Atti Accademia Nazionale Lincei Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti Lincei
Matematica e Applicazioni

Giuseppe Congedo, Italo Tamanini

Problemi di partizioni ottimali con dati illimitati

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti Lincei. Matematica e Applicazioni, Serie 9, Vol. **4** (1993), n.2, p. 103–108.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLIN_1993_9_4_2_103_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti Lincei. Matematica e Applicazioni, Accademia Nazionale dei Lincei, 1993.

Rend. Mat. Acc. Lincei
s. 9, v. 4:103-108 (1993)

Calcolo delle variazioni. — *Problemi di partizioni ottimali con dati illimitati.* Nota di Giuseppe Congedo e Italo Tamanini, presentata (*) dal Socio E. De Giorgi.

Abstract. — *Optimal partitions with unbounded data.* The aim of this *Note* is to present an existence result for one of the functionals proposed by D. Mumford and J. Shah, under more general hypotheses with respect to the existing literature. The local finiteness of the optimal partitions is also shown.

Key words: Caccioppoli sets and partitions; Optimal partitions; Image segmentation.

Riassunto. — In questa *Nota* si risolve il problema di esistenza per un funzionale alla Mumford-Shah in ipotesi più generali rispetto ad altri precedenti lavori sull'argomento. Si dimostra inoltre la locale finitezza delle partizioni ottimali trovate.

Introduzione

In alcuni recenti lavori [2, 14] si sono studiate le soluzioni di un problema di minimo, associato ad un tipo di approssimazione ottimale di una data funzione mediante funzioni costanti a tratti. Esso trae origine da un approccio variazionale proposto da D. Mumford e J. Shah [13] per la trattazione di problemi di segmentazione di immagini nella teoria della visione artificiale, e rientra nella classe di problemi di tipo «frontiere minime» introdotta da E. De Giorgi in [6].

Nei lavori citati [2, 14] si è esaminato il caso in cui la funzione assegnata è limitata (più precisamente, appartiene ad $L^p(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, con Ω aperto di $\boldsymbol{R}^n$), giungendo a dimostrare teoremi di esistenza e regolarità delle soluzioni. Analoghi risultati vengono qui ottenuti per funzioni appartenenti allo spazio $L^p(\Omega) \cap L^{np}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$.

Nella prima parte della presente *Nota* viene enunciato il Teorema di esistenza e regolarità, ed è esposto un controesempio che evidenzia l'ottimalità della scelta dell'indice di sommabilità np per il dato.

Nella seconda parte viene risolta un'opportuna «formulazione debole» del problema considerato, relativa ad un problema di minimo di un funzionale, ambientato su coppie costituite da partizioni di Ω aventi perimetro totale finito e da funzioni che assumono valori costanti su ogni singolo elemento della partizione.

La dimostrazione del Teorema si ottiene infine utilizzando un «procedimento di scoppiamento», abbinato ad un «metodo di eliminazione»: quest'ultimo, sostanzialmente, afferma che se m insiemi di una partizione ottimale occupano «gran parte» di una palla, allora ne occupano completamente una pallina concentrica.

1. Enunciato del teorema principale e relativo controesempio

In tutto questo lavoro indicheremo con n un numero intero maggiore o uguale a 2, con λ un numero reale positivo, con p un numero reale maggiore o uguale a 1, con Ω un aperto di $\boldsymbol{R}^n$.

(*) Nella seduta dell'11 novembre 1992.

TEOREMA 1. Se $g \in L^p(\Omega) \cap L^{np}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, allora esiste il minimo del funzionale

$$F(C, u) = \lambda \int_{\Omega \setminus C} |u - g|^p \, dx + H^{n-1}(C \cap \Omega) \tag{1}$$

(dove H^{n-1} è la misura di Hausdorff $(n-1)$-dimensionale in $\boldsymbol{R}^n$) sull'insieme delle coppie ammissibili (C, u) tali che:

a) C è chiuso in $\boldsymbol{R}^n$;

b) $u \in C^1(\Omega \setminus C)$ con $\nabla u(x) = 0 \ \forall x \in \Omega \setminus C$.

Inoltre, se (K, w) è una coppia minimizzante il funzionale (1), allora w assume un numero finito di valori in $D \setminus K$, $\forall D$ compatto $\subset \Omega$.

OSSERVAZIONE 2. L'ipotesi $g \in L^{np}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ è essenziale per la validità del precedente Teorema. Infatti, nell'esempio che segue $\forall q$ tale che $1 \leqslant q < np$ costruiremo una funzione $g \in L^q(\Omega)$ per la quale il funzionale (1) non ha minimo.

ESEMPIO 3. Sia $\{x_h\}_{h \in \mathbf{N}}$ una successione di punti densa in Ω e poniamo $\rho_h = e^{-hp}$ $\forall h \in \mathbf{N}$.

Poniamo inoltre $B_h = B_{x_h, \rho_h}$ (la palla di centro x_h e raggio ρ_h),

$g_h = \alpha e^h \chi_{B_h}$ (dove χ_E è la funzione caratteristica di E e $\alpha = (2n/\lambda)^{1/p}$),

$g = \sum_{h=1}^{\infty} g_h$.

È facile vedere che $g \in L^q(\Omega)$ $\forall q$ tale che $1 \leqslant q < np$.

Supponiamo per assurdo che esista una coppia (K, w) minimizzante il funzionale (1) e sia A una componente connessa di $\Omega \setminus K$. Sia $t > 0$ il valore costante di w su A: $t = w(A)$. Si può certamente trovare un indice k tale che

$$B_k \subset\subset A \quad \text{e} \quad te^{-k} < \alpha(1 - 2^{-1/p}).$$

Posto $C = K \cup \partial B_k$,

$$u = \begin{cases} \alpha e^k & \text{in } B_k\,, \\ t & \text{in } A \setminus \overline{B}_k\,, \\ w & \text{in } \Omega \setminus (A \cup K)\,, \end{cases}$$

si ha che (C, u) è una coppia ammissibile per il funzionale (1), ovvero C è chiuso in $\boldsymbol{R}^n$ e $u \in C^1(\Omega \setminus C)$ è tale che $\nabla u(x) = 0 \ \forall x \in \Omega \setminus C$. Ora:

$$F(K, w) - F(C, u) = \lambda \int_{B_k} (|t - g(x)|^p - |\alpha e^k - g(x)|^p)\, dx - H^{n-1}(\partial B_k) \geqslant$$

$$\geqslant \lambda(\alpha e^k - t)^p |B_k| - H^{n-1}(\partial B_k)$$

dove $|E|$ denota la misura di Lebesgue di $E \subset \boldsymbol{R}^n$. In base alle ipotesi precedenti, quest'ultima quantità è positiva, contraddicendo in tal modo la minimalità di (K, w).

2. Notazioni, definizioni e risultati preliminari

Per la dimostrazione del Teorema 1 è opportuno introdurre una «formulazione debole» del problema di minimizzare il funzionale (1). A tale scopo premettiamo alcune definizioni riguardanti le partizioni di Caccioppoli.

Definizione 4. Sia $\mathcal{U}$ una famiglia finita o numerabile di insiemi misurabili di $\boldsymbol{R}^n$. Si dice che $\mathcal{U}$ è una *partizione di Caccioppoli* di Ω e si scrive $\mathcal{U} \in PC(\Omega)$ se e solo se esiste una successione $\{U_i\}_{i \in N}$ tale che

$$\mathcal{U} = \{U_i : i \in \boldsymbol{N}\}, \qquad \left| \Omega - \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i \right| = 0, \qquad U_i = U_i(1) \quad \forall_i \in \boldsymbol{N},$$

$$U_i \cap U_j = \emptyset \quad \forall i \neq j, \quad \sum_{i=1}^{\infty} P(U_i, A) < +\infty \quad \forall A \text{ aperto } \subset\subset \Omega,$$

dove $\forall E$ misurabile $\subset \boldsymbol{R}^n$ $E(\alpha)$ e $P(E, A)$ denotano rispettivamente l'insieme dei punti di densità $\alpha \in [0, 1]$ di E ed il perimetro di E in A, ovvero:

$$E(\alpha) = \left\{ x \in \boldsymbol{R}^n : \lim_{\rho \to 0} \frac{|E \cap B_\rho(X)|}{|B_\rho(X)|} = \alpha \right\},$$

$$P(E, A) = \sup \left\{ \int_E \operatorname{div} \phi(x)\, dx : \phi \in C_0^1(A, \boldsymbol{R}^n), \ |\phi(x)| \leq 1 \ \forall x \right\}.$$

Osservazione 5. In [2] sono provate le seguenti proprietà: Se $\mathcal{U} \in PC(\Omega)$ e $\mathcal{U} = \{U_i : i \in \boldsymbol{N}\}$ allora:

(*i*) $2H^{n-1}\left(\Omega - \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(U_i, \Omega)$;

(*ii*) $H^{n-1}\left[\left(\Omega - \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i\right) - \bigcup_{i \neq j} (U_i(1/2) \cap U_j(1/2))\right] = 0.$

Dalla osservazione precedente segue in particolare che la serie $\sum_{i=1}^{\infty} P(U_i, \Omega)$ non dipende dalla successione $\{U_i\}_{i \in N}$ scelta per rappresentare la partizione $\mathcal{U}$; porremo in seguito

$$P(\mathcal{U}, \Omega) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\infty} P(U_i, \Omega).$$

Osservazione 6. La denominazione di partizione di Caccioppoli analoga a quella già usata di insieme di Caccioppoli è giustificata dalla considerazione dei lavori [4, 5, 7, 9, 10-12].

Definizione 7. Diremo che la coppia $(\mathcal{U}, u)$ è una *partizione di Caccioppoli pesata* di Ω e scriveremo $(\mathcal{U}, u) \in PCP(\Omega)$ se e solo se $\mathcal{U} \in PC(\Omega)$ e u è una funzione a valori in $\overline{\boldsymbol{R}} = \boldsymbol{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ definita sulla unione degli insiemi U della partizione $\mathcal{U}$, e costante su ogni insieme U di $\mathcal{U}$.

DEFINIZIONE 8. Sia $\{\mathcal{U}_h\}_{h\in N}$ una successione di partizioni di Caccioppoli di Ω. Diremo che $\mathcal{U}_h$ converge ad $\mathcal{U}_\infty$ in $L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ se $\forall_h \in N \cup \{\infty\}$ è possibile trovare una successione $\{U_{h,i}\}_{i\in N}$ tale che

$$\mathcal{U}_h = \{U_{h,i}\colon i \in N\} \quad \text{e} \quad \lim_{h\to\infty}\int_A |\chi_{U_{h,i}} - \chi_{U_{\infty,i}}|\,dx = 0 \quad \forall i \in N \quad \text{e} \quad \forall A \subset\subset \Omega,$$

A aperto.

Si ha il seguente risultato di compattezza:

TEOREMA 9. Se $\{\mathcal{U}_h, u_h\}_{h\in N}$ è una successione di partizioni di Caccioppoli pesate di Ω e se $\sup\{P(\mathcal{U}_h, \Omega)\colon h \in N\} < \infty$, allora esiste una successione strettamente crescente di interi $\{h_k\}_{k\in N}$ ed una partizione pesata $(\mathcal{U}_\infty, u_\infty)$ di Ω tale che per $k \to \infty$ si abbia

$$\mathcal{U}_{h_k} \to \mathcal{U}_\infty \qquad \text{in } L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega),$$
$$u_{h_k}(x) \to u_\infty(x) \qquad \text{per quasi ogni } x \in \Omega.$$

3. FORMULAZIONE DEBOLE DEL PROBLEMA DI MINIMO

DEFINIZIONE 10. Sia $g \in L^p(\Omega)$; per ogni $(\mathcal{U}, u) \in PCP(\Omega)$ poniamo

$$G(\mathcal{U}, u) = P(\mathcal{U}, \Omega) + \lambda \int_\Omega |u - g|^p\,dx. \tag{2}$$

Dal Teorema 9, usando il metodo diretto del calcolo delle variazioni, scende facilmente il seguente

TEOREMA 11. Nelle ipotesi precedenti, il funzionale G ammette minimo nelle coppie $(\mathcal{U}, u) \in PCP(\Omega)$.

La dimostrazione di esistenza di minimi del funzionale (1) si basa su di un «Lemma di eliminazione», relativo a minimi locali del funzionale (2), secondo la seguente

DEFINIZIONE 12. Sia $g \in L^p_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, A aperto $\subset\subset \Omega$ e $(\mathcal{U}, u) \in PCP(\Omega)$; poniamo

$$G_g(\mathcal{U}, u; A) = P(\mathcal{U}, A) + \lambda \int_A |u - g|^p\,dx.$$

Diremo che $(\mathcal{W}, w) \in PCP(\Omega)$ è *minimo locale* in Ω di G_g se e solo se $\forall A$ aperto $\subset\subset \Omega$, vale

(*i*) $G_g(\mathcal{W}, w; A) < +\infty$,

(*ii*) $G_g(\mathcal{W}, w; A) \leq G_g(\mathcal{U}, u; A)$ $\forall(\mathcal{U}, u) \in PCP(\Omega)$ tale che $\mathcal{U} = \mathcal{W}$ e $u = w$ in $A \setminus D$ con D compatto opportunamente scelto in A.

LEMMA 13 (di eliminazione). Sia $g \in L^{np}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$. Sia $(\mathcal{W}, w)$ minimo locale in Ω di G_g, sia inoltre $\{W_i\}_{i\in N}$ tale che $\mathcal{W} = \{W_i\colon i \in N\}$ e indichiamo con t_i il valore costante assunto da w su W_i. Fissato $m \in \mathbf{N}$, poniamo

$$\eta = \eta(n, m) = n^n \omega_n 2^{1-3n} 6^{-n^2} m^{-n}$$

e, fissato $x \in \Omega$, scegliamo $\bar{s} \in (0, \operatorname{dist}(x, \partial\Omega))$ tale che

$$2m\lambda \max_{1 \leq i \leq m} \left(\int_{B_{x,\bar{s}}} |t_i - g(y)|^{np} dy \right)^{1/n} \leq n\omega_n^{1/n}.$$

Se per $s \in (o, \bar{s})$ vale

$$\left| B_{x,s} \setminus \bigcup_{i=1}^{m} W_i \right| \leq \eta s^n$$

allora

$$\left| B_{x,s/3} \setminus \bigcup_{i=1}^{m} W_i \right| = 0.$$

Il Lemma precedente estende un analogo risultato dimostrato in [14] nel caso $g \in L^\infty(\Omega)$.

4. Dimostrazione del Teorema 1

Dal Teorema 11 e dal Lemma 13 scende facilmente l'esistenza di minimi per il funzionale F in (1). Infatti, se $(\mathcal{W}, w) \in PCP(\Omega)$ è un minimo di G allora $W \cap \Omega$ è aperto $\forall W \in \mathcal{W}$, grazie al Lemma 13 (si ricordi che $W = W(1)$). Posto

$$K = \overline{\Omega - \cup\{W : W \in \mathcal{W}\}},$$

si trova facilmente che (K, w) minimizza il funzionale F, con valori minimi coincidenti, cioè $F(K, w) = G(\mathcal{W}, w)$. Analogamente da ogni coppia (K, w) minimizzante il funzionale F si ottiene facilmente una partizione di Caccioppoli pesata $(\mathcal{W}, \overline{w})$ che minimizza G (prendendo essenzialmente i punti di densità 1 delle componenti connesse di $\Omega \setminus K$ ed estendendo ad essi, in modo naturale, la funzione w).

Lo studio della ulteriore proprietà di finitezza dei minimi del funzionale (1), enunciata nel Teorema 1, si basa su di un «metodo di scoppiamento» e su alcuni risultati riguardanti le partizioni ottimali ottenuti in [14]. A tale scopo è fondamentale il seguente Teorema di convergenza:

Teorema 14. Sia $g_h \in L^p_{\text{loc}}(\Omega)$ $\forall h \in \mathbf{N}$ tale che $g_h \to g_\infty$ per $L^p_{\text{loc}}(\Omega)$ per $h \to \infty$. Supponiamo che $\forall h \in \mathbf{N}$, $(\mathcal{W}_h, w_h) \in PCP(\Omega)$ sia un minimo locale in Ω del funzionale G_{g_h}, e che

$$\mathcal{W}_h \to \mathcal{W}_\infty \quad \text{in } L^1_{\text{loc}}(\Omega)$$

$$w_h(x) \to w_\infty(x) \quad \text{per quasi ogni } x \in \Omega,$$

con $(\mathcal{W}_\infty, w_\infty) \in PCP(\Omega)$. Allora $(\mathcal{W}_\infty, w_\infty)$ è minimo locale in Ω di G_{g_∞}.

Osservazione 15. Usando il Teorema precedente e considerazioni del tipo usato in [2] e [14] si riesce ad ottenere anche la locale finitezza dei minimi (si veda [3]).

Bibliografia

[1] L. Ambrosio, *Variational problems in* SBV *and image segmentation.* Acta Appl. Math., 17, 1989, 1-40.

[2] G. Congedo - I. Tamanini, *On the existence of solutions to a problem in multidimensional segmentation.* Ann. Inst. Henri Poincaré, vol. 8, n. 2, 1991, 175-195.

[3] G. Congedo - I. Tamanini, *Optimal partitions with unbounded data.* Preprint Dip. di Mat. Università di Trento, 1993.

[4] E. De Giorgi, *Su una teoria generale della misura* $(r-1)$*-dimensionale in uno spazio ad r dimensioni.* Ann. Mat. Pura Appl., 36, 1954, 191-213.

[5] E. De Giorgi, *Sulla proprietà isoperimetrica della ipersfera, nella classe degli insiemi aventi frontiera orientata di misura finita.* Atti Acc. Lincei Mem. fis., s. 8, vol. 5, 1958, 33-44.

[6] E. De Giorgi, *Free discontinuity problems in calculus of variations*. In: R. Dautray (ed.), *Frontiers in Pure and Applied Mathematics.* North-Holland, Amsterdam 1991.

[7] E. De Giorgi - F. Colombini - L. Piccinini, *Frontiere orientate di misura minima e questioni collegate.* Editrice Tecnico Scientifica, Pisa 1972.

[8] E. De Giorgi - G. Congedo - I. Tamanini, *Problemi di regolarità per un nuovo tipo di funzionale del calcolo delle variazioni.* Atti Acc. Lincei Rend. fis., s. 8, vol. 82, 1988, 673-678.

[9] H. Federer, *Geometric Measure Theory.* Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York 1969.

[10] E. Giusti, *Minimal Surfaces and Functions of Bounded Variation.* Birkauser, Boston-Basel-Stuttgart 1984.

[11] M. Miranda, *Distribuzioni aventi derivate misure, insiemi di perimetro localmente finito.* Ann. Sc. Normale Sup. Pisa, s. 3, 18, 1964, 27-56.

[12] U. Massari - M. Miranda, *Minimal Surfaces of Codimension One.* North-Holland, Amsterdam 1984.

[13] D. Mumford - J. Shah, *Optimal approximations by piecewice smooth functions and associated variational problems.* Comm. Pure Appl. Math., 42, 1989, 577-685.

[14] U. Massari - I. Tamanini, *Regularity properties of optimal segmentations.* J. reine angew. Math., 420, 1991, 61-84.

[15] I. Tamanini - G. Congedo, *Density theorems for local minimizers of area-type functionals.* Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, vol. 85, 1991, 217-248.

[16] I. Tamanini - C. Giacomelli, *Approximation of Caccioppoli sets, with applications to problems in image segmentation.* Ann. Univ. Ferrara, (7), 35, 1989, 187-213.

G. Congedo: Dipartimento di Matematica
Università degli Studi di Lecce
Via Arnesano - 73100 Lecce

I. Tamanini: Dipartimento di Matematica
Università degli Studi di Trento
38050 Povo TN