname{gen}(\boldsymbol{K} \cap S_\rho) = \infty$.

(4.2) Teorema. *Facciamo l'ipotesi di simmetria* $g(x, -s) = -g(x, s)$ *per* $x$ *in* $\Omega$ *e* $s$ *in* $\boldsymbol{R}$. *Supponiamo inoltre che* $\varphi$ *sia continua in* $\Omega$ *e che valga la disuguaglianza:*

$$(\varphi) \qquad \varphi(x) \geq \frac{a}{\operatorname{dist}(x, \partial\Omega)^\alpha} - b$$

*dove* $a > 0$, $b \in \boldsymbol{R}$ *e* $\alpha > 3/2$. *Allora esiste* $\rho_0 \geq 0$ *tale che per ogni* $\rho > \rho_0$ *il problema* ($Ps$3) *ammette una successione* $(\lambda_h, \pm u_h)_{h \in \mathrm{N}}$ *di soluzioni tali che* $\|u_h\|_{L^2(\Omega)} = \rho$ *e*

$$\lim_{h \to \infty} \lambda_h = -\infty\,.$$

*Se poi* $b = 0$, *allora* $\rho_0 = 0$.

Il Teorema (4.2) è un caso particolare del seguente.

(4.3) Teorema. *Nelle ipotesi di simmetria* $g(x,s) = -g(x, -s)$, *se* $\boldsymbol{K}$ *ed* $S_\rho$ *non sono tangenti, il problema* ($Ps1$) *ha almeno* $\operatorname{gen}(\boldsymbol{K} \cap S_\rho)$ *coppie di punti inferiormente stazionari che corrispondono a soluzioni di* ($Ps3$) *come dalle proposizioni* (2.7).

Naturalmente una caratterizzazione completa della non tangenza tra $\boldsymbol{K}$ ed $S_\rho$ migliorerebbe molto la portata del teorema di molteplicità. Si noti ancora che le ipotesi ($\varphi$) e ($\varphi_1$) implicano che $\varphi$ è illimitata.

(4.4) Congettura. *Se* $\varphi$ *è limitata esistono «molte»* $g$, *anche dispari, per le quali, comunque fissato* $\rho > 0$, *il problema* ($Ps3$) *ha solo un numero finito di soluzioni di norma eguale a* $\rho$.

Uno strumento molto importante nella dimostrazione del Teorema (4.2) è lo studio delle curve di evoluzione di $f$ su $\boldsymbol{K} \cap S_\rho$, studio che porta a risolvere i problemi ($Pe1$), ($Pe2$).

(4.5) Teorema di evoluzione. *Se* $u_0 \in \boldsymbol{K} \cap S_\rho$ *è tale che* $\boldsymbol{K}$ *ed* $S_\rho$ *non sono tangenti in* $u_0$, *allora esistono* $T > 0$, $\Lambda$, $\mathcal{U}$ *che risolvono il problema* ($Pe2$). *Se inoltre* $\boldsymbol{K}$ *ed* $S_\rho$ *non sono tangenti in nessuna* $u$ *di* $\boldsymbol{K} \cap S_\rho$, *allora* $T = +\infty$.

(4.6) Problemi aperti.

*a*) *Se* $u$ *minimizza* $f$ *in* $\boldsymbol{K} \cap S_\rho$, *allora si può dire in opportune ipotesi che* $\boldsymbol{K}$ *ed* $S_\rho$ *non sono tangenti in* $u$?

*b*) *Se* $\mathcal{U}\colon [0, T[\to \boldsymbol{K} \cap S_\rho$ *è una curva di evoluzione forte per* $f$ *su* $\boldsymbol{K} \cap S_\rho$ *e se* $\boldsymbol{K}$ *ed* $S_\rho$ *non sono tangenti in* $\mathcal{U}(0)$, *si può affermare in opportune ipotesi che la curva* $\mathcal{U}$ *rimane «distante» dai punti di tangenza*?

*c*) *Cosa si può dire sulla regolarità delle soluzioni? Si può affermare che se* $\varphi$ *è regolare,* $u$ *appartiene a* $W^{4,2}(\Omega)$?

## 5. Il problema asintotico e la biforcazione

Il problema della non tangenza non si pone quando si studia il problema di biforcazione per ($Ps3$). Per tale problema si possono ottenere i risultati seguenti direttamente da alcuni teoremi generali (vedi [7, 5]), senza ulteriori indagini. Consideriamo in tutto questo paragrafo le ipotesi ($g$) con l'aggiunta $g(\cdot, 0) \equiv 0$.

(5.1) Definizione. *Se* $\lambda \in \boldsymbol{R}$ *diciamo che* $\lambda$ *è di biforcazione per* ($Ps3$) *quando esiste una successione* $((u_k, \lambda_k))_{k \in N}$ *di soluzioni di* ($Ps3$) *tale che*

$$\lim_{k \to \infty} \lambda_k = \lambda, \qquad u_k \neq 0 \ \forall k, \qquad \lim_{k \to \infty} \|u_k\|_{L^2(\Omega)} = 0.$$

(5.2) Proposizione. *Se $\lambda$ è di biforcazione per ($Ps3$), allora esiste $v \neq 0$ tale che $(v, \lambda)$ risolve il seguente problema asintotico in zero.*

$$(\mathrm{Ps}_\omega) \qquad \begin{cases} v \in \boldsymbol{K}_\omega, \lambda \in \boldsymbol{R}, \\ \int_\Omega [\Delta v\, \Delta w + (g'(x,0)v + \lambda v)w]\,dx = 0 \quad \forall w \in \boldsymbol{K}_\omega, \end{cases}$$

*dove $\boldsymbol{K}_\omega$ = chiusura $W^{2,2}(\Omega)$ di $\bigcup_{t>0} t\boldsymbol{K}$.*

Diremo in tal caso che $\lambda$ è un autovalore di ($Ps_\omega$). Osserviamo che $\boldsymbol{K}_\omega$ è uno spazio lineare dato che $\boldsymbol{K}$ è simmetrico. Dunque se $\boldsymbol{K}_\omega$ ha dimensione infinita ($Ps_\omega$) ha infiniti autovalori, ognuno dei quali ha molteplicità finita.

(5.3) Teorema di biforcazione. *Supponiamo che esista $\Omega_0$ aperto contenuto in $\Omega$ tale che $\inf_{\Omega_0} \varphi > 0$. Allora esistono infiniti autovalori di ($Ps_\omega$) e ognuno di essi è di biforcazione per ($Ps3$).*

*Se poi $g$ è dispari e se $\lambda$ è un autovalore di molteplicità $k$, allora esistono $2k$ rami di soluzioni $(\pm u_1^{(\rho)}, \lambda_1^{(\rho)}) \dots (\pm u_k^{(\rho)}, \lambda_k^{(\rho)})$ tali che $\pm u_i^{(\rho)} \neq \pm u_j^{(\rho)}$ per $i \neq j$ e*

$$\|u_i^{(\rho)}\|_{L^2(\Omega)} = \rho, \qquad \lim_{\rho \to 0} \lambda_i^{(\rho)} = \lambda \qquad i = 1, \dots, k.$$

Oltre al teorema di biforcazione vale anche il seguente risultato, che pure collega il problema ($Ps3$) col problema asintotico ($Ps_\omega$) e che non ha bisogno di condizioni di non tangenza.

(5.4) Teorema. *Supponiamo che esista $\Omega_0$ aperto contenuto in $\Omega$ tale che $\inf_{\Omega_0} \varphi > 0$. Indichiamo con $(\lambda_k)_{k \in \boldsymbol{N}}$ la successione divergente a $+\infty$ degli autovalori di ($Ps_\omega$), ordinati in modo crescente e ripetuti con la loro molteplicità. Supponiamo inoltre che $g$ sia dispari cioè $g(x,s) = -g(x,-s)$. Allora se $\lambda > \lambda_i$, esistono $2i$ funzioni $\pm u_{1,\lambda}, \dots, \pm u_{i,\lambda}$ non nulle e tali che $(\pm u_{i,\lambda}, \lambda)$ sono soluzioni di ($Ps3$). Risulta poi per $j = 1, \dots, i$*

$$\liminf_{\lambda \to +\infty} \|u_{j,\lambda}\|_{L^2(\Omega)} \geq \sup_{\substack{A \subset K \setminus \{0\} \\ A \text{ simmetrico} \\ \operatorname{gen}(A) \geq j}} \inf_{u \in A} \|u\|_{L^2(\Omega)}.$$

## 6. Il problema degli autovalori dell'operatore armonico con vincoli sulle derivate

Siano $\Omega$ un aperto limitato regolare di $\boldsymbol{R}^N$, $g: \Omega \times \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ e sia ancora $\varphi: \Omega \to$ $\to [0, +\infty[$. Consideriamo

$$(6.1) \qquad \boldsymbol{K}_1 = \{u \in W_0^{1,2}(\Omega) \mid |Du| \leq \varphi \text{ quasi ovunque in } \Omega\}$$

e per $\rho > 0$ sia $S_\rho$ come nel paragrafo 2. In ipotesi su $g$ simili a quelle del paragrafo 2 si possono considerare le disequazioni variazionali analoghe a ($Ps1$)-($Ps3$) e (Pe1), (Pe2), ottenute sostituendo $\Delta u$ con $Du$ e $\boldsymbol{K}$ con $\boldsymbol{K}_1$. In termini variazionali, si può vedere che, analogamente a quanto dimostrato per l'operatore biarmonico, il problema si traduce nello studio dei punti inferiormente stazionari e delle curve di evoluzione forte per il funzionale

$$(6.2)\qquad f_1(u) = \begin{cases} \displaystyle\int_\Omega \left[ (Du)^2 + \int_0^{u(x)} g(x,s)\,ds \right] dx & \text{se } u \in W_0^{1,2}(\Omega), \\ +\infty & \text{altrimenti}, \end{cases}$$

sul vincolo $K_1 \cap S_\rho$. È allora abbastanza semplice vedere che valgono teoremi di esistenza e molteplicità analoghi a quelli visti per l'operatore biarmonico, purché sia verificata la condizione di non tangenza tra la sfera $S_\rho$ e il nuovo vincolo $K_1$. È anche chiaro che per il corrispondente problema di biforcazione valgono gli analoghi risultati, dato che in questo tipo di risultati la non tangenza è «automaticamente» verificata.

Resta dunque da portare avanti l'analisi della condizione di non tangenza tra $S_\rho$ e $K_1$. Tale problema è quasi completamente aperto; vale anzi un risultato negativo esposto nel teorema (6.5), per il quale è importante la seguente caratterizzazione dei raggi di tangenza.

(6.3) Definizione. *Sia* $l\colon L^2(\Omega) \to \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ *definito da* $l(u) = \inf\{c \in \mathbf{R} \mid |Du(x)| \leq c\varphi(x)$ *per q.o.* $x\}$ (*se* $\varphi \equiv 1$, *allora* $l(u) = \|Du\|_{L^\infty(\Omega)}$).

(6.4) Caratterizzazione dei raggi di tangenza. *Si ha che* $K_1$ *ed* $S_\rho$ *sono tangenti in un punto* $u$ *di* $K_1 \cap S_\rho$, *se e solo se* $1/\rho$ *è valore inferiormente critico per* $l$ *su* $S_1$ *e* $u/\rho$ *è il corrispondente punto inferiormente stazionario.*

Da teoremi di carattere generali si può allora dedurre il seguente risultato

(6.5) Teorema. *Sia* $\rho \in L^p(\Omega)$ *con* $1/p < 1/2 + 1/N$, *allora esiste una successione* $(\rho_k)_{k \in N}$ *tale che* $\rho_k > 0$ $\forall k$, $\rho_k \to 0$ *e* $K_1$ *e* $S_{\rho_k}$ *sono tangenti in qualche punto* (*infatti in queste ipotesi* $l$ *ha una successione divergente di valori critici su* $S_1$).

(6.6) Problema aperto. *In opportune ipotesi su* $\Omega$ *e* $\varphi$, *esistono e «sono tanti» i valori regolari di* $l$ *su* $S_1$? *In altre parole vale un risultato del tipo Lemma di Sard per* $l$ *su* $S_1$?

Nel caso particolare $N = 1$ e $\varphi \equiv 1$ si possono esaminare concretamente alcuni casi. Se $\Omega = ]0,1[$ si può vedere che le possibili funzioni di tangenza sono le funzioni

$$u_k(x) = (-1)^i \operatorname{dist}\left(x, [0,1] \setminus \left]\frac{i-1}{k}, \frac{i}{k}\right[\right) \quad \text{se } x \in \left[\frac{i-1}{k}, \frac{i}{k}\right], \quad i = 1, \dots, k$$

e i possibili raggi di tangenza sono dati dalla successione $(\rho_k) = (1/(2\sqrt{3}k))$; quindi la congettura di (6.6) è vera.

Si può però considerare $\Omega = \bigcup_{i \in N} I_i$ dove $I_i$ sono degli intervalli disgiunti di ampiezza $|I_i| = \sqrt[3]{3}/2^{(i-2)/3}$. Allora, definendo le funzioni $u_i(x) = \operatorname{dist}(x, \mathbf{R} \setminus I_i)$, si vede che

$\|u_i\|^2_{L^2(\Omega)} = 2^{-i}$ e che, comunque fissato $J \subset \mathbf{N}$, la funzione

$$u_J = \sum_{j \in J} u_j$$

è di tangenza e si ha $\|u_J\|^2 = \sum_{j \in J} 2^{-j}$, che può essere un qualunque numero in [0,1], scegliendo opportunamente $J$. Quindi se l'aperto $\Omega$ è «cattivo», la congettura di (6.6) è falsa.

## Bibliografia


[1] M. S. Berger, *Nonlinearity and Funtional Analysis.* Academic Press, New York-San Francisco-London 1977.

[2] G. Čobanov - A. Marino - D. Scolozzi, *Multiplicity of eigenvalues of the Laplace operator with respect to an obstacle and non tangency conditions.* Nonlinear Anal. Th. Meth. Appl., vol. 15, 3, 1990, 199-215.

[3] G. Čobanov - A. Marino - D. Scolozzi, *Evolution equations for the eigenvalue problem for the Laplace operator with respect to an obstacle.* Rend. Accad. Naz. Sci. XL, Mem. Mat., 14, 1990, 139-162.

[4] E. De Giorgi - A. Marino - M. Tosques, *Problemi di evoluzione in spazi metrici e curve di massima pendenza.* Atti Acc. Lincei Rend. fis., s. 8, vol. 68, 1980, 180-187.

[5] M. Degiovanni, *Bifurcation problems for nonlinear elliptic variational inequalities.* Ann. Fac. Sci. Toulouse, 10, 1989, 215-258.

[6] M. Degiovanni, *Homotopical properties of a class of nonsmooth functions.* Ann. Mat. Pura e Applicata, vol. CLVI, 1990, 37-71.

[7] M. Degiovanni - A. Marino, *Nonsmooth variational bifurcation.* Atti Acc. Lincei Rend. fis., s. 8, vol. 81, 1987, 259-269.

[8] M. Degiovanni - A. Marino - M. Tosques, *Evolution equations with lack of convexity.* Nonlinear Anal. Th. Meth. Appl., (9), 12, 1985, 1401-1443.

[9] C. Do, *Bifurcation theory for elastic plates subjected to unilateral conditions.* J. Math. Anal. Appl., 60, 1977, 435-448.

[10] M. A. Krasnoselskii, *Topological Methods in the Theory of Nonlinear Integral Equations.* Gosudarstv. Izdat. Tehn.-Teor. Lit., Moscow 1956. The Macmillan Co., New York 1964.

[11] M. Kučera, *A new method for obtaining eigenvalues of variational inequalities: operators with multiple eigenvalues.* Czechoslovak Math. J., 32, 1982, 197-207.

[12] M. Kučera, *Bifurcation point of variational inequalities.* Czechoslovak Math. J., 32, 1982, 208-226.

[13] M. Kučera, *A global bifurcation theorem for obtaining eigenvalues and bifurcation points.* Czechoslovak Math. J., 38, 1988, 120-137.

[14] M. Kučera - J. Nečas - J. Souček, *The eigenvalue problem for variational inequalities and a new version of the Lusternik-Schnirelmann theory*. In: *Nonlinear Analysis.* Collection of papers in honour Erich H. Rothe. Academic Press, New York 1978, 125-143.

[15] A. Marino - C. Saccon - M. Tosques, *Curves of maximal slope and parabolicvariational inequalities on non convex constraints.* Annali Sc. Norm. Sup. Pisa, vol. XVI, 1989, 281- 330.

[16] A. Marino - D. Scolozzi, *Geodetiche con ostacolo.* Boll. Un. Mat. Ital., B (6) 2, 1983, 1-31.

[17] A. Marino - M. Tosques, *Some variational problems with lack of convexity and some partial differential inequalities* In: *Methods of Nonconvex Analysis.* Lecture notes in math., 1446, Springer-Verlag, 1989, 58-83.

[18] E. Miersemann, *Eigenwertaufgaben für Variationsungleichungen.* Math. Nachr., 100, 1981, 221-228.

[19] E. Miersemann, *On higher eigenvalues of variational inequalities.* Comment. Math., Univ. Carolin., 24, 1983, 657-665.

[20] E. Miersemann, *Eigenvalue problems in convex sets.* Mathematical Control Theory: 401-408, Banach Center Pubbl., 14 PWN, Warsaw 1985.

[21] P. QUITTNER, *Spectral analysis of variational inequalities.* Comment. Math., Univ. Carolin., 27, 1986, 605-629.

[22] P. H. RABINOWITZ, *Variational methods for nonlinear eigenvalue problems.* C.I.M.E., Varenna 1974, 1-56.

[23] R. C. RIDDEL, *Eigenvalue problems for nonlinear elliptic variational inequalities.* Nonlinear Anal. Th. Meth. Appl., 3 1979, 1-33.

[24] C. SACCON, *Some parabolic equations on nonconvex constraints.* Boll. Un. Mat. Ital., B (7) 3, 1989, 369-385.

[25] C. SACCON, *On the eigenvalues of a fourth order elliptic variational inequality with pointwise gradient constraint.* Preprint Dip. Mat. Pisa, ottobre 1992.

[26] F. SCHURICHT, *Minimax principle for eigenvalue variational inequalities in the nonsmooth case.* Math. Nachr., 152, 1991, 121-143.

[27] F. SCHURICHT, *Biforcation from minimax solutions by variational inequalities.* Math. Nachr., 154, 1991, 67-88.

[28] A. SZULKIN, *On a class of variational inequalities involving gradient operators.* J. Math. Annal. Appl., 100, 1984, 486-499.

[29] A. SZULKIN, *On the solvability of a class of semilinear variational inequalities.* Rend. Mat., (7) 4, 1984, 121-137.

[30] A. SZULKIN, *Posive solutions of variational inequalities: a degree theoretical approach.* J. Differential Equations, 57, 1985, 90-111.

Dipartimento di Matematica
Università degli Studi di Parma
Via D'Azeglio, 85/A - 43100 PARMA