

RENDICONTI LINCEI MATEMATICA E APPLICAZIONI

CIRO FAELLA, EMIDIO NIGRO

Determinazione dell'eccentricità addizionale in regime elasto-viscoso lineare di elementi snelli di materiale omogeneo in presenza di armatura

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti Lincei. Matematica e Applicazioni, Serie 9, Vol. 3 (1992), n.4, p. 315–327.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLIN_1992_9_3_4_315_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti Lincei. Matematica e Applicazioni, Accademia Nazionale dei Lincei, 1992.

Meccanica dei solidi. — *Determinazione dell'eccentricità addizionale in regime elasto-viscoso lineare di elementi snelli di materiale omogeneo in presenza di armatura.* Nota di CIRO FAELLA e EMIDIO NIGRO, presentata (*) dal Socio E. Giangreco.

ABSTRACT. — *Additional eccentricity evaluation in linear viscoelasticity of homogeneous slender columns with reinforcement.* The evaluation of the creep concrete effects for the check of slender r.c. columns can be obtained with the creep eccentricity method, which expresses the increase of the displacement due to the creep by means of a simple formula. This formula is deduced for homogeneous material with linear viscoelastic behaviour and leads generally to very conservative results, because does not take into account the reinforcements, which reduce the viscous deformations. In this work it is derived a modified formula for the additional eccentricity evaluation, different from others referred in bibliography, which takes into account the reinforcements and gives a value of the additional eccentricity depending also on the homogenized section inertia. From some comparisons with more exact methodologies it is deduced that the proposed formulation is satisfying, because it reduces strongly the conservativity of the original method, preserving the characteristic of simple application.

KEY WORDS: Buckling; Linear viscoelasticity; Reinforced concrete.

RIASSUNTO. — La valutazione degli effetti della viscosità del calcestruzzo per la verifica delle colonne snelle in c.a. può eseguirsi utilizzando il metodo dell'eccentricità addizionale, che consiste nel valutare l'incremento di freccia dovuto alla viscosità mediante una semplice relazione analitica. Tale relazione, ricavata nell'ipotesi di materiale omogeneo a comportamento elasto-viscoso lineare, può condurre a risultati molto conservativi, dal momento che non considera la presenza delle armature metalliche, che riducono le deformazioni viscosi. Nel presente lavoro si perviene ad una relazione analitica modificata per valutare l'eccentricità addizionale, diversa da altre riportate in bibliografia, che tiene conto della presenza delle armature metalliche e che fornisce un valore dell'eccentricità addizionale dipendente anche dall'inerzia della sezione omogeneizzata. Dai confronti eseguiti con metodologie più esatte si deduce che la formulazione proposta risulta soddisfacente, in quanto riduce fortemente la conservatività del metodo originario, mantenendo il pregio della semplicità di applicazione.

POSIZIONE DEL PROBLEMA

Per l'analisi degli elementi snelli in cemento armato è importante una corretta valutazione degli spostamenti dovuti alla viscosità del calcestruzzo, responsabili di incrementi delle sollecitazioni del II ordine e quindi della diminuzione della capacità portante ultima.

Il problema si presenta peraltro notevolmente più complesso rispetto ad un'analisi a breve termine, dovendosi a rigore considerare legami costitutivi viscosi non lineari e procedere ad una integrazione nel tempo a causa della variazione delle sollecitazioni.

È possibile comunque introdurre alcune esemplificazioni. In primo luogo è stato mostrato [11] che l'adozione di legami viscosi lineari non comporta apprezzabili variazioni rispetto alla soluzione esatta non lineare; d'altro canto, poiché nella realtà le azioni permanenti o quasi permanenti, responsabili dei fenomeni viscosi, sono inferio-

(*) Nella seduta del 12 giugno 1992.

ri alle massime azioni di servizio ed a maggior ragione alle azioni di collasso, esse inducono stati tensionali per i quali è ragionevole ipotizzare un legame viscoso lineare: in presenza di tensioni variabili nel tempo, si può esprimere la deformazione al generico istante t nel seguente modo:

$$(1) \quad \varepsilon_c(t, t_0) = \frac{\sigma_c(t_0)}{E_c} \cdot [1 + \phi(t, t_0) + \int_{t_0}^t [1 + \phi(t, \tau)] \frac{d\sigma_c(\tau)}{E_c(\tau)} .$$

La soluzione esatta del problema richiede la valutazione dell'integrale di sovrapposizione contenuto nella (1), nel quale sono incognite le tensioni $\sigma_c(\tau)$: assegnata l'espressione del coefficiente di viscosità del materiale $\phi(t, t_0)$, la valutazione dell'integrale può essere condotta per via numerica mediante una discretizzazione dell'intervallo di tempo $(t - t_0)$.

La normativa C.E.B. [1] e quella nazionale [2] propongono un metodo semplificato per la valutazione degli effetti della viscosità nella determinazione del carico ultimo delle colonne snelle (*creep eccentricity method*), che consiste nel valutare una freccia addizionale dovuta alle deformazioni viscosi con l'ausilio della semplice espressione:

$$(2) \quad e_c = e_1 \cdot \left[\exp\left(\frac{N_g}{N_E - N_g} \cdot \phi(t, t_0)\right) - 1 \right] .$$

In base alla (2) l'eccentricità addizionale viscosa è ottenuta amplificando l'eccentricità del I ordine e_1 dei carichi di lunga durata secondo un fattore dipendente dal coefficiente di viscosità $\phi(t, t_0)$ e dal rapporto tra i carichi di lunga durata N_g ed il carico critico euleriano $N_E = \pi^2 E_c I_c / L_0^2$. L'eccentricità e_c determinata mediante la (2) consente di valutare semplicemente il momento del I ordine amplificato degli effetti viscosi, $M_I = N_g \cdot (e_1 + e_c)$ e di eseguire successivamente la verifica della colonna con i metodi usuali.

La relazione (2), come è noto [7, 8], è ricavata con riferimento ad un'ideale colonna omogenea di solo calcestruzzo a comportamento elasto-viscoso lineare, integrando esattamente la (1) grazie all'adozione di un modello viscoso di invecchiamento. Tale modello, in presenza di sollecitazioni crescenti nel tempo ed a parità di coefficiente finale di viscosità, fornisce un limite inferiore nella valutazione delle deformazioni viscosi. Peraltro utilizzando la (2) si trascurano le importanti influenze delle armature metalliche e della fessurazione del calcestruzzo, che comportano la riduzione degli effetti viscosi. Il modello viscoso adottato e l'ipotesi di sezione omogenea di solo calcestruzzo hanno dunque effetti contrapposti sulla valutazione degli effetti della viscosità, per cui sorge l'esigenza da un lato di saggiare l'affidabilità del metodo in oggetto, dall'altro di proporre formulazioni capaci di portare in conto i fenomeni trascurati.

In particolare è possibile pervenire ad una relazione analoga alla (2), ma ricavata considerando anche la presenza delle armature metalliche, che costituiscono in genere un notevole freno al libero evolvere delle deformazioni viscosi [3, 9, 10].

Nel prosieguo si riportano gli sviluppi analitici relativi alla formulazione proposta [4].

IL METODO DELL'ECCENTRICITÀ ADDIZIONALE VISCOSA IN PRESENZA DI ARMATURE

Si consideri l'elemento di fig. 1 soggetto ad azioni normali N_g di lunga durata applicate con eccentricità iniziale e_1 e si indichi con $v(z,t)$ lo spostamento trasversale dell'elemento al generico istante di tempo t . L'elemento è in calcestruzzo armato con sezione retta dotata di un asse di simmetria e con asse di sollecitazione coincidente con esso. Le ipotesi di base formulate sono le seguenti:

- conservazione delle sezioni piane;
- assenza di fessurazione nel calcestruzzo (sezione integra con armature);
- comportamento elasto-viscoso lineare indefinito del calcestruzzo (relazione (1));
- adozione del modello viscoso di invecchiamento;
- comportamento elastico indefinito dell'acciaio per armature.

L'ipotesi *c*), come già precisato, risulta valida se lo stato tensionale attinto dal materiale per i carichi di lunga durata è tale da non interessare la parte non lineare del legame costitutivo.

L'adozione di un modello viscoso di tipo invecchiante, a parità di coefficiente finale di viscosità, fornisce un estremo inferiore per la stima delle deformazioni viscosi. Viceversa adottare l'ipotesi di sezione integra, con armature, significa ammettere che tutto il calcestruzzo sia sede di scorrimenti viscosi, sovrastimando le deformazioni differite nei casi in cui le azioni di lunga durata sono tali da indurre parzializzazione delle sezioni e dando così luogo ad una sorta di compensazione con gli effetti dell'ipotesi *d*). Infine nei casi di piccola eccentricità, quando la sezione è tutta compressa, l'ipotesi di integrità è corretta, ma l'assenza della compensazione di cui sopra può dar luogo a valutazioni per difetto degli effetti viscosi. Si ritornerà comunque su queste considerazioni qualitative più tardi, in sede di confronti numerici.

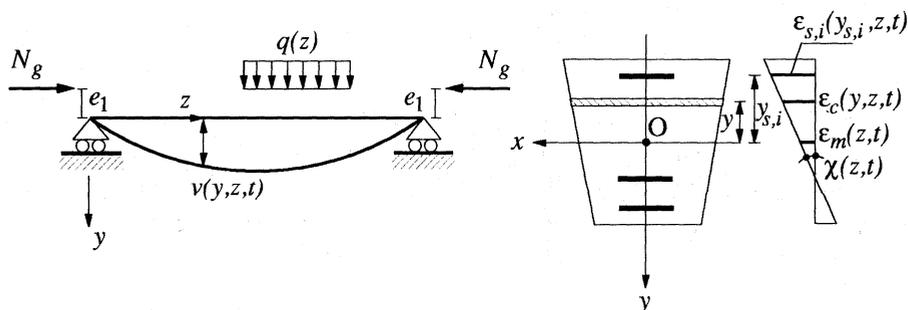


Fig. 1. - Simbologia utilizzata.

La relazione (1) può essere riscritta, integrando per parti, nel modo seguente:

$$(3) \quad \varepsilon_c(t, t_0) = \frac{\sigma_c(t)}{E_c} + \int_{t_0}^t \left[-\frac{\sigma_c(\tau)}{E_c} \frac{\partial \phi(t, \tau)}{\partial \tau} \right] d\tau = \varepsilon_{ce}(t) + \varepsilon_{cc}(t, t_0)$$

assumendo per semplicità $E_c(\tau) = E_c = \text{cost}$ ed indicando con ε_{ce} ed ε_{cc} rispettivamente la parte elastica e la parte viscosa della deformazione nel calcestruzzo al generico istante di tempo t .

Al fine di scrivere l'equazione di equilibrio alla rotazione della generica sezione di ascissa z nell'istante generico t , si adotta come riferimento cartesiano una terna levogira di assi x, y, z (cfr. fig. 1), con origine, nella sezione retta, coincidente con il baricentro della sezione omogeneizzata, la cui posizione non varia nel tempo se il modulo elastico del calcestruzzo è costante. Indicando con $\varepsilon_m(z, t)$ e $\chi(z, t)$ rispettivamente la deformazione media baricentrica e la curvatura della sezione all'ascissa z ed all'istante t , le deformazioni della generica fibra di calcestruzzo e nella generica armatura, in virtù dell'ipotesi a), sono fornite dalle seguenti relazioni:

$$(4) \quad \begin{aligned} \varepsilon_c(y, z, t) &= \varepsilon_{ce}(y, z, t) + \varepsilon_{cc}(y, z, t) = \varepsilon_m(z, t) + \chi(z, t) \cdot y, \\ \varepsilon_{s,i}(y_{s,i}, z, t) &= \varepsilon_{se}(y_{s,i}, z, t) = \varepsilon_m(z, t) + \chi(z, t) \cdot y_{s,i}. \end{aligned}$$

Le tensioni nei materiali, tenendo conto delle ipotesi c) ed e), valgono:

$$(5) \quad \begin{aligned} \sigma_c(y, z, t) &= E_c \cdot \varepsilon_{ce}(y, z, t) = E_c \cdot [\varepsilon_m(z, t) + \chi(z, t) \cdot y - \varepsilon_{cc}(y, z, t)], \\ \sigma_s(y_{s,i}, z, t) &= E_s \cdot \varepsilon_{se}(y_{s,i}, z, t) = E_s \cdot [\varepsilon_m(z, t) + \chi(z, t) \cdot y_{s,i}]. \end{aligned}$$

L'equilibrio alla rotazione all'istante t della sezione posta all'ascissa z si scrive:

$$(6) \quad \int_{A_c} \sigma_c(y, z, t) \cdot y \, dA_c + \sum_{i=1}^{n_s} A_{s,i} \sigma_s(y_{s,i}, z, t) \cdot y_{s,i} = M_I(z) + N_g \cdot v(z, t)$$

essendo $M_I(z)$ il momento del I ordine dovuto ai carichi esterni e $v(z, t)$ lo spostamento trasversale dell'elemento all'ascissa z ed all'istante t . Sostituendo le (5) nell'equazione di equilibrio ed essendo il riferimento baricentrico, si ottiene:

$$(7) \quad E_c I \cdot \chi(z, t) - E_c \cdot \int_{A_c} \varepsilon_{cc}(y, z, t) y \, dA_c = M_I(z) + N_g \cdot v(z, t).$$

Nella (7) la quantità $I = I_c + nI_s$ rappresenta il *momento d'inerzia della sezione omogeneizzata* rispetto all'asse x baricentrico, essendo $n = E_s/E_c = \text{cost}$.

Nell'ipotesi che gli spostamenti trasversali dell'elemento siano piccoli, la curvatura della sezione si può approssimare in funzione della derivata seconda di $v(z, t)$ rispetto a z , come $\chi(z, t) = -v''(z, t)$, che introdotta nella (7) fornisce:

$$(8) \quad E_c I \cdot v''(z, t) + N_g \cdot v(z, t) + M_I(z) = -E_c \cdot \int_{A_c} \varepsilon_{cc}(y, z, t) y \, dA_c.$$

Utilizzando il legame costitutivo viscoelastico espresso dalla relazione (3) ed adottando il modello viscoso di invecchiamento, per il quale risulta

$$(9) \quad \phi(t, \tau) = \phi(t, t_1) - \phi(\tau, t_1)$$

(con t_1 istante di prima maturazione del calcestruzzo), la (8), derivata rispetto al tempo, fornisce, dopo qualche passaggio, la seguente equazione:

$$(10) \quad \frac{\partial v''(z, t)}{\partial t} + v''(z, t) \cdot \left(1 - \frac{I_c}{I}\right) \frac{d\phi(t, t_1)}{dt} + \frac{N_g}{E_c I} \cdot \left[\frac{\partial v(z, t)}{\partial t} + v(z, t) \frac{d\phi(t, t_1)}{dt} \right] = - \frac{M_I(z)}{E_c I} \frac{d\phi(t, t_1)}{dt}.$$

La (10) costituisce un'equazione differenziale mista rispetto alla variabile tempo t ed alla variabile spaziale z . Una notevole semplificazione della sua soluzione può ottenersi separando le variabili t e z ed esprimendo le funzioni $v(z, t)$ ed $M_I(z)$ in serie seno di Fourier:

$$(11) \quad v(z, t) = \sum_{k=1}^{\infty} v_k(t) \cdot \text{sen} \frac{k\pi z}{L}, \quad M_I(z) = \sum_{k=1}^{\infty} M_{I,k} \cdot \text{sen} \frac{k\pi z}{L}$$

essendo $v_k(t)$ ed $M_{I,k}$ rispettivamente l'ampiezza della k -ma armonica dello spostamento, funzione di t , e l'ampiezza della k -ma armonica del momento, costante nel tempo.

Utilizzando le (11), l'equazione (10) fornisce infinite equazioni differenziali nella variabile t delle incognite armoniche $v_k(t)$ (per $k = 1, \dots, \infty$):

$$(12) \quad \frac{dv_k(t)}{dt} \cdot \left[\frac{N_g}{k^2} \frac{L^2}{\pi^2 E_c I} - 1 \right] + v_k(t) \left[\frac{N_g}{k^2} \frac{L^2}{\pi^2 E_c I} - \left(1 - \frac{I_c}{I}\right) \right] \frac{d\phi(t, t_1)}{dt} = - \frac{N_g}{k^2} \frac{L^2}{\pi^2 E_c I} \cdot \frac{M_{I,k}}{N_g} \frac{d\phi(t, t_1)}{dt}.$$

Indicando con $N_E = \pi^2 E_c I / L_0^2$ ed $\alpha = N_g / N_E$ rispettivamente il *carico critico euleriano della sezione omogeneizzata* ed il rapporto tra i carichi di lunga durata e tale carico critico ed operando il cambiamento di variabili da t a $\phi = \phi(t, t_1)$ si ottiene:

$$(13) \quad (dv_k(\phi) / d\phi) [\alpha / k^2 - 1] + v_k(\phi) [\alpha / k^2 - (1 - I_c / I)] = - (\alpha / k^2) (M_{I,k} / N_g)$$

che costituisce un'equazione differenziale del I ordine nella variabile ϕ e nella incognita $v_k(\phi)$.

All'equazione differenziale (13) va associata la condizione iniziale, cioè che all'istante di tempo t_0 di caricamento la deformata dell'asta coincida con quella prodotta istantaneamente dai carichi applicati e dalle sollecitazioni del II ordine:

$$(14) \quad t = t_0, \quad \phi(t_0, t_1) = \phi_0 \Rightarrow v_k(\phi(t_0, t_1)) = v_k(\phi_0) = v_k(t_0) = ((\alpha / k^2) / (1 - \alpha / k^2)) (M_{I,k} / N_g).$$

L'espressione di $v_k(t_0)$ riportata nella (14) è ricavata scrivendo l'equazione (8) per $t = t_0$ ed assumendo anche per la funzione $v(z, t_0)$ uno sviluppo in serie del tipo (11).

La risoluzione dell'equazione differenziale (13), con la condizione iniziale (14), fornisce la seguente espressione della k -ma armonica dello sviluppo in serie (11) di $v(z, t)$:

$$(15) \quad v_k(\phi) = v_k(t_0) \cdot \left[\frac{I_c/I}{\alpha/k^2 - (1 - I_c/I)} \exp\left(\frac{\alpha/k^2 - (1 - I_c/I)}{1 - \alpha/k^2} (\phi - \phi_0) \right) - \frac{1 - \alpha/k^2}{\alpha/k^2 - (1 - I_c/I)} \right]$$

analoga a quella riportata in [9].

In virtù della (11) lo spostamento trasversale in mezzeria dell'elemento, comprensivo degli effetti viscosi e di quelli del II ordine istantanei e differiti, è fornito dalla relazione seguente:

$$(16) \quad v\left(\frac{L}{2}, t\right) = \sum_{k=1}^{\infty} v_k(\phi) \cdot \sin \frac{k\pi}{2}$$

essendo $v_k(\phi)$ espresso tramite la (15).

Al fine di ricavare dalla (16) una relazione correttiva della (2) in presenza di armature risulta interessante valutare l'entità dello spostamento, in mezzeria dell'elemento, dovuto soltanto agli incrementi viscosi delle deformazioni, ovvero, detto in altro modo, la freccia residua allo scarico. A tal uopo occorre dedurre dalla (16) la freccia elastica iniziale comprensiva degli effetti del II ordine e la freccia del II ordine prodotta dal carico N_g per effetto degli incrementi viscosi degli spostamenti.

a) *Deduzione della freccia iniziale*: la freccia viscosa $v_c(L/2, \phi)$ comprensiva degli effetti del II ordine ad essa associati è pari a:

$$(17) \quad v_c\left(\frac{L}{2}, t\right) = v\left(\frac{L}{2}, t\right) - v\left(\frac{L}{2}, t_0\right) = \\ = \sum_{k=1}^{\infty} [v_k(\phi) - v_k(\phi_0)] \cdot \sin \frac{k\pi}{2} = \sum_{k=1}^{\infty} v_{c,k}(\phi) \cdot \sin \frac{k\pi}{2}$$

essendo:

$$(18) \quad v_{c,k}(\phi) = v_k(\phi) - v_k(\phi_0) = v_k(t_0) \cdot \frac{I_c/I}{\alpha/k^2 - (1 - I_c/I)} \cdot \left[\exp\left(\frac{\alpha/k^2 - (1 - I_c/I)}{1 - \alpha/k^2} (\phi - \phi_0) \right) - 1 \right].$$

b) *Deduzione degli effetti del II ordine prodotti dalla viscosità*: la deformata residua allo scarico $v_{cc}(L/2, \phi)$ dell'elemento dovuta ai soli effetti viscosi, cioè depurata dagli effetti del II ordine, può esprimersi al solito in serie di Fourier nel seguente modo

$$(19) \quad v_{cc}\left(\frac{L}{2}, \phi\right) = \sum_{k=1}^{\infty} v_{cc,k}(\phi) \cdot \sin \frac{k\pi}{2}.$$

Nella (19) $v_{cc,k}(\phi)$ e $v_{c,k}(\phi)$ sono le k -me armoniche rispettivamente della freccia viscosa residua e della freccia viscosa comprensiva degli effetti del II ordine; tra $v_{cc,k}(\phi)$

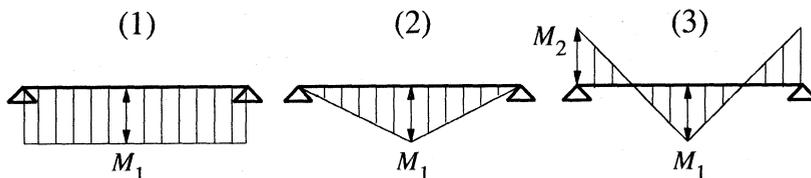


Fig. 2. - Diagrammi dei momenti di riferimento.

e $v_{c,k}(\phi)$ sussiste la seguente relazione [12]:

$$(20) \quad v_{cc,k}(\phi) = v_{c,k}(\phi) \cdot (k^2 - \alpha)/k^2 ;$$

dalla (20), sostituendo a $v_{c,k}(\phi)$ l'espressione (18) e tenendo presente la (14), si ha infine:

$$(21) \quad v_{cc,k}(\phi) = \frac{M_{I,k}}{N_g} \cdot \frac{\alpha}{k^2} \cdot \frac{I_c/I}{\alpha/k^2 - (1 - I_c/I)} \cdot \left[\exp\left(\frac{\alpha/k^2 - (1 - I_c/I)}{1 - \alpha/k^2} (\phi - \phi_0) \right) - 1 \right].$$

Nella (21) il termine $M_{I,k}$ (ampiezza della k -ma armonica della funzione momento) dipende dalla forma del diagramma dei momenti del I ordine. Se il diagramma dei momenti è simmetrico rispetto alla mezzeria, nello sviluppo in serie (19) sono diversi da zero solo i termini con k dispari; nei casi indicati in fig. 2 i termini $M_{I,k}$ ($k = 1, 3, 5, \dots$) valgono:

$$(22) \quad \begin{aligned} (1) \quad M_{I,k} &= \frac{4}{\pi} \cdot \frac{M_I}{k}, \\ (2) \quad M_{I,k} &= \frac{8M_2}{k^2 \pi^2} \operatorname{sen} \frac{k\pi}{2}, \\ (3) \quad M_{I,k} &= \frac{4M_2}{k\pi} + \frac{8(M_1 - M_2)}{k^2 \pi^2} \operatorname{sen} \frac{k\pi}{2} \end{aligned}$$

in cui M_1 ed M_2 vanno presi con il proprio segno, come caratteristiche della sollecitazione.

Come è noto, lo sviluppo in serie di Fourier (19) fornisce il valore esatto della freccia per $k \rightarrow \infty$; d'altro canto, come può evincersi anche dalle (21) e (22), l'ampiezza della prima armonica risulta largamente preponderante rispetto alle altre, talché in genere è sufficiente arrestare lo sviluppo (19) al primo termine. Questa approssimazione dipende però dalla forma del diagramma dei momenti: infatti quando il dia-

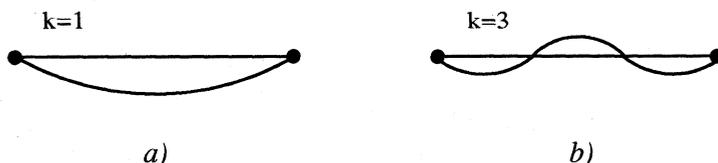


Fig. 3. - Forme della I e III armonica dello sviluppo in serie di Fourier.

gramma è costante o triangolare, ovvero intermedio tra essi, la prima armonica è sufficientemente esauriente (fig. 3a); se invece il diagramma è intrecciato (bitriangolare), allora anche la terza armonica, che presenta due punti di nullo (fig. 3b), può fornire contributi significativi.

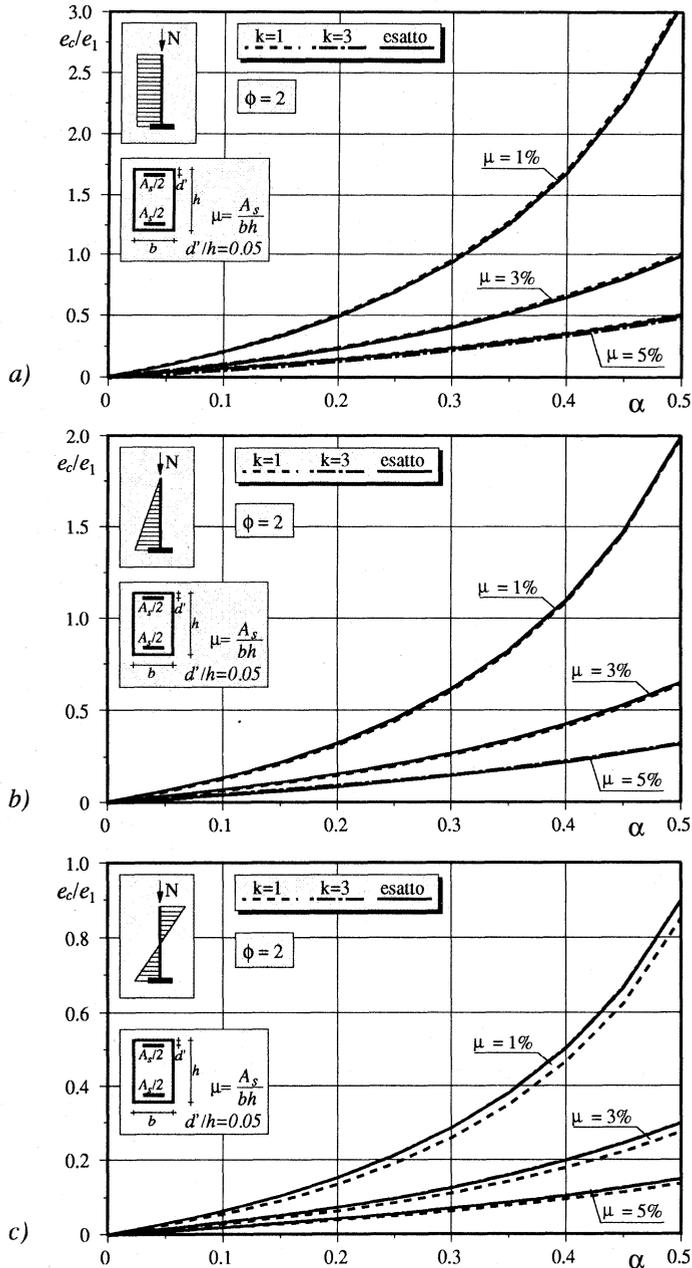


Fig. 4. - Valutazione dell'eccentricità addizionale.

Allo scopo di approfondire questo argomento si riportano nelle fig. 4a, b, c, al variare della forma del diagramma dei momenti e della percentuale di armatura, i valori della freccia residua $v_{cc}(\alpha)$ ottenuti considerando la prima e la terza armonica (curve a tratteggio e tratto-punto) e confrontati con il valore «esatto», cioè ottenuto con un numero considerevole di armoniche ($n = 15$). Si osserva che:

a) nel caso di momento costante lo scarto massimo connesso con l'utilizzo della sola prima armonica non supera il 3% al variare del parametro α , ed inoltre i valori forniti sono a vantaggio di sicurezza;

b) quando il diagramma dei momenti è triangolare, utilizzando una sola armonica si sottostima l'entità della freccia residua v_{cc} comunque con scarti inferiori al 1.5%;

c) invece quando il diagramma dei momenti è bitriangolare (con $M_1 = M$ ed $M_2 = -M$, cfr. fig. 2), come già osservato, considerando solo la prima armonica si commettono errori fino al 15% dal lato della non sicurezza, che vengono pressoché eliminati tenendo conto anche della terza armonica.

È interessante osservare che l'entità degli scarti non è influenzata né dalla quantità di armatura, né dal coefficiente di viscosità del materiale: infatti l'approssimazione è connessa esclusivamente all'adozione dello sviluppo in serie (11) per la descrizione degli spostamenti.

In definitiva nell'applicazione della (19) è sufficiente considerare solo il primo termine quando il diagramma dei momenti è intermedio tra andamento costante e triangolare; occorre invece considerare anche il secondo termine ($k = 3$), se il diagramma dei momenti è intrecciato.

Risulta utile esplicitare la (19) e la (21) nel caso in cui si consideri solo la prima armonica dello sviluppo in serie, ottenendosi la seguente espressione per l'eccentricità addizionale viscosa:

$$(23) \quad e_c(\phi, \alpha, I_c/I) = e_{l,1} \cdot \alpha \frac{I_c/I}{\alpha - (1 - I_c/I)} \cdot \left[\exp\left(\frac{\alpha - (1 - I_c/I)}{1 - \alpha}(\phi - \phi_0)\right) - 1 \right]$$

avendo indicato con $e_{l,1}$ l'eccentricità del I ordine del carico normale N_g pari ad $e_{l,1} = M_{l,1}/N_g$.

Si nota immediatamente che la (23) costituisce una variante della formula (2), fornita dalla normativa, portando però in conto l'effetto dell'armatura metallica; essa inoltre restituisce la (2) nel caso di assenza di armatura ($I_c/I = 1$). Nella fig. 5 sono riportate, al variare del parametro α_c ($\alpha_c = \alpha \cdot I/I_c$), le curve e_c/e_1 che si ottengono in presenza di armatura: dal confronto con la medesima curva ricavata in assenza di armatura scaturisce, come è ovvio, che la riduzione degli effetti viscosi dovuti alle armature può essere molto consistente. Ciò significa che l'applicazione della relazione (2) può condurre a stime molto in eccesso dell'eccentricità addizionale viscosa e quindi a verifiche molto conservative. A tal fine appare sicuramente più realistica la relazione (23) dianzi determinata.

Occorre precisare, inoltre, che in bibliografia [3] esistono altre formule di corre-

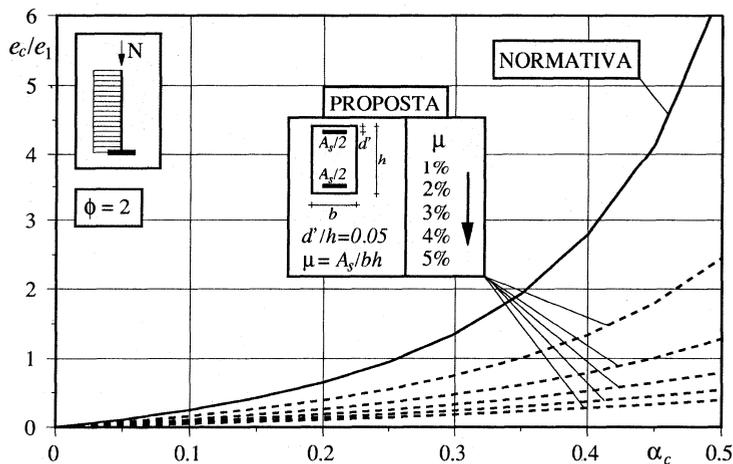


Fig. 5. - Influenza dell'armatura sulla valutazione dell'eccentricità addizionale.

zione della (2) in presenza di armature, che però si dimostrano non pienamente soddisfacenti, in quanto forniscono, al variare dei parametri in gioco (α , I_c/I) anche valori negativi dell'incremento viscoso dell'eccentricità.

APPLICAZIONI NUMERICHE

L'utilizzazione della (23) ai fini della determinazione del carico ultimo delle colonne snelle è del tutto identica a quella riportata nella formulazione originaria: si incrementa il momento del I ordine della quantità $N_g \cdot e_c$ e si tiene conto delle non linearità meccaniche dei materiali e degli effetti del II ordine nei modi usuali (per esempio mediante il metodo della colonna modello o discretizzando la colonna alle differenze finite).

La relazione proposta, come già sottolineato in precedenza, non tiene conto dell'eventuale parzializzazione della sezione di calcestruzzo, che ha l'effetto di ridurre la capacità viscosa della sezione, sovrastimando in tal modo gli effetti viscosi; viceversa l'aver adottato il modello viscoso di invecchiamento comporta una valutazione in difetto delle deformazioni viscosi.

Per mostrare la bontà della formulazione proposta si confrontano i risultati che si ottengono con il metodo dell'eccentricità addizionale, utilizzando la formula (2) originaria e quella (23) proposta, con quelli ricavabili mediante una procedura di calcolo messa a punto in precedenti lavori [5, 6]. Tale procedura considera le effettive modalità di applicazione dei carichi, tenendo conto, tra l'altro, della fessurazione del calcestruzzo e del comportamento non lineare dei materiali già nella fase viscosa ed utilizzando per le sollecitazioni di lunga durata un legame costitutivo $\sigma - \epsilon$ modificato in funzione del coefficiente di viscosità.

Con riferimento al caso di sezione rettangolare a doppia armatura, si costruiscono le curve $(v_u, v/b)$, essendo $v_u = N_u / bh f_{cd}$ il carico normale ultimo, adimensionalizzato

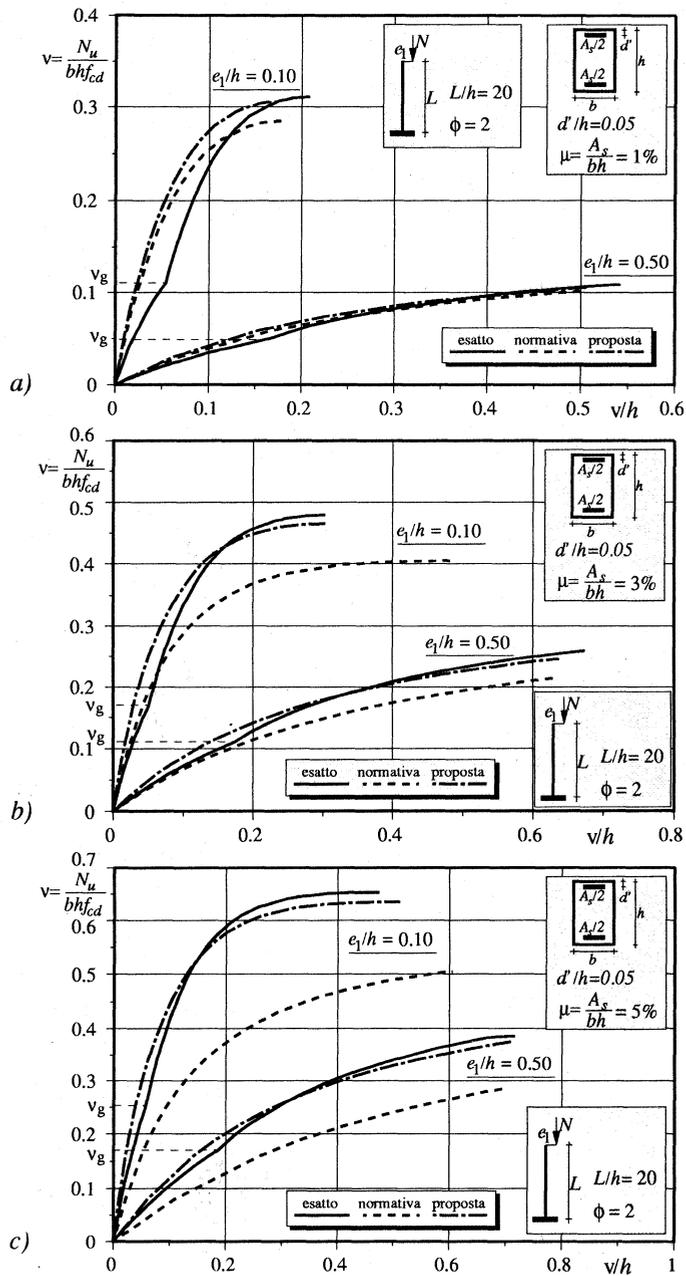


Fig. 6. - Valutazione del carico ultimo: a) $\mu = 1\%$, b) $\mu = 3\%$, c) $\mu = 5\%$.

rispetto al parametro $bh f_{cd}$ (f_{cd} è la resistenza di calcolo del calcestruzzo), e v/h lo spostamento in testa alla colonna, adimensionalizzato rispetto alla dimensione trasversale b della sezione retta.

Nelle figg. 6a, b, c sono riportate, per una colonna di assegnata snellezza L/b , sei gruppi di curve, relative ad eccentricità del I ordine $e/b = (0.10; 0.50)$ e percentuali totali di armatura $\mu = (1\%; 3\%; 5\%)$; tali curve sono ottenute con il metodo dell'eccentricità viscosa, sia nella formulazione originaria della normativa (curve tratto-punto) che in quella proposta (curve a tratteggio), e con la procedura numerica sopra indicata (curve continue).

Si osserva quanto segue:

a) il metodo dell'eccentricità viscosa nella forma originaria fornisce valori del carico ultimo sensibilmente più bassi rispetto alla metodologia «esatta», soprattutto quando la percentuale di armatura diventa importante; per $\mu = 1\%, 3\%, 5\%$ si hanno rispettivamente scarti dell'ordine dell'8%, 17%, 26%;

b) utilizzando la correzione proposta, invece, si ottengono valori abbastanza prossimi a quelli di riferimento, con scarti non superiori al 5%, pur mantenendo caratteristiche di conservatività; il margine di conservatività è maggiore per valori più grandi dell'eccentricità, per effetto della parzializzazione della sezione.

CONCLUSIONI

Si è pervenuti ad una formulazione modificata dell'eccentricità addizionale viscosa per colonne snelle, che tiene conto anche della presenza delle armature metalliche.

Tale modifica è necessaria al fine di una corretta valutazione del carico ultimo delle colonne snelle in regime viscoso, come è stato mostrato anche attraverso alcune applicazioni numeriche.

La formulazione proposta, peraltro, appare molto efficace, in quanto consente un notevole miglioramento dei risultati, pur conservando la stessa semplicità di applicazione del metodo originario.

BIBLIOGRAFIA

- [1] C.E.B.-F.I.P., *Model Code 1990*. First Draft, Bulletin d'information n. 195-196, Marzo 1990.
- [2] C.N.R., *Bollettino ufficiale, Istruzioni per la progettazione e l'esecuzione delle opere in cemento armato e cemento precompresso con il metodo semiprobabilistico agli stati limite*. 1982.
- [3] G. CREAZZA, *Verifica degli elementi in c.a. ed effetti del II ordine*. CISM, 1984.
- [4] C. FAELLA - E. NIGRO, *Influenza dell'armatura e del modello viscoso sull'eccentricità addizionale per la verifica degli elementi snelli in c.a.* Istituto di Ingegneria Civile, Università di Salerno, Rapp. n. 34, 1992.
- [5] C. FAELLA - E. NIGRO, *Comportamento di elementi snelli in c.a. in regime viscoso in presenza di carichi variabili*. Convegno su *Problemi di Meccanica dei Materiali e delle Strutture* promosso dal Gruppo di Meccanica dei Materiali e delle Strutture dell'AIMETA, Amalfi, 3-5 Giugno 1991.
- [6] C. FAELLA - E. NIGRO, *Effetto delle modalità di applicazione del carico sul comportamento di elementi snelli in c.a. in regime viscoso*. XX Congresso Nazionale AIAS, Palermo, 25-28 Settembre 1991.
- [7] F. LEVI, *L'instabilità dell'equilibrio in regime elastico-viscoso*. *Giornale del Genio Civile*, n. 2, 1950.

- [8] J. G. MACGREGOR, *Stability of Reinforced Concrete Building Frames*. In: *Concrete Framed Structures: Stability and Strength*. Elsevier Applied Science Publishers, 1986, Chapter 1.
- [9] F. MOLA, *Stato limite di instabilità - effetti della viscosità*. Atti del Corso di aggiornamento su «Progetto delle strutture in cemento armato con il metodo degli stati limite», Ed. CLUP, Milano 1983.
- [10] F. MOLA - I. IORI, *Influenza della viscosità sulla deformabilità di sezioni in cemento armato soggette a pressoflessione*. Studi e Ricerche, vol. 1, Corso di Perfezionamento per le Costruzioni in Cemento Armato F.lli Pesenti, Politecnico di Milano, 1979.
- [11] F. MOLA - M. A. PISANI, *L'influenza delle caratteristiche dei modelli reologici sulla capacità portante ultima di elementi snelli in c.a. sotto azioni di lunga durata*. Studi e Ricerche, vol. 10, Corso di Perfezionamento per le Costruzioni in Cemento Armato F.lli Pesenti, Politecnico di Milano, 1988.
- [12] S. P. TIMOSHENKO - J. M. GERE, *Theory of Elastic Stability*. Ed. McGraw-Hill, 2nd ed., New York 1961.

Istituto di Ingegneria Civile - Facoltà di Ingegneria
Università degli Studi di Salerno
Via Ponte Don Melillo - 84084 FISCIANO SA